

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет електронних технологій, автотранспорту та машинобудування

ВИЩА МАТЕМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для здобувачів освітнього ступеня “бакалавр” зі спеціальностей

F5, G3-G7, G9, G11, J8.

Черкаси

2026

УДК

В

*Затверджено Методичною радою ЧДТУ,
протокол № __/2025-2026 від __.__.20__ р.,
згідно з рішенням кафедри
фундаментальних дисциплін та прикладного
матеріалознавства,
протокол № __ від __.__.20__.*

Упорядники

Бутенко Т.І., к.т.н., доцент
Колінько С.О., к.ф.-м.н., доцент
Цибулін В.В., ст. викладач

Рецензент

Яценко І.В., д.т.н., професор

Вища математика: конспект лекцій для здобувачів освітнього ступеня “бакалавр” зі спеціальностей F5, G3-G7, G9, G11, J8. [Електронний ресурс] /
В [упоряд. : Т.І. Бутенко, С.О. Колінько, В.В. Цибулін; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси : ЧДТУ, 2026. – 110 с.

Конспект лекцій розроблено відповідно до навчальної програми дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальностей F5 Кібербезпека та захист інформації, G3 Електрична інженерія, G4 Енерговиробництво, G5 Електроніка, електронні комунікації, приладобудування та радіотехніка, G6 Інформаційно-вимірювальні технології, G7 Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка, G9 Прикладна механіка, G11 Машинобудування, J8 Автомобільний транспорт усіх форм навчання.

Подано теоретичні положення програмних питань лекційного курсу, наведено приклади розв’язування типових задач.

Для студентів та викладачів вищих технічних навчальних закладів.

Вища математика:
конспект лекцій для здобувачів освітнього ступеня “бакалавр”
зі спеціальностей F5, G3-G7, G9, G11, J8.

Упорядники:

Бутенко Тетяна Іванівна,
Колінько Сергій Олександрович,
Цибулін Валентин Вікторович

В авторській редакції.

© Т.І. Бутенко, С.О. Колінько, В.В. Цибулін, упорядкування, 2026

Зміст

ВСТУП	4
Змістовий модуль 1. Лінійна та векторна алгебра	5
1.1. Матриці. Розв’язування систем лінійних рівнянь	5
1.1.1. Матриці, дії над матрицями	5
1.1.2. Визначники	8
1.1.3. Ранг матриці	10
1.1.4. Обернена матриця. Матричні рівняння	12
1.1.5. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	14
1.2. Векторна алгебра	22
1.2.1. Вектори. Лінійні операції над векторами	22
1.2.2. Добуток векторів у звичайному просторі	26
Змістовий модуль 2. Аналітична геометрія	32
2.1. Пряма на площині	32
2.2. Площина у просторі	43
2.3. Пряма у просторі	49
Змістовий модуль 3. Вступ до математичного аналізу	58
3.1. Диференціальне числення функції однієї і багатьох змінних	58
3.1.1. Границя функції	58
3.1.2. Диференціальне числення функції однієї змінної	66
3.1.3. Диференціальне числення функції багатьох змінних	76
3.2. Інтегральне числення функції однієї змінної	81
3.2.1. Інтегральне числення функції однієї змінної. Невизначений інтеграл	81
3.2.2. Визначений інтеграл. Застосування визначеного інтеграла	91
Змістовий модуль 4 Диференціальні рівняння	101
4.1. Основні поняття і означення	101
4.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними	102
4.3. Однорідні диференціальні рівняння	104
4.4. Лінійні диференціальні рівняння. Рівняння Бернуллі	105
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	109

ВСТУП

Даний навчально-методичний посібник розроблено відповідно до навчальної програми дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальностей F5 Кібербезпека та захист інформації, G3 Електрична інженерія, G4 Енерговиробництво, G5 Електроніка, електронні комунікації, приладобудування та радіотехніка, G6 Інформаційно-вимірювальні технології, G7 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка, G9 Прикладна механіка, G11 Машинобудування, J8 Автомобільний транспорт першого року навчання.

До кожної з лекційних тем наведено теоретичний матеріал, який містить: означення понять, формулювання, приклади, що ілюструють або додатково пояснюють певні теоретичні положення. Матеріал лекцій добре структуровано, важливі моменти лекцій виділено, що дасть можливість студентам легко орієнтуватися у наданому навчальному матеріалі, швидко знаходити необхідну інформацію.

Матеріал посібника стане у нагоді студентам технічних спеціальностей у процесі підготовки до контрольних робіт та екзаменів, виконанні розрахунково-графічних робіт, самопідготовки до лекційних та практичних занять, для виконання завдань по темах, що виносяться на самостійне опрацювання.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

1.1. Матриці. Розв'язування систем лінійних рівнянь

1.1.1. Матриці. Дії над матрицями

Матрицею називається прямокутна таблиця чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

яка містить m рядків і n стовпців.

Матриця називається *квадратною*, якщо $m=n$. Число n , що дорівнює n , є її порядком. В загальному випадку матриця називається прямокутною (розмірів $m \times n$). Числа a_{ij} , що утворюють матрицю називаються її елементами. В запису a_{ij} перший індекс i означає номер рядка, а другий індекс j - номер стовпця.

Також використовують позначення матриці

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|$$

або скорочено $\|a_{ij}\| (i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n)$. Часто матрицю позначають однією великою буквою латинського алфавіту ($A, C, D \dots$).

Матриця, що складається з одного стовпця,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$$

називається матрицею-стовпцем.

Матриця, що складається з одного рядка $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$, називається матрицею-рядком.

Для квадратної матриці вводяться поняття головної та побічної діагоналей.

Головною називається діагональ, яку утворюють елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$,

побічною - діагональ, яку утворюють елементи $a_{n1}, a_{(n-1)2}, \dots, a_{1n}$.

Квадратна матриця, всі елементи якої, за винятком елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається діагональною:

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}.$$

Діагональна матриця, у якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, називається одиничною і позначається буквою E :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається нульовою і позначається буквою O :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Дві матриці називаються рівними, якщо вони мають однакові розміри і всі їх відповідні елементи збігаються.

Дії над матрицями

1) Додавання матриць

Сумою двох матриць A і B однакових розмірів $m \times n$ називається матриця $C=A+B$ тих же розмірів, елементи якої дорівнюють сумам відповідних елементів матриць A і B ,:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} (i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n).$$

Додавання матриць є операцією знаходження суми матриць.

Властивості операції додавання матриць:

- комутативна: $A+B=B+A$;
- асоціативна: $(A+B)+C=A+(B+C)$.

2) **Множення матриці на число, віднімання матриць**

Добутком матриці $A = \|a_{ij}\|$ розмірів $m \times n$ на число α називається матриця $C = \alpha A$ тих же розмірів, елементами якої є $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij} (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$.

Множення матриці на число є операцією знаходження добутку матриці на число.

Властивості множення матриці на число:

– *дистрибутивна властивість числового множника відносно суми матриць:* $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$;

– *дистрибутивна властивість матричного множника відносно суми чисел:* $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

– *асоціативна властивість:* $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

Різниця двох матриць однакових розмірів знаходиться як $A - B = A + (-1)B$.

3) **Множення матриць**

Операція множення двох матриць може бути виконана лише для узгоджених матриць.

Узгодженими називають такі матриці A і B , для яких справджується умова - кількість стовпців матриці A рівна кількості рядків матриці B .

Добутком матриці A розмірів $m \times n$ та матриці B розмірів $n \times p$ називається матриця $C = AB$ розмірів $m \times p$, елементи якої c_{ij} визначаються як сума добутків відповідних елементів i -го рядка матриці A і елементів j -го стовпця матриці B , тобто:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, p).$$

Множення матриць є операцією знаходження добутку матриць A і B .

Властивості операції множення матриць:

– *асоціативна властивість:* $(AB)C = A(BC)$;

– *дистрибутивна властивість першого множника:* $A(B+C) = AB + AC$;

– *дистрибутивна властивість другого множника:* $(A+B)C = AC + BC$.

В загальному випадку множення матриць не підлягає комутативній властивості.

Якщо $AB = BA$, то такі матриці є комутативними.

1.1.2. Визначники

Визначники другого та третього порядку та їх властивості

Розглянемо квадратну матрицю 2-го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Визначником (детермінантом) другого порядку, складеним з елементів цієї матриці A , називається число, що дорівнює $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, яке позначається:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Розглянемо квадратну матрицю 3-го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Детермінантом 3-го порядку, складеним із елементів цієї матриці A , називається число:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Вираз складений за таким правилом (правило трикутника): добуток елементів, розміщених вздовж головної діагоналі і два добутки елементів, що стоять у вершинах двох рівнобедрених трикутників із основами, паралельними головній діагоналі і з вершинами в протилежному куті, беруться із знаком плюс. Три добутки, що складені за тим же правилом, але відносно побічної діагоналі, беруться із знаком мінус:

Властивості детермінантів 2-го і 3-го порядку

Властивість 1. Величина детермінанта не зміниться, якщо замінити кожний його рядок стовпцем із тим же номером, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Властивість 2. Перестановка двох рядків (стовпців) детермінанта рівносильна множенню його на (-1):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Властивість 3. Детермінант, який має два однакових рядки (стовпці), дорівнює нулю.

Властивість 4. Множення всіх елементів одного стовпця (рядка) детермінанта на довільне число k рівносильне множенню детермінанта на це число:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Наслідок 1. Якщо всі елементи якогось рядка (стовпця) рівні нулю, то і детермінант дорівнює нулю.

Наслідок 2. Детермінант, в якому відповідні елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, дорівнює нулю.

Властивість 5. Якщо кожний елемент i -го рядка (i -го стовпця, де $i=1,2,3$) є сума двох доданків, то детермінант дорівнює сумі двох детермінантів, у першого з яких i -й рядок (i -й стовпець) складається з перших доданків, а у другого - з других; інші елементи усіх трьох детермінантів однакові.

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} + a'_{12} & a_{13} + a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{21} & a'_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Властивість 6. Величина детермінанта не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на один і той же множник.

Розклад визначника за елементами рядка або стовпця

Мінором елемента a_{ij} називається детермінант, порядок якого на одиницю менший порядку даного детермінанта, утворений з даного детермінанта викреслюванням i -го рядка і j -го стовпця, на перетині яких розміщений елемент a_{ij} . Мінор елемента a_{ij} позначається через Δ_{ij} .

Наприклад, для визначника

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ мінор елемента } a_{11} \text{ рівний } \Delta_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ мінор елемента } a_{22} \text{ рівний } \Delta_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається добуток мінора Δ_{ij} на величину $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}.$$

Наприклад, для визначника $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & -3 \end{vmatrix}$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \Delta_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-3 + 8) = -5.$$

Детермінант дорівнює сумі добутків елементів рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

Сума добутків елементів довільного рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

1.1.3. Ранг матриці

Матриця має ранг r , якщо серед її мінорів існує хоча б один мінор порядку r , відмінний від нуля, а всі мінори порядку $(r+1)$ і вищого рівні нулю або не існують.

Приклад.

Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Розв'язок:

оскільки матриця третього порядку, її ранг не може бути більшим трьох.

Визначник матриці:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

але існує мінор другого порядку $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$.

Ранг матриці A : $r(A)=2$.

Елементарними перетвореннями матриці називаються такі її перетворення:

- транспонування, тобто заміна кожного рядка стовпчиком з тим же номером і навпаки;
- перестановка двох рядків або двох стовпчиків;
- множення всіх елементів рядка або стовпчика на будь-яке число, відмінне від нуля;
- додавання до всіх елементів рядка або стовпчика відповідних елементів паралельного ряду, помноженого на одне і те ж число.

Матриці, одержані одна з другої елементарними перетвореннями, називаються еквівалентними. Еквівалентні матриці не рівні одна одній, але при елементарних перетвореннях матриці ранг не змінюється.

Приклад.

Обчислити ранг матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язок:

переставляємо місцями 1-й і 3-й стовпці матриці A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

До елементів 2-го рядка додаємо елементи 1-го рядка, а до 3-го рядка – елементи 1-го, помножені на (-5):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -15 & -9 \end{pmatrix}.$$

Елементи 2-го рядка множимо на 3 і додаємо до 3-го рядка:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця трапецієподібна, ранг матриці $r(A)=2$.

1.1.4. Обернена матриця. Матричні рівняння

Нехай A – квадратна матриця порядку n .

Квадратна матриця A^{-1} порядку n називається **оберненою** до матриці A , якщо $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, де E – одинична матриця порядку n .

Квадратна матриця A порядку n називається **особливою (виродженою)**, якщо її детермінант дорівнює нулю. Якщо $A \neq 0$, то A називається **неособливою (не виродженою)**.

Особливі матриці обернених матриць не мають. Кожна неособлива матриця має єдину обернену матрицю.

Якщо $|A| \neq 0$, то обернена матриця A^{-1} має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} ($i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n$) – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці A .

Рівність, що містить невідому матрицю, яка позначена буквою, називається **матричним рівнянням**.

Коренем матричного рівняння називається таке значення невідомої матриці, при якому це матричне рівняння перетворюється на вірну рівність.

Розв'язати матричне рівняння означає знайти усі його корені, або довести, що їх не існує. При розв'язуванні матричних рівнянь використовують такі їх властивості:

1) одночасне множення обох частин матричного рівняння на неособливу матрицю можливе або тільки справа, або тільки зліва;

2) множення матричного рівняння на обернену матрицю до матриць, що входять у рівняння, можливе або тільки справа, або тільки зліва.

Якщо A, B, C - відомі квадратні матриці, а X - невідома матриця першого степеня, тобто, над невідомою матрицею не виконується арифметична дія піднесення до степеня, то матричне рівняння називають **лінійним**.

Лінійні матричні рівняння можуть:

- 1) не мати розв'язків;
- 2) мати обмежену кількість розв'язків;
- 3) мати безліч розв'язків.

Надалі розглядаємо лише лінійні матричні рівняння.

Приклад.

Знайти невідому матрицю X у рівнянні $X \cdot A = B$, якщо

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язок:

Якщо матриця A неособлива, то існує обернена A^{-1} . Помноживши обидві сторони рівняння справа на A^{-1} знайдемо невідому матрицю X .

Знайдемо визначник матриці A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0.$$

Матриця A особлива, тому не існує оберненої матриці A^{-1} і дане матричне рівняння не має розв'язку.

Приклад.

Знайти невідому матрицю X із рівняння:

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок:

$$A \cdot X = B$$

$$X = A^{-1} \cdot B \text{ (матриця } A \text{ неособлива).}$$

Детермінант матриці A :

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Матриця, обернена до матриці A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5, A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3, A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -7, A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1, A_{32} = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -6, A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3, A_{33} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.1.5. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛР)

Системою m лінійних рівнянь з n невідомими називається система виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Сталі множники a_{ij} ($i=1,2,\dots,m$; $j=1,2,\dots,n$) біля невідомих називаються коефіцієнтами, а числа b_i – вільними членами системи.

Система рівнянь називається *однорідною*, якщо всі вільні члени системи дорівнюють нулю. Система рівнянь називається *неоднорідною*, якщо хоча б один із вільних членів не рівний нулю.

Упорядкований набір чисел називається *розв'язком* системи, якщо при підстановці цих чисел замість невідомих усі рівняння системи перетворюються на тотожності.

СЛР називають *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісна СЛР називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок і *невизначеною*, якщо вона має більше ніж один розв'язок.

Матричний запис СЛР та їх розв'язання

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Основна матриця СЛР:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Матриця стовпець невідомих СЛР: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

Матриця стовпець вільних членів СЛР: $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$

Матрична форма СЛР:

$$A \cdot X = B.$$

Отже,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Якщо $|A| \neq 0$, то СЛР розв'язується як матричне рівняння.

Приклад.

Розв'язати СЛР матричним методом:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 36 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 13 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

Розв'язок:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 36 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2, A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2, A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 36 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -98 \\ -86 \\ -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24,5 \\ -21,5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -24,5; x_2 = -21,5; x_3 = 10.$$

Метод Крамера розв'язання СЛР

Визначник основної матриці можна записати як:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(j-1)} & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Стовпцем вільних членів замінимо j-тий стовпець у визначнику:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(j-1)} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(j-1)} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(j-1)} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Правило Крамера:

якщо визначник основної матриці СЛР відмінний від нуля, то ця система має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j = 1, 2, \dots, n$$

Приклад.

Розв'язати СЛР методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Розв'язок:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 1 - 1 - 1 + 4 = 5 \neq 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1.$$

Метод Гаусса

Метод Гаусса є універсальним методом розв'язування СЛР. Переваги методу:

- 1) найменш трудомісткий (особливо для систем великих розмірностей);
- 2) дозволяє завжди встановлювати сумісність системи та розв'язувати як визначені, так і невизначені системи (метод Крамера та матричний метод

можна застосовувати лише коли і тільки для СЛР з однаковою кількістю рівнянь та невідомих).

Метод Гаусса – це метод послідовного виключення невідомих шляхом елементарних перетворень системи (множення рядка на число, не рівне нулю, додавання одного рядка до іншого, перестановка рядків, викреслювання або дописування ненульового рядка). Доведено, що елементарні перетворення системи множину розв’язків системи не змінюють.

При розв’язуванні СЛР методом Гаусса перетворення виконують не над самою системою, а над її розширеною матрицею:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \Rightarrow \tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_m \end{array} \right)$$

$\tilde{A}$ містить у собі всю інформацію про СЛР. Будь-якій СЛР можна поставити у відповідність її розширену матрицю. І навпаки: будь-якій матриці, що містить більше одного стовпця, можна поставити у відповідність СЛР. Використання розширеної матриці зменшує об’єм записів (не потрібно писати символи арифметичних операцій, змінні, символи рівності), тому алгоритм методу Гаусса запишемо в термінах розширеної матриці.

Метод Гаусса складається з двох етапів: «прямий хід» та «зворотній хід».

Розглянемо перший крок прямого ходу методу Гаусса:

1. Якщо $a_{11} = 0$, то переставимо рядки так, щоб цей елемент був відмінний від нуля (оскільки в системі присутня змінна x_1 , то в першому стовпчику існує ненульовий елемент; він має опинитися в позиції a_{11}).

2. Помножимо перший рядок на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ та додамо до другого рядка, потім на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ та додамо до третього і т.д. $(m-1)$ раз. Дістанемо матрицю виду

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} & b'_m \end{array} \right)$$

Другий крок полягає у повторенні наведених вище двох пунктів для частини матриці без першого рядка та лідируючих нульових стовпчиків.

На третьому кроці з розгляду виключається третій рядок і т.д.

Прямий хід методу Гаусса завершується, коли матриця набуває трапецієподібного або трикутного вигляду.

У випадку отримання трапецієподібної матриці можливі два випадки:

1. Якщо в отриманій матриці хоча б один з елементів $b_i \neq 0$, тобто міститься рядок виду $(00 \dots 0000|b_k)$, то це означає, що в перетвореній системі рівнянь міститься рівняння виду

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_1 = b_k, \text{ де } b_k \neq 0.$$

Таке рівняння розв'язку не має, отже і вся система розв'язку не має. Тобто СЛР є не сумісною.

Приклад.

Розв'язати СЛР методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\cdot(-2) \\ +\swarrow}} \xrightarrow{\substack{\cdot(-1) \\ +\swarrow}} \xrightarrow{\cdot 1} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\cdot(-1) \\ +\swarrow}} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

СЛР розв'язку не має.

2. Якщо в отриманій матриці всі елементи $b_i=0$, то система має розв'язки. Щоб знайти ці розв'язки, потрібно записати СЛР, що відповідає матриці. В отриманій системі невідомі, з яких починаються рядки, називають

базисними невідомими, а всі інші – вільними невідомими. Відповідно зворотньому ходу методу Гаусса, піднімаючись по СЛР знизу вгору, виражають базисні невідомі через вільні. Розв’язок системи запишеться у вигляді рівностей, що пов’язують між собою базисні невідомі з вільними. Вільні невідомі можуть набувати різних значень, тому розв’язком системи щоразу буде інший набір чисел.

Приклад.

Розв’язати СЛР методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_4 = -10 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & -4 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\cdot(-2) \\ +\swarrow}} \xrightarrow{\substack{\cdot(-1) \\ +\swarrow}} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & -3 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{+ \swarrow} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & -6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -3, \\ -x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 7. \end{cases}$$

СЛР має безліч розв’язків, x_1 та x_2 – базисні невідомі, x_3 та x_4 – вільні невідомі.

Базисні невідомі виразимо через вільні:

$$x_2 = -7 - 6x_3 + 3x_4$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -3 \Rightarrow$$

$$x_1 = -3 + x_2 - x_3 + x_4 = -3 - 7 - 6x_3 + 3x_4 - x_3 + x_4 \Rightarrow$$

$$x_1 = -10 - 7x_3 + 2x_4$$

$$\text{Розв’язки СЛР: } \begin{cases} x_1 = -10 - 7x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -7 - 6x_3 + 3x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

Якщо в результаті прямого ходу методу Гаусса отримуємо матрицю трикутного вигляду, то система має один розв’язок, який отримуємо зворотнім ходом методу.

Приклад.

Розв'язати систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5 \\ 7x_1 + x_2 - 2x_3 = 12 \end{cases}$$

Розв'язок:

розширена матриця СЛР:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -5 \\ 7 & 1 & -2 & 12 \end{array} \right).$$

Прямий хід методу Гаусса:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -5 \\ 7 & 1 & -2 & 12 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -2 & 12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 1 & 15 & -16 & 47 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Матриця набула трикутного вигляду, отже, вона сумісна і має єдиний розв'язок.

Записуємо СЛР за одержаною матрицею:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5 \\ 5x_2 - 5x_3 = 15 \\ -x_3 = 2 \end{cases}$$

Розв'язок системи:

$$x_3 = -2$$

$$x_2 = 3 + x_3 = 1$$

$$x_1 = -5 + 2x_2 - 2x_3 = 1$$

1.2. Векторна алгебра

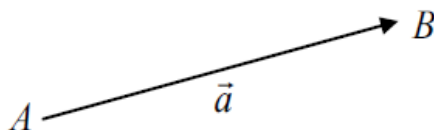
1.2.1. Вектори. Лінійні операції над векторами

Скалярні та векторні величини

Фізичні величини, які використовуються для кількісної характеристики фізичних явищ і об'єктів, поділяються на скалярні і векторні величини.

Скалярні величини визначаються лише числовим значенням (об'єм, густина, температура тощо). Деякі фізичні величини, крім числового значення, мають напрям (швидкість, імпульс, сила, напруженість електростатичного поля, індукція магнітного поля тощо). Такі величини називають *векторними*.

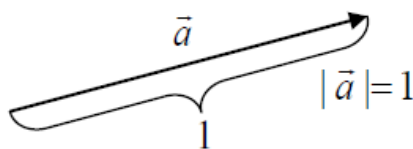
Вектором називається напрямлений відрізок AB , якщо т. A є початковою, а т. B – кінцевою і позначається $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$:



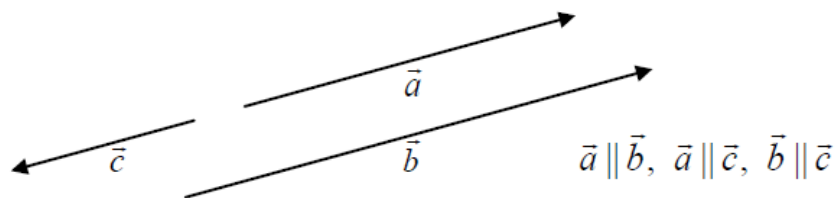
Довжина відрізка AB називається *модулем* або *довжиною* вектора $\overrightarrow{AB}$ і позначається $|\overrightarrow{AB}|$.

Якщо початок і кінець вектора збігаються, то вектор називається *нульовим* і позначається $\vec{0}$.

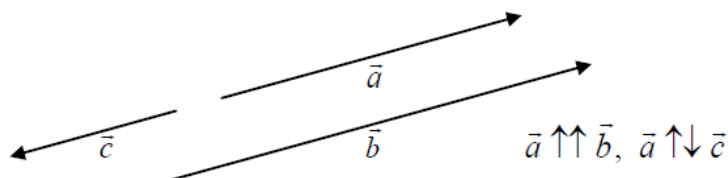
Вектор називається *одиничним*, якщо його довжина дорівнює одиниці.



Вектори називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій, або на паралельних прямих.

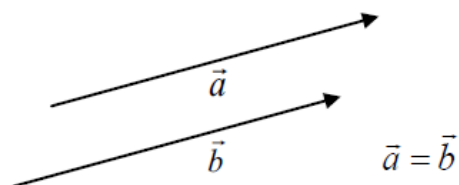


Вектори однакового напрямку називають *співнаправленими*, а протилежного напрямку – *протилежно напрямленими*.

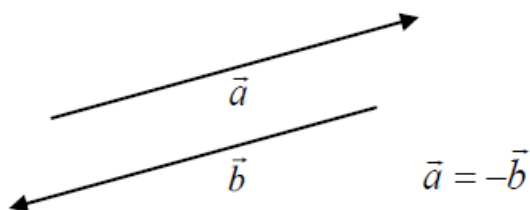


Колінеарні вектори є або співнаправленими, або протилежно напрямленими.

Співнаправлені вектори однакової довжини називаються *рівними*.



Протилежно напрямлені вектори однакової довжини називаються *протилежними*.

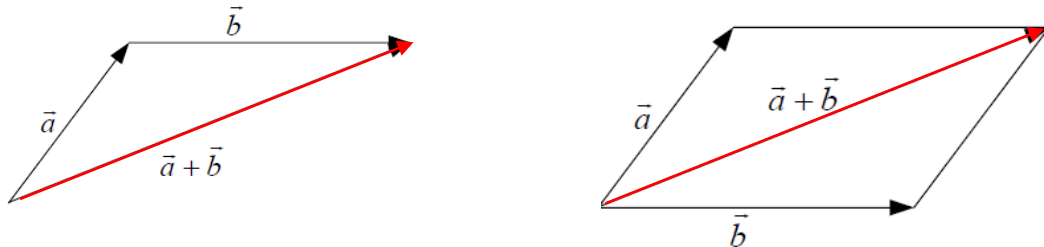


Вектори називаються *компланарними*, якщо вони лежать на одній площині або на паралельних площинах.

Лінійні операції над векторами

У фізиці доволі часто використовується принцип суперпозиції і виникає потреба знаходити суму векторів. Вектори можна додавати та множити на дійсне число.

Додавання векторів. Вектори можна додавати за правилами геометричного (векторного) додавання. При додаванні векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ отримаємо вектор $\vec{c}$. Тобто, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. Для визначення напрямку і довжини вектора $\vec{c}$ користуються правилами трикутника чи паралелограма:

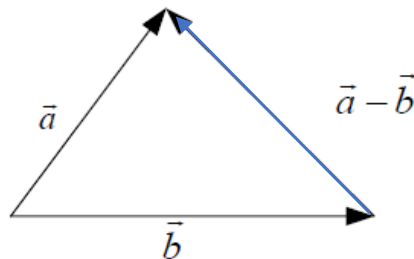


Якщо вектори мають спільний початок, то для їх додавання можна побудувати на цих векторах паралелограм, діагональ якого буде вектором суми векторів. Якщо ці вектори не мають спільного початку, то їх можна за допомогою паралельного перенесення привести до спільного початку.

Множення вектора на число. Добутком $\alpha\vec{a} = \vec{b}$ (або $\vec{a}\alpha$) ненульового вектора $\vec{a}$ на ненульове дійсне число α називається вектор $\vec{b}$, модуль якого дорівнює добутку модуля вектора $\vec{a}$ на модуль числа α , тобто $|\alpha\vec{a}| = |\vec{a}\alpha| = |\vec{a}||\alpha|$, і співнапрямлений з $\vec{a}$, якщо $\alpha > 0$, та протилежно напрямлений з $\vec{a}$, якщо $\alpha < 0$. Якщо $\alpha=0$ або $\vec{a} = 0$, то $\alpha\vec{a} = 0$.

Віднімання векторів. Різницею $\vec{a} - \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, перший із яких називається зменшуваним, а другий – від’ємником, називається вектор

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



Базис. Афінна система координат. Розкладення вектора по базису

Базисом простору називають систему векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n$, які є лінійно незалежними, за умови, що кожний вектор простору $\vec{a}$ можна розкласти в лінійну комбінацію векторів даної системи :

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n.$$

Коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ називають *координатами* вектора $\vec{a}$ в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n$, що записують так: $\vec{a} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ називають суму добутків цих векторів на довільні дійсні числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$:

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$$

Лінійно незалежними є вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ у випадку, коли їх лінійна комбінація з числами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ рівна нулю лише за умови, коли всі числа дорівнюють нулю.

Базис на площині утворюють два неколінеарні вектори, базис у просторі утворюють три некомпланарні вектори.

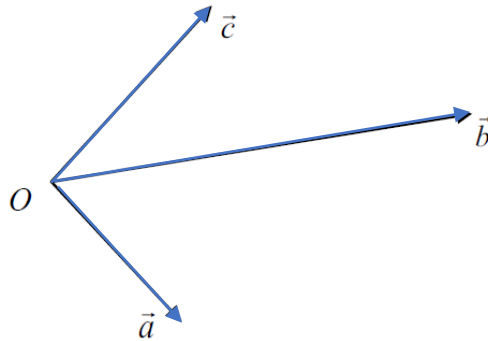
Розглянемо довільний базис у просторі – довільну трійку некомпланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. За визначенням базису для вектора $\vec{d}$ мають бути такі дійсні числа α, β, γ , що виконуватиметься рівність :

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$$

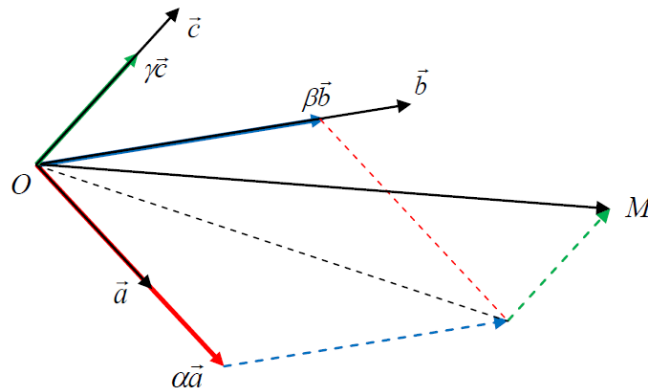
Ця рівність називається розкладом вектора $\vec{d}$ за базисом $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Числа α, β, γ є координатами вектора: $\vec{d} (\alpha, \beta, \gamma)$, які визначаються однозначно відносно даного базису.

При додаванні двох векторів їх координати (відносно базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$) додаються. При множенні вектора на будь-яке число α всі його координати помножуються на це число. У випадку площини мають місце аналогічні твердження.

Афінна система координат в просторі визначається заданням базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ і деякої точки O , яку називають початком координат.



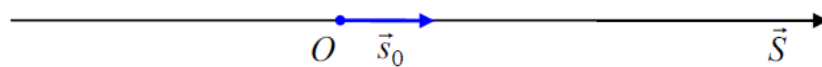
Афінними координатами довільної точки M називаються координати вектора $\vec{OM}$ у даному базисі $M(\alpha, \beta, \gamma)$. Вектор $\vec{OM}$ є радіус-вектором точки:



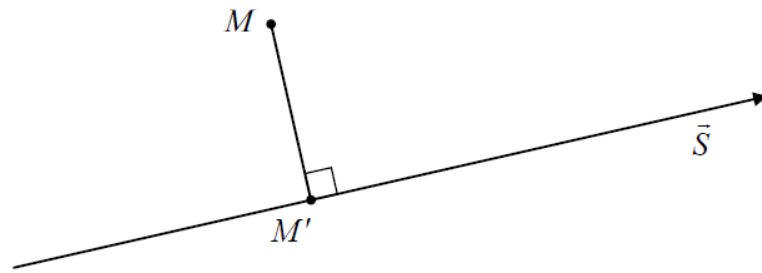
1.2.2. Добуток векторів у звичайному просторі

Складова вектора вздовж осі та проекція вектора на вісь

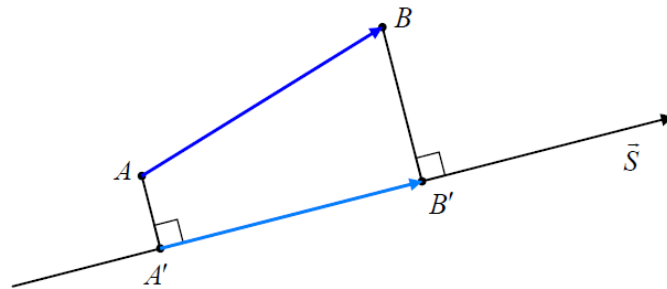
Пряма називається *віссю* $\vec{S}$, якщо на ній вибрано додатний напрям і одиницю довжини $\vec{s}_0$ (орт осі).



Проекцією точки M на вісь $\vec{S}$ називають основу перпендикуляра (точку M'), опущеного з точки M на дану вісь.



Складовою вектора $\overrightarrow{AB}$ вздовж даної осі називають вектор $\overrightarrow{A'B'}$, який утворений проекціями точок A і B на вісь.

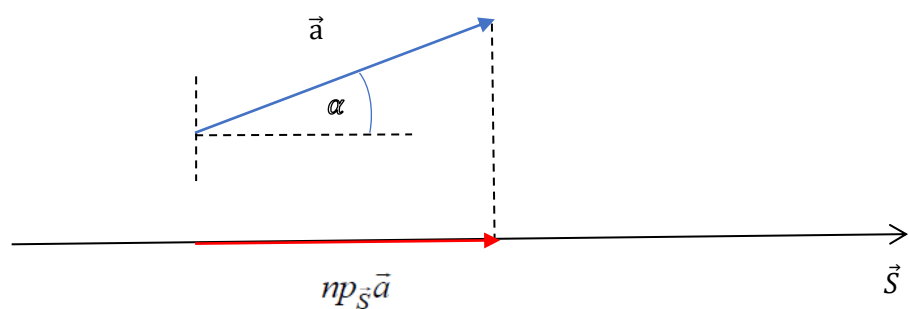


Довжина складової вектора $\overrightarrow{AB}$ вздовж даної осі $\vec{S}$ називається *проекцією вектора* на цю вісь:

$$\text{пр}_{\vec{S}} \overrightarrow{AB} = \begin{cases} |\overrightarrow{A'B'}|, \overrightarrow{A'B'} \uparrow \vec{S} \\ -|\overrightarrow{A'B'}|, \overrightarrow{A'B'} \downarrow \vec{S} \end{cases}$$

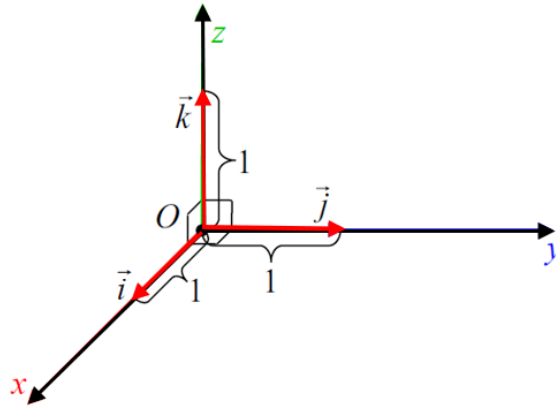
Значення проекції вектора:

$$\text{пр}_{\vec{S}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha$$



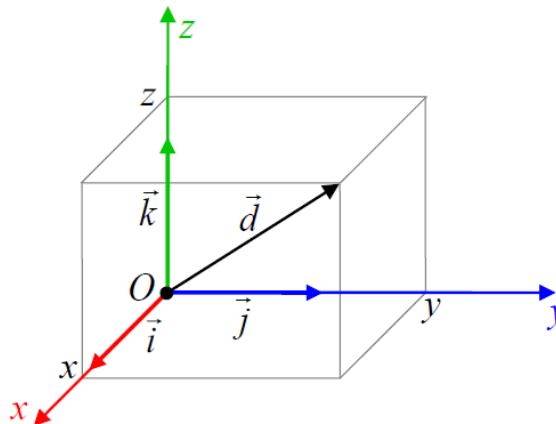
Декартова прямокутна система координат

Якщо базисні вектори афінної системи координат є одиничними і взаємно ортогональними, то така система координат називається *декартовою прямокутною системою координат*.



Вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ є базисними векторами декартової прямокутної системи координат, ортами осей Ox , Oy , Oz . Відповідно, будь-який вектор $\vec{d}$ може бути розкладеним за даним базисом:

$$\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z).$$



Проекції вектора $\vec{d}$ на координатні осі визначають його декартові прямокутні координати x , y , z , а вектори $x\vec{i}$, $y\vec{j}$, $z\vec{k}$ є складовими вектора $\vec{d}$ вздовж координатних осей.

Якщо α , β , γ – кути нахилу вектора $\vec{d}$ до осей Ox , Oy , Oz , можна визначити напрямні косинуси даного вектора: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Корисні співвідношення.

Проекції вектора $\vec{d}$ на осі: $x = |\vec{d}| \cos \alpha$, $y = |\vec{d}| \cos \beta$, $z = |\vec{d}| \cos \gamma$,

Довжина вектора $\vec{d}$: $|\vec{d}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Напрямні косинуси вектора $\vec{d}$:

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Сума квадратів напрямних косинусів будь-якого вектора дорівнює одиниці:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Для векторів $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ справджуються залежності:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$$

Для вектора $\vec{a}(x, y, z)$ та довільного числа α :

$$\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z).$$

Приклад.

Дано координати точок $A(0; -1; 2)$, $B(-1; 1; 4)$. Визначити координати, довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$.

Розв'язок:

$$\overrightarrow{AB} = (-1 - 0; 1 - (-1); 4 - 2) = (-1; 2; 2);$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3;$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{1}{3};$$

$$\cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{2}{3}; \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{2}{3}.$$

Якщо визначені координати векторів $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, то **скалярний добуток** буде розрахований як:

$$\boxed{(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}.$$

Корисні співвідношення.

Умова перпендикулярності векторів: $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$:

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$$

Кут між векторами $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$:

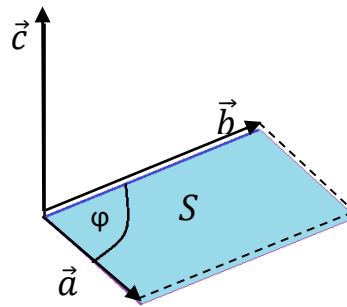
$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Векторний добуток векторів

Векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є вектором $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ або $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$,

модуль якого визначається як: $|\vec{c}| = |[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$

Напрямок вектора $\vec{c}$:



Корисні співвідношення.

Необхідною і достатньою умовою колінеарності двох векторів є рівність нулю їх векторного добутку.

Модуль векторного добутку $[\vec{a}, \vec{b}]$ рівний площі S паралелограма, який побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}$, що мають спільний початок:

$$S = |[\vec{a}, \vec{b}]|.$$

Якщо визначені координати векторів $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, то векторний добуток буде розрахований як:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Умова колінеарності векторів $\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2)$:

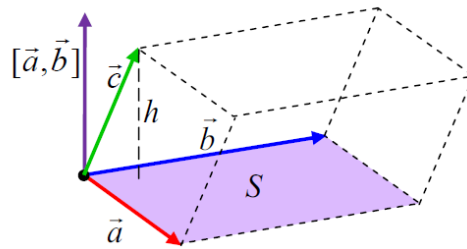
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in$ число $\langle [\vec{a}, \vec{b}], \vec{c} \rangle$, яке одержується внаслідок векторного множення вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ та скалярного множення утвореного вектора на вектор $\vec{c}$.

Корисні співвідношення.

Об'єм паралелепіпеда, що побудований на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, які мають спільний початок, можна визначити як мішаний добуток цих векторів $\langle [\vec{a}, \vec{b}], \vec{c} \rangle$.



Справедливою є рівність - $\langle [\vec{a}, \vec{b}], \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} [\vec{b}, \vec{c}] \rangle$, тому векторний добуток позначають як $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Якщо визначені координати векторів $\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2), \vec{c}(x_3, y_3, z_3)$, то векторний добуток буде розрахований як:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Необхідною і достатньою умовою компланарності трьох векторів $\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2), \vec{c}(x_3, y_3, z_3) \in$ рівність нулю визначника, рядками якого є координати цих векторів, тобто рівність:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

2.1. Пряма на площині

Пряма на площині може бути задана різними способами. Кожному способу задання в декартовій прямокутній системі координат відповідає певне рівняння прямої.

Рівняння прямої, заданої точкою і нормальним вектором

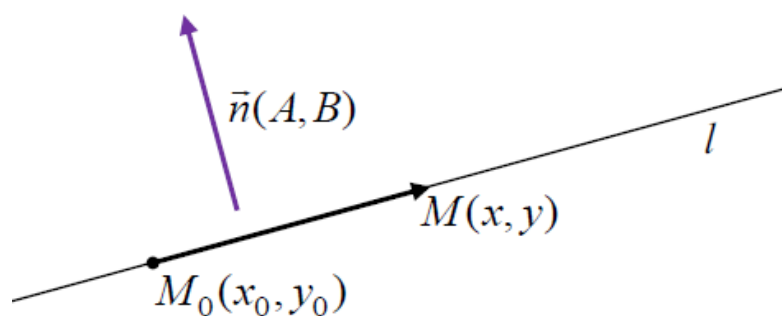
Розглянемо на площині прямокутну декартову систему координат. Відносно неї положення прямої l визначатиметься точкою $M_0(x_0, y_0)$, через яку ця пряма проходить, і відмінним від нуля вектором $n=(A,B)$, перпендикулярним до прямої.

Будь який ненульовий вектор, перпендикулярний даній прямій, називається її *нормальним вектором*. Оскільки всі нормальні вектори прямої є колінеарними, то певний з них отримують шляхом множення іншого на число, не рівне нулю, тобто відповідні координати векторів пропорційні. Це означає, що вектор n вибирається неоднозначно.

Якщо вибрати на прямій l довільну точку $M(x; y)$, то можна розглянути вектори $\overrightarrow{MM_0}$ і $\vec{n}$. Ці вектори перпендикулярні, тому їх скалярний добуток ($\overrightarrow{MM_0}, \vec{n} = 0$). З даних міркувань отримуємо векторне рівняння прямої. Оскільки $\vec{n} = (A, B)$, $\overrightarrow{MM_0} = (x - x_0; y - y_0)$, то

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Рівняння називається *рівнянням прямої, заданої точкою і нормальним вектором*.



Загальне рівняння прямої

Розглянемо рівняння прямої, заданої точкою і нормальним вектором. При розкритті дужок в цьому рівнянні отримуємо:

$$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0.$$

Позначимо $-Ax_0 - By_0 = C$, тоді рівняння набуде вигляду:

$$\boxed{Ax + By + C = 0}.$$

Рівняння називається *загальним рівнянням прямої* на площині з нормальним вектором $n = (A, B)$ ($A, B \neq 0$ одночасно).

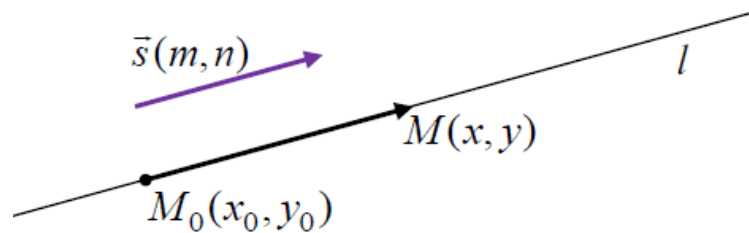
Окремі випадки розташування прямої на площині:

- якщо $C = 0$, то рівняння має вигляд $Ax + By = 0$. Відповідно, пряма проходить через початок координат, тобто $O(0, 0) \in l$;
- якщо $B = 0$ ($A \neq 0$), то рівняння має вигляд $Ax + C = 0 \Rightarrow x = -\frac{C}{A}$ – пряма паралельна вісі Oy ;
- якщо $A = 0$ ($B \neq 0$), то рівняння має вигляд $By + C = 0 \Rightarrow y = -\frac{C}{B}$ – пряма паралельна вісі Ox ;
- якщо $B = C = 0$ ($A \neq 0$) $\Rightarrow x = 0$ – пряма співпадає з віссю Oy ;
- якщо $A = C = 0$ ($B \neq 0$) $\Rightarrow y = 0$ – пряма співпадає з віссю Ox .

Рівняння прямої, яка проходить через задану точку паралельно заданому вектору

Напишемо рівняння прямої l на площині відносно вибраної системи координат, якщо відомі точка $M_0(x_0; y_0) \in l$ і вектор $\vec{S}(m; n)$, паралельний цій прямій (рис.2). Будь який ненульовий вектор, який паралельний даній прямій, називається її *напрямним вектором*. Оскільки всі напрямні вектори прямої є колінеарними, то будь-який з них отримують множенням іншого на число, відмінне від нуля, тобто відповідні координати векторів пропорційні. Отже, вектор s вибирається неоднозначно.

Напишемо рівняння прямої l .



Нехай точка $M(x; y)$ є довільною точкою прямої. Тоді вектор $\overrightarrow{MM_0} = (x - x_0; y - y_0)$, що належить цій прямій, буде колінеарним вектору $\vec{S} = (m; n)$. З колінеарності векторів слідує пропорційність відповідних координат, тобто

$$\boxed{\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}}.$$

Рівність називається *канонічним рівнянням прямої на площині*.

Параметричні рівняння прямої

Із колінеарності векторів $\vec{S}$ і $\overrightarrow{MM_0}$ випливає існування параметра $t \in \mathbb{R}$ ($t \neq 0$), такого, що $\overrightarrow{MM_0} = t \cdot \vec{S}$ або $(x - x_0; y - y_0) = t \cdot (m, n)$. Відповідно, –
 $x - x_0 = t \cdot m, y - y_0 = t \cdot n$

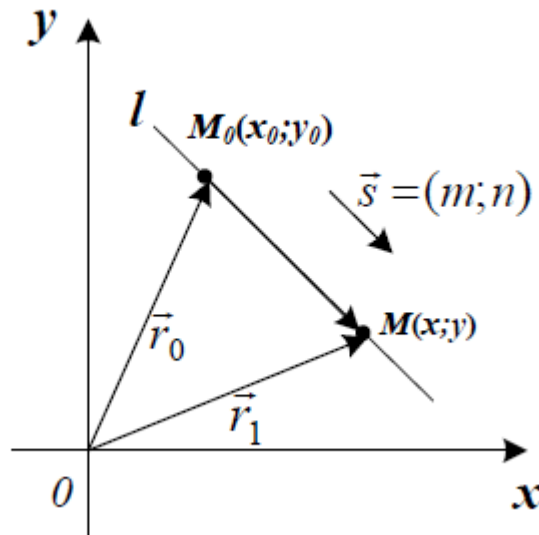
Отже,

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot m \\ y = y_0 + t \cdot n \end{cases}$$

Рівняння називають *параметричними рівняннями прямої* l , яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно вектору $\vec{S} = (m; n)$.

Векторне рівняння прямої

Нехай задана точка $M_0(x_0; y_0)$ належить прямій l , ненульовий вектор $\vec{S} = (m; n)$ паралельний прямій.



Нехай точка M належить прямій l . Тоді вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{S}$ є колінеарними, і для них справедлива рівність:

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{S},$$

де $t \in \mathbb{R}$ – числовий множник.

Нехай $\overrightarrow{r_{M_0}} = \vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = (x_0, y_0)$, $\overrightarrow{r_M} = \vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y)$.

З рисунку можна визначити, що

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{M_0M} = \vec{r}_0 + t\vec{S}, t \in \mathbb{R}.$$

Звідси:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{S}$$

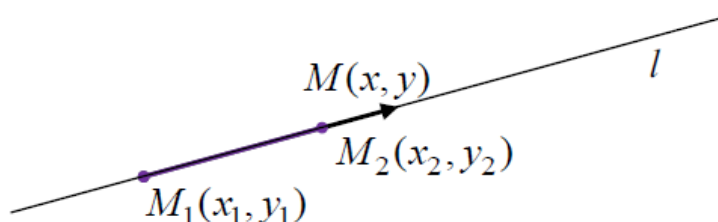
Це є *векторне параметричне рівняння прямої*.

Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки

Напишемо рівняння прямої, що проходить через дві дані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$. Розглянемо довільну точку $M(x, y)$ даної прямої (рис. 4). Вектори $\overrightarrow{M_1M}$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$ колінеарні, а, отже, координати цих векторів пропорційні:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$$

Це є рівняння прямої, що проходить через дві дані точки.

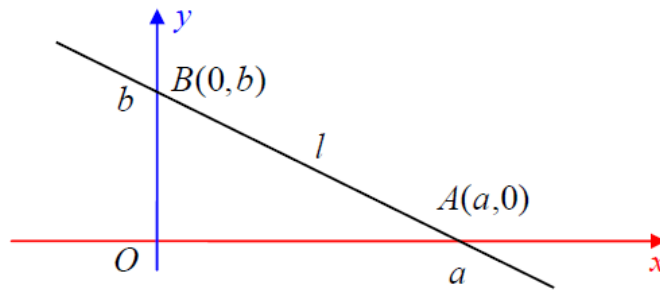


Рівняння прямої у відрізках по осях

Якщо пряма l на площині не проходить через початок координат і не є паралельною жодній з координатних осей, то коефіцієнти в загальному рівнянні відмінні від нуля.

Рівнянням прямої l , яка проходить через точки $A(a; 0)$ і $B(0; b)$, є вираз:

$$\begin{aligned} \frac{x - a}{0 - a} &= \frac{y - 0}{b - 0} \Rightarrow \frac{x - a}{-a} = \frac{y}{b} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x}{-a} + 1 = \frac{y}{b} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \end{aligned}$$



Рівняння прямої, що проходить через дану точку, з даним кутовим коефіцієнтом

Канонічне рівняння можна записати у вигляді:

$$y - y_0 = \frac{n}{m}(x - x_0).$$

Коефіцієнт $\frac{n}{m} = k = \operatorname{tg} \alpha$ є кутовим коефіцієнтом прямої l . Тут α – кут між прямою і додатнім напрямом осі Ox .

Відповідно, рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має кутовий коефіцієнт k є вираз:

$$y - y_0 = \frac{n}{m}x - \frac{n}{m}x_0 \Rightarrow y = y_0 + \frac{n}{m}x - \frac{n}{m}x_0 \Rightarrow$$

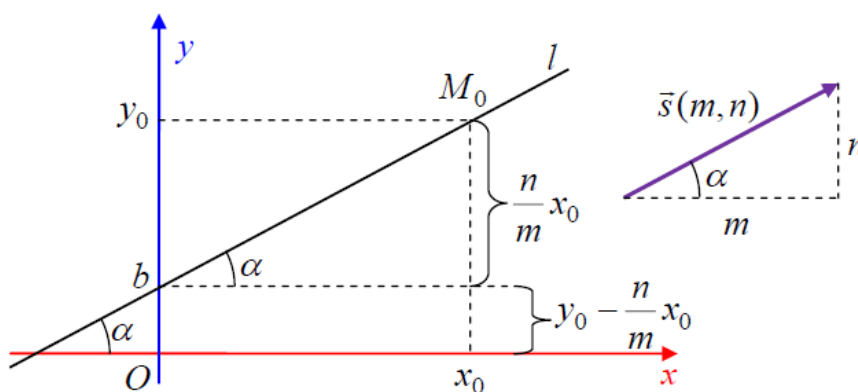
$$y = \frac{n}{m}x + \left(y_0 - \frac{n}{m}x_0\right).$$

Точку перетину прямої з віссю ординат позначають:

$$y_0 - \frac{n}{m}x_0 = b$$

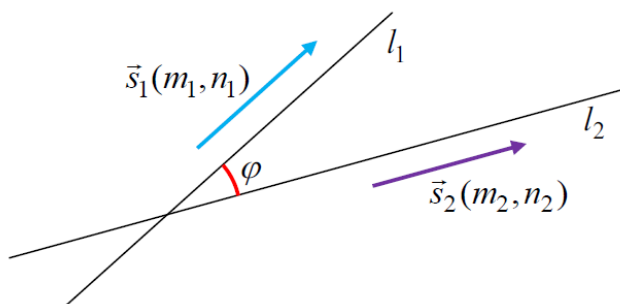
Рівняння можна записати остаточно як

$$\boxed{y = kx + b}.$$



Взаємне розташування прямих на площині

Кут між напрямними векторами двох прямих визначає *кут між прямими*. Проте, якщо вибрати на одній із прямих напрямний вектор, направлений в протилежну сторону, то отримаємо другий кут, який доповнює перший до 180° .



На основі рівнянь визначимо умови *паралельності та перпендикулярності двох прямих*:

1) прямі задано канонічними рівняннями:

$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} \text{ та } l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2},$$

то

– кут між прямими можна розрахувати за формулою

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{s}_1, \vec{s}_2 \rangle}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}};$$

– умова паралельності прямих ($\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ - колінеарні) :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2};$$

- умова перпендикулярності прямих $((M_0(x_0; y_0), \vec{s}_2) = 0)$:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0;$$

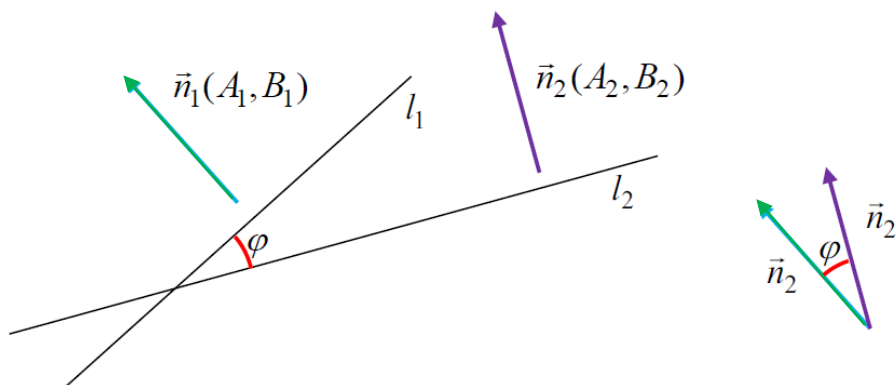
- прямі задано загальними рівняннями:

$$l_1: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, l_2: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

Відповідно, нормальні вектори прямих - $\vec{n}_1(A_1, B_1)$ та $\vec{n}_2(A_2, B_2)$

і

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$



- умова паралельності прямих $(\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2)$:

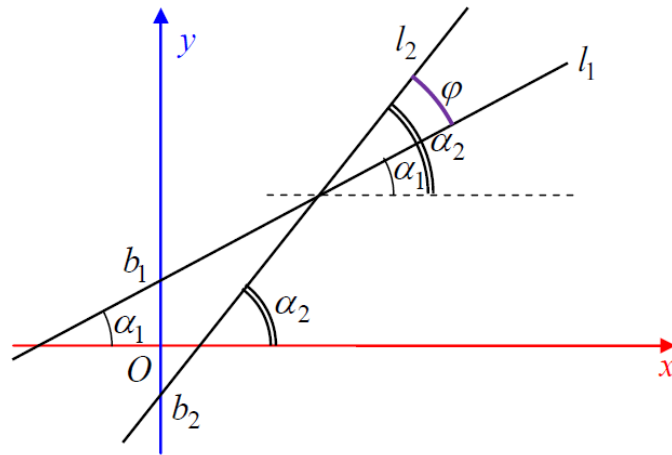
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2};$$

- умова перпендикулярності прямих $((\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0)$:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$$

- прямі задано рівняннями з кутовими коефіцієнтами

$$l_1: y = k_1 x + b_1, l_2: y = k_2 x + b_2.$$



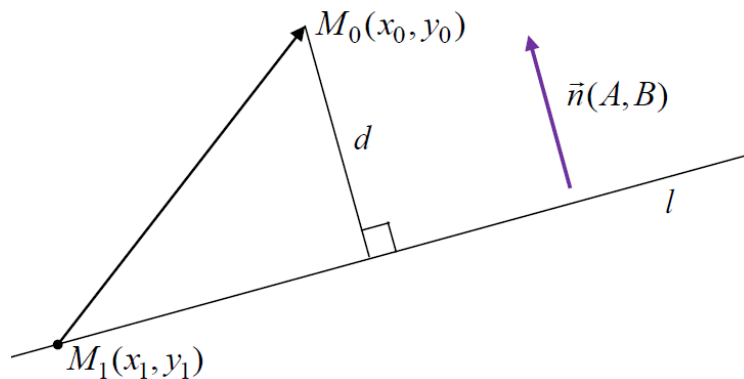
Тоді

- $tg \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2};$
- $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \varphi = 0 \Leftrightarrow k_2 = k_1;$
- $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}.$

Відстань від точки до прямої визначимо наступним чином:

розглянемо пряму l , рівняння якої $Ax + By + C = 0$, і точку $M_0(x_0; y_0)$.

Відстань d від точки M_0 до прямої l рівна модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1 M_0}$, де $M_1(x_1; y_1)$ є точкою прямої l , на напрям вектора нормалі $\vec{n}(A; B)$ до l .



$$d = |\text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1 M_0}| = \frac{|\overrightarrow{M_1 M_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + (-Ax_1 - By_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{C = -Ax_1 - By_1} \right| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Приклад.

За координатами вершин трикутника знайдіть:

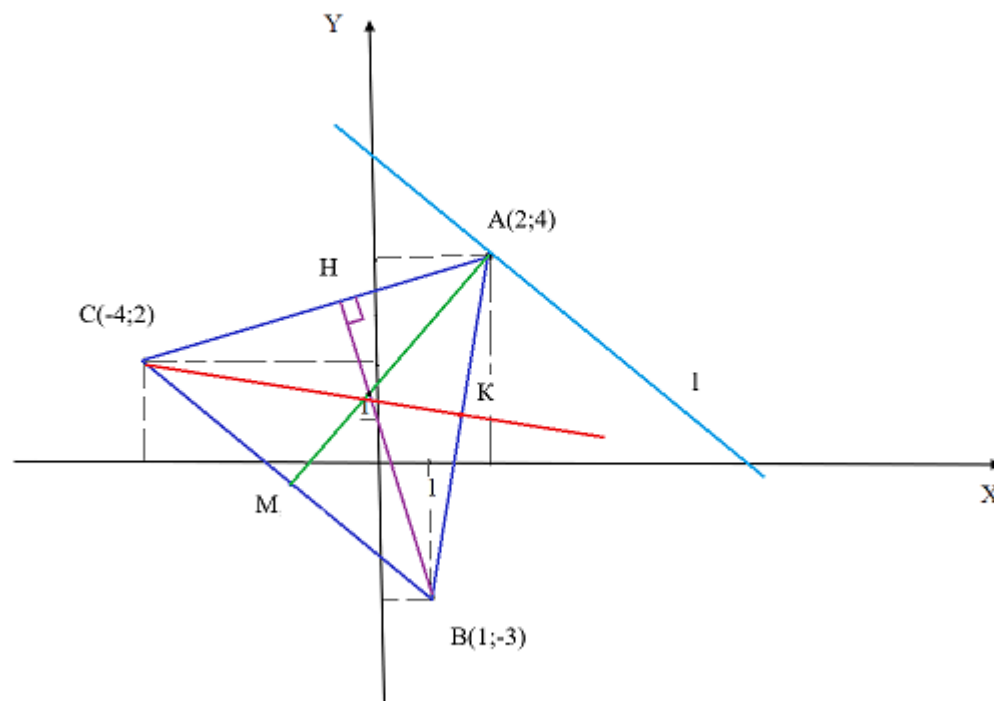
- 1) рівняння прямих, яким належать сторони АВ, ВС, АС;
 - 2) рівняння медіани АМ;
 - 3) рівняння висоти ВН;
 - 4) координати точки перетину АМ і ВН;
 - 5) рівняння прямої l , яка проходить через точку А і є паралельною стороні ВС, знайдіть відстань між цими прямими;
 - 6) рівняння бісектриси СК.
-

A(2;4)

B(1;-3)

C(-4;2)

Побудуємо рисунок до задачі:



$$1) (AB): \frac{x-2}{1-2} = \frac{y-4}{-3-4} \rightarrow -7x + y + 10 = 0$$

$$(BC): \frac{x-1}{-4-1} = \frac{y-(-3)}{2-(-3)} \rightarrow x + y + 2 = 0$$

$$(AC): : \frac{x-2}{-4-2} = \frac{y-4}{2-4} \rightarrow -x + 3y - 10 = 0$$

2) для знаходження рівняння медіани АМ визначаємо координати середини сторони ВС:

$$x_M = \frac{1-4}{2}; y_M = \frac{-3+2}{2} \quad \Longrightarrow \quad M(-1,5;-0,5).$$

$$\text{Рівняння медіани (АМ): } \frac{x-2}{-1,5-2} = \frac{y-4}{-0,5-4} \rightarrow -9x + 7y - 10 = 0$$

3) для знаходження рівняння висоти (ВН) визначаємо її нормальний вектор, який є напрямним вектором сторони АС:

$$\vec{n}_{BH} = \vec{AC} = (-4 - 2; 2 - 4) = (-6; -2);$$

$$\text{Рівняння висоти (ВН): } (-6)(x-1) + (-2)(y-(-3)) = 0; -3x - y = 0;$$

4) координати точки перетину медіани (АМ) і висоти (ВН):

$$\begin{cases} -9x_1 + 7x_2 = 10 \\ -3x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

5) рівняння прямої l, яка проходить через точку А і є паралельною стороні ВС, визначимо за напрямним вектором прямої (ВС):

$$\vec{s}_l = \vec{BC} = (-4 - 1; 2 - (-3)) = (-5; 5) \rightarrow$$

$$l: \frac{x-2}{-5} = \frac{y-4}{5} \rightarrow x + y - 6 = 0$$

Відстань між прямими l і (ВС) знайдемо як відстань від точки В до прямої l:

$$d = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + (-6)|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \frac{|1 - 3 - 6|}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

6) Для визначення рівняння бісектриси СК знайдемо координати точки К за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda};$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

З властивості бісектриси внутрішнього кута трикутника:

$$\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|CA|}{|CB|} = \lambda$$

$$\overrightarrow{CA} = (6; 2), |\overrightarrow{CA}| = 2\sqrt{10}$$

$$\overrightarrow{CB} = (5; -5), |\overrightarrow{CB}| = 5\sqrt{2}$$

Отже,

$$\lambda = \frac{2\sqrt{10}}{5\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Знаходимо координати точки К:

$$x = \frac{2 + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 1}{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{2\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} + 2}$$

$$y = \frac{4 - 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{4\sqrt{5} - 6}{\sqrt{5} + 2}$$

Рівняння прямої (СК):

$$\frac{x - (-4)}{\frac{2\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} + 2} - (-4)} = \frac{y - 2}{\frac{4\sqrt{5} - 6}{\sqrt{5} + 2} - 2} \rightarrow$$

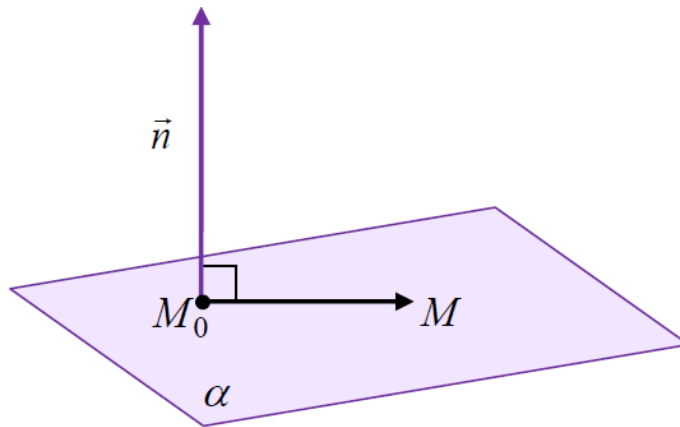
$$\frac{x + 4}{3 + \sqrt{5}} = \frac{y - 2}{1 - \sqrt{5}}$$

2.2. Площина у просторі

Загальне рівняння площини

Положення площини α у просторі цілком визначається точкою $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і вектором $\vec{n}(A; B; C)$, що перпендикулярний до даної площини. Вектор $\vec{n}$ називається нормальним вектором площини.

Площина α задана у декартовій прямокутній системі координат $Oxyz$. Довільна точка $M(x; y; z)$ належатиме даній площині лише за умови, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ буде перпендикулярним до вектора $\vec{n}$.



$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} &\Rightarrow \langle \overrightarrow{M_0M}, \vec{n} \rangle = 0, \\ \overrightarrow{M_0M} &= (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \\ \vec{n} &= (A, B, C) \end{aligned} \right\} A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)$$

Отримане рівняння є рівнянням площини α , яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і перпендикулярна вектору $\vec{n}(A; B; C)$.

Дане рівняння можна перетворити у загальне рівняння площини:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}.$$

Дослідимо загальне рівняння площини:

1. Якщо $D=0$, то загальне рівняння площини набуває вигляду $Ax + By + Cz = 0$. Така площина проходить через початок координат.

2. Якщо $A=0$, то загальне рівняння площини набуває вигляду $By + Cz + D = 0$. Площина є паралельною до вісі Ox . Якщо $B=0$, то загальне рівняння площини набуває вигляду $Ax + Cz + D = 0$. Така площина паралельна до осі Oy . Якщо $C=0$, то загальне рівняння площини набуває вигляду $Ax + By + D = 0$. Координати нормального вектора такої площини $\vec{n}(A; B; 0)$, отже площина паралельна до осі Oz .

3. Якщо $A=B=0$, а $C \neq 0$, $D \neq 0$, то загальне рівняння площини набуває вигляду $-Cz + D = 0$ і є рівнянням площини, паралельної до площини xOy .

Якщо $B=C=0$, а $A \neq 0$, $D \neq 0$, то загальне рівняння площини набуває вигляду – $Ax + D = 0$ і є рівнянням площини, паралельної до площини yOz . Якщо $A=C=0$, а $B \neq 0$, $D \neq 0$, то загальне рівняння площини набуває вигляду – $Bu + D = 0$ і є рівнянням площини, паралельної до площини xOz .

Приклад.

Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(1;2;3)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}(-1; -3; 3)$.

Розв'язок:

рівняння площини, що проходить через дану точку перпендикулярно до вектора $\vec{n}(A; B; C)$:

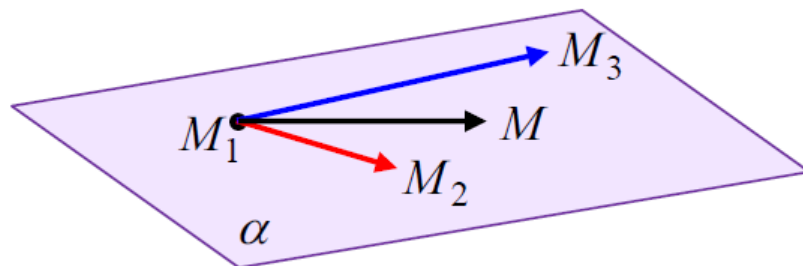
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

За умовою задачі: $-1(x - 1) - 3(y - 2) + 3(z - 3) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -x + 1 - 3y + 6 + 3z - 9 = 0 \Rightarrow -x - 3y + 3z - 2 = 0 \Rightarrow x + 3y - 3z + 2 = 0 .$$

Рівняння площини, що проходить через три точки. Рівняння площини у відрізках по осях

Площину можна однозначно визначити трьома заданими точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, що не лежать на одній прямій.

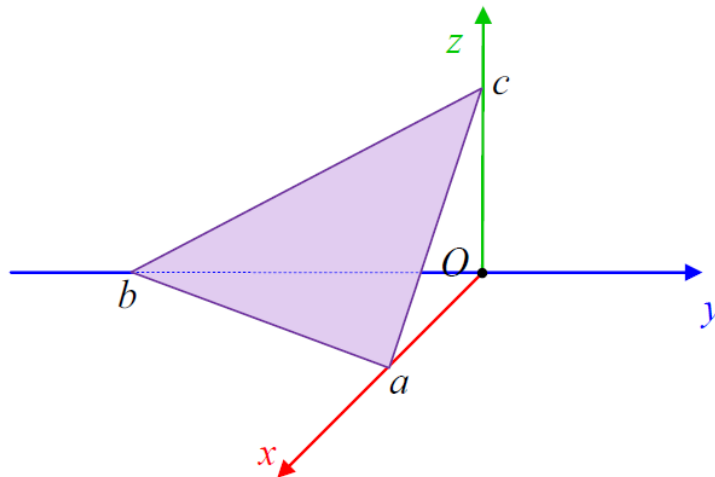


На площині виберемо довільну точку $M(x; y; z)$. Побудуємо вектори $\overrightarrow{M_1M}(x - x_1; y - y_1; z - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_3}(x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$. Оскільки вектори є компланарними, їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Це є рівняння площини, що проходить через три точки.

Окремим є випадок, коли площина перетинає координатні осі у точках $(a;0;0)$, $(0;b;0)$, $(0;0;c)$.



Рівняння такої площини можна записати у вигляді:

$$\begin{vmatrix} x - a & y - 0 & z - 0 \\ 0 - a & b - 0 & 0 - 0 \\ 0 - a & 0 - 0 & c - 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xbc + yac + zab - abc = 0 \Rightarrow xbc + yac + zab = abc \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

Це є рівняння площини у відрізках по осях.

Приклад.

Скласти загальне рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1; 2; 3)$, $M_2(-1; 0; 2)$, $M_3(-2; 1; 0)$.

Розв'язок:

рівняння площини, що проходить через три точки має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

За умовою задачі:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1-1 & 0-2 & 2-3 \\ -2-1 & 1-2 & 0-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

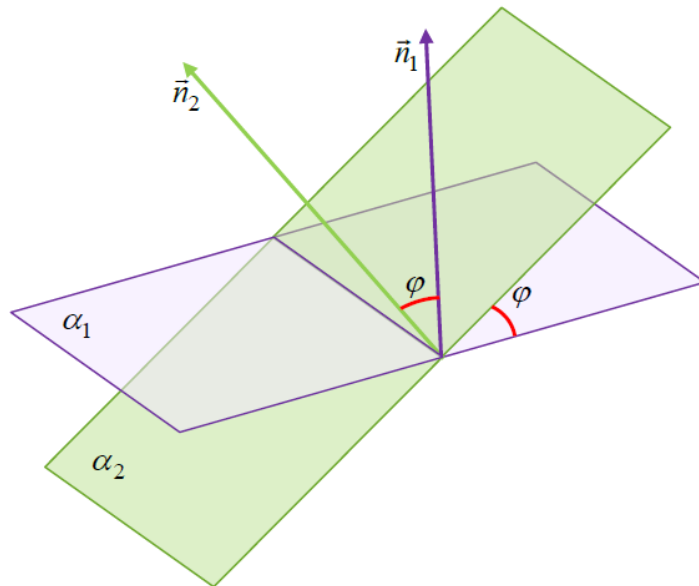
$$\Rightarrow 5(x-1) - 3(y-2) - 4(z-3) = 0 \Rightarrow$$

$$5x - 3y - 4z + 13 = 0$$

Взаємне розташування площин

Двогранний кут між двома площинами, заданими рівняннями $\alpha_1 = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ та $\alpha_2 = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, вимірюється лінійним кутом між нормальними векторами цих площин $\vec{n}_1(A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{n}_2(A_2; B_2; C_2)$:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$



Умови паралельності та перпендикулярності площин.

Якщо площини α_1 і α_2 перпендикулярні, то $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$. Отже, умова перпендикулярності двох площин :

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Якщо площини α_1 і α_2 паралельні, то $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$. Умовою паралельності площин є:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Приклад.

Знайти кут між площинами $x - 2y + 4z - 3 = 0$ і $2x + 4y - z + 5 = 0$.

Розв'язок:

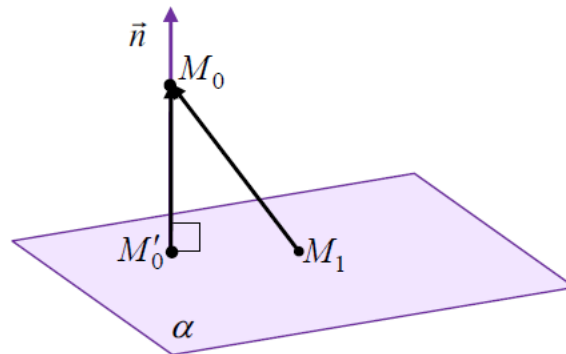
Для заданих площин спершу визначимо координати нормальних векторів:

$\vec{n}_1(1; -2; 4)$ і $\vec{n}_2(2; 4; -1)$:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 + 4 \cdot (-1)}{\sqrt{1+4+16} \cdot \sqrt{A_2^2+16+1}} = \frac{-10}{21}, \varphi = \arccos\left(-\frac{10}{21}\right).$$

Відстань від точки до площини, якій ця точка не належить, визначають за рівнянням площини і координатами даної точки.

Якщо відоме рівняння площини $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ і координати точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, що не лежить в цій площині, то відстань d між ними можна визначити так:

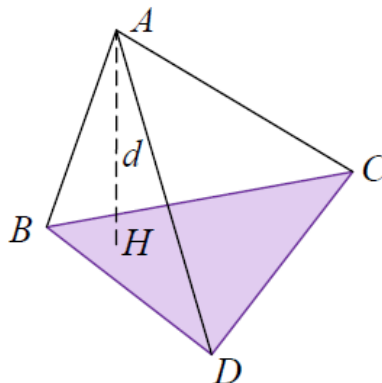


$$\begin{aligned} d &= |\text{пр}_{\vec{n}} \vec{M_1M_0}| = \frac{|\vec{M_1M_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + (-Ax_1 - By_1 - Cz_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1} \right| \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

Приклад.

Знайти висоту AH піраміди, яка задана точками з координатами:
 $A(-1; 2; -1), B(1; 0; 2), C(0; 1; -1), D(2; 0; -1)$.



Розв'язок:

рівняння площини, що проходить через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-1)(-3) - 6y + (z-2)(-1) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -3x - 6y - z + 5 = 0 \Rightarrow 3x + 6y + z - 5 = 0$$

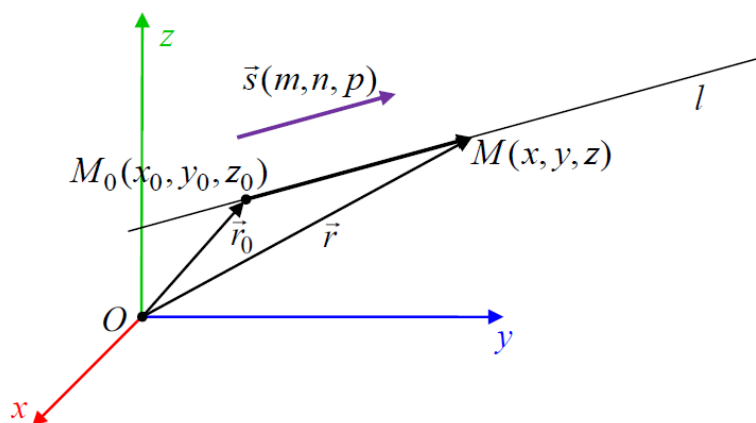
Висота піраміди AH рівна відстані від точки A до площини BCD :

$$AH = d = \frac{3 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) - 5}{\sqrt{9+36+1}} = \frac{3}{\sqrt{46}}.$$

2.3. Пряма у просторі

Канонічне рівняння прямої у просторі

Положення прямої у просторі буде визначене, якщо відомі координати точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, через яку вона проходить і ненульовий вектор $\vec{s}(m; n; p)$, що паралельний даній прямій. Вектор $\vec{s}$ називається напрямним вектором прямої.



Виберемо довільну точку $M(x; y; z)$ даної прямої і розглянемо вектор $\overrightarrow{MM_0} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. Вектори $\vec{s}$ і $\overrightarrow{MM_0}$ паралельні, тому координати будь-якої точки прямої, з умови колінеарності векторів, задовольняють співвідношення:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}}.$$

Це є канонічне рівняння прямої.

Параметричне рівняння прямої

Довільну точку прямої $M(x; y; z)$ можна визначити у просторі радіус-вектором $\vec{r}(x; y; z)$, а $M_0(x_0; y_0; z_0)$ - $\vec{r}_0(x_0; y_0; z_0)$. Тоді

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{s},$$

де t – параметр.

Дане рівняння називається *векторно-параметричним рівнянням прямої*.

У розгорнутому вигляді рівняння має вигляд:

$$\vec{r} = (x_0 + mt; y_0 + nt; z_0 + pt).$$

Порівняння відповідних координат дозволяє записати *параметричне рівняння прямої*:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}}$$

Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Рівняння *прямої, що проходить через дві дані точки* $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$ можна записати на основі канонічного рівняння прямої, вважаючи вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ напрямним:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Загальне рівняння прямої у просторі

Пряму в просторі можна задати як перетин двох площин. Дві площини, що не є паралельні, перетинаються по прямій. Отже, система із рівнянь двох площин, нормальні вектори яких не колінеарні, визначає в просторі пряму лінію:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Цю систему називають *загальним рівнянням прямої*.

Для переходу від загального рівняння прямої в просторі до канонічного рівняння необхідно знайти точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що належить даній прямій і координати напрямного вектора цієї прямої.

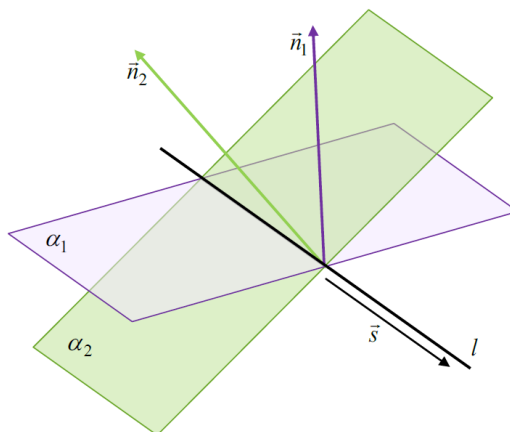
Для знаходження координат точки M_0 одну із координат, наприклад x_0 , вибирають довільно, а інші визначають із системи:

$$\begin{cases} B_1y_0 + C_1z_0 = -D_1 - A_1x'_0 \\ B_2y_0 + C_2z_0 = -D_2 - A_2x'_0 \end{cases}$$

Дана система має розв'язок за умови: $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.

Якщо ця умова не виконується, то довільного фіксованого значення надають іншій координаті – y_0 чи z_0 .

Щоб знайти координати напрямного вектора $\vec{s}$, враховують, що нормальні вектори даних площин ($\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$) є перпендикулярними до прямої.



Вектор $\vec{s}$ можна знайти як векторний добуток векторів $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$:

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

Приклад.

Записати рівняння прямої, заданої як перетин двох площин:

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$$

у канонічному вигляді.

Розв'язок.

Прийmemo $x_0 = 0$. Відповідно, отримаємо:

$$\begin{cases} y - z - 1 = 0 \\ -y + 3z + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = z + 1 \\ -z - 1 + 3z + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = z + 1 \\ 2z = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ z = -2 \end{cases}$$

Координати точки – $M_0(0; -1; -2)$.

Наступним кроком є визначення координат напрямного вектора прямої:

$$\vec{s} = (1, 1, -1) \times (2, -1, 3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k} = (2, -5, -3)$$

Запишемо канонічне рівняння прямої.

$$\frac{x}{2} = \frac{y + 1}{-5} = \frac{z + 2}{-3}$$

Взаємне розташування прямих у просторі

Кут між двома прямими.

Нехай дві прямі l_1 і l_2 задані канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

Кут φ між цими прямими можна визначити як кут між напрямними векторами $\vec{s}_1(m_1; n_1; p_1)$, $\vec{s}_2(m_2; n_2; p_2)$ цих прямих:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{s}_1, \vec{s}_2 \rangle}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

Умови паралельності та перпендикулярності прямих.

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Leftrightarrow \langle \vec{s}_1, \vec{s}_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

Приклад.

Визначити кут між прямими

$$l_1: \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0, \\ 2x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases} \text{ та } l_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 - t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$$

Розв'язок.

$$\vec{s}_1 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 8\vec{j} - 4\vec{k} = (2, -8, -4)$$

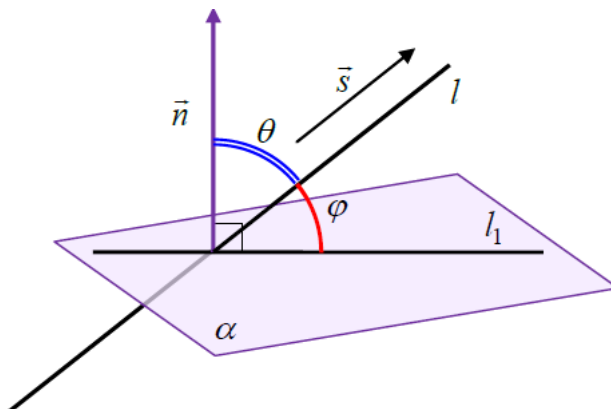
$$\vec{s}_2 = (2, -1, 3)$$

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\langle \vec{s}_1, \vec{s}_2 \rangle}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{2 \cdot 2 + (-8) \cdot (-1) + (-4) \cdot 3}{\sqrt{2^2 + (-8)^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Взаємне розташування прямої і площини

Кут між прямою і площиною.

Кутом між прямою l і площиною α називають кут між прямою і її проекцією на дану площину.



Якщо площина α і пряма l задані рівняннями:

$$\alpha = Ax + By + Cz + D, l: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p},$$

то

$$\sin \varphi = \frac{|\langle \vec{n}, \vec{s} \rangle|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

Умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини

$$l \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{s} \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0$$

$$l \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{n} \parallel \vec{s} \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

Приклад.

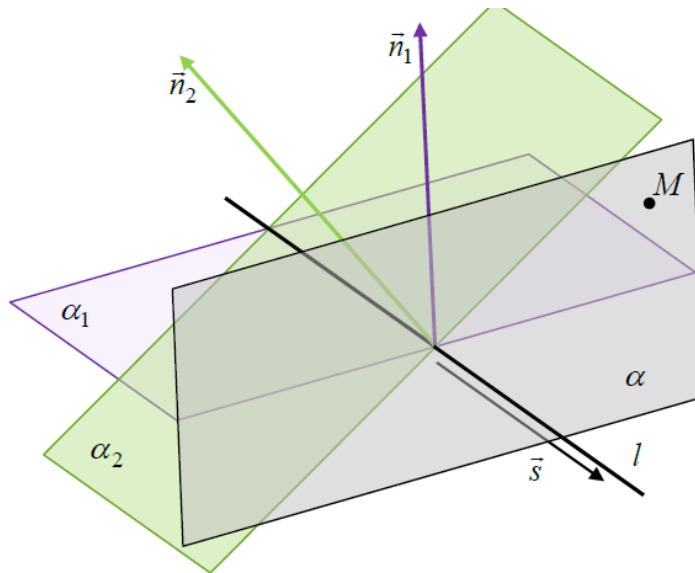
Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M(2; 2; 1)$ і є перпендикулярною до прямої

$$l: \begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

Розв'язок.

Оскільки пряма і площина є взаємно перпендикулярними, то напрямний вектор прямої $\vec{s}$ буде рівний нормальному вектору площини $\vec{n}$:

$$\vec{s} = \vec{n}.$$



$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k} = (-1, -1, -3)$$

Отже маємо записати рівняння площини з нормальним вектором $\vec{n}(-1, -1, -3)$, що проходить через точку $M(2, 2, 1)$:

$$(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$-1(x - 2) - 1(y - 2) - 3(z - 1) = 0$$

$$-x - y - 3z + 7 = 0 \text{ або } x + y + 3z - 7 = 0$$

Приклад.

За даними координатами точок A, B, C і рівнянням площини α знайти:

- 1) рівняння прямої (AB) ;
- 2) рівняння площини (ABC) ;
- 3) напрямні косинуси нормалі до площини (ABC) ;
- 4) графічне представлення піраміди, що утворена площиною α та координатними площинами;
- 5) відстань від точки A до площини α ;
- 6) косинус кута між площинами (ABC) і α ;
- 7) канонічне рівняння прямої l , по якій перетинаються площини (ABC) і α .

$$A(-5; 3; 1)$$

$$B(-3; 5; -1)$$

$$C(-6;2;3)$$

$$\alpha: 2x + y - 2z + 4 = 0$$

$$1) \quad (AB): \frac{x-(-5)}{-3-(-5)} = \frac{y-3}{5-3} = \frac{z-1}{-1-1}; \frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{-2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x+5}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-1};$$

$$2) \quad (ABC): \begin{vmatrix} x-(-5) & y-3 & z-1 \\ -3-(-5) & 5-3 & -1-1 \\ -6-(-5) & 2-3 & 3-1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x-(-5) & y-3 & z-1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} (x-(-5)) - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} (y-3) + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} (z-1) = 0$$

$$2(x-(-5)) + (-2)(y-3) + 0(z-1) = 0;$$

$$2x - 2y + 16 = 0; x - y + 8 = 0.$$

$$3) \quad |\vec{n}_{ABC}| = |(1; -1; 0)| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (0)^2} = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2};$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos \beta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \cos \alpha\gamma = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0.$$

4) рівняння площини α перепишемо у вигляді:

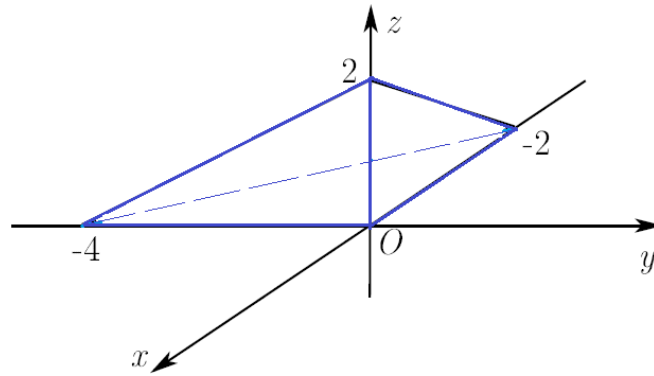
$$2x + y - 2z + 4 = 0$$

$$2x + y - 2z = -4$$

$$\frac{2x}{-4} + \frac{y}{-4} + \frac{-2z}{-4} = 1$$

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{2} = 1.$$

Отриманий вираз дозволяє визначити відрізки, які відтинає площина α на координатних осях Ox , Oy , Oz відповідно: -2;-4;2.



$$5) d(A, \alpha) = \frac{|2 \cdot (-5) + 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 4|}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{3};$$

$$6) \cos \varphi = \frac{\langle (1, -1, 0), (2, 1, -2) \rangle}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (0)^2} \cdot \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{6} \sqrt{2};$$

$$7) \vec{a}_l = [\vec{n}_{ABC}, \vec{n}_\alpha] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = (2, 2, 3).$$

На перетині площин ABC і α визначимо деяку точку. Припишемо $z=0$.

Відповідно, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - y = -8 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$$

Використаємо для розв'язання метод Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -8 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -8 \\ 0 & 3 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - y = -8 \\ 3y = 12 \end{cases} \begin{cases} x = -4 \\ y = 4 \end{cases}$$

Канонічне рівняння прямої l :

$$l: \frac{x - (-4)}{2} = \frac{y - 4}{2} = \frac{z - 0}{3}; \quad \frac{x + 4}{2} = \frac{y - 4}{2} = \frac{z}{3}$$

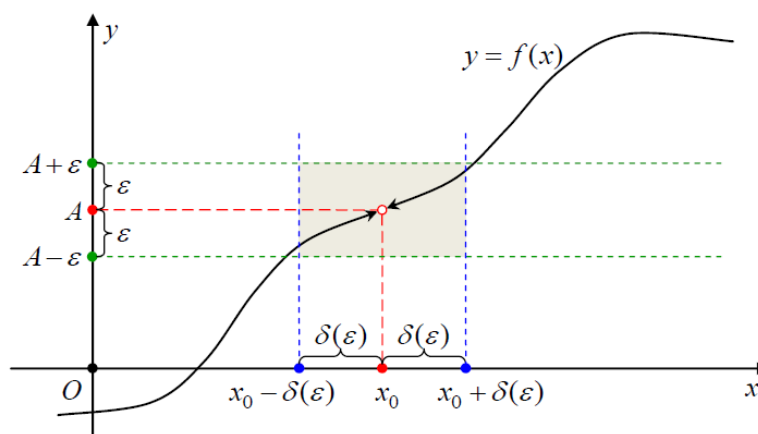
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

3.1. Диференціальне числення функції однієї і багатьох змінних

3.1.1. Границя функції

Границя функції в точці

Якщо функція $f(x)$ визначена в інтервалі $(x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1)$, $\delta_1 > 0$ тобто в деякому околі x_0 , то **границею функції $f(x)$** в точці x_0 буде називатися число A за умови, що для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що з нерівності $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ випливає нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.



Записують: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ або $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$

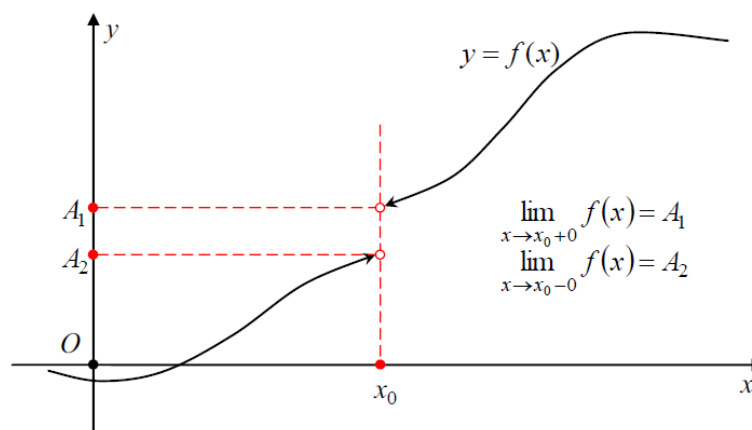
Односторонні границі

Нехай $f(x)$ визначена на проміжку $(x_0; x_0 + \delta)$ (на проміжку $x_0 - \delta; x_0$), $\delta > 0$. Число A називається правою (лівою) границею $f(x)$ в точці x_0 , коли для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що з нерівності $0 < x - x_0 < \delta$ ($0 < x_0 - x < \delta$) випливає нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записують так:

$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A$ – права границя,

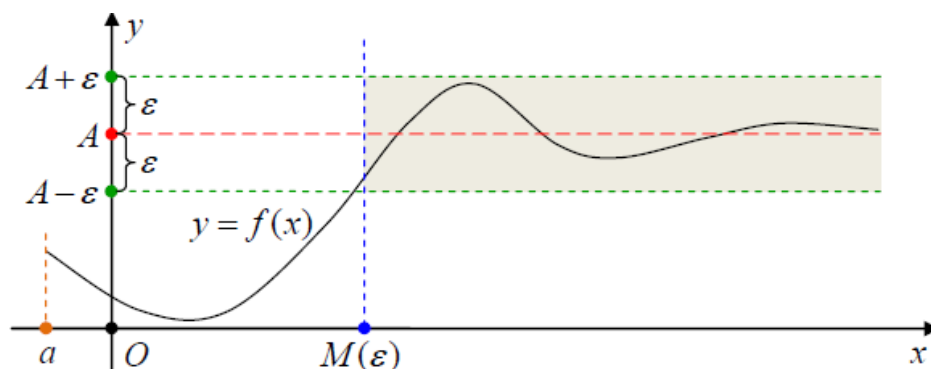
$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A$ – ліва границя.



Для того щоб функція $f(x)$ в точці x_0 мала границю необхідно і достатньо, щоб у цій точці функція мала праву і ліву границі і щоб ці границі були рівні між собою.

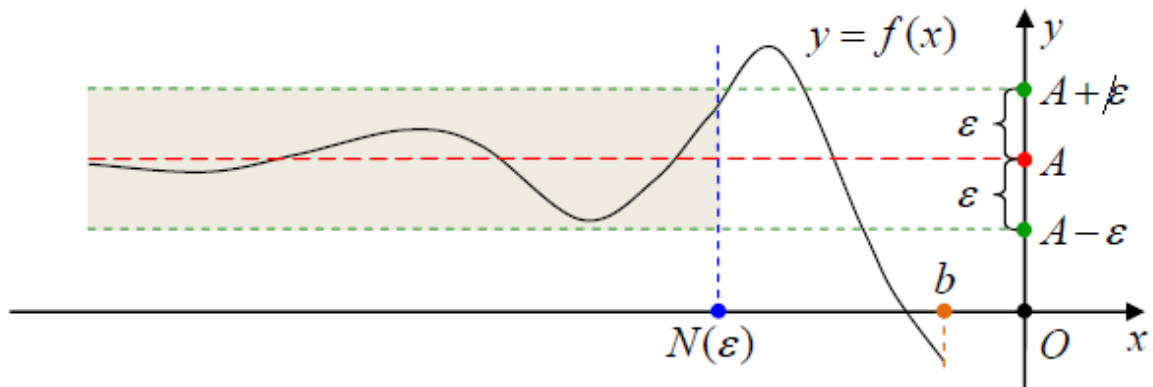
Границя функції на нескінченності

Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(a; +\infty)$. Число A називається границею $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ (записують $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує $M(\varepsilon) \geq a$ таке, що нерівність $|f(x) - A| \leq \varepsilon$ виконується для всіх x , які задовольняють умову $x > M(\varepsilon)$).



Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(-\infty; b)$. Число B називається границею $f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$ (записують $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B$, якщо для будь-якого

числа $\varepsilon > 0$ існує $N(\varepsilon) \leq b$ таке, що нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ виконується для всіх x , які задовольняють умову $x < N(\varepsilon)$.



Нескінченні границі

Нехай функція $f(x)$ визначена в інтервалі $(x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1)$, $\delta_1 > 0$, за винятком, можливо, самої точки x_0 . Вважають, що функція $f(x)$ в точці x_0 має нескінченну границю, яка рівна: а) $+\infty$, б) $-\infty$, в) ∞ , якщо для будь-якого числа $M > 0$ існує число $\delta(M) > 0$ ($\delta(M) < \delta_1$) таке, що для всіх x , що задовольняють нерівності $0 < |x - x_0| < \delta(M)$, виконується, відповідно, нерівність:

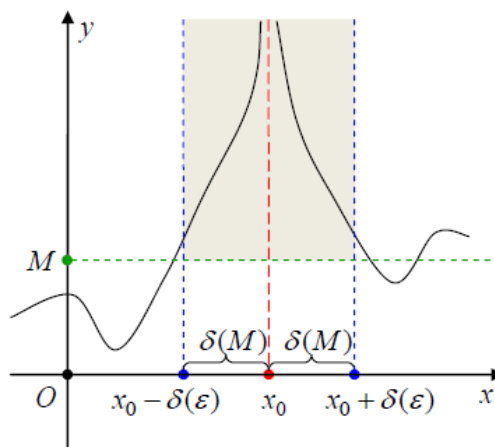
$$\text{а) } f(x) > M, \text{ б) } f(x) < -M, \text{ в) } |f(x)| > M.$$

Ці положення можна представити наступним чином:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ або } f(x) \rightarrow +\infty (x \rightarrow x_0);$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \text{ або } f(x) \rightarrow -\infty (x \rightarrow x_0);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \text{ або } f(x) \rightarrow \infty (x \rightarrow x_0);$$



Критерій існування границі. Властивості функцій, що мають границю в точці. Властивості границь функцій

Для того щоб функція $f(x)$, визначена на множині E , в граничній точці x_0 цієї множини, скінченно чи нескінченно віддаленій, мала границю A необхідно і достатньо, щоб для будь-якої послідовності точок $x_n \in E, x_n \neq x_0$ ($n=1,2,\dots$) і $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = x_0$ справджувалася рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

Властивості функцій, що мають границю в точці

- 1) Функція не може мати двох різних границь в одній точці.
- 2) Якщо в деякому околі точки x_0 , крім можливо самої точки x_0 , виконується нерівність $f(x) \leq \varphi(x)$ і кожна з функцій має границю в точці x_0 , то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$.
- 3) Нехай в деякому околі точки x_0 окрім, можливо, самої точки x_0 , виконується нерівність $f(x) \leq \varphi(x) \leq \psi(x)$. Якщо функції $f(x)$ і $\psi(x)$ мають границю в точці x_0 , причому $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A$, то функція $\varphi(x)$ також має границю в точці x_0 і $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A$.

Властивості границь функцій

1) Границя сталої в довільній точці x_0 дорівнює цій сталій $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

2) Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ мають в точці x_0 скінченні границі, то в цій точці мають також скінченні границі їх сума, різниця, добуток, частка і справедливіми є наступні формули:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x));$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x));$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))}{\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x))}, g(x) \neq 0, \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x)) \neq 0.$$

Сталий множник можна виносити за знак границі:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (C \cdot f(x)) = C \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)), C = const.$$

Якщо існує $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, то для будь-якого натурального числа m справедлива рівність:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^m = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)) \right)^m$$

При знаходженні границь функцій використовуються правила:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{c}{x} = \infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} c^x = \begin{cases} +\infty, 0 < c < 1 \\ 0, c > 1 \end{cases}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{c} = \infty$	$\lim_{x \rightarrow x_0} (\log_c f(x)) = \log_c \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right), c > 1$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \log_c x = -\infty, c > 1$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} c^x = \begin{cases} 0, 0 < c < 1 \\ +\infty, c > 1 \end{cases}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_c x = +\infty, c > 1$

Приклади:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(3x - \frac{2x}{x^2+1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (3x) - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^2+1} = 0 - 0 = 0.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+2-4}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{(x-2)(x+2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x-3}{x-2} \right) = \frac{4}{3}.$$

Важливі границі. Невизначені вирази

Перша важлива границя:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Перша важлива границя розкриває невизначеність $\frac{0}{0}$.

Наслідки з першої важливої границі:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1}$$

Друга важлива границя:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e}$$

Друга важлива границя розкриває невизначеність 1^∞ .

При $x = \frac{1}{y}$ при $y \rightarrow \infty$:

$$\boxed{\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y = e}$$

Справедливі наступні формули:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha - 1}{x - 1} = \alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, a > 0, a \neq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a > 0$$

Порівняння нескінченно малих

Для нескінченно малих в точці x_0 функцій $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ можна сформулювати наступні положення:

нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються нескінченно малими величинами одного порядку, якщо відношення $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ має скінченну і відмінну від нуля границю в точці x_0 ;

якщо відношення $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ є нескінченно малими в точці x_0 , то нескінченно мала $\beta(x)$ називається нескінченно малою величиною вищого порядку ніж $\alpha(x)$, а нескінченно мала $\alpha(x)$ називається нескінченно малою величиною нижчого порядку ніж $\beta(x)$;

якщо відношення $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ не має границі в точці x_0 , то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ вважають непорівняними між собою;

нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються еквівалентними нескінченно малими в точці x_0 , якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$. Пишуть: $\alpha(x) \cong \beta(x)$.

Для таких величин:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)\alpha(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)\beta(x))$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{\alpha(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{\beta(x)} \right)$$

Таблиця еквівалентних нескінченно малих в точці $x_0=0$

$\sin x \cong x$	$a^x - 1 \cong x \ln a$
$\operatorname{tg} x \cong x$	$e^x - 1 \cong x$
$\arcsin x \cong x$	$\log_a(1+x) \cong x \log_a e$
$\operatorname{arctg} x \cong x$	$\ln(1+x) \cong x$

Приклади:

1) Знайдіть: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x} \right)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x}{5x} \right) = \frac{3}{5} = 0,6.$$

2) Знайдіть: $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\arcsin(x-3)}{x^2-5x+6} \right)$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\arcsin(x-3)}{x^2-5x+6} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{(x-3)}{(x-3)(x-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-2} \right) = 1.$$

3) Знайдіть: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln \cos 4x}{x^2} \right)$.

$$\ln \cos 4x = \ln(1 + \cos 4x - 1) \cong \cos 4x - 1$$

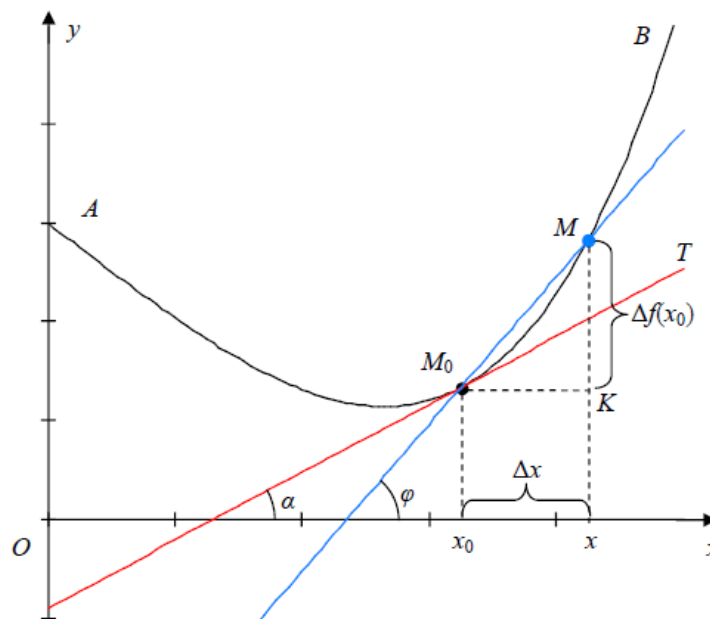
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln \cos 4x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos 4x - 1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-2\sin^2 2x}{x^2} \right) = -8.$$

3.1.2. Диференціальне числення функції однієї змінної

Задачі, що приводять до поняття похідної

1. Задача про дотичну

Пряма M_0T , яка є граничним положенням січної M_0M , коли точка M вздовж кривої AB наближається до точки M_0 , називається дотичною до кривої AB в точці M_0 .



$$\angle MM_0K = \varphi$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{MK}{M_0K} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

Якщо $M \rightarrow M_0$, то $x \rightarrow x_0$, $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta f(x_0) \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow \alpha$

Рівняння дотичної матиме вигляд $y=kx+b$, де кутовий коефіцієнт

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\varphi \rightarrow \alpha} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

2. Задача про швидкість рухомої точки

Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $S = S(t)$, де S – шлях, пройдений за час t .

Якщо M_0 – положення матеріальної точки в момент часу t , то в момент часу $t + \Delta t$ вона буде в точці M , пройдений шлях буде визначений як $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$. У механіці відношення $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ називається середньою швидкістю на даному шляху, тоді як миттєва швидкість матеріальної точки в момент часу t :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S(t)}{\Delta t}.$$

Означення похідної

Якщо функція $f(x)$ визначена в околі точки x_0 , точка x – точка цього околу ($x \neq x_0$), то похідною функції $f(x)$ в точці x_0 називається границя:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

В термінах приростів можна сформулювати це означення:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

Тобто, похідною функції $f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції $\Delta f(x_0)$ до приросту аргументу Δx в цій точці, за умови $\Delta x \rightarrow 0$.

Функція, яка має скінченну похідну в точці x_0 , називається диференційованою в цій точці.

Операцію знаходження похідної від функції $f(x)$ називають диференціюванням цієї функції.

Похідна суми, добутку і частки

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовані в точці x , то в цій точці диференційовані: $u(x) + v(x)$, $u(x) - v(x)$, $u(x) \cdot v(x)$, $\frac{u(x)}{v(x)}$, $v(x) \neq 0$.

При цьому:

$$(u + v)' = u' + v'$$
$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$(u - v)' = u' - v'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Похідна складеної функції

Якщо функція $\varphi(x)$ диференційована в точці x , а функція $f(u)$ диференційована в точці u , то

$$\left(f(\varphi(x))\right)' = f'(u) \cdot \varphi'(x)$$

Похідна оберненої функції

Нехай функція $\varphi(x)$ строго монотонна і неперервна на відрізку $[a; b]$. Якщо в точці $x \in (a; b)$ існує похідна $f'(x) \neq 0$, то обернена функція $x = f'(y)$ в точці $y = f(x)$ має похідну:

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}.$$

Похідні основних елементарних функцій

- 1) $C' = 0, C = const$;
- 2) $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, (\alpha - \text{довільне число})$;
- 3) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a, (a > 0, a \neq 1)$;
- 4) $(e^x)' = e^x$;
- 5) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, (x > 0, a > 0, a \neq 1)$;
- 6) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
- 7) $(\sin x)' = \cos x$;
- 8) $(\cos x)' = -\sin x$;

$$9) (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}, (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z);$$

$$10) (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, (x \neq \pi n, n \in Z);$$

$$11) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (|x| < 1);$$

$$12) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (|x| < 1);$$

$$13) (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$14) (\text{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$15) (shx)' = chx;$$

$$16) (chx)' = shx;$$

$$17) (thx)' = \frac{1}{chx^2};$$

$$18) (cthx)' = -\frac{1}{shx^2}, (x \neq 0).$$

Приклади:

$$1. x' = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$$

$$2. (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$3. \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$4. y = 3x^4 - 2x + \sin x - tgx$$

$$\begin{aligned} y' &= (3x^4 - 2x + \sin x - tgx)' = 3(x^4)' - 2 \cdot x' + (\sin x)' - (tgx)' = \\ &= 3 \cdot 4x^3 - 2 + \cos x - \frac{1}{\cos^2 x} = 12x^3 - 2 + \cos x - \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$5. y = x^5 ctgx$$

$$\begin{aligned} y' &= (x^5 ctgx)' = (x^5)' ctgx + x^5 (ctgx)' = 5x^4 ctgx + x^5 \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \\ &= x^4 \left(\frac{5 \cos x}{\sin x} - \frac{x}{\sin^2 x}\right) = x^4 \cdot \frac{5 \cos x \sin x - x}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

$$6. y = \frac{\sqrt{x} + \cos x}{e^x + \ln x}$$

$$y' = \left(\frac{\sqrt{x} + \cos x}{e^x + \ln x}\right)' = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x\right)(e^x + \ln x) - (\sqrt{x} + \cos x)\left(e^x + \frac{1}{x}\right)}{(e^x + \ln x)^2}$$

$$7. y = \cos^3(\sqrt{x} + 2x + 5)$$

$$\begin{aligned} y' &= \left(\cos^3(\sqrt{x} + 2x + 5) \right)' = 3\cos^2(\sqrt{x} + 2x + 5) \cdot (\cos(\sqrt{x} + 2x + 5))' = \\ &= 3\cos^2(\sqrt{x} + 2x + 5) \sin(\sqrt{x} + 2x + 5) \cdot (\sqrt{x} + 2x + 5)' = \\ &= 3\cos^2(\sqrt{x} + 2x + 5) \cdot \sin(\sqrt{x} + 2x + 5) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2 \right) \end{aligned}$$

$$8. y = \sin(x^2 + x - 1)$$

$$\begin{aligned} y' &= (\sin(x^2 + x - 1))' = \\ &= \cos(x^2 + x - 1) \cdot (x^2 + x - 1)' = \cos(x^2 + x - 1) \cdot (2x + 1) \end{aligned}$$

Похідна функції, заданої параметрично

Функція називається заданою параметрично, якщо вона представлена залежністю величини y від величини x , кожна з яких визначається залежно від параметра t :

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in (\alpha, \beta).$$

Нехай функції $x = \varphi(t)$ і $y = \psi(t)$ визначені в деякому околі точки t_0 і диференційовані в цій точці, причому $\varphi'(t_0) \neq 0$. Якщо функція $x = \varphi(t)$ строго монотонна в цьому околі точки t_0 , то параметрично задана функція $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ в точці $x_0 = \varphi(t_0)$ має похідну:

$$\boxed{y'_x(x_0) = \frac{\psi'_t(t_0)}{\varphi'_t(t_0)}}$$

Приклад:

Знайти похідну функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = \ln(ctgt) \\ y = \frac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$$

$$y'_t = \left(\frac{1}{\cos^2 t} \right)' = (\cos^{-2} t)' = -2\cos^{-3} t \cdot (\cos t)' = -2\cos^{-3} t \cdot (-\sin t) = \\ = \frac{2\sin t}{\cos^3 t}$$

$$x'_t = (\ln(\operatorname{ctgt}))' = \frac{1}{\operatorname{ctgt}} \cdot (\operatorname{ctgt})' = -\frac{1}{\operatorname{ctgt} \cdot \sin^2 t} = -\frac{1}{\cos t \cdot \sin t}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{2\sin t \cdot \cos t \cdot \sin t}{\cos^3 t} = -2tg^2 t$$

Похідна функції неявно заданої

Нехай задано рівняння виду $F(x, y) = 0$, де $F(x, y)$ – функція двох змінних x і y . Якщо при кожному фіксованому значенні x із деякої множини D , існує значення y таке, що пара чисел (x, y) задовольняє дане рівняння, то кажуть, що рівняння $F(x, y) = 0$ визначає на множині D неявну функцію $y = \Phi(x)$.

В деяких випадках рівняння $F(x, y) = 0$ можна розв'язати відносно змінної y і отримати залежність $y = \Phi(x)$ у явному вигляді.

Приклад.

Нехай дано рівняння

$$xe^y + \ln(x) - 1 = 0.$$

З нього можна отримати залежність

$$e^y = \frac{1 - \ln(x)}{x} \\ y = \ln\left(\frac{1 - \ln(x)}{x}\right)$$

Остаточно

$$y = \ln(1 - \ln x) - \ln x.$$

Однак такий явний вираз y через x з використанням лише елементарних функцій можна отримати далеко не з будь-якого рівняння $F(x, y) = 0$.

Для того щоб знайти похідну y'_x функції $y = \Phi(x)$ заданої неявно рівнянням $F(x, y) = 0$ необхідно знайти похідну лівої і правої частини рівності, вважаючи, що x – вільна змінна, а y – функція $y = \Phi(x)$ від x (проміжний аргумент). Після чого необхідно виразити y з отриманої рівності. Зауважимо, що y'_x буде виражатися як функція змінних x і y .

Приклад.

Знайти похідну функції, яка задана неявно

$$y^2 + 2xy + 4 = 0$$

$$(y^2 + 2xy + 4)' = (0)'$$

$$2yy' + (2x)'y + 2xy' + (4)' = 0$$

$$2yy' + 2y + 2xy' = 0$$

$$y'(2y + 2x) + 2y = 0$$

$$y' = -\frac{2y}{2y + 2x} = -\frac{y}{y + x}$$

Логарифмічне диференціювання

Якщо функція визначена через операції множення, ділення та піднесення до степеня елементарних функцій, то при знаходженні похідної даної функції буває зручно перейти від явного виразу $y = f(x)$ залежності y від x до неявного у вигляді $\ln y = \ln f(x)$. Цей прийом диференціювання називають логарифмічним диференціюванням.

Приклад.

$$y = \frac{x^3(x^2 + 1)e^x}{(x - 1)\sqrt{3x + 5}}$$

$$\ln y = \ln \frac{x^3(x^2 + 1)e^x}{(x - 1)\sqrt{3x + 5}}$$

$$\ln y = \ln x^3 + \ln(x^2 + 1) + \ln e^x - \ln(x - 1) - \ln \sqrt{3x + 5}$$

$$\ln y = 3\ln x + \ln(x^2 + 1) + x - \ln(x - 1) - \frac{1}{2}\ln(3x + 5)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{y} \cdot y' &= 3 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x + 1 - \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3x + 5} \cdot 3 \\ \frac{1}{y} \cdot y' &= \frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2 + 1} + 1 - \frac{1}{x - 1} - \frac{3}{6x + 10} \\ y' &= y \cdot \left(\frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2 + 1} + 1 - \frac{1}{x - 1} - \frac{3}{6x + 10} \right) \\ y' &= \frac{x^3(x^2 + 1)e^x}{(x - 1)\sqrt{3x + 5}} \cdot \left(\frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2 + 1} + 1 - \frac{1}{x - 1} - \frac{3}{6x + 10} \right)\end{aligned}$$

Похідна степенево-показникового виразу

Прийом логарифмічного диференціювання зручно застосовувати до так званих степенево-показникових функцій виду

$$y = (u(x))^{v(x)}$$

Тобто,

$$\ln y = \ln(u(x))^{v(x)}$$

$$\ln y = v(x) \cdot \ln(u(x))$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$$

$$y' = y \cdot \left(v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) \right)$$

$$y' = (u(x))^{v(x)} \cdot \left(v'(x) \cdot \ln(u(x)) + \frac{v(x) \cdot u'(x)}{u(x)} \right)$$

Приклад.

Знайти похідну степенево-показникової функції

$$y = (\ln x)^{e^x}$$

$$\ln y = e^x \ln(\ln x)$$

$$\frac{y'}{y} = (e^x)' \ln(\ln x) + e^x (\ln(\ln x))'$$

$$\frac{y'}{y} = e^x \ln(\ln x) + e^x \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = y \cdot \left(e^x \ln(\ln x) + e^x \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$y' = (\ln x)^{e^x} \cdot e^x \cdot (\ln(\ln x)) + \frac{1}{x \cdot \ln x}$$

Диференціал

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 . Надамо аргументу приросту Δx так, щоб точка $x = x_0 + \Delta x$ належала цьому околу. Розглянемо приріст функції

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Якщо приріст функції $\Delta f(x_0)$ в точці x_0 можна подати у вигляді

$$\Delta f(x_0) = A(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(x_0, \Delta x) \cdot \Delta x,$$

де $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(x_0, \Delta x) = 0$ і число $A(x_0)$ не залежить від Δx ,

то функцію називають диференційованою в точці x_0 .

Другий доданок цієї формули є нескінченно малою вищого порядку порівняно з першим доданком:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x_0, \Delta x) \cdot \Delta x}{A(x_0) \cdot \Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x_0, \Delta x)}{A(x_0)} = \frac{0}{A(x_0)} = 0$$

тому перший доданок складає головну частину приросту функції.

Головна, лінійна відносно Δx частина приросту функції $f(x)$ в точці x_0 називається диференціалом цієї функції в точці x_0 і позначається $df(x_0)$. Таким чином:

$$df(x_0) = A(x_0) \cdot \Delta x.$$

Функція $f(x)$ диференційована в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли в цій точці існує похідна $f'(x_0)$. Причому, якщо функція $f(x)$ диференційована, то $A(x_0) = f'(x_0)$.

Отже, можна записати:

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Якщо диференціалом незалежної змінної x назвати за означенням диференціал функції $f(x) = x$, то

$$dx = x' \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$$

Відповідно, диференціал:

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx.$$

Похідна функції в точці x_0 дорівнює відношенню диференціала цієї функції в точці x_0 до диференціала аргументу:

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}}.$$

Наближені обчислення за допомогою диференціала

Оскільки диференціал є головною частиною приросту функції $f(x)$ в точці x_0 , то при досить малому Δx можна говорити про наближену рівність та її наслідок:

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$$

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x}$$

Останню формулу називають формулою наближених обчислень за допомогою диференціала.

Приклад.

Обчислити наближено за допомогою диференціала:

$$\sqrt[3]{27,54}$$

Розв'язок:

$$y = \sqrt[3]{x}, x = 27,54,$$

$$x = x_0 + \Delta x$$

$$x_0 = 27, \Delta x = 0,54$$

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27}$$

$$y(27) = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$y(27,54) \approx 3 + \frac{1}{27} \cdot 0,54 = 3,02.$$

3.1.3. Диференціальне числення функції багатьох змінних

Нехай $z = f(x, y)$ функція двох змінних x та y . Будемо вважати, що змінна x набула приросту Δx , а змінна y при цьому залишається незмінною.

Тоді різницю:

$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = \Delta z_x$ – називають частинним приростом функції по змінній x .

Аналогічно різницю:

$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta z_y$ – називають частинним приростом функції по змінній y .

Складемо відношення $\frac{\Delta z_x}{\Delta x}$ та $\frac{\Delta z_y}{\Delta y}$, знайдемо їх границі за умови $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$:

частинна похідна по змінній x від функції $z = f(x, y)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x} = z'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, f'_x;$$

частинна похідна по змінній y від функції $z = f(x, y)$:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\Delta z_y}{\Delta y} = z'_y, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, f'_y.$$

Правила знаходження частинних похідних

Частинну похідну за однією із змінних знаходять за правилами диференціювання функції однієї змінної, вважаючи іншу змінну константою.

Приклад.

1. Знайти частинні z'_x, z'_y від функції $z = 3y^3 + 7xy + \cos y$.

Розв'язок:

$$z'_x \Big|_{y = \text{const}} = (3y^3 + 7xy + \cos y)'_x = (3y^3)'_x + (7xy)'_x + (\cos y)'_x = 0 + 7y + 0 = 7y;$$

$$z'_y \Big|_{x = \text{const}} = (3y^3 + 7xy + \cos y)'_y = (3y^3)'_y + (7xy)'_y + (\cos y)'_y = 9y^2 + 7x - \sin y.$$

2. Знайти частинні z'_x, z'_y від функції $z = \cos y \cdot (9x^4 + y^2)$.

Розв'язок:

$$z'_x \Big|_{y = \text{const}} = (\cos y \cdot (9x^4 + y^2))'_x = \cos y \cdot (36x^3 + 0) = 36x^3 \cos y;$$

$$\begin{aligned} z'_y \Big|_{x = \text{const}} &= (\cos y)'_y \cdot (9x^4 + y^2) + \cos y (9x^4 + y^2)'_y \\ &= -\sin y (9x^4 + y^2) + \cos y (0 + 2y) = -\sin y (9x^4 + y^2) + 2y \cdot \cos y \end{aligned}$$

Частинні похідні складеної функції

Нехай функція $z = f(u, v)$ містить змінні, які є функціями двох незалежних змінних x та y . Частинні похідні такої функції, що є складеною, знаходять за формулами:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}},$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}}.$$

Приклад.

Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ складеної функції $z = \ln(3u^2 + v^2)$, де

$$u = 2x + y, v = xy.$$

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{6u}{3u^2 + v^2}, \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2v}{3u^2 + v^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2; \frac{\partial u}{\partial y} = 1; \frac{\partial v}{\partial x} = y; \frac{\partial v}{\partial y} = x;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{6u}{3u^2 + v^2} \cdot 2 + \frac{2v}{3u^2 + v^2} \cdot y = \frac{12u + 2v}{3u^2 + v^2} = \frac{12(2x+y) + 2xy}{3(2x+y)^2 + (xy)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6u}{3u^2 + v^2} \cdot 1 + \frac{2v}{3u^2 + v^2} \cdot x = \frac{6(2x+y) + 2x^2y}{3u^2 + v^2}.$$

Частинні похідні першого порядку неявної функції

Якщо функція задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$, то похідні неявної функції $z = f(x, y)$ обчислюють з використанням формул:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$$

Приклад.

Знайти частинні похідні першого порядку від неявної функції $z = f(x, y)$, заданої рівнянням $x^2 + 3y^2 - z^2 + 2xyz = 1$.

Розв'язання.

$$F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - z^2 + 2xyz - 1,$$

$$F'_x(x, y, z) = 2x + 2yz, F'_y(x, y, z) = 6y + 2xz, F'_z(x, y, z) = -2z + 2xy.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{2x + 2yz}{-2z + 2xy} = \frac{x + yz}{z - xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{6y + 2xz}{-2z + 2xy} = \frac{3y + xz}{z - xy}$$

Частинні диференціали

Частинний диференціал функції двох незалежних змінних $z = f(x, y)$ рівний добутку відповідної частинної похідної z'_x або z'_y на диференціал цієї змінної.

Позначають:

$$d_x z = z'_x dx,$$

$$d_y z = z'_y dy.$$

Повний диференціал функції двох змінних

Повний приріст функції двох незалежних змінних $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Функція $z = f(x, y)$ називається диференційованою в точці $M(x, y)$, якщо її повний приріст в цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y;$$

де A, B – дійсні числа, що не залежать від Δx , і Δy , α і β нескінченно малі функції від Δx , і Δy :

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0$$

Якщо $z = f(x, y)$ диференційована в точці $M(x, y)$, то вона має в цій точці частинні похідні і її приріст:

$$\Delta z = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y.$$

Щоб функція $z = f(x, y)$ була диференційованою в точці, необхідно, щоб вона мала в цій точці частинні похідні і достатньо, щоб вона була в цій точці неперервна.

Повним диференціалом dz диференційованої в точці $M(x; y)$ функції $z = f(x, y)$ називається лінійна відносно Δx і Δy частина повного приросту цієї функції в точці $M(x; y)$.

$$dz = A\Delta x + B\Delta y = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y = |\Delta x = dx, \Delta y = dy| = z'_x dx + z'_y dy$$

$$\boxed{dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y}$$

Приклад.

Знайти повний диференціал для функції

$$z = 3axy - x^3 - y^3$$

Розв'язок:

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y = (3ay - 3x^2)dx + (3ax - 3y^2)dy$$

3.2. Інтегральне числення функції однієї змінної

3.2.1. Інтегральне числення функції однієї змінної. Невизначений інтеграл

Означення первісної функції та невизначеного інтеграла

Функція $F(x)$ називається *первісною функції* $f(x)$ на проміжку $[a, b]$, якщо $F(x)$ диференційовна на $[a, b]$ і для $x \in [a, b]$:

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Якщо функція має первісну, то вона має безліч первісних, будь-які дві з них відрізняються одна від одної постійним доданком.

Відповідно, для даної функції $f(x)$ достатньо знайти тільки яку-небудь одну первісну функцію $F(x)$, щоб знати всі її первісні, так як вони відрізняються одна від одної сталими доданками. Отже, вираз $F(x) + C$, де C – довільна стала, являє собою загальний вигляд функції, яка має своєю похідною функцію $f(x)$ або диференціал $f(x)dx$.

Операція визначення первісних називається *невизначеним інтегруванням*, а вираз, що охоплює сукупність всіх первісних функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ і позначається

$$\int f(x)dx$$

де $f(x)$ – підінтегральна функція;

$f(x)dx$ – підінтегральний вираз;

x – змінна інтегрування.

З означення невизначеного інтеграла:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Властивості невизначеного інтеграла

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$;
2. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$;
3. $\int F(x)dx = F(x) + C$;
4. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$, де k - стала;
5. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;

Таблиця основних невизначених інтегралів

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$, зокрема:
 $\int dx = x + C$,
 $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$,
 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$.
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$.
 $\int e^x dx = e^x + C$.
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.
9. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$.
10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$.
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm A}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm A} \right| + C$.

$$12. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

Теорема про інваріантність формул інтегрування

Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ – диференційована функція, то

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

Ця властивість невизначеного інтеграла означає, що та чи інша формула для невизначеного інтеграла залишається справедливою, незважаючи на те, якою є змінна інтегрування – незалежною змінною, чи функцією, що має неперервну похідну.

Приклади:

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}} = \ln|x + \sqrt{x^2-3}| + C.$$

$$2. \int \sqrt{x+5}dx = \int \sqrt{x+5} d(x+5) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+5)^3} + C.$$

$$3. \int \frac{dx}{3+4x} = \frac{1}{4} \int \frac{d(3+4x)}{3+4x} = \frac{1}{4} \ln|3+4x| + C.$$

$$4. \int \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{4} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C.$$

$$5. \int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x dx = -\int (1 - \cos^2 x) d(\cos x) = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

$$6. \int (e^x + 1)^3 dx = \int (e^{3x} + 3e^{2x} + 3e^x + 1) dx = \int e^{3x} dx + 3 \int e^{2x} dx + 3 \int e^x dx + \int dx = \frac{1}{3} e^{3x} + \frac{3}{2} e^{2x} + 3e^x + x + C.$$

$$7. \int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin x} d(\sin x) = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} - \int \sin x d(\sin x) = \ln|\sin x| - \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

$$8. \int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x} dx = \int \frac{2 \cdot 2^x - 5 \cdot 5^x}{2^x \cdot 5^x} dx = 2 \int 5^{-x} dx - \frac{1}{5} \int 2^{-x} dx = -\frac{2}{5 \ln 5} \cdot 5^{-x} + \frac{1}{5 \ln 2} \cdot 2^{-x} + C.$$

$$9. \int \frac{x dx}{5+7x^2} = \frac{1}{14} \int \frac{d(5+7x^2)}{5+7x^2} = \frac{1}{14} \ln(5+7x^2) + C.$$

Метод інтегрування за допомогою введення нового аргументу (метод підведення під знак диференціала)

Даний метод передбачає виділення в підінтегральному виразі множника, який підводять під знак диференціала. Функція, яка залишається під знаком інтеграла, і диференціал повинні мати однаковий аргумент.

Інтегрування проводиться за алгоритмом:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))[\varphi(x)] = F(\varphi(x)) + C.$$

Приклади.

$$\begin{aligned} 1. \int x\sqrt{7-x^2}dx &= \left| xdx = -\frac{1}{2}d(7-x^2) \right| = -\frac{1}{2} \int (7-x^2)^{\frac{1}{2}} d(7-x^2) = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{(7-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}(7-x^2)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \int \frac{x^3}{5+x^4}dx &= \left| d(5+x^4) = 4x^3dx \Rightarrow x^3dx = \frac{1}{4}d(5+x^4) \right| = \\ &= \int \frac{\frac{1}{4}d(5+x^4)}{5+x^4} = \frac{1}{4} \ln|5+x^4| + C. \end{aligned}$$

$$3. \int \frac{\sin x dx}{1-\cos x} = \left| \sin x dx = d(1-\cos x) \right| = \int \frac{d(1-\cos x)}{1-\cos x} = \ln|1-\cos x| + C.$$

$$\begin{aligned} 4. \int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^x}} &= \left| d(1-e^x) = -e^x dx \Rightarrow e^x dx = -d(1-e^x) \right| = \\ &= - \int (1-e^x)^{-\frac{1}{2}} d(1-e^x) = -\frac{(1-e^x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -2\sqrt{1-e^x} + C. \end{aligned}$$

$$5. \int \frac{\arctg x dx}{1+x^2} = \left| \frac{dx}{1+x^2} = d(\arctg x) \right| = \int \arctg x d(\arctg x) = \frac{\arctg^2 x}{2} + C.$$

$$6. \int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x} dx = \left| \frac{dx}{x} = d(\ln x) \right| = \int \sqrt[3]{\ln x} d(\ln x) = \frac{3}{4} (\ln x)^{\frac{4}{3}} + C.$$

$$\begin{aligned} 7. \int \frac{\sin 2x}{4+\cos^2 x} dx &= \left| d(4+\cos^2 x) = 2\cos x \cdot (-\sin x) dx = -\sin 2x dx \right| = \\ &= - \int \frac{d(4+\cos^2 x)}{4+\cos^2 x} = -\ln|4+\cos^2 x| + C. \end{aligned}$$

Методи виділення цілої частини підінтегрального виразу та повного квадрату

Для зведення інтегралів до табличних застосовується метод виділення цілої частини підінтегрального виразу, якщо це інтеграли $\int \frac{Mx+N}{ax+b} dx$ та $\int \frac{Mx^2+Nx+K}{ax^2+b} dx, a \neq 0$.

Наприклад, для $f(x) = \frac{Mx+N}{ax+b}$:

$$\begin{aligned}\frac{Mx+N}{ax+b} &= \frac{1}{a} \cdot \frac{Mx+N}{x+\frac{b}{a}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{M\left(x+\frac{b}{a}\right) - M\frac{b}{a} + N}{x+\frac{b}{a}} = \frac{1}{a} \left[M - \frac{N - M\frac{b}{a}}{x+\frac{b}{a}} \right] = \\ &= \frac{M}{a} - \frac{N - M\frac{b}{a}}{a} \cdot \frac{1}{x+\frac{b}{a}}\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}\int \frac{Mx+N}{ax+b} dx &= \int \left[\frac{M}{a} - \frac{Na - Mb}{a^2} \cdot \frac{1}{x+\frac{b}{a}} \right] dx = \frac{M}{a} x - \frac{Na - Mb}{a^2} \int \frac{d\left(x+\frac{b}{a}\right)}{x+\frac{b}{a}} = \\ &= \frac{M}{a} x - \frac{Na - Mb}{a^2} \cdot \ln \left| x + \frac{b}{a} \right| + C\end{aligned}$$

Метод виділення повного квадрату дозволяє звести до табличних інтеграли $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} dx$ та $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ шляхом виділення повного квадрату в квадратному тричлені ($a \neq 0$):

$$\begin{aligned}ax^2 + bx + c &= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] = a \left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right] = \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a^2}\end{aligned}$$

Приклади.

$$1. \int \frac{x}{x-8} dx = \int \frac{x-8+8}{x-8} dx = \int \left(\frac{x-8}{x-8} + \frac{8}{x-8} \right) dx = x + 8 \ln|x-8| + C$$

$$2. \int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2-1+1-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{2}{x^2+1} \right) dx = x - 2 \arctg x + C$$

$$\begin{aligned} 3. \int \frac{x^4}{2-x} dx &= - \int \frac{x^4-16+16}{x-2} dx = - \int \frac{(x^2-4)(x^2+4)+16}{x-2} dx = \\ &= - \int \frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)+16}{x-2} dx = - \int (x+2)(x^2+4) dx - 16 \int \frac{dx}{x-2} = \\ &= - \int (x^3 + 2x^2 + 4x + 8) dx - 16 \int \frac{d(x-2)}{x-2} = \\ &= - \left(\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + 2x^2 + 8x \right) - 16 \ln|x-2| + C \end{aligned}$$

$$4. \int \frac{dx}{x^2+4x-5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2-9} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2-9} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x+2-3}{x+2+3} \right| + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-1}{x+5} \right| + C$$

$$\begin{aligned} 5. \int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{9})}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{-\left((x-\frac{1}{3})^2-\frac{1}{9}-\frac{8}{9}\right)}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{-\left((x-\frac{1}{3})^2-1\right)}} = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{d\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{1-\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{1}{3} \arcsin \left(x - \frac{1}{3} \right) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \int \frac{(3x-9)}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx &= 3 \int \frac{(x-3)}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx = |d(x^2-4x+5) = (2x-4)dx| = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{(2x-6)}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx = \frac{3}{2} \int \frac{(2x-4-2)}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx = \frac{3}{2} \int \frac{(2x-4)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}} - 2 \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}} = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2-4x+5)}{\sqrt{x^2-4x+5}} - 3 \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2+1}} = \\ &= 3\sqrt{x^2-4x+5} - 3 \ln |(x-2) + \sqrt{(x-2)^2+1}| + C \end{aligned}$$

Метод інтегрування частинами

Якщо функції $u=u(x)$ і $v=v(x)$ мають неперервні похідні $u'(x)$ і $v'(x)$, то має місце формула:

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}.$$

Ця формула називається формулою інтегрування частинами. Вона дає змогу від інтегрування виразу $u dv$ переходити до інтегрування виразу $v du$.

При застосуванні формули потрібно розкласти підінтегральний вираз на множники u і dv , з яких перший диференціюється, а другий інтегрується при переході до інтеграла у правій частині. Як правило, потрібно намагатися, щоб інтегрування диференціала dv було зручним і щоб $\int vdu$ був або табличним, або зводився до табличного відомими способами.

Під час знаходження функції v за диференціалом dv вважають, що стала $C=0$, оскільки на кінцевий результат ця стала не впливатиме.

Розглянемо деякі типи інтегралів, які зручно знаходити методом інтегрування частинами:

1) інтеграли вигляду

$$\int P_n(x)e^{kx}dx,$$

$$\int P_n(x)\sin kx dx,$$

$$\int P_n(x)\cos kx dx,$$

де $P_n(x)$ – многочлен степеня n від x , k – дійсне число.

У таких інтегралах використовують: $\boxed{u = P_n(x)}$.

2) інтеграли вигляду

$$\int P_n(x)\ln x dx,$$

$$\int P_n(x)\arcsin kx dx,$$

$$\int P_n(x)\arctg x dx,$$

де $P_n(x)$ – многочлен степеня n від x .

У таких інтегралах використовують: $\boxed{dv = P_n(x)dx}$.

3) інтеграли вигляду

$$\int e^{\alpha x}\sin \beta x dx,$$

$$\int e^{\alpha x}\cos \beta x dx,$$

де α, β – дійсні числа.

Після двократного застосування формули утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Розв'язуючи це рівняння, знаходять шуканий інтеграл.

Приклади:

$$1. \int x^2 \cos 7x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2, dv = \cos 7x dx, \\ du = 2x dx, v = \frac{1}{7} \sin 7x \end{array} \right| = \frac{1}{7} x^2 \cdot \sin 7x -$$

$$\frac{2}{7} \int x \sin 7x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, dv = \sin 7x dx, \\ du = dx, v = -\frac{1}{7} \cos 7x \end{array} \right| = \frac{1}{7} x^2 \cdot \sin 7x -$$

$$\frac{2}{7} \left(-\frac{1}{7} x \cos 7x - \int \left(-\frac{1}{7} \right) \cos 7x dx \right) = \frac{1}{7} x^2 \cdot \sin 7x + \frac{2}{49} x \cos x - \frac{2}{343} \sin 7x + C$$

$$2. \int x \ln(x+5) dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln(x+5), dv = x dx, \\ du = \frac{dx}{x+5}, v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} x^2 \ln(x+5) -$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{x+5} = \frac{1}{2} x^2 \ln(x+5) - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2-25)+25}{x+5} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(x+5) -$$

$$\frac{1}{2} \int \left(x - 5 + \frac{25}{x+5} \right) dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(x+5) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{5}{2} x - \frac{25}{2} \ln|x+5| + C.$$

Метод заміни змінної або метод підстановки

Якщо $\int f(x) dx = F(x) + C, x \in (a, b)$ і функція $x = \varphi(t)$ визначена та має неперервну похідну, то

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C, t \in (\alpha, \beta).$$

Дана теорема застосовується, як правило, одним із таких двох способів:

$$1) \int g(x) dx = \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = t, \\ \varphi'(x) dx = dt \end{array} \right| = \int f(t) dt = F(t) +$$

$$C = F(\varphi(x)) + C$$

$$2) \int g(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \psi(t), \\ dx = \psi'(t) dt, \\ t = \psi^{-1}(x) \end{array} \right| = \int g(\psi(t)) \psi'(t) dt = G(t) + C =$$

$$G(\psi^{-1}(x)) + C$$

Для функції $x = \psi(t)$ є обернена функція $t = \psi^{-1}(x)$.

Після обчислення невизначеного інтеграла методом підстановки потрібно від введеної змінної інтегрування перейти до заданої змінної.

Таким чином, при інтегруванні методом заміни змінної використовують підстановки двох видів:

$$\boxed{t = \varphi(x)} \text{ і } \boxed{x = \psi(t)}$$

Ці підстановки підбирають так, щоб нові інтеграли, які одержані після перетворень, були табличними, або зводились до табличних відомими методами.

Приклад:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{2-x} = t, \\ 2-x = t^2, \\ x = 2-t^2, \\ dx = -2t dt \end{array} \right] = - \int \frac{(2-t^2)^2 2t dt}{t} = -2 \int (4 - 4t^2 + t^4) dt =$$

$$-2 \left(4t - 4 \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right) + C = -2 \left(4\sqrt{2-x} - 4 \frac{\sqrt{(2-x)^3}}{3} + \frac{\sqrt{(2-x)^5}}{5} \right) + C$$

Інтегрування раціональних дробів

Раціональним дробом або раціональною функцією називається відношення двох алгебраїчних многочленів $\frac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени. Раціональний дріб називається правильним, якщо степінь многочлена $P(x)$ менший степеня многочлена $Q(x)$. Якщо навпаки, то дріб називається неправильним.

Будь-який неправильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можна представити у вигляді суми многочлена і правильного раціонального дроби виділенням цілої частини з дроби:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Найпростішими (елементарними) є такі раціональні функції:

1. $\frac{A}{x-a}$;
2. $\frac{A}{(x-a)^m}$, де $m \in N, m > 1$;
3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$;
4. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, де $n \in N, n > 1$; A, B, a, p, q – дійсні числа.

Інтегрування дробів:

$$1. \quad \int \frac{A}{x-a} dx = \int \frac{A}{x-a} d(x-a) = A \ln|x-a| + C;$$

$$2. \quad \int \frac{A}{(x-a)^m} dx = A \int (x-a)^{-m} d(x-a) = \\ = -\frac{A}{m-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C, m \geq 2;$$

$$3. \quad \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q} dx = \left| \begin{array}{l} x + \frac{p}{2} = t \\ dx = dt \\ a^2 = q - \frac{p^2}{4} \end{array} \right| = \int \frac{At+B-\frac{Ap}{2}}{(t)^2+a^2} dt =$$

$$= \frac{A}{2} \int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{A}{2} \ln(t^2+a^2) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \cdot$$

$$\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C = \frac{A}{2} \ln(x^2+px+q) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C;$$

$$4. \quad \text{У випадку } \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx \text{ теж використовується заміна:}$$

$$x + \frac{p}{2} = t; \quad a^2 = q - \frac{p^2}{4}.$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2tdt}{(t^2+a^2)^n} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} =$$

$$= -\frac{A}{2(n-1)} (t^2+a^2)^{1-n} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) T_n(t),$$

$$\text{де } T_n(t) = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

Приклади.

$$1. \quad \text{Знайти невизначений інтеграл } \int \frac{2x+7}{x^2+4x+7} dx.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+7}{x^2+4x+7} dx &= \left| \begin{array}{l} (x^2+4x+7)' = 2x+4 \\ d(x^2+4x+7) = (2x+4)dx \end{array} \right| \\ &= \\ &= \int \frac{2x+4+3}{x^2+4x+7} dx = \int \frac{2x+4}{x^2+4x+7} dx + \int \frac{3}{x^2+4x+7} dx = \\ &= \int \frac{d(x^2+4x+7)}{x^2+4x+7} + \\ &\quad + 3 \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+3} = \ln|x^2+4x+7| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

3.2.2. Визначений інтеграл. Застосування визначеного інтеграла

Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

Задача про площу криволінійної трапеції

Нехай на відрізку $[a, b]$ задано функцію $y = f(x) \geq 0$.

Фігура $aABb$, що обмежена графіком функції $y = f(x) \geq 0$ і відрізками прямих $y = 0$, $x = a$, $x = b$, називається *криволінійною трапецією*.

Площу криволінійної трапеції знаходять наступним чином:

Відрізок $[a, b]$ розбивають точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ на n відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, \dots, n$. В кожному з цих відрізків вибирають довільну точку ξ_i , $i=1, \dots, n$. Отже, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Площа прямокутника з основою Δx_i висотою $f(\xi_i)$ буде рівна $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Сума площ таких прямокутників $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ складе площу ступінчатої фігури.

Отже, площа криволінійної трапеції S :

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Задача про роботу змінної сили

Нехай на матеріальну точку діє сила $F(x)$, яка стала за напрямом і неперервно змінюється за величиною, і нехай під дією сили $F(x)$ точка

перемістилася вдовж осі Ox з т. a в т. b ($a < b$). Обчислимо роботу A цієї сили на відрізку $[a, b]$.

Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ на n відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, \dots, n$.

Довжину кожного відрізка вибираємо настільки малою, щоб можна було знехтувати зміною сили. Тоді робота, виконана цією силою на відрізку, буде визначена як $F(\xi_i) \cdot \Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Отже,

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Задача про шлях, що пройшла точка

Нехай точка рухається по прямій зі швидкістю $v = v(t)$ і v - неперервна функція. Шлях S , що пройшла точка за проміжок часу від моменту $t = a$ до моменту $t = b$ ($a < b$) можна визначити, розглядаючи такі малі проміжки часу $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, на які розбивається весь час руху t , на яких зміною швидкості можна знехтувати.

Шлях, який проходить матеріальна точка за такий проміжок часу, буде рівний: $v(\xi_i) \cdot \Delta t_i$, $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Отже,

$$S = \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(\xi_i) \cdot \Delta t_i$$

Задача про масу неоднорідного стержня

Нехай маємо прямолінійний стержень, який лежить на осі Ox в межах відрізка $[a, b]$.

Густина стержня $\rho = \rho(x)$ - неперервна функція від $x \in [a, b]$. Знайдемо масу m стержня.

Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ на n відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, \dots, n$, настільки малих, що можна знехтувати зміною густини.

Тоді маса частини стержня довжиною $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ буде рівна $\rho(\xi_i) \cdot \Delta x_i$.

Враховуємо неоднорідність розподілу маси стержня по довжині:

$$m \sim \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Отже,

$$m = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Означення та умови існування визначеного інтеграла

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a, b]$, $a < b$. Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ на n відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, \dots, n$. На кожному з відрізків візьмемо довільну точку ξ_i і побудуємо суму: $\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Цей вираз називається інтегральною сумою функції $f(x)$, яка відповідає даному розбиттю відрізка $[a, b]$ і даному вибору точок ξ_i .

Нехай $\max \Delta x_i \rightarrow \lambda$.

Якщо існує скінченна границя сум при $\lambda \rightarrow 0$, яка не залежить ні від розбиття відрізка $[a, b]$ на частини, ні від вибору точок ξ_i , то ця границя називається *визначеним інтегралом* функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і позначається:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

$f(x)$ називається інтегрованою функцією на відрізку $[a, b]$,

a і b – нижня і верхня межа інтегрування,

$[a, b]$ – відрізок інтегрування.

Відповідно:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Достатня умова інтегрованості: якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона інтегрована на цьому відрізку.

Якщо функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[a, b]$ і неперервна на ньому скрізь, крім скінченного числа точок, то вона інтегрована на цьому відрізку.

Таким чином:

– площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x) \geq 0$:

$$S = \int_a^b f(x)dx;$$

– робота змінної сили $F(x)$:

$$A = \int_a^b F(x)dx;$$

– шлях, який проходить матеріальна точка за час від $t_1 = a$ до $t_2 = b$:

$$S = \int_a^b v(xt)dt;$$

– маса неоднорідного стержня з густиною $\rho = \rho(x)$:

$$m = \int_a^b \rho(x)dx.$$

Властивості визначеного інтеграла

– Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz;$

- $\int_a^a f(x)dx = 0$;
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

(за умови, що функція $f(x)$ інтегрована на максимальному з відрізків $[a,b]$, $[a,c]$, $[a,d]$);

– якщо функція $f(x)$ інтегрована на проміжку $[a, b]$, то і $k \cdot f(x)$, де $k = \text{const}$, також інтегрована на цьому проміжку:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx;$$

– якщо функція $f(x)$ і $g(x)$ інтегрована на проміжку $[a, b]$, то і $f(x) + g(x)$ також інтегрована на цьому проміжку:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

– якщо функція $f(x)$ інтегрована на проміжку $[a,b]$, $f(x) \geq 0$ і $a < b$,

то:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0;$$

– якщо функція $f(x)$ і $g(x)$ інтегрована на проміжку $[a, b]$, $f(x) \leq g(x)$ і $a < b$, то:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx;$$

– якщо функція $f(x)$ інтегрована на проміжку $[a, b]$ і $a < b$, то:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Формула Ньютона – Лейбніца

Якщо $F(x)$ є якою-небудь первісною для неперервної функції $f(x)$, коли $x \in [a, b]$, то справедлива формула:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбніца дає практично зручний спосіб обчислення визначеного інтеграла: визначений інтеграл від неперервної функції дорівнює різниці значень довільної її первісної, обчислених від верхньої і нижньої межі інтегрування.

Приклади: обчислити інтеграли

$$1. \int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \cdot \left((1+x)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \left((1+1)^{\frac{3}{2}} - (1+0)^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2}{3} \left(2^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2}{3} (\sqrt{8} - 1);$$

$$2. \int_0^4 \left(1 + e^{\frac{x}{4}} \right) dx = \int_0^4 dx + \int_0^4 e^{\frac{x}{4}} dx = x \Big|_0^4 + 4 \cdot e^{\frac{x}{4}} \Big|_0^4 = (4 - 0) + (4e - 4 \cdot 1) = 4e;$$

$$3. \int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}} = \frac{1}{3} \int_{-1}^7 \frac{d(3x+4)}{\sqrt{3x+4}} = \frac{1}{3} \int_{-1}^7 \frac{d(3x+4)^{\frac{1}{2}}}{(3x+4)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3} \sqrt{3x+4} \Big|_{-1}^7 = \frac{2}{3} \sqrt{25} - \frac{2}{3} \sqrt{1} = \frac{10}{3} - \frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

Інтегрування частинами та метод заміни змінної у визначеному інтегралі

Якщо функції $u=u(x)$, $v=v(x)$ мають на відрізку $[a,b]$ неперервну похідну, то:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Приклади:

$$\begin{aligned}
1. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2a}} (x+3) \sin(ax) dx &= \left| \begin{array}{l} u = x+3 \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin(ax) dx \Rightarrow v = -\frac{1}{a} \cos ax \end{array} \right| = \\
&= -\frac{x+3}{a} \cos ax \Big|_0^{\frac{\pi}{2a}} + \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2a}} \cos ax dx = -\frac{\frac{\pi}{2a}+3}{a} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{3}{a} \cos 0 + \\
&= \frac{1}{a^2} \sin ax \Big|_0^{\frac{\pi}{2a}} = 0 + \frac{3}{a} + \frac{1}{a^2} \sin \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{3}{a} + \frac{1}{a^2} = \frac{3a+1}{a^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^2 x dx &= \\
&= \left| \begin{array}{l} x = u \Rightarrow du = (x)' dx = dx \\ \tan^2 x dx = dv \Rightarrow \\ v = \int \tan^2 x dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \\ = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x \end{array} \right| = \\
&= (x(\tan x - x)) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x - x) dx = \\
&= \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) - \left(-\ln |\cos x| - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} - \left(-\ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{\pi^2}{32} \right) = \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} - \ln \sqrt{2} + \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} - \ln \sqrt{2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx &= \left| \begin{array}{l} (1 + \ln x)^2 = u \Rightarrow du = 2(1 + \ln x) \cdot \frac{1}{x} dx \\ dx = dv \Rightarrow v = x \end{array} \right| = \\
&= (x(1 + \ln x)^2) \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot 2(1 + \ln x) \cdot \frac{1}{x} dx = \\
&= (e(1+1)^2 - (1 + \ln 1)^2) - \int_1^e 2(1 + \ln x) dx = \\
&= \left[\begin{array}{l} 1 + \ln x = u \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ 2dx = dv \Rightarrow v = 2x \end{array} \right] = 4e - 1 - \left(2x(1 + \ln x) \Big|_1^e - \int_1^e 2x \frac{dx}{x} \right) =
\end{aligned}$$

$$= 4e - 1 - (4e - 2) + 2x \Big|_1^e = 4e - 1 - 4e + 2 + 2e - 2 = 2e - 1$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} e^{2x} = u \Rightarrow 2e^{2x} dx \\ \cos x dx = dv \Rightarrow \\ v = \sin x \end{array} \right| = e^{2x} \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$- 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin x dx = \left| \begin{array}{l} e^{2x} = u \Rightarrow du = 2e^{2x} dx \\ \sin x dx = dv \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= e^{\pi} - 2 \left(-e^{2x} \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx = \right)$$

$$= e^{\pi} - 2(-e^{\pi} \cdot 0 + e^0 \cdot 1) - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx = e^{\pi} - 2 - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx = e^{\pi} - 2 - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx \Rightarrow 5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx = e^{\pi} - 2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx = \frac{1}{5} (e^{\pi} - 2).$$

Якщо виконуються умови:

1) функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$;

2) $\psi(x)$ і $x' = \psi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$;

3) $\psi(\alpha) = a, \psi(\beta) = b, a < \psi(x) < b$, коли $t \in [\alpha, \beta]$, то

справджується рівність:

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\psi(t)) \psi'(t) dt}.$$

Якщо при знаходженні невизначеного інтеграла за допомогою підстановки $x = \psi(t)$ у первісній функції необхідно було від змінної t повернутися до x , то при обчисленні визначеного інтеграла замість цього

треба змінити межі інтегрування. Нижня межа α знаходиться як розв'язок рівняння $a = \psi(t)$, а верхня межа β як розв'язок рівняння $b = \psi(t)$.

Якщо $\psi(x)$ не монотонна, то може статися, що ці рівняння дадуть кілька різних пар значень α і β , у такому випадку можна взяти будь-яку пару.

Приклади:

обчислити інтеграл шляхом заміни змінної

$$1. \quad \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = t ; \\ x = t^2, dx = 2tdt ; \\ x_1 = 0 \rightarrow t_1 = \sqrt{0} = 0 ; \\ x_2 = 4 \rightarrow t_2 = \sqrt{4} = 2. \end{array} \right] = \int_0^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2 \int_0^2 \frac{(t+1)-1}{t+1} dt =$$

$$= 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 2(t - \ln|t+1|) \Big|_0^2 = 2(2 - \ln 3 - 0 + \ln 1) =$$

$$= 4 - 2 \ln 3$$

$$2. \quad \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx = \left[\begin{array}{l} \boxed{x = 2\sin t} \Rightarrow dx = 2\cos t dt, \\ \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2|\cos t| \\ x_1 = 0 \rightarrow t_1 = \arcsin \frac{x}{2} = \arcsin 0 = 0; \\ x_2 = 1 \rightarrow t_2 = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}. \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2|\cos t| \cdot 2\cos t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos^2 t dt = |2\cos^2 t = 1 + \cos 2t| =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t) dt = 2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 2 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} - 0 - 0 \right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$3. \quad \int_0^{\ln 5} \left(\frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 4} \right) dx = \left[\begin{array}{l} \sqrt{e^x - 1} = t \Rightarrow e^x - 1 = t^2 \Rightarrow e^x = t^2 + 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \ln|t^2 + 1| \Rightarrow dx = \frac{2t}{t^2 + 1} \\ x_1 = 0 \rightarrow t_1 = \sqrt{e^0 - 1} = 0; \\ x_2 = \ln 5 \rightarrow t_2 = \sqrt{e^{\ln 5} - 1} = 2. \end{array} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 \frac{(t^2 + 1)t \cdot \frac{2t}{t^2 + 1}}{t^2 + 5} dt = \int_0^2 \frac{2t^2}{t^2 + 5} dt = 2 \int_0^2 \frac{t^2 + 5 - 5}{t^2 + 5} dt = \\
&= 2 \int_0^2 dt - 10 \int_0^2 \frac{dt}{t^2 + 5} = 2t \Big|_0^2 - 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} \Big|_0^2 = 4 - 2\sqrt{5} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

4.1. Основні поняття і означення

Диференціальними називаються рівняння, які пов'язують між собою незалежну змінну, шукану функцію і похідні або диференціали цієї функції.

Якщо невідома функція є функцією однієї змінної, то диференціальне рівняння називається *звичайним*. Надалі розглядатимемо тільки звичайні диференціальні рівняння.

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної, яка входить в дане рівняння.

Диференціальне рівняння n -го порядку, не розв'язане відносно найвищої похідної, в загальному вигляді подається так:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Якщо це рівняння можна розв'язати відносно найвищої похідної, то воно має вигляд:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд:

$$F(x, y, y') = 0$$

або

$$y' = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$dy = f(x, y)dx.$$

Якщо функція $f(x, y)$ є дробом $f(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$, то рівняння можна переписати у симетричній формі:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Загальним розв'язком такого диференціального рівняння в області D називається функція $y = \varphi(x, C)$, яка в результаті підстановки в диференціальне рівняння перетворює його на тотожність по x при будь-яких допустимих значеннях сталої C .

Процес знаходження розв'язку називається інтегруванням диференціального рівняння.

Частинним називається будь-який розв'язок $y = \varphi(x, C)$, який одержується із загального розв'язку при певному значенні сталої $C = C_0$.

Задачею Коші називається задача знаходження частинного розв'язку $y = \varphi(x)$, диференціального рівняння, що задовольняє умову $y(x_0) = y_0$. Умова $y(x_0) = y_0$ називається початковою умовою диференціального рівняння.

Графік розв'язку диференціального рівняння називається *інтегральною кривою* цього рівняння.

Якщо функція $f(x, y)$ і її похідна f'_y неперервні в області D , то розв'язок диференціального рівняння з початковою умовою $y(x_0) = y_0$ існує і єдиний.

Точки, в яких не виконуються ця умова, називаються особливими.

4.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння виду

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

називається диференціальним рівнянням з *відокремлюваними змінними*, якщо функції $M(x, y)$ та $N(x, y)$ можна подати у вигляді:

$$M(x, y) = M_1(x) \cdot N_1(y), N(x, y) = M_2(x) \cdot N_2(y),$$

Аналогічно рівняння виду $y' = f(x, y)$, де $f(x, y) = M(x) \cdot N(y)$ є диференціальним рівнянням з *відокремлюваними змінними*.

Рівняння розв'язується шляхом відокремлення змінних. За допомогою алгебраїчних перетворень необхідно досягти того, щоб біля dx множником була функція, яка залежить тільки від змінної x , а біля dy – функція, яка залежить тільки від змінної y .

Рівняння можна подати у вигляді:

$$M_1(x) \cdot N_1(y)dx + M_2(x) \cdot N_2(y)dy = 0$$

Отримаємо диференціальне рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C, C = \text{const},$$

$$\int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = - \int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + C$$

Приклад:

Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння:

$$xy(1+x^2)y' = 1+y^2$$

Розв'язання:

$$xy(1+x^2) \frac{dy}{dx} = 1+y^2$$

$$xy(1+x^2)dy = (1+y^2)dx$$

$$\frac{y}{(1+y^2)} dy = \frac{dx}{x(1+x^2)} \Rightarrow \int \frac{y}{(1+y^2)} dy = \int \frac{dx}{x(1+x^2)}$$

$$\int \frac{y}{(1+y^2)} dy = \frac{1}{2} \int \frac{d(y^2+1)}{(1+y^2)} = \frac{1}{2} \ln(1+y^2) + \ln|C_1|$$

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{1+x^2} = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + \ln|C_2|$$

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{A(1+x^2) + (Bx+C)x}{x(1+x^2)} = \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x(1+x^2)} \Rightarrow$$

$$A = 1, B = -1, C = 0$$

$$\frac{1}{2} \ln(1+y^2) + \ln|C_1| = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + \ln|C_2|$$

$$\ln(1+y^2) = \ln \frac{|x|}{|1+x^2|} + \ln C^2, \text{ де } \ln C^2 = 2 \ln|C_2| - 2 \ln|C_1| = \ln \frac{C_2^2}{C_1^2}$$

$$1+y^2 = \frac{C^2 x^2}{x^2+1}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{C^2 x^2}{x^2+1} - 1}.$$

4.3. Однорідні диференціальні рівняння

Рівняння виду

$$y' = f(x, y)$$

називається *однорідним* диференціальним рівнянням, якщо функція $f(x, y)$ – однорідна.

Функція називається *однорідною*, якщо при множенні аргументів на довільний параметр $t \neq 0$ значення функції не змінюється, тобто:

$$f(x, y) = f(tx, ty).$$

Приклад:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, f(tx, ty) = \frac{t^2 xy}{t^2(x^2 + y^2)} = \frac{xy}{x^2 + y^2} = f(x, y).$$

Однорідні диференціальні рівняння розв'язуються за допомогою підстановки

$$\boxed{y = ux}, \text{ де } u = u(x).$$

Відповідно,

$$y' = x \frac{du}{dx} + u.$$

Рівняння водиться до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад.

Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння:

$$xy' = \frac{xy - y^2}{2y - 2x}$$

Розв'язання:

Рівняння однорідне і інтегрується заміною:

$$y = ux$$

$$y' = x \frac{du}{dx} + u$$

$$x \frac{du}{dx} + u = \frac{x(ux) - (ux)^2}{2xy - 2x^2}$$

$$x \frac{du}{dx} + u = \frac{x(ux) - (ux)^2}{2x(ux) - 2x^2}$$

$$x \frac{du}{dx} + u = \frac{ux^2 - u^2x^2}{2ux^2 - 2x^2}$$

$$x \frac{du}{dx} + u = \frac{u - u^2}{2u - 2} \Rightarrow \frac{du}{dx} + u = \frac{1}{2} \cdot \frac{u - u^2}{u - 1}$$

$$x \frac{dy}{dx} + u = -\frac{1}{2} \cdot u$$

$$x \frac{du}{dx} = -\frac{3}{2} \cdot u \Rightarrow x \frac{du}{dx} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{u}{x} \Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{3}{2} \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{u} = -\frac{3}{2} \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|u| = -\frac{3}{2} \ln|x| + \ln|C|$$

$$u = x^{-\frac{3}{2}} \cdot C \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{C}{x\sqrt{x}}$$

$$y = \frac{C}{\sqrt{x}}$$

4.4. Лінійні диференціальні рівняння. Рівняння Бернуллі

Рівняння виду

$$y' + p(x)y = q(x),$$

де $p(x)$, $q(x)$ відомі функції, називається *лінійним* диференціальним рівнянням,

Якщо $q(x) = 0$, то рівняння називається *однорідним*. Якщо $q(x) \neq 0$, то рівняння називається *неоднорідним*.

Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді добутку двох функцій $v=v(x)$ та $u=u(x)$ (метод Бернуллі).

Підставляючи

$$\boxed{y = uv},$$

$$y' = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx},$$

отримаємо

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + p(x)uv = q(x).$$

У лівій частині рівняння винесемо v за дужки:

$$u \frac{dv}{dx} + v \left(\frac{du}{dx} + p(x)u \right) = q(x).$$

Так як одну з функцій можна вибирати довільно, то виберемо таку функцію u , щоб вираз у дужках дорівнював нулю:

$$\frac{du}{dx} + p(x)u = 0.$$

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язавши його, знайдемо функцію $u = u(x)$ (обираємо найпростіший відмінний від нуля частинний розв'язок).

Підставивши знайдену функцію $u(x)$ у рівняння, знову одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$u(x) \cdot \frac{dv}{dx} = q(x).$$

Розв'язавши його, отримаємо функцію $v = v(x, C)$. Тоді

$$y = u(x) \cdot v(x, C).$$

Приклад:

Знайти розв'язок задачі Коші:

$$y' + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{2x^2}{1+x^2}, y(0) = \frac{2}{3}$$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} y &= uv, y' = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \\ u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + \frac{2xuv}{1+x^2} &= \frac{2x^2}{1+x^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow u \frac{dv}{dx} + v \left(\frac{du}{dx} + \frac{2xu}{1+x^2} \right) &= \frac{2x^2}{1+x^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{du}{dx} + \frac{2xu}{1+x^2} &= 0 \Rightarrow \int \frac{du}{u} = -2 \int \frac{x dx}{1+x^2} \\ \ln|u| &= -2 \cdot \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \\ \ln|u| &= -\ln(1+x^2) \\ u &= (1+x^2)^{-1} = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Підставляємо знайдену функцію $u(x)$ в рівняння і знайдемо функцію $v(x)$:

$$\begin{aligned} u \frac{dv}{dx} &= \frac{2x^2}{1+x^2} \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \frac{dv}{dx} = \frac{2x^2}{1+x^2} \Rightarrow \\ dv &= 2x^2 dx \end{aligned}$$

$$v = \int 2x^2 dx = \frac{2}{3}x^3 + C.$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння такий:

$$y = uv = \frac{1}{1+x^2} \left(\frac{2}{3}x^3 + C \right)$$

Для знаходження частинного розв'язку підставимо задані значення змінних $x = 0, y = \frac{2}{3}$ (початкові умови) в знайдений загальний розв'язок рівняння, звідки знайдемо значення довільної сталої C :

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{1+0^2} \left(\frac{2}{3}0^3 + C \right) \Rightarrow C = \frac{2}{3}.$$

Значення сталої C підставляємо у загальний розв'язок рівняння і записуємо шуканий частинний розв'язок:

$$y = \frac{1}{1+x^2} \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3} \right)$$

Рівняння Бернуллі

Диференціальне рівняння виду

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, n \in R, n \neq 1,$$

називається рівнянням Бернуллі.

Розв'язок рівняння шукають, як і розв'язок лінійного диференціального рівняння, використовуючи метод Бернуллі:

$$\boxed{y = u \cdot v}, \text{ де } u = u(x), v = v(x).$$

Приклад:

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' + \frac{y}{x} = \ln x \cdot y^2.$$

Розв'язання:

Задане рівняння є рівнянням Бернуллі, тому використаємо заміну

$$\boxed{y = u \cdot v}, y' = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + \frac{uv}{x} = \ln x \cdot u^2 v^2$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = 0$$

$$\int \frac{du}{u} = - \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|u| = -\ln x \Rightarrow u = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} \frac{dv}{dx} = \ln x \cdot \frac{1}{x^2} v^2$$

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{\ln x}{x} dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{\ln x}{x} dx$$

$$-\frac{1}{v} = \frac{\ln^2 x}{2} + C \Rightarrow v = -\frac{2}{\ln^2 x + 2C}$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y = \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{2}{\ln^2 x + 2C} \right) = -\frac{2}{x(\ln^2 x + 2C)}$$

Отже загальний розв'язок заданого диференціального рівняння такий:

$$y = -\frac{2}{x(\ln^2 x + 2C)}$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Діскант В.І. / В.І. Діскант, Л.Р. Береза, О.П. Грижук, Л.М. Захаренко. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії – К.: Вища шк., 2001. – 303 с.
2. Навчально-методичний посібник до виконання контрольних робіт з вищої математики для студентів технічних спеціальностей заочної

- форми навчання / Укл.: Р.М. Дідковський, В.С. Ковтуненко, Н.В. Олексієнко, І.В. Синько; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси: ЧДТУ, 2014. – 174 с.
3. Клепко В.Ю., Голець В.Л. Вища математика в прикладах і задачах: Навчальний посібник. 2-ге видання. - К.: Центр учбової літератури, 2009. - 594 с.
 4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навч. посіб – К.: А.С.К., 2001. – 648 с.
 5. Конспект лекцій з вищої математики. Лінійна алгебра та аналітична геометрія /Укл.: Олексієнко Н.В., Дідковський Р.М., Кондратьєва О.М.; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси: ЧДТУ, 2016. –94с.
 6. Вступ до математичного аналізу. Навчально-методичний посібник з дисципліни «Вища математика» для здобувачів вищої освіти бакалаврського освітнього рівня технічних спеціальностей усіх форм навчання / [Електронний ресурс] / Упоряд.: Дідковський Р.М., Олексієнко Н.В., Кондратьєва О.М.; Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси: ЧДТУ, 2018. – 114с.
 7. Практикум з інтегрального числення: Частина І. Невизначений інтеграл / Укл.: Р.М. Дідковський, В.В. Сисоєнко, В.О. Щерба. – Черкаси: ЧДТУ, 2005. – 72 с.
 8. Практикум з інтегрального числення: Частина ІІ. Визначений інтеграл / Укл.: Р.М. Дідковський, В.В. Сисоєнко, В.О. Щерба. –Черкаси: ЧДТУ, 2005. – 66 с.
 9. Введення в математичний аналіз: Практикум для студентів технічних спеціальностей. / Укладачі Діскант В. І., Кондратьєва О. М. - Черкаси: ЧДТУ, 2010.- 60с.
 - 10.Методичні рекомендації до практичних занять з вищої математики «Аналітична геометрія на площині і в просторі» для здобувачів освітнього ступеня “бакалавр” для здобувачів освітнього ступеня “бакалавр”

спеціальностей 161, 181, 192, 193. [Електронний ресурс] / [упоряд. : Т.І.Бутенко, С.О.Колінько, В.А.Ващенко; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси : ЧДТУ, 2023. – 48 с.

11. Вища математика: конспект лекцій для здобувачів освітнього ступеня “бакалавр” зі спеціальностей 161, 181, 183, 205. [Електронний ресурс] / [упоряд. : Т.І. Бутенко, С.О. Колінько; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси : ЧДТУ, 2025. – 82 с.