ПРИЙОМ ПОРІВНЯННЯ І РОЗВИТОК ПІЗНАВАЛЬНОЇ САМОСТІЙНОСТІ МАЙБУТНІХ АБІТУРІЄНТІВ ПРИ ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИКИ

Н.А. Тарасенкова,
доктор педагог.наук, професор
Черкаський національний університет ім. Б.Хмельницького
А.М. Нестеренко,
старший викладач
Черкаський державний технологічний університет

У статті розкриваються особливості формування в учнів прийому порівняння при вивченні повторювального курсу математики.

В умовах розбудови національної системи освіти в Україні, виходу вітчизняної науки і техніки на світовий рівень, інтеграції у світову систему освіти постає проблема забезпечення високого рівня математичної підготовки підростаючого покоління, всебічного розвитку учнівської молоді, формування в учнів пізнавальної самостійності на основі глибоких і міцних знань.

Питання розвитку пізнавальної самостійності учнів старшого шкільного віку дістали широкого висвітлення у працях психологів (Д.М.Богоявленського, Л.С.Виготського, П.Я.Гальперіна, Г.С.Костюка, В.О.Крутецького, Н.О.Менчинської, В.В.Рибалки, С.Л.Рубінштейна, І.С.Якиманської), педагогів (А.М.Алексюка, І.Я.Лернера, М.І.Махмутова, В.А.Онищука, В.Ф.Паламарчук, Н.О.Половнікової, Г.І.Щукіної), математиків-методистів (Г.П.Бевза, М.І.Бурди, О.С.Дубинчук, М.І.Жалдака, М.Я.Ігнатенка, П.М.Ерднієва, В.Н.Осинської, О.І.Скафи, З.І.Слєпкань). Ними з’ясовано, що пізнавальна самостійність є засобом підвищення усвідомленості й дієвості знань, показником розумового розвитку тих, хто навчається; відмічені шляхи практичного розв’язання проблеми через організацію самостійних робіт, розв’язування різноманітних задач, формування прийомів пізнавальної діяльності, розвиток в учнів рефлексії у ході навчальної діяльності. Суттєвим результатом проведених досліджень є доведення того, що розвиток пізнавальної самостійності тих, хто навчається, є невідривною й органічною складовою підготовки творчої особистості.

Однак проблема розвитку пізнавальної самостійності такої категорії учнівської молоді, як майбутні абітурієнти, залишається недостатньо вивченою. Без перебільшення можна сказати, що зараз кожен вищий навчальний заклад працює з такою категорією учнів. Там, де вступні випробування передбачають іспит з математики, організуються різноманітні підготовчі курси, у багатьох вузах працюють підготовчі відділення тощо. Разом з тим, як показують наші дослідження, в організації математичної підготовки майбутніх абітурієнтів спостерігається ряд суттєвих недоліків, які стосуються усіх компонентів методичної системи.

У даній роботі переслідується мета розкрити специфіку прийому порівняння в його гносеологічному та процесуальному аспектах, а також особливості формування цього прийому у майбутніх абітурієнтів при вивченні повторювального курсу математики.

Згідно з тлумачним словником української мови [1], порівняння – це

„зіставлення одного з іншим з метою встановлення спільності або різниці”. З одного боку, порівняння є однією з операцій логічного мислення, а з іншого – це спосіб діяльності, що базується на розумовій операції порівняння.

У загальному розумінні спосіб діяльності – це система послідовних дій та операцій, виконання яких спричинює результат, що відповідає (адекватний) меті діяльності. Найфундаментальніші способи діяльності, що виходять із знання найбільш загальних закономірностей розвитку об’єктивної дійсності та специфічних закономірностей предмета, явища, процесу, що досліджується, називають методами [2]. Для позначення тих способів діяльності, що мають більш вузьке застосування та відрізняються конкретним призначенням, частіше використовують термін «спосіб».

Наприклад, у методиці математики розрізняють: загальні методи математики (аксіоматичний або дедуктивних міркувань, рівнянь і нерівностей, координатний, векторний тощо); методи доведення математичних тверджень, у яких реалізується дедуктивний метод; способи розв’язування певного класу задач (спосіб заміни змінних у розв’язуванні біквадратних рівнянь, спосіб використання допоміжного елемента в геометричних задачах тощо).

Поряд із термінами «метод», «спосіб» нерідко можна зустріти і такий термін, як «прийом». Це поняття увійшло до психологічної науки у зв’язку із розробкою проблем пам’яті, формування у школярів прийомів раціонального запам’ятовування, а також із дослідженням проблеми прийомів розумової діяльності. У дидактико-методичних дослідженнях активно розробляється проблема формування в учнів прийомів цілеспрямованої навчальної діяльності.

Раніше нами зазначалось [3], що поняття «прийом», хоча й визначається як система послідовних дій, але не є тотожним ні з поняттям «метод», ні з поняттям «спосіб». На відміну від методів і способів, прийом має не тільки об’єктивну (що не залежить від суб’єкта діяльності), але й суб’єктивну складову. Спосіб діяльності як об’єктивна даність лише в діяльності конкретного суб’єкта набуває значення прийому діяльності. Отже, способи діяльності виступають об’єктами засвоєння, але в учнів формуються саме прийоми діяльності.

У структурі способу діяльності виділяють змістовий (гносеологічний) та операційний (діяльнісний) компоненти. Змістовий компонент способу діяльності – це система знань, до складу якої входять:

- вихідні знання про об’єкт та його властивості;
- підсумкові знання про результати дій з об’єктом;
- знання про операційний склад способу діяльності (дії та операції, що у певній послідовності реалізують спосіб діяльності);
- знання про інтелектуальні й предметно-практичні засоби, які необхідні для виконання діяльності;
- система орієнтирів вибору даного способу діяльності із множини інших.

Операційний компонент способу діяльності пов’язаний із безпосереднім виконанням його дій.

Засвоєння учнями змістового компонента способу діяльності характеризується такими новоутвореннями в їх особистому досвіді, як знання, а опанування операційного компонента виражається навичками та вміннями.

Стосовно такого способу діяльності, як порівняння, необхідно зазчити наступне.

Згідно із загальними законами пізнання, аналіз реальності відбувається через аналіз її знаково-символьної форми. При цьому діяльність людини має подвійну детермінацію. Вона визначається як внутрішньою логікою предметної діяльності, так і логікою тієї семіотичної діяльності, засобами якої здійснюється пізнання.

Психологи стверджують, що процес навчання, здебільшого, будується на зоровому ряді, оскільки сприймання змісту та його первинне опрацювання учнями, як правило, розпочинається із зорового упізнавання (так званого візуального аналізу). Саме тут семіотичні особливості об'єктів порівняння нерідко відіграють вирішальну роль. Добре відомо, що зовнішня схожість двох математичних об'єктів (наприклад, рівняння і нерівності) нерідко спонукає учнів до неправомірного висновку про те, що такі об'єкти є ідентичними за змістом. А відтак виникає неусвідомлюване бажання перенести способи розв'язування рівнянь у сферу нерівностей. Нерідко такі дії є помилковими.

Змістовий аналіз, у результаті якого реалізується змістовий аспект порівняння об'єктів, є поєднанням двох процесів – візуального аналізу й смислового аналізу. За часовими характеристиками візуальний аналіз, як правило, випереджає смисловий аналіз. Але не рідкими є випадки, коли вони відбуваються одночасно. Все це необхідно враховувати у доборі організаційно-методичного забезпечення навчального процесу.

Формування у майбутніх абітурієнтів прийому порівняння необхідно розглядати як одне зі стрижневих завдань у справі розвитку їх пізнавальної самостійності. Дійсно, вміння порівнювати математичні об'єкти у змістовому й семіотичному аспектах виступає запорукою самостійного розпізнавання математичних ситуацій, вибору математичного апарату й способу розв'язування тієї чи іншої задачі, а також правильного їх застосування, причому без сторонньої допомоги.

У процесі математичної підготовки майбутніх абітурієнтів прийом порівняння можна формувати безпосередньо й опосередковано. У першому випадку учням мають бути повідомлені цілі діяльності, розкрито її змістовий компонент й організовано свідоме відпрацювання відповідних знань, навичок і вмінь. У другому випадку прийом порівняння формується у межах інших видів навчальної роботи, коли порівняння виступає не стільки метою діяльності, скільки її засобом. Обидва підходи до формування прийому порівняння можуть застосовуватися і під час викладу нового навчального матеріалу, і на етапі його закріплення й застосування. При цьому доцільно разом з учнями складати та використовувати порівняльні таблиці. Такі таблиці мають головне призначення в тому, щоб найбільш зручно представити хід та результати зіставлення окремих сторін або структурних елементів тих об'єктів, що порівнюються. Особливо корисні такі таблиці для порівняння таких об'єктів, в яких спостерігається певна аналогія. Наприклад, так зручно порівнювати властивості числових рівностей і нерівностей, особливості різних видів рівнянь і нерівностей тощо.

Розглянемо детальніше ці питання на прикладі теми „Ірраціональні рівняння і нерівності". Досвід експериментального навчання показує, що в організації вивчення цієї теми майбутніми абітурієнтами один із головних наголосів доцільно зробити на порівнянні змістових відмінностей у розв'язуванні семіотично тотожних ірраціональних рівнянь і нерівностей. При цьому тексти пояснень доцільно будувати як бінарні, а формулювання прикладів й задач – як n-арні [3]. Зокрема, виклад навчального матеріалу може бути наступними.

Спочатку треба пояснити майбутнім абітурієнтам, що розв'язуючи ірраціональне рівняння (нерівність), щонайперше треба з'ясувати, чи є дане рівняння (нерівність) визначеним (визначеною). Якщо область допустимих значень (ОДЗ) змінної є порожньою множиною, то рівняння (нерівність) не має розв'язків.

Приклад 1. Розв'язати рівняння і нерівність:

$$\sqrt{2-x}=\sqrt{x-3}. \qquad (1)$$

$$\sqrt{2-x}<\sqrt{x-3}. \qquad (2)$$

Розв'язання. ОДЗ змінної даного рівняння (1) і нерівності (2) визначається такою системою:

$$\begin{cases} 2-x\ge 0, \\ x-3\ge 0, \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} x\le 2, \\ x\ge 3. \end{cases}$$

Ця система не має розв'язків. Отже, ОДЗ змінної є порожньою множиною, відтак дані рівняння і нерівність не мають розв'язків.

***Відповідь*:** $\varnothing$; $\varnothing$.

У процесі розв'язування ірраціональних нерівностей, що містять корені парного степеня, так само, як і під час розв'язування ірраціональних рівнянь, буває корисним звернутися до деяких „арифметичних" міркувань. Однак, на відміну від ірраціональних рівнянь такого типу, розв'язуючи ірраціональну нерівність, необхідно не тільки оцінити знак виразу в її лівій і правій частинах, але й врахувати знак нерівності.

Приклад 2. Розв'язати рівняння і нерівності:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}+\sqrt{x-2}=-5, \quad (3)$$

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}+\sqrt{x-2}<-5, \quad (4)$$

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}+\sqrt{x-2}>-5. \qquad (5)$$

Розв'язання. Задане рівняння й дані нерівності є визначеними, оскільки ОДЗ їхньої змінної таке: $x\in[2;\infty)$.

Рівняння (3) та нерівність (4) розв'язків не мають. Дійсно, при $x\in[2;\infty)$:

$$\sqrt{x+1}>0, \quad \sqrt{x+4}>0, \quad \sqrt{x-2}\ge 0,$$

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}+\sqrt{x-2}>0.$$

Отже, ліва частина рівняння і нерівностей набуває лише додатних значень на ОДЗ змінної. Але такий вираз не може бути меншим за будь-яке від'ємне число чи дорівнювати йому.

А от нерівність (5) має розв'язки, тому що вираз, який є визначеним і набуває лише додатних значень, завжди більший за від'ємне число. Це означає, що будь-яке значення змінної з ОДЗ задовольняє дану нерівність. Отже, $x\in[2;\infty)$.

***Відповідь*:** $\varnothing$; $\varnothing$; $[2;\infty)$.

Застосування „арифметичних" міркувань можливе і під час розв'язування таких ірраціональних рівнянь (нерівностей), в яких ірраціональний вираз, що набуває невід'ємних (або недодатних) значень, порівнюється з нулем.

Приклад 3. Розв'язати рівняння і нерівності:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-1}=0; \qquad (6)$$

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-1}<0; \qquad (7)$$

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-1}\le 0; \qquad (8)$$

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-1}>0; \qquad (9)$$

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-1}\ge 0. \qquad (10)$$

Розв'язання. Рівняння й нерівності є визначеними: $x\in\{-1\}\cup[1;\infty)$.

Для лівої частини рівняння (6) є дві можливості – набувати додатних значень або дорівнювати нулю. У першому випадку рівняння стає суперечливим. Рівність можлива, якщо ліва частина рівняння набуває значення 0. У даному рівнянні це є можливим тоді, коли дорівнює нулю кожен із двох доданків, що міститься у лівій частині рівняння, а саме, при $x = -1$.

Нерівність (7) є суперечливою. Отже, вона не має розв'язків.

Нестрога нерівність (8) є сукупністю строгої нерівності відповідного знака і рівняння. Строга нерівність не має розв'язків, а рівняння задовольняє значення змінної – 1. Отже, нерівність (8) має розв'язок: $x = -1$.

Нерівність (9) справджується при всіх значеннях змінної з ОДЗ, крім – 1. Дійсно, якщо $x\in[1;\infty)$, то ліва частина нерівності додатна, а кожне додатне число є більшим за нуль. Якщо ж $x = -1$, то $\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-1}=0$. Однак вираз, що набуває значення 0, не може бути більшим за нуль. Отже, – 1 не є розв'язком даної нерівності.

Нерівність (10) задовольняють усі значення змінної з ОДЗ. При $x = -1$ справджується рівність, оскільки ліва частина нерівності набуває значення 0. При $x \in [1;\infty)$ справджується нерівність.

Відповідь: $\{-1\}$; $\varnothing$; $\{-1\}$; $[1;\infty)$; $\{-1\} \cup [1;\infty)$.

Зазначимо, що у наведених прикладах, й особливо в останньому, ми не випадково використали той самий ірраціональний вираз. Разом з відповідним рівнянням вони вичерпують усі можливі варіанти утворення ірраціонального рівняння й нерівностей, що мають однаковий вигляд. Такі рівняння й нерівності можна вважати семіотично (формально) тотожними. Однак, як ми побачили, зовнішня схожість рівняння і нерівностей ще зовсім не означає, що будуть схожими їхні розв'язки. Дещо відрізняється і хід міркувань у процесі розв'язування. На все це треба не лише звернути увагу майбутніх абітурієнтів, а й провести спеціальну роботу щодо усвідомлення учнями усіх тонких моментів.

Для того, щоб майбутнім абітурієнтам було легше побачити спільне і відмінне у семіотично тотожних рівнянні й нерівностях, зокрема тих, що розглядались в останньому прикладі, доцільно запропонувати учням занести отримані результати у таблицю (див. табл. 1). У свою чергу, за такою таблицею треба провести бесіду, під час якої важливо з'ясувати: чи є схожими вказані співвідношення; чому ОДЗ змінної у них одна й та сама; чому розв'язки в одних випадках є однаковими, а в інших – відрізняються, тощо.

Слідом за роботою із табл. 1 важливо використати іншу, вже заповнену таблицю. У цій таблиці бажано подати дані стосовно семіотично тотожних рівняння і нерівностей, з яких принаймні рівняння вже розв'язане учнями. Наприклад, у таблиці 2 наведено дані стосовно рівняння $\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}=0$ і нерівностей різних знаків, що мають з даним рівнянням схожий вигляд. Опрацьовуючи дані цієї таблиці, майбутнім абітурієнтам треба з'ясувати, як отримано вказаний розв'язок у кожному з випадків.

Таблиця 1

Назва співвідно шення	Співвідношення	ОДЗ змінної	Значення лівої частини	Розв'язок
Рівняння	$\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-1}=0$	$x \in \{-1\} \cup [1;\infty)$	невід'ємне ($\geq$ 0)	$\{-1\}$
Строга нерівність	$\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-1}<0$	$x \in \{-1\} \cup [1;\infty)$	невід'ємне ($\geq$ 0)	$\varnothing$
	$\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-1}>0$	$x \in \{-1\} \cup [1;\infty)$	невід'ємне ($\geq$ 0)	$[1;\infty)$
Нестрога нерівність	$\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-1}\leq 0$	$x \in \{-1\} \cup [1;\infty)$	невід'ємне ($\geq$ 0)	$\{-1\}$
	$\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-1}\geq 0$	$x \in \{-1\} \cup [1;\infty)$	невід'ємне ($\geq$ 0)	$\{-1\} \cup [1;\infty)$

Таблиця 2

Назва Співвідно-шення	Співвідношення	ОДЗ змінної	Значення лівої частини	Розв'язок
Рівняння	$\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}=0$	$x \in [-3;5]$	додатне (> 0)	$\varnothing$

Строга нерівність	$\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}<0$	$x\in[-3;5]$	додатне (> 0)	$\varnothing$
	$\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}>0$	$x\in[-3;5]$	додатне (> 0)	$[-3;5]$
Нестрога нерівність	$\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}\le 0$	$x\in[-3;5]$	додатне (> 0)	$\varnothing$
	$\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}\ge 0$	$x\in[-3;5]$	додатне (> 0)	$[-3;5]$

Після такої докладно проведеної роботи вже можна подавати учням для самостійного опрацювання навчальні тексти, що мають бінарну форму. Загалом, під час розв'язування ірраціональних рівнянь (нерівностей), доцільно дотримуватись такого порядку:

1) з'ясувати, чи є дане рівняння (нерівність) визначеним (визначеною), знайшовши ОДЗ його (її) змінної;

2) за допомогою "арифметичних" міркувань визначити, чи є рівняння (нерівність) несуперечливим (несуперечливою);

3) якщо ОДЗ змінної рівняння (нерівності) не є порожньою множиною й рівняння (нерівність) не має суперечності з "арифметичної" точки зору, тоді розв'язати рівняння (нерівність) одним із способів, які згадувалися;

4) з'ясувати, чи всі перетворення були рівносильними;

5) якщо принаймні один раз здійснено перехід до рівняння-наслідку (нерівності-наслідку), зробити перевірку отриманих значень змінної.

У ході експериментального навчання нами встановлено, що успішному розвитку пізнавальної самостійності майбутніх абітурієнтів сприяє дотримання наступних дидактичних умов:

- усвідомлення майбутніми абітурієнтами необхідності набуття, поглиблення і розширення знань;
- включення тих, хто навчається, в активну пізнавальну діяльність;
- реалізація в комплексі репродуктивної і продуктивної діяльності, які відповідають відтворювальному й творчому способам засвоєння знань, навичок і вмінь;
- забезпечення позитивного впливу на емоційний стан майбутніх абітурієнтів та їх працездатність у навчальному процесі;
- надання свободи вибору, можливостей для прояву самостійності, ініціативи, розкриття й самореалізації особистості.

Широке застосування порівняльних процедур у процесі навчання математики майбутніх абітурієнтів є одним із шляхів створення необхідних передумов для успішного формування і розвитку в них пізнавальної самостійності.

1. Івченко А.О. Тлумачний словник української мови. – Х.: Фоліо, 2001. – 540с.

2. Кондаков Н.И. Логический словарь. – М.: Наука, 1971. – 638 с.

3. Нестеренко А.М., Тарасенкова Н.А. Запобігання конфліктних аналогій у навчанні розв'язуванню алгебраїчних рівнянь і нерівностей слухачів підготовчих курсів // Тези Міжнар. конф. «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», Київ,2002р. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2002. – С. 85.

4. Нестеренко А.М., Тарасенкова Н.А., Ситник О.О. Ірраціональні рівняння, нерівності та їх системи: Практикум для організації самостійної довузівської підготовки / За ред. Н.А. Тарасенкової. – Черкаси: ЧДТУ, 2002. – 203 с.

5. Тарасенкова Н.А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики. – Черкаси: «Відлуння-Плюс», 2002. – 400 с.

Summary. *In the article the features of forming of the method of comparison in teaching additional mathematics of pupils are esteemed.*

Надійшла до редакції 20.08.2004 р.