УДК 517.9

ВЗАИМОПРЕОБРАЗОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Протасов С.Ю.
Черкасский государственный технологический университет

У роботі розглядаються методи взаємного перетворення динамічних моделей нестаціонарних систем управління, які застосовуються в задачах аналізу, синтезу та ідентифікації сигналів.

Ключові слова: *динамічні моделі, нестаціонарні системи управління, аналіз, синтез.*

The methods of mutual transformation of dynamic models of nonstationary control systems, which are used in the tasks of analysis, synthesis and identification of signals, are considered in the article.

Key words: *dynamic models, nonstationary control systems, analysis, synthesis.*

Введение и постановка задачи. Комплексное математическое моделирование систем управления подразумевает решение как прямых задач анализа или расчета, так и обратных – задач синтеза, восстановления сигналов, идентификации. В связи с этим представляют интерес способы взаимного преобразования динамических моделей системы применительно к указанным задачам. Рассмотрим возможности эквивалентного преобразования дифференциальных уравнений нестационарных систем управления в интегральные зависимости (интегральные операторы или уравнения) на основе такой динамической характеристики системы, как импульсная переходная функция. Наличие такой взаимозависимости, допускающей формализованную её реализацию, позволяет выбирать тот или иной вид динамической модели в зависимости от вида решаемой задачи исследования нестационарной системы.

Импульсная переходная функция системы с переменными параметрами. Рассмотрим линейную нестационарную систему с сосредоточенными параметрами, описываемую дифференциальным уравнением

$$a_n(t)\frac{d^n x}{dt^n}+\mathbf{K}+a_1(t)\frac{dx}{dt}+a_0(t)x=b_n(t)\frac{d^n f}{dt^n}+\mathbf{K}+b_1(t)\frac{df}{dt}+b_0(t)f. \quad (1)$$

Импульсная переходная (весовая) функция $k(t,\tau)$ нестационарной системы представляет собой общее решение уравнения

$$D(p,t)=k(t,t)=M(p,t)d(t-t), \quad (2)$$

где $D(p,t)$ и $M(p,t)$ – операторные изображения составных частей уравнения (1) при нулевых начальных условиях в момент $t=\tau$. Функция $k(t,\tau)$ удовлетворяет условию физической осуществимости:

$$k(t,\tau)=0, \qquad t<\tau \quad (3)$$

и характеризует реакцию системы на воздействие в виде δ-функции.

Зная $k(t,\tau)$, можно найти изменение величины на выходе $x(t)$, вызываемое в нестационарной системе воздействием $f(t)$, при помощи формулы

$$x(t)=\int_0^t f(t)k(t,t)dt, \qquad t_0 \le t \le \infty, \quad (4)$$

называемой интегралом свертки. Выражение (4) может также быть определено как интегральный оператор Вольтерры [1].

Первый аргумент t представляет собой реальное время наблюдения, а второй аргумент τ характеризует момент, в который на вход системы приложено воздействие в виде δ-функции.

Предполагается, что коэффициенты дифференциального уравнения (1) меняются во времени t, начиная с какого-либо фиксированного момента t_0, который можно принять за начало отсчета в момент включения системы; в частности, можно принять, что $t_0=0$. При этом, очевидно, вид импульсной переходной функции системы $k(t,\tau)$ по первой переменной t зависит от момента τ подачи единичного импульса на ее вход, так как параметры системы изменяются во времени.

Понятие импульсной переходной функции тесно связано с понятием функции Грина, применяемым в классической теории линейных дифференциальных уравнений [2]. Функция Грина $G(t,\tau)$ так же, как и импульсная переходная функция $k(t,\tau)$, позволяет определить реакцию $x(t)$ нестационарной системы при любом воздействии $f(t)$. Действительно, имея в виду, что

$$u(t) = M(p,t)f(t), \quad (5)$$

можно написать

$$x(t)=\int_{t_0}^t G(t,t)M(p,t)f(t)dt. \quad (6)$$

Импульсная переходная функция последовательного соединения элементов. Предположим, что нестационарные динамические элементы (рис. 1) имеют импульсные переходные функции $w_1(t,t)$ и $w_2(t,t)$.

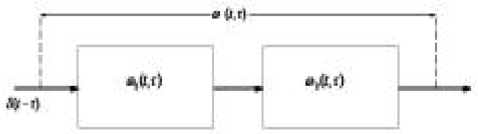


Рис. 1. Импульсная переходная функция последовательного соединения

Импульсная переходная функция последовательного соединения с учетом зависимостей

$$\left.\begin{aligned} w_1(t,t) &\equiv 0; \\ w_2(t,t) &\equiv 0 \end{aligned}\right. \quad t<\tau, \tag{7}$$

представляет собой

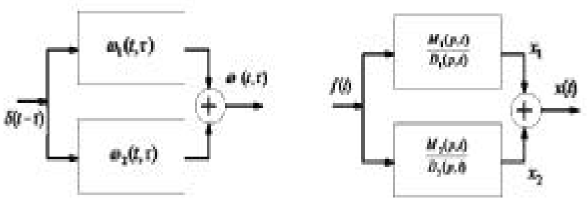
$$w(t,t) = \int_t^t w_2(t,t) w_1(h,t) dh. \tag{8}$$

Импульсная переходная функция последовательного соединения. Рассмотрим два дифференциальных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} D_1(p,t)x_1 &= M_1(p,t)f; \\ D_2(p,t)x_2 &= M_2(p,t)f \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

и предположим, что им соответствуют импульсные переходные функции $w_1(t,t)$ и $w_2(t,t)$. Если динамические элементы, описываемые, уравнениями (9), соединить параллельно (рис. 2, *а*), то импульсная переходная функция этого соединения равна сумме

$$\omega(t,\tau) = \omega_1(t,\tau) + \omega_2(t,\tau). \tag{10}$$



а) *б)*

Рис. 2. (а) Импульсная переходная функция параллельного соединения, (б) параллельное соединение операторов

Связь дифференциальных уравнений и импульсных переходных функций. Дифференциальные уравнения системы (рис. 3) имеют вид:

$$D_0(p,t)x = M_0(p,t)x_1; \tag{11}$$

$$D_d(p,t)x_1 = M_d(p,t)e_Z; \tag{12}$$

$$D_Z(p,t)z = M_Z(p,t)x; \tag{13}$$

$$e_z = e - z; \tag{14}$$

$$e = g - x. \tag{15}$$

Для этой системы с разомкнутой главной обратной связью и с воздействием в виде дельта-функции можно записать

$$e_Z(h) = d(h-t) - \int_t^h w(m,t) w_Z(h,m) dm \tag{16}$$

и

$$w(t,t) = \int_t^t e_Z(h) w_{0d}(t,h) dh, \tag{17}$$

где $w(t,t)$, $w_Z(t,t)$, $w_{0d}(t,t)$ – импульсные переходные функции соответственно системы на рис. 3 с разомкнутой главной обратной связью, параллельного корректирующего устройства, последовательного объекта и корректирующего устройства в прямой цепи, причем

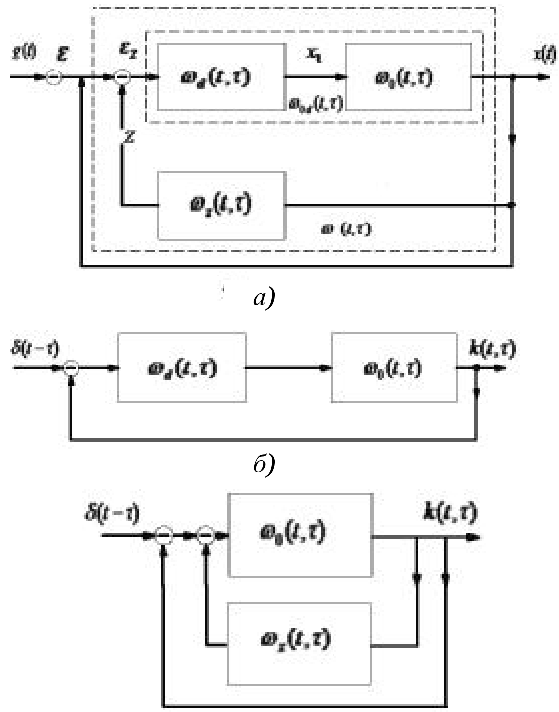
$$w_{0d}(t,t) = \int_t^t w_d(m,t) w_0(t,m) dm. \tag{18}$$

Подставляя уравнение (16) в (17), получим

$$w(t,t) = \int_t^t \left[d(h-t) - \int_t^h w(m,t) w_Z(h,m) dm \right] w_{0d}(t,h) dh$$

или

$$w(t,t) = w_{0d}(t,t) - \int_t^t w_{0d}(t,h) dh \int_t^h w(m,t) w_Z(h,m) dm. \tag{19}$$



а) *б)* *в)*

Рис. 3. Структурная схема системы автоматического регулирования с переменными параметрами: а) общий случай; б) не содержащая параллельного корректирующего устройства; в) не содержащая последовательного корректирующего устройства

Но согласно схеме на рис. 3, *а* или рис. 4

$$k(t,t) = w(t,t) - \int_t^t w(t,h)k(h,t)dh. \qquad (20)$$

Формулы (18)–(20) представляют собой интегральные уравнения Вольтерра и позволяют найти импульсную переходную функцию $k(t,\tau)$ замкнутой системы по импульсным переходным функциям w_0, w_d, w_Z входящих в ее состав динамических элементов.

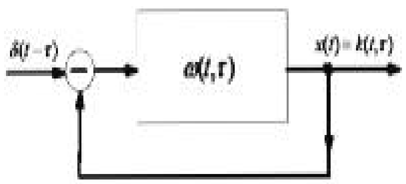


Рис. 4. Система с единичной обратной связью

Если положить, что $w_Z = 0$ и система (рис. 3, *а*) сводится к системе без параллельного корректирующего устройства (рис. 3, *б*), то

$$w(t,t) = w_{0d}(t,t) = \int_t^t w_d(m,t)w_0(t,m)dm. \qquad (21)$$

В операторной форме уравнения (11)–(15) можно записать

$$\left.\begin{aligned} x &= W_0 x_1; \\ x_1 &= W_d e_Z; \\ e_Z &= e - z; \\ e &= g - x. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Пользуясь правилами операторной алгебры, на основании первых четырех уравнений получим

$$x = \left[W_0 W_d (E + W_Z W_0 W_d)^{-1}\right] e \qquad (23)$$

или

$$x = We, \qquad (24)$$

где E – единичный оператор;

$$W = W_0 W_d (E + W_Z W_0 W_d)^{-1}. \qquad (25)$$

Точно так же на основании уравнения (24) и последнего из уравнений (22) получим

$$e = (E+W)^{-1} g. \qquad (26)$$

Подставляя уравнение (26) в (24), найдем

$$x = [W(E+W)^{-1}]g. \qquad (27)$$

Операторные уравнения (26) и (27) позволяют по заданным дифференциальным уравнениям динамических элементов W_0, W_d, W_Z найти дифференциальные уравнения соответственно для ошибки ε и для регулируемой переменной x.

Обозначим операторы, соответствующие дифференциальным уравнениям замкнутой системы, относительно ошибки e через Φ_e и относительно регулируемой переменной через Φ, т.е.

$$e = \Phi_e g; \qquad (28)$$

$$x = \Phi g. \qquad (29)$$

Сравнивая уравнения (26) и (27) с уравнениями (28) и (29), получим

$$\Phi_e = (E+W)^{-1}; \qquad (30)$$

$$\Phi = W(E+W)^{-1}. \qquad (31)$$

Формулы (30) и (31) по виду сходны с формулами для передаточных функций стационарных систем, но, в отличие от последних, действия над входящими в них операторами должны производиться на основе правил операторной, а не обычной алгебры.

В частном случае, когда W_Z=0, формула (25) сводится к виду:

$$W = W_0 W_d. \qquad (32)$$

Определение дифференциального уравнения по импульсной переходной. Импульсная переходная функция $k(t,\tau)$, соответствующая дифференциальному уравнению (1), имеет вид

$$k(t,t) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(t) a_i(t) + b_n(t) d(t-t) = k_1(t,t) + b_n(t) d(t-t). \qquad (33)$$

Рассмотрим обратную задачу, состоящую в определении дифференциального уравнения, т. е. в определении его коэффициентов $a_i(t)$, $b_i(t)$ по импульсной переходной функции, заданной в виде выражения (33). Данный вопрос имеет существенный интерес для синтеза корректирующих устройств. При использовании метода переходных функций он позволяет реализовать обратные динамические элементы, а при использовании метода операторов найти желаемый оператор или дифференциальное уравнение замкнутой системы.

Так как согласно выражению (33) функция $k(t,\tau)$ содержит n независимых решений $\Phi_i(t)$, то порядок уравнения равен n. Функции Φ_i являются решением однородного уравнения

$$D(p,t)x_0 = 0, \qquad (34)$$

поэтому

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(t) \frac{d^j \Phi_i}{dt^j} = 0, \qquad i = 0, 1, \mathbf{K}\, n. \qquad (35)$$

Таким образом, получено n уравнений с $n+1$ неизвестными. Полагая $a_n(t)$=1, можно найти остальные $a_j(t)$.

Для определения коэффициентов $b_j(t)$ предположим, что импульсная переходная функция, или функция Грина $G(t,\tau)$, соответствующая однородному уравнению (34), известна. Тогда решение искомого уравнения (1), согласно уравнению (6), определяется формулой

$$x(t)=\int_{t_0}^{t}G(t,h)\left[\sum_{j=0}^{n}b_j(h)\frac{d^j f}{dh^j}\right]dh. \qquad (36)$$

Но в то же время $x(t)$ выражается интегралом свертки вида (4). Приравнивая правые части выражений (4) и (36), получим

$$\int_{t_0}^{t}G(t,h)\left[\sum_{j=0}^{n}b_j(h)\frac{d^j f(h)}{dh^j}\right]dh=\int_{t_0}^{t}k(t,h)f(h)dh. \qquad (37)$$

Воздействуя на обе части уравнения (37) оператором $D(p,t)$ и имея в виду, что

$$D(p,t)G(t,h)=d(t-h),$$

получим

$$\sum_{j=0}^{n}b_i(t)\frac{d^j f}{dt^j}=\sum_{p=0}^{n}a_p(t)\frac{d^p}{dt^p}\left[\int_{t_0}^{t}k(t,h)f(h)dh\right]. \qquad (38)$$

Подставим в полученное равенство выражение для $k(t,\eta)$ в форме (33) и введем обозначение

$$x_0=b_n(t),$$

$$x_i(t)=\left.\frac{\partial^{i-1}k_1(t,t)}{\partial t^{i-1}}\right|_{t=t^-}=\left.\frac{\partial^{i-1}k(t,t)}{\partial t^{i-1}}\right|_{t=t^-}. \qquad (39)$$

Тогда для производных в правой части равенства (37) найдем

$$\frac{d^p}{dt^p}\left[\int_{t_0}^{t}k(t,h)fh)dh\right]=$$
$$=\int_{t_0}^{t}\frac{\partial^p}{\partial t^p}k_1(t,h)f(h)dh+\sum_{k=0}^{p}\frac{d^k}{dt^k}\left[x_{p-k}(t)f(t)\right],\quad p=0,1,\mathbf{K},n.$$

При этом получим

$$\sum_{j=0}^{n}b_j(t)\frac{d^j f}{dt^j}=\sum_{p=0}^{n}a_p(t)\int_{t_0}^{t}\frac{\partial^p}{\partial t^p}\left[k_1(t,h)\right]f(h)dh+$$
$$+\sum_{p=0}^{n}a_p(t)\sum_{k=0}^{p}\frac{d^k}{dt^k}\left[x_{p-k}(t)f(t)\right] \qquad (40)$$

Первый член в правой части выражения (40) равен нулю и

$$\frac{d^k}{dt^k}\left[x_{p-k}(t)f(t)\right]=\sum_{j=0}^{k}C_j^k\frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}}\left[x_{p-k}(t)\right]\frac{d^j f}{dt^j}. \qquad (41)$$

Поэтому вместо выражение (40) можно написать

$$\sum_{j=0}^{n}b_j(t)\frac{d^j f}{dt^j}=\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{k}C_j^k a_p(t)\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\left[x_{p-k}(t)\right]\frac{d^j f}{dt^j}, \qquad (42)$$

где

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{k}=\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=0}^{p}\sum_{k=j}^{p}=\sum_{j=0}^{n}\sum_{p=j}^{n}\sum_{j=k}^{p}. \qquad (43)$$

Учитывая соотношение (43), на основании (41) получим следующую окончательную формулу для определения коэффициентов $b_j(t)$:

$$b_j(t)=\sum_{p=j}^{n}C_j^k a_p(t)\frac{d^{k-j}\left[x_{p-k}(t)\right]}{dt^{k-j}},\quad j=0,1,\mathbf{K},n. \qquad (44)$$

При нахождении дифференциального уравнения или оператора $\Phi=\frac{M(p,t)}{D(p,t)}$, соответствующего заданной импульсной переходной функции, необходимо учитывать условие его физической реализуемости, которое заключается в том, что порядок дифференцирующего оператора $M(p,t)$ не может быть выше порядка интегрирующего оператора $D(p,t)$.

Пользуясь этим условием, в частности, легко показать, что разность порядков оператора Φ в случае синтеза последовательного корректирующего устройства (см. рис. 3) должна быть меньше разности порядков числителя и знаменателя оператора объекта W_0.

Заключение. Таким образом, использование описанных способов перехода от дифференциальных моделей к интегральным моделям позволяет получить ряд расчетных выражений для решения не только задач анализа, но и задач восстановления сигналов на входе системы при решении интегральных уравнений, задач синтеза корректирующих устройств, задач идентификации объектов по экспериментальным данным [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Д'Анжело Г. Линейные системы с переменными параметрами. Анализ и синтез. – М.: Машиностроение, 1974. – 288 с.
2. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980. – 350 с.
3. Верлань А.Ф., Москалюк С.С. Математическое моделирование непрерывных динамических систем. – К.: Наукова думка, 1988. – 288 с.

Протасов С.Ю., асистент кафедри електротехнічних систем, Черкаський державний технологічний університет.