5. *Хусаинов Н.Ш., Щербинин В.В.* Вопросы разработки информационно-алгоритмического обеспечения автоматической системы ближней радионавигации для перспективных высокоскоростных летательных аппаратов // Сборник докладов XV Международной научно-технической конференции "Радиолокация, навигация, связь" (RLNC*2009) в 3-х т. – Т. 3. Воронеж, 14-16 апреля 2009 г. – Воронеж: НПФ "САКВОЕЕ" ООО, 2009. – С. 1427-1423.
6. *Яценков В.С.* Основы спутниковой навигации. Системы GPS и ГЛОНАСС. – М.: Горячая линия-Телеком, 2005. – 272 с.
7. *Шебшаевич В.С., Дмитриев П.П., Иванцевич Н.В. и др.* Сетевые спутниковые радионавигационные система / Под ред. В.С. Шебшаевича. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1993. – 408 с.
8. *Барабанов О.О., Барабанова Л.П.* Математические задачи дальномерной навигации. – М.: Физматлит, 2007. – 272 с.
9. *Хусаинов Н.Ш., Кравченко П.П., Щербинин В.В., Шаповалов В.А.* Анализ составляющих ошибки навигации и наведения летательного аппарата, использующего для коррекции движения автономную систему ближней радионавигации // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 3 (104). – С. 55-59.
10. Операционная система ос2000 URL: http://www.niisi.ru/intro1.htm (дата обращения: 29.03.2012).

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Н.И. Витиска.

Лутай Владимир Николаевич – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: vlutay@mail.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634371746; кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ; к.т.н.; доцент.

Хусаинов Наиль Шавкятович – e-mail: KhussainovNSh@mopevm.tsure.ru; кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ; к.т.н.; доцент.

Lutay Vladimir Nikolaevich – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: vlutay@mail.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371746; the department of software engineering; cand. of eng. sc.; associate professor.

Khusainov Nail' Shavkyatovich – e-mail: KhussainovNSh@mopevm.tsure.ru; the department of software engineering; cand. of eng. sc.; associate professor.

УДК 681. 51

А.А. Сытник, С.Ю. Протасов, К.Н. Ключка

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ОПЕРАЦИОННЫЕ СПОСОБЫ АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассматриваются вопросы применения операционных методов для анализа линейных динамических систем с переменными параметрами. В своем большинстве они относятся к классу так называемых систем с медленно меняющимися параметрами, у которых коэффициенты дифференциального уравнения несущественно изменяют свои значения за время эффективной длительности импульсной переходной функции. Этот класс задач также свидетельствует о важности разработки аналитических и чисельных эффективных методов решения, особенно посредством получения такой исчерпывающей характеристики системы, как импульсная переходная функция. Предложенные операционные способы дают возможность получения аналитического представления решения дифференциальных уравнений и систем с переменными коэффициентами, а также есть одним из вариантов получения импульсной переходной функции.

Дифференциальное уравнение; интегральное уравнение Вольтерра; импульсная переходная функция; преобразование Лапласа.

A.A. Sytnik, S.Yu. Protasov, K.N. Klyuchka

CLOSE OPERATING METHODS OF ANALYSIS OF THE LINEAR DYNAMIC SYSTEMS WITH IN-OUT PARAMETERS

In the article the questions of application of operating methods are considerexamined for the analysis of the linear dynamic systems with in-out parameters. In the majority they behave to the class of the so called systems with slowly changing parameters at which the coefficients of differential equalization unimportant change the meaning in times of effective duration of impulsive transitional function. This class of tasks also testifies to importance of elaboration analytical and numerical of effective methods of decision, especially by means of receipt of such exhaustive description of the system, as an impulsive transitional function. It is offered operating methods enable receipt of analytical presentation of decision of differential equalizations and systems with variable coefficients, and also am one of variants of receipt of impulsive transitional function.

Differential equalization; integral equalization Vol'terra; impulsive transitional function; transformation of Laplasa.

Введение. Существует множество различных объектов и процессов практически во всех областях науки и техники, промышленности, которые отличаются тем, что их статические и динамические свойства изменяются неконтролируемым образом, а априорные сведения об этих изменениях и о самих физических, математических и расчетных моделях лишь в некоторой степени отвечают действительности. Необходимость исследований систем с переменными параметрами возникает не только в случаях, когда изменение параметров является принципиальным фактором функционирования системы, как например, в синхронном детекторе или фильтре с регулированием полосы пропускания, но и во множестве задач исследования систем при линеаризации исходной нелинейной системы относительно опорной траектории, при решении систем уравнений чувствительности выходных координат нелинейных систем к возмущениям параметров и начальных условий, и вообще во всех случаях, когда необходимо выяснить дополнительные эффекты, вызванные изменением параметров системы.

Постановка задачи. Одним из вариантов исследования систем с переменными параметрами является рассмотрение их как многорежимных, т.е. как набора систем с постоянными (“замороженными”) коэффициентами [1], причем возможность применения замороженных коэффициентов в исходном уравнении зависит от соотношений вида $|C_i(t+\Delta) - C_i(t)| < |C_i(t)|$ между коэффициентами C_i уравнения нестационарного звена с быстрым парциальным движением при стационарных остальных (Δ – период быстрых колебаний или время переходной функции в случае неколебательного звена) или соотношений типа $|C_i(t)| << |D_{1\ 2}(t)|$ между функциями, определяющими темп быстрых и медленных парциальных движений в многотемповой системе [2].

В работе рассматриваются вопросы применения операционных методов исследования линейных динамических систем с переменными параметрами. Случаи, когда возможно аналитическое решение системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, редки, поэтому разработка новых и усовершенствование известных методов приближенного решения систем с переменными параметрами имеет большое значение.

Рассмотрим возможности подхода для приближенного анализа нестационарных систем на примере динамической модели в виде дифференциального уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{j=0}^{m} b_j(t)\frac{d^j x(t)}{dt^j}, \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$y_0^{(k)}(0) = y^{(k)}(0), k = 0,1,...,n-1. \qquad (2)$$

Переменные (зависящие от времени) линейные дифференциальные операторы порядков n и m соответственно, осуществляющие зависимость между переменными y и x, запишем в виде

$$A^{(n,\, i)}(p,t) = a_n(t)\,p^n + a_{n-1}(t)\,p^{n-1} + ... + a_i(t)\,p^i \;, \qquad (3)$$

$$B^{(m,\, j)}(p,t) = b_m(t)\,p^m + b_{m-1}(t)\,p^{m-1} + ... + b_j(t)\,p^j \;, \qquad (4)$$

где вторым индексом в скобках помечена самая низкая ненулевая степень оператора p, $p=d/dt$ – традиционное символическое изображение операции дифференцирования условимся опускать второй индекс при $i, j=0$.

С использованием этих операторов система (1) записывается как

$$A^{(n)}(p,t)\,y(t) = B^{(m)}(p,t)\,x(t)\,. \qquad (5)$$

Система, в правой части которой нет дифференцирования входного сигнала, принимает вид

$$A^{(n)}(p,t)\,y(t) = E\,x(t)\,, \qquad (6)$$

где E – единичный оператор.

Изложение основного материала. Рассмотрим два способа расчетных формул для нахождения решения и импульсной переходной функции системы (1) с использованием преобразования Лапласа.

Первый способ. В коэффициентах дифференциального уравнения (1) выделим постоянную часть и представим в виде

$$a_i(t) = \overline{a}_i(t) + \tilde{a}_i(t)\,. \qquad (7)$$

В этом случае система (5) запишется в виде

$$\left(\overline{A}^{(n)}(p) + \tilde{A}^{(n)}(p,t)\right) y(t) = B^{(m)}(p,t)\,x(t)\,\cdot \qquad (8)$$

Обозначив

$$f(t) = \tilde{A}^{(n)}(p,t)\;y(t), \quad x_0(t) = B^{(m)}(p,t)\,x(t), \qquad (9)$$

получаем систему с постоянными коэффициентами $\overline{a}_i \;\; (i = 0, n)$

$$\overline{A}^{(n)}(p)\;y(t) = x_0(t) - f(t), \qquad (10)$$

в правой части которой действует малое (по сравнению с левой частью) возмущение $f(t)$. Малость возмущения предопределяет быструю сходимость метода последовательных приближений, используемого далее.

Преобразуя уравнение (10) по Лапласу по переменной t и разрешая его относительно искомой величины y, получим

$$Y(s) = \frac{X_0(s) - F(s)}{\overline{a}_n s^n + \overline{a}_{n-1} s^{n-1} + ... + \overline{a}_1 s + \overline{a}_0}\,\cdot \qquad (11)$$

Введя обозначение a=b, имеем

$$\Phi(s) = \frac{1}{\overline{a}_n s^n + \overline{a}_{n-1} s^{n-1} + ... + \overline{a}_1 s + \overline{a}_0} \qquad (12)$$

для передаточной функции системы (10), имеем

$$Y(s) = \Phi(s)\,X_0(s) - \Phi(s)\,F(s)\,. \qquad (13)$$

Применяя к (13) теорему о свертке функций, имеем

$$y(t)=\int_0^t \Phi(t-u)\,x_0(u)\,du-\int_0^t \Phi(t-u)\,f(u)\,du\,, \tag{14}$$

т.е. получено интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода, решение которого можно получить посредством метода последовательных приближений и представить в виде ряда

$$y(t)=\,y_0(t)-\,y_1(t)+\,y_2(t)-...,\tag{15}$$

который в данном случае быстро сходится. В (15)

$$y_0(t)=\int_0^t \Phi(t-u)\,x_0(u)\,du,\tag{16}$$

$$y_{k+1}(t)=\int_0^t \Phi(t-u)\,\tilde{A}^{(n)}(p,u)\,y_k(u)\,du.\tag{17}$$

Применяя преобразование Лапласа к (15)–(17), получим расчетные формулы

$$Y(s)=Y_0(s)\,-\,Y_1(s)+\,Y_2(s)-\ldots;\tag{18}$$

$$Y_0(s)=\Phi(s)\;X_0(s);\tag{19}$$

$$Y_{\mathrm{k}+1}\left(s\right)=F\left(s\right)\;L_{\mathrm{t}}\left\{\tilde{A}^{(n)}(p,t)\,y_k(t)\right\}.\tag{20}$$

Формула (19) дает изображение выходной координаты опорной системы при постоянных значениях параметров $\overline{a}_i$, $(i=0,n)$, формула (20) дает поправки, учитывающие изменение параметров во времени.

Второй способ. Исходное уравнение (1) представляется в виде инерционного

$$A^{(n)}(p,t)\;y=x_0\tag{21}$$

и форсирующего

$$x_0=B^{(m)}(p,t)\;x\tag{22}$$

звеньев, а коэффициенты $a_{\mathrm{i}}(t)$ аппроксимируются отрезками рядов Тейлора [3] в момент времени $t=\xi$:

$$a_i(t)=\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{da_i^k}{k!\,dt^k}\right]_{t=\xi}(t-\xi)^k\;=\sum_{k=1}^{N}\;a_{ik}\tau^k\,.\tag{23}$$

Тогда уравнение (21) принимает вид

$$\left(\sum_{k=1}^{N}\;a_{nk}\tau^k\right)\frac{d^n y}{d\tau^n}+\left(\sum_{k=1}^{N}\;a_{(n-1)k}\tau^k\right)\frac{d^{n-1}y}{d\tau^{n-1}}+...+\left(\sum_{k=1}^{N}\;a_{0k}\tau^k\right)y=x_0\,.\tag{24}$$

Преобразуя (24) по Лапласу относительно переменной τ и группируя члены, будем иметь

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\;a_{i0}s^i\right)Y(s)=X_0(s)-\sum_{k=1}^{N}\;(-1)^k\,\frac{d^k}{ds^k}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\;a_{ik}\,s^i\right)Y(s)\right].\tag{25}$$

В отличие от первого варианта, теперь решение представляется рядом

$$Y(s)=Y_0(s)\,+\,Y_1(s)\,+\,Y_2(s)\,+\ldots.\tag{26}$$

Подставляя (26) в (25) и положив

$$Y_0(s)=X_0(s)\,/\left(\sum_{i=1}^{n}\;a_{i0}s^i\right),\tag{27}$$

получим

$$Y_{k+1}(s) = Y_0(s)\left\{-\sum_{k=1}^{N} (-1)^k \frac{d^k}{ds^k}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, s^i\right)Y_k(s)\right]\right\}. \tag{28}$$

Формула (27) дает изображение выходной координаты при “замороженных” в момент ξ коэффициентах, а формула (28) – изображения добавочных членов вследствие изменения параметров.

Для определения импульсной реакции $g(t,\ \xi)$ в формулах (18)–(20), (26)–(28) надо положить $x_0=\delta(t-\xi)$, $X_0(s)=\exp(-s,\xi)$, $y=g(t,\xi)$, $Y_k(s)=G_k(s,\xi)$.

Аналогичные методика и расчетные формулы могут быть получены с использованием преобразования Меллина для частного случая общего уравнения (1), когда при аппроксимации коэффициентов $a_i(t)$ полиномами в правой части (23) $N=i$, а коэффициенты a_{ik} – постоянные величины [4].

Полезным примером приближенного метода является вариант метода припасовывания [5] для построения импульсной реакции на интервалах времени, на которых нет более чем трехкратного изменения и перемены знаков коэффициентов $a_i(t)$. Идея метода состоит в том, что, применяя к дифференциальному уравнению простую формулу

$$L_t\{f_1(t)\, f_2(t)\} \approx s\, F_1(s)\, F_2(s), \tag{29}$$

и оценку этого приближения из соотношения

$$L_t\{f_1(t)\, f_2(t)\} = s\, F_1(s)\, F_2(s) - f'\left(\frac{F_2(s)}{s} + \frac{dF_2(s)}{ds}\right), \tag{30}$$

точного для линейной функции $f_1(t)=f+f' t$, можно найти начальный участок выходного процесса системы до момента $t_к$, за пределами которого применение формулы (29) дает погрешность построения выше допустимой.

Во многих случаях элементы сложной системы описываются уравнениями не выше второго порядка, в связи с чем получение импульсных переходных функций для данных систем имеет большое практическое значение. Решение этой задачи [3] для уравнения второго порядка вида

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p(t)\frac{d\ y}{dt} + q(t)\,y = x, \tag{31}$$

сводится к решению уравнения

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + F(t)u = x(t)\ e^{\frac{1}{2}\int_0^t p(t)dt}, \quad F(t) = q(t) - \frac{1}{2}\frac{dp}{dt} - \frac{p^2}{4}, \tag{32}$$

которое, в свою очередь, сводится к припасовыванию решений дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 v_i}{dt^2} + (a_i + b_i t)\,v_i = 0,\ \ t_i < t < t_{i+1}, \tag{33}$$

с начальными условиями

$$v_i(t_i) = v_{i-1}(t_i), \quad \frac{dv_i}{dt}\Big|_{t=t_i} = \frac{dv_{i-1}}{dt}\Big|_{t=t_i}. \tag{34}$$

Коэффициенты a_i, b_i в (33) – это коэффициенты линейной аппроксимации функции $F(t)$ на интервале $[t_i\ ,\ t_{i+1}]$. В [6] описана методика и даны расчетные формулы для построения импульсной реакции системы по функциям Бесселя.

В случае, когда коэффициент $F(t)$ меняется незначительно относительно своего среднего (большого) значения так, что выполняется условие

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{[F'(t)]^2}{F^2(t)}+\frac{1}{4}\frac{F''(t)}{F^2(t)}\right] << 1$$

аппроксимации Бриллуина-Вентцеля-Крамера, приближенное значение импульсной переходной функции определяется формулой

$$g(t,\xi)=\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t pdt\right)}{\sqrt[4]{F(t)F(\xi)}}\sin\left(\int\limits_\xi^t\sqrt{F(t)}\,dt\right).$$

Вывод. Таким образом, рассмотренные способы приближенного анализа линейных динамических систем с переменными параметрами с использованием операционного метода дают возможность получения аналитического представления решения дифференциальных уравнений таких систем и, что особенно примечательно, есть одним из вариантов получения такой исчерпывающей характеристики системы, как импульсная переходная функция. Приведенные способы при исследовании систем должны сочетаться с численными методами, адаптированными к специфике задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Солодов А.В., Петров Ф.С.* Линейные автоматические системы с переменными параметрами. – М.: Наука, 1971. – 620 с.
2. *Шевелёв А.Г.* Основы линейной теории нестационарных систем автоматического управления. Мин. образ. и науки Украины НАУ. – Киев: Изд-во НАУ, 2004. – 265 с.
3. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – Киев: Наукова думка, 1986. – 160 с.
4. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961. – 524 с.
5. *Попов Е.П.* Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления: Учеб. пособие. – 2-е изд., стер. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 256 с.
6. *Кафтанова Ю.В.* Специальные функции математической физики. Научно-популярное издание. – Харьков: ЧП Изд-во «Новое слово», 2009. – 596 с.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор М.П. Мусиенко.

Сытник Александр Алексеевич – Черкасский государственный технологический университет; e-mail: sytnyk_a@mail.ru; 18006, Украина, Черкассы, бул. Шевченко, 460; тел.: +380472710092; кафедра электротехнических систем; зав. кафедрой; к.т.н.; доцент.

Протасов Сергей Юрьевич – e-mail: protasov_sergey@mail.ru; тел.: +380472730256; кафедра электротехнических систем; к.т.н.; старший преподаватель.

Ключка Константин Николаевич – e-mail: ux0cx@ukr.net; тел.: +380472730256; кафедра электротехнических систем; к.т.н.; доцент.

Sytnik Alexander Alexeevich – Cherkassy State Technological University; e-mail: sytnyk_a@mail.ru; 460, Shevchenko boulevard, Cherkassy, 18006, Ukraine; phone: +380472710092; the department of electrical engineering's systems; head the department; cand. of eng. sc.; associate professor.

Protasov Sergey Yuryevich – e-mail: protasov_sergey@mail.ru; phone: +380472730256; the department of electrical engineering's systems; cand. of eng. sc.; senior teacher.

Klyuchka Konstantin Nickolaevich – e-mail: ux0cx@ukr.net; phone: +380472730256; the department of electrical engineering's systems; cand. of eng. sc.; associate professor.