УДК 667.64

С. Ю. Протасов, *к.т.н., доцент*
Черкаський державний технологічний університет,
б-р Шевченка, 460, м. Черкаси, 18006, Україна
protasov_sergey@mail.ru

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ АЛГОРИТМИ КОМП'ЮТЕРНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ У ВИГЛЯДІ ПЕРЕДАТНИХ ФУНКЦІЙ

Стаття присвячена розробці інтерполяційних алгоритмів комп'ютерної ідентифікації динамічних моделей у вигляді передатних функцій за перехідним процесом (характеристиці), отриманого експериментальним шляхом. Розроблені алгоритми, незважаючи на достатню ефективність застосування, можуть володіти чисельною нестійкістю ідентифікації. Причому ця нестійкість для алгоритму 1 зумовлена великою розмірністю апроксимуючого полінома, а для алгоритму 2 викликана використанням наближення за методом найменшого середньоквадратичного відхилення. Перевагою обох алгоритмів є повна збіжність перехідних процесів в області сталих значень. Істотною перевагою алгоритму 1 за умови стійкості обчислювального процесу є: забезпечення повної збіжності перехідних процесів в нулі, достатня збіжність ідентифікованого і змодельованого перехідних процесів на початковій ділянці їх динамічної зміни.

Ключові слова: *комп'ютерна ідентифікація, інтерполяція, передатна функція, динамічна модель.*

Постановка проблеми в загальному вигляді. Дослідження багатьох явищ та об'єктів шляхом побудови і вивчення їх математичних моделей знаходить все більше розповсюдження, охоплюючи різноманітні напрямки в технічних науках таких, як: електротехніка, зв'язок, будівельна механіка, акустика, гідравліка, пневматика, пневмоніка, автоматика, теплотехніка тощо [1]. Потреби практики визначають розвиток методів побудови моделей двох основних типів: гносеологічних та інформаційних. Моделі першого типу призначені для опису фізичної суті модельованих явищ, процесів або об'єктів, їх побудова тісно пов'язана з тією галуззю знань для якої вони будуються. На відміну від гносеологічних, інформаційні моделі можуть давати формальний опис, що встановлює зв'язок між вхідними і вихідними змінними, безпосередньо не пов'язаними з «фізикою» об'єкта, що обумовлює їх широке використання при вирішенні багатьох задач управління, прогнозування, контролю, дослідження динамічних процесів в техніці, біології, медицині, економіці, екології, сільському господарстві тощо.

Використання методів комп'ютерної ідентифікації динамічних моделей дозволяє вирішити задачі оперативного отримання адекватної інформаційної моделі практично для будь-якого класу об'єктів і систем, незалежно від ступеня їх складності [1–3].

Аналіз останніх досліджень та публікацій. На сьогоднішній день існує безліч алгоритмів ідентифікації, що забезпечують отримання динамічних моделей у формі різноманітних математичних залежностей [1; 2; 5]. Проте безперечним інтересом є методи ідентифікації передатних функцій динамічних систем.

Мета статті – розробка інтерполяційних алгоритмів комп'ютерної ідентифікації динамічних моделей у вигляді передатних функцій за перехідним процесом (характеристиці), отриманого експериментальним шляхом.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо задачу комп'ютерної ідентифікації передатної функції за перехідною характеристикою. Очевидно, що найбільш відповідними в сенсі простоти комп'ютерної реалізації є алгоритми ідентифікації, побудовані на базі алгоритмів апроксимації оригіналів в зручному для подальшого отримання зображення у вигляді [1–3]. Так, для апроксимації аперіодичних перехідних процесів є ефективними інтерполяційні алгоритми апроксимації динамічних характеристик об'єкта [1; 3].

Однією із зручних форм представлення деякого перехідного процесу об'єкта з самовирівнюванням (стійкої динамічної системи) є апроксимуючий вираз

$$\varphi(x) = a_0 + e^{-\lambda x}\sum_{i=1}^{n} a_i x^{i-1}, \qquad (1)$$

де λ, a_0, a_i – постійні коефіцієнти (λ – коефіцієнт загасання), застосування до якого перетворення Лапласа–Карсона дозволяє отримати передатну функцію у вигляді

$$W(p) = \sum_{i=0}^{n} h_i \frac{\lambda^i}{\left(p+\lambda\right)^i}, \qquad (2)$$

де

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n} h_i = a_0, \quad -\sum_{i=1}^{n} h_i = h_0 - a_0 = a_1, \\ &-\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}\sum_{j=i}^{n} h_j = a_i, \quad i = 2, 3, ..., n. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Вигляд виразу (1) дуже зручний для формування ядра інтегральної макромоделі [3], а форма передатної функції (2) є дробово-раціональним виразом, який ефективно реалізовується засобами MATLAB [4].

Визначення коефіцієнтів у виразі (1) можна виконувати різними способами [1], що призводить до різних алгоритмів ідентифікації.

<u>Алгоритм 1.</u> Спосіб інтерполяції для визначення коефіцієнтів у виразі (1) полягає в наступному. Задається значення λ>0, що призводить до системи

$$\varphi(x_j) = a_0 + e^{-\lambda x_j}\sum_{i=1}^{n} a_i x_j^{i-1}, \quad j = 1, 2, ..., n, \qquad (4)$$

розв'язок якої дає шукані коефіцієнти a_i. Тут x_j – дискретні точки задавання перехідного процесу, а a_0 визначається виразом

$$a_0 = \lim_{x\to\infty}\varphi(x). \qquad (5)$$

Істотним недоліком даного способу є пряма залежність розмірності системи (4) від кількості точок дискретизації перехідного процесу. Це приводить до необхідності розв'язання погано обумовленої системи лінійних рівнянь великої розмірності (що, у свою чергу, може привести до чисельної нестійкості даного алгоритму інтерполяції) і отримання передатної функції (2) у вигляді ряду з величезною кількістю членів.

<u>Алгоритм 2.</u> Варіаційний спосіб [1] визначення a_i, що дозволяє забезпечити певну незалежність кількості членів (1) від кількості точок інтерполяції m=n, полягає в наступному.

Вводиться функція

$$\varphi^*(x) = \frac{\varphi(x) - a_0}{e^{-\lambda x}} = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{i-1}, \qquad (6)$$

однозначно пов'язана з $\varphi(x)$. Задається значення λ>0; визначається a_0 з (5) і з умови найменшого середньоквадратичного відхилення будується апроксимуючий поліном

$$\varphi^*(x) = \frac{D_1}{D_2}, \qquad (7)$$

який є відношенням визначників

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & \dots & x^{n-1} \\ \gamma_0 & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ \gamma_1 & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n-1} & c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2(n-1)} \end{vmatrix}, \qquad (8)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2(n-1)} \end{vmatrix}, \qquad (9)$$

де

$$c_r = \sum_{j=1}^{m} x_j^r, \quad r = 0, 1, 2, ..., 2(n-1), \qquad (10)$$

$$\gamma_l = \sum_{j=1}^{m} x_j^l \varphi^*(x_j), \quad l = 0, 1, 2, ..., n-1, \qquad (11)$$

$j = 1, 2, \dots, m$ – номери точок інтерполяції.

Після розкриття визначників D_1, D_2 і побудови полінома (7) кожне значення a_i, $i = 1, 2, \dots, n$ є коефіцієнтом при x_{i-1}, тобто таким чином отримується функція $\varphi^*(x)$.

Побудувавши функцію $\varphi(x)$, оцінюють похибку наближення і при необхідності зменшують її шляхом нового розрахунку із збільшенням порядку полінома (1). Ефективним способом поліпшення отриманого наближення є уточнення коефіцієнта загасання, вибраного раніше довільно. Для цього зазвичай досить розв'язати систему, складену з m незалежних рівнянь

$$\varphi(x_j) - e^{-\lambda_j x_j}\sum_{i=1}^{n} a_i x_j^{i-1} - a_0 = 0, \qquad (12)$$

відносно λ_j, $j = \overline{1, m}$, і як розрахункове прийняти середнє значення

$$\lambda_{cp} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j. \qquad (13)$$

Використання цього значення у поєднанні з раніше визначеними a_i дозволяє, як правило, різко зменшити похибку апроксимації. Процес корегування можна продовжувати, якщо уточнити λ та заново обчислити коефіцієнти a_i за формулами (6)–(11) або навіть повторити цикл розрахунку a_i, λ за виразами (6)–(13) кілька разів.

Слід враховувати, що наявність похибки апроксимації перехідного процесу в нульовій точці зв'язаної з використанням умови мінімізації середньоквадратичного відхилення для побудови апроксимуючого полінома при великій кількості точок дискретизації, а також при достатньо великому a_0 може привести до нестійкої роботи даного алгоритму ідентифікації на початковій ділянці експериментальних характеристик. Ефективним виходом є попереднє приведення масштабу перехідного процесу до одиниці щодо сталого значення з подальшим зворотним пропорційним перетворенням координат.

Слабким місцем алгоритму 1 є велика розмірність апроксимуючого полінома, що приводить до вагомих труднощів при використанні комп'ютерних засобів моделювання. Перспективнішим для даної сфери є застосування алгоритму 2, який на відміну від попереднього дозволяє здійснювати ітераційне уточнення моделі. Проте достатньо серйозною проблемою при комп'ютерній реалізації цього алгоритму є комбінація методів символьної математики з обчисленнями (див. формули (7)–(11)), що створює певні труднощі у використанні для його реалізації сучасних моделюючих середовищ. Для розв'язання даної проблеми ефективною виявилася реалізація алгоритму 2 в моделюючій системі MATLAB завдяки використанню пакетів Symbolic Math і Extended Symbolic Math Toolboxes, які дозволяють користувачеві легко комбінувати чисельні і символьні розрахунки без втрати швидкості і точності обчислень [4].

З урахуванням ітеративності побудови динамічної моделі за допомогою алгоритму 2 і необхідності використання суб'єктивної оцінки адекватності отриманого результату користувачем, реалізований в моделюючому середовищі MATLAB програмний комплекс ідентифікації передатних функцій, який має структуру, зображену на рис. 1.

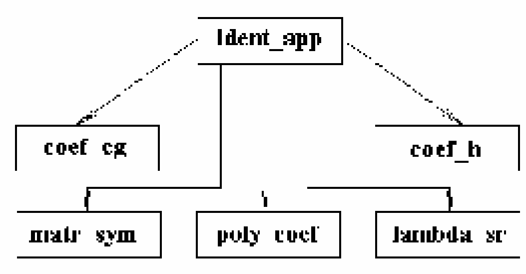

Рис. 1. Структура програмного комплексу ідентифікації передатних функцій за перехідними процесами

Програма ident_app є ядром комплексу і забезпечує діалоговий ітераційний процес ідентифікації передатної функції досліджуваного об'єкта або системи, яка використовує підпрограми: coef_cg для обчислення коефіцієнтів c_r, γ_l; matr_sym для формування матриць D_1 і D_2; poly_coef для формування полінома $\varphi^*(x)$ з подальшим виділенням коефіцієнтів a_i в чисельному вигляді; lambda_sr для уточнення коефіцієнта λ; coef_h для визначення коефіцієнтів h_i. Передатна функція (2), а також відповідний їй перехідний процес, обчислюються з використанням засобів для аналізу і синтезу лінійних стаціонарних систем Control System Toolbox, що входять до програмного середовища пакету MATLAB.

Як вже наголошувалося раніше процес ідентифікації побудований в діалоговому режимі. Користувачеві пропонується задати порядок n апроксимуючого полінома і (за бажанням) початкове наближення коефіцієнта загасання λ (за замовчуванням λ=1). Потім обчислюються коефіцієнти a_i апроксимуючого полінома (1) і будується передатна функція (2). На дисплей виводяться графіки ідентифікованих (позначені суцільною лінією) і змодельованих (позначені пунктирною лінією) перехідних процесів, а також абсолютна помилка ідентифікації. У діалоговому вікні пропонується уточнити коефіцієнт загасання λ після чого будується нова передатна функція (2) з виведенням відповідних графіків. В ітераційному режимі є можливість скорегувати параметри моделі a_i та отримати нові залежності результату ідентифікації. Користувач може повернутися на крок назад до попередньої моделі, якщо одержані параметри його з будь-якої причини не влаштовують.

Передатна функція, а також решта всіх параметрів моделі доступні в операційному середовищі MATLAB, що дозволяє отримувати еквівалентні математичні вирази у вигляді диференціальних та інтегральних рівнянь [1; 5].

На рис. 2, 3 приведені результати ідентифікації деякого перехідного процесу, отриманого експериментальним шляхом. Модель має наступні параметри: n=2; a_0=50; a_1=52; h_2=49; λ=1,004; h_0=2; h_1=3,2; h_2=48,8;

$$W(p) = -2 + \frac{3,2128}{p+1,004} + \frac{49,1912}{(p+1,004)^2}.$$

Слід зазначити, що приведена модель для даного перехідного процесу є оптимальною в сенсі використання для її отримання розглянутого алгоритму ідентифікації. Подальше уточнення параметрів a_i, λ, а також збільшення порядку n апроксимуючого полінома не дають істотного зменшення помилки ідентифікації і навіть можуть привести до її збільшення.

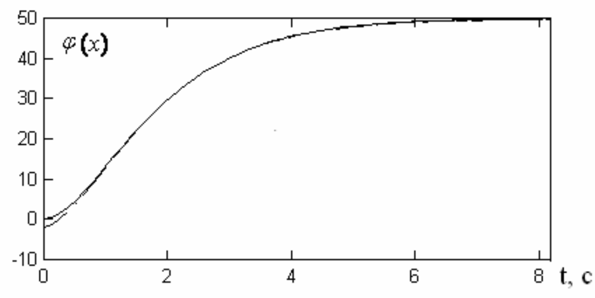

Рис. 2. Графіки ідентифіковуваного (суцільна лінія) і змодельованого (пунктирна лінія) перехідних процесів

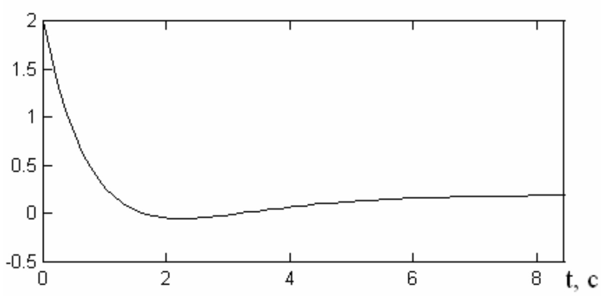

Рис. 3. Графік абсолютної помилки ідентифікації перехідного процесу

Висновок. Таким чином, розроблені інтерполяційні алгоритми комп'ютерної ідентифікації динамічних моделей у вигляді передатних функцій за перехідним процесом (характеристиці), отриманого експериментальним шляхом, мають достатню ефективність пов'язаною з повною збіжністю перехідних процесів в області сталих значень. Істотними перевагами алгоритму 1 за умови стійкості обчислювального процесу є: забезпечення повної збіжності перехідних процесів в нулі; достатня збіжність ідентифіковуваного і змодельованого перехідних процесів на початковій ділянці їх динамічної зміни. Слід зазначити, про можливість побудови інтерполяційних алгоритмів комп'ютерної ідентифікації динамічних моделей, що поєднують у собі переваги двох розглянутих алгоритмів вільних від їх недоліків.

Список літератури

1. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. – К. : Наук. думка, 1986. – 543 с.
2. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функцій / В. Л. Гончаров. – М. : Гостехиздат, 1954. – 316 с.
3. Ситник О. О. Інтерполяційний метод отримання передатної функції по перехідній характеристиці при формуванні ядер інтегральних макромоделей / О. О. Ситник, С. Ю. Протасов // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації : тези доп. VI Міжнар. наук.-практ. конф., 4–5 квітня 2014 р. – Кам'янець Подільський : Кам'янець Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка, 2014. – С. 149–152.
4. Дьяконов В. П. Математические пакеты расширения MATLAB : спец. справочник / В. П. Дьяконов, В. В. Круглов. – СПб. : Питер, 2001. – 480 с.
5. Верлань А. Ф. Методы и устройства интерпретации экспериментальных зависимостей при исследовании и контроле энергетических процессов / А. Ф. Верлань, Б. Б. Абдусатаров, А. А. Игнатченко, Н. А. Максимович. – К. : Наук. думка, 1993. – 208 с.

References

1. Verlan`, A. F., Syzykov, V. S. (1986) Integral equations: methods, algorithms and programs. Kyiv: Nauk. dumka, 543 p. [in Russian].
2. Goncharov, V. L. (1954) The theory of interpolation and approximation of functions. Moscow: Gostehizdat, 316 p. [in Russian].

3. Sytnik, A. A. and Protasov, S. Yu. (2014) Interpolation method of receiving the transfer function for the characterization of transition when forming cores integrated macromodels. The 5rd Interdisciplinary sci.-techn. conf. on the modern problems of mathematical modeling, forecasting and optimization. Kamyanec-Podilsky : Kamyanec-Podilsky National University of Ivan Ogienko, pp. 149–152 [in Ukrainian].
4. D`yakonov, V. P. and Kruglov, V. V. (2001) Mathematical packages expansion of MATLAB. Special reference. St. Petersburg: Piter, 480 p. [in Russian].
5. Verlan, A. F., Abdusatarov, B. B., Ignatchenko, A. A. and Maksimovich, N. A. (1993) Methods and interpretation of experimental device dependencies in the study and control of energy processes. Kyiv: Nauk. dumka, 208 p. [in Russian].

S. Yu. Protasov, *PhD., associate professor*
Cherkasy State Technological University
Shevchenko blvd, 460, Cherkasy, 18006, Ukraine
protasov_sergey@mail.ru

INTERPOLATION ALGORITHMS OF COMPUTER IDENTIFICATION OF DYNAMIC MODELS IN THE FORM OF TRANSFER FUNCTIONS

The article is devoted to developing by interpolation algorithms computer identification of dynamic models in the form of transfer functions for transitional process in spite of enough efficiency of application instability possess significant numerical identification. Moreover this instability for Algorithm 1 attributable to the high dimensionality of approximating polynomial (and, hence, the need to solve a system of linear algebraic equations of high dimensionality, often ill-conditioned matrix)as well the Algorithm 2 numerical instability is caused by using of approximation by the method of least mean square deviation (which may give very large approximation error in the initial portion of the transition process and eventually, can lead to complete the transition process model discrepancy identifiable transition process). However, a significant dignity of both algorithms is the complete coincidence of transient processes in the steady-state values. Another advantage of Algorithm 1provided the stability of the computing process is to ensure the complete concurrence of transient processes at zero and sufficient overlap identified and simulated transients in the initial part of their dynamic changes. It therefore seems necessary to consider the question of the construction of interpolation algorithms of computer identification of dynamic models that combine the advantages of the two considered in this paper algorithm and at the same time free from their drawbacks.

Keywords: *computer identification, interpolation, transfer function, dynamic model.*

Рецензенти: *В. В. Палагін, д.т.н., професор,*
М. П. Мусієнко, д.т.н., професор