

Міністерство освіти і науки України  
Черкаський державний технологічний університет

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**БАЗІЛО КОСТЯНТИН ВІКТОРОВИЧ**

УДК 621.373.826.032:534.232.082.73

**ДИСЕРТАЦІЯ**

**ТЕОРІЯ ПОБУДОВИ ДИСКОВИХ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ  
ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ З РОЗДІЛЕНИМИ ЕЛЕКТРОДАМИ ДЛЯ  
КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ КРИТИЧНОГО ЗАСТОСУВАННЯ**

05.13.05 – Комп'ютерні системи та компоненти

Подається на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,  
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

\_\_\_\_\_ К. В. Базіло

Науковий консультант: **Петрищев Олег Миколайович**  
доктор технічних наук, професор

Черкаси-2020

## Анотація

*Базіло К.В.* Теорія побудови дискових п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами для комп'ютерних систем критичного застосування. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 05.13.05 – комп'ютерні системи та компоненти. – Черкаський державний технологічний університет Міністерства освіти і науки України, Черкаси, 2020.

Системи, що використовуються на об'єктах критичного застосування, таких як охорона здоров'я, енергетика, транспорт, комунальне господарство, космос, робототехніка і національна безпека, повинні бути дуже надійними. Використання комп'ютерних систем в цих критичних областях вимагає їх високої надійності, яка може досягатися шляхом розробки відмовостійких систем.

Стабільна робота комп'ютерних систем, особливо критичного застосування, багато в чому залежить від достовірності функціонування як програмної, так і апаратної частини цих комп'ютерних систем. Невід'ємними елементами апаратної частини комп'ютерних систем, від характеристик яких значною мірою залежать точність і надійність їх роботи, є перетворювачі.

Об'єктами, де необхідне застосування таких наднадійних перетворювачів є: автоматичні міжпланетні станції, автономні глибоководні плаваючі об'єкти, будь-які інші об'єкти, доступ до яких сильно утруднений, неможливий або надзвичайно небезпечний для людини. П'єзоелектричні матеріали завдяки своїм унікальним властивостям знаходять численні застосування в області інженерії, гідро- та електроакустики, робототехніки та медицини.

До недавнього часу науково-технічна база проектування і вдосконалення п'єзокерамічних перетворювачів обмежувалася, в основному, лише зміною форми, розмірів і матеріалу п'єзоелементів, а також виду порушуваних коливань. Існуючі підходи підвищення ефективності п'єзоелектричних перетворювачів, зокрема розширення робочого діапазону, підвищення чутливості та рівня вихідного сигналу, вимагають неминучого компромісу із вимогами до мініатюризації цих перетворювачів, забезпечення яких є особливо важливим для об'єктів критичного застосування. Основна перевага використання в комп'ютерних системах перетворювачів з п'єзокерамічних матеріалів обумовлена їх особливою структурою, що дозволяє реалізувати в одному такому елементі принципово різні схеми.

Окрім того, розвиток і підвищення ефективності комп'ютерних систем критичного застосування неможливі без попереднього рішення задачі їх математичного моделювання.

Визначено, що в даний час відсутні надійні і достовірні методи побудови математичних моделей п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами для комп'ютерних систем критичного застосування, які могли б використовуватися в якості теоретичних основ розрахунку характеристик і параметрів даного класу функціональних елементів сучасної п'єзоелектроніки.

Незважаючи на різноманіття досліджень, аналіз існуючих підходів показує, що на сьогодні не повною мірою вирішено низку актуальних питань, пов'язаних з важливими теоретичними аспектами й практичною реалізацією високоефективних п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування. Наразі існує наступне протиріччя: необхідність підвищення ефективності перетворювачів (розширення робочого діапазону, підвищення чутливості та рівня вихідного сигналу), з одного боку, та дотримання вимог щодо мініатюризації цих перетворювачів, з іншого боку.

Подолати цю суперечність можна шляхом вирішення актуальної науково-прикладної проблеми створення високоефективних п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування з одночасним підвищенням ступеня інтеграції та гібридизацією експлуатаційних властивостей.

У *вступі* розкрито суть та стан наукової проблеми, обґрунтовано актуальність дисертаційної роботи, сформульовано мету та задачі досліджень, викладено наукові положення, які виносяться на захист, розкрито наукову новизну та практичну цінність отриманих результатів, наведено дані про публікації та апробацію роботи.

У *першому розділі* виконано огляд літературних джерел та джерел Internet щодо сучасного стану проблеми створення високоефективних п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування, досліджено вимоги до комп'ютерних систем об'єктів критичного застосування та існуючі моделі дискових п'єзоелектричних перетворювачів. На основі аналізу визначені особливості застосування п'єзоелектричних перетворювачів в комп'ютерних системах критичного застосування та тенденції їх розвитку, в результаті чого сформульовано мету і задачі дисертаційної роботи.

У *другому розділі* розроблено метод експериментального визначення матеріальних констант п'єзокераміки, без достовірних даних про які не можливе отримання змістовних і достовірних кількісних оцінок параметрів фізичного стану п'єзоелектричних перетворювачів комп'ютерних систем критичного застосування, та побудовано математичну модель електричного імпедансу п'єзокерамічного диску, що коливається в широкому діапазоні частот.

При загальних початкових припущеннях отримано вираз для розрахунку електричного імпедансу коливального п'єзокерамічного диска,

що враховує радіальний і аксіальний компоненти вектора зміщення матеріальних частинок деформованої п'єзокераміки.

Вперше дана оцінка діелектричної проникності в області низьких частот через матеріальні константи, які використовуються для опису високочастотного напружено-деформованого стану п'єзокераміки.

У *третьому розділі* побудовано математичні моделі п'єзоелектричних перетворювачів з кільцевим та дисковим електродами в первинному електричному колі та багатосекційних дискових п'єзоелектричних перетворювачів з можливістю групового включення секцій, що розширює можливість побудови багатофункціональних п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування.

Проведено порівняння результатів математичного моделювання частотної залежності модуля коефіцієнта трансформації п'єзокерамічних перетворювачів з дисковим та кільцевим електродами в первинному електричному колі та результатів експериментального вимірювання (похибка визначення відношення частот не перевищує  $\Delta\zeta = 2,3\%$ ), тобто спостерігається задовільний збіг теоретично і експериментально визначених відношень частот резонансів.

У *четвертому розділі* побудовано математичну модель п'єзокерамічного перетворювача з секторним електродуванням робочої поверхні диска, який працює на невісесиметричних планарних коливаннях.

Запропоновано сукупність обчислювальних процедур, що спираються на фундаментальні принципи механіки та електродинаміки, послідовне виконання яких дозволяє побудувати математичну модель дискового п'єзоелектричного перетворювача з секторними електродами.

Експериментальні дослідження п'єзокерамічного перетворювача з секторним електродуванням робочої поверхні диска показали, що в міру зменшення кута розкриття сектора у формуванні напружено-деформованого стану диска починають приймати все більше число невісесиметричних мод, і

число резонансів після першого вісесиметричного радіального резонансу зростає.

*У п'ятому розділі* розглянуто конструкцію і особливості побудови математичної моделі біморфного дискового п'єзоелектричного перетворювача з симетричним електричним навантаженням у вторинному електричному колі, що, спираючись на фундаментальні принципи механіки та електродинаміки, дозволяє враховувати геометричні, фізико-механічні та електричні параметри реальної конструкції п'єзоелектричного перетворювача, принцип дії якого заснований на використанні вісесиметричних коливань поперечного вигин

Розглянуто технологію додаткових елементів, при якій не потрібна будь-яка доробка п'єзоелемента, а зміна характеристик перетворювача здійснюється за рахунок зовнішніх для п'єзоелемента кіл. Вивчено вплив додаткових індуктивності й ємності на амплітудно-частотні характеристики п'єзоелектричного перетворювача, досліджено вплив на амплітудно-частотні характеристики п'єзоелектричного перетворювача додаткового опору, підключеного на його вхід і між п'єзоелектричним перетворювачем та загальним проводом, що дозволяє управляти полозою частот пропускання перетворювача. Використання конструкції з розділеними електродами дозволило підвищити чутливість датчику тиску у 1,5-2 рази.

*У шостому розділі* запропоновано метод модифікації струмопровідних електродів елементів із п'єзоелектричної кераміки та досліджено стан поверхні п'єзоелектричних перетворювачів, а також розміри сформованих в ній структур за допомогою атомно-силової мікроскопії. Отримали подальший розвиток методи модифікації дискових п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування шляхом використання поліелектродної конструкції, технології додаткових елементів, просторової енергосилової структури п'єзоелектричних перетворювачів,

технології термовакuumного наплення, що забезпечує можливість синтезу п'єзоелектричних перетворювачів з покращеними характеристиками.

За допомогою енергосилового методу синтезу розроблено та досліджено п'єзоелектричні перетворювачі з частковим електродуванням поверхні. Технологія додаткових елементів дозволила підвищити рівень звукового тиску для п'єзоелектричного перетворювачів з додатковою індуктивністю приблизно на 5-10 дБ у порівнянні з перетворювачами без індуктивності. Для схем з додатковими індуктивностями та з кутом  $\alpha \approx 90^\circ$  звуковий тиск на 10-15 дБ вище, ніж для схем з традиційним підключенням.

У висновках сформульовано основні результати дисертаційного дослідження.

У додатках наводяться акти про практичне впровадження результатів дисертаційної роботи та схема побудови математичних моделей дискових п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами.

*Наукова новизна дисертаційного дослідження* полягає у наступному:

1. Удосконалено математичну модель електричного імпедансу коливального п'єзокерамічного диску, що коливається в широкому діапазоні частот, та на цій основі розроблено метод експериментального визначення матеріальних констант п'єзокераміки, який, на відміну від відомих методів, дозволяє в рамках одного експерименту визначити три модуля пружності, два п'єзомодулі і одне значення діелектричної проникності для отримання змістовних і достовірних кількісних оцінок параметрів фізичного стану п'єзоелектричних перетворювачів.

2. Вперше побудовано математичні моделі п'єзоелектричних перетворювачів з кільцевим і дисковим електродами в первинному електричному колі та багатосекційних дискових п'єзоелектричних перетворювачів з можливістю групового включення секцій та з урахуванням негативного зворотного електроакустичного зв'язку та значень імпедансу електричного навантаження, що розширює можливість побудови

багатофункціональних п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування.

3. Вперше побудовано математичну модель дискового п'єзоелектричного перетворювача з секторними електродами, що містить мінімальне число спрощуючих реальну ситуацію припущень, і дозволяє виконувати прогнозування характеристик перетворювача, який працює на невісесиметричних планарних коливаннях.

4. Удосконалено математичну модель біморфного дискового п'єзоелектричного перетворювача з симетричним електричним навантаженням у вторинному електричному колі, що, спираючись на фундаментальні принципи механіки та електродинаміки, дозволяє враховувати геометричні, фізико-механічні та електричні параметри реальної конструкції п'єзоелектричного перетворювача, принцип дії якого заснований на використанні вісесиметричних коливань поперечного вигину.

5. Отримали подальший розвиток методи модифікації дискових п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування шляхом використання поліелектродної конструкції, технології додаткових елементів, просторової енергосилової структури п'єзоелектричних перетворювачів, технології термовакуумного напилення, що забезпечує можливість синтезу таких п'єзоелектричних перетворювачів з покращеними характеристиками.

*Практичне значення одержаних результатів.* Результати дисертаційного дослідження становлять наукову основу для технічної реалізації та впровадження у виробництво та навчальний процес методичного, математичного та технічного забезпечення процесу проектування перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування на основі п'єзоелектричних елементів з розділеними електродами. Практична цінність отриманих результатів полягає в наступному:



– розроблені методи та моделі, схемні та конструктивні рішення розширили науково-технічну базу проектування дискових п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами для комп'ютерних систем критичного застосування;

– розроблено метод проведення та обробки результатів експериментального визначення матеріальних констант п'єзокераміки (спосіб визначення фізико-механічних констант п'єзокерамічних матеріалів захищений патентом України на корисну модель № 119993), що дозволило отримати змістовні і достовірні кількісні оцінки параметрів фізичного стану п'єзоелектричних елементів та підвищити точність їх характеристик у 2-2,5 рази;

– створено алгоритм та програмно реалізовано математичні моделі дискових п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами, що дозволило оцінювати характеристики п'єзоелектричних перетворювачів з урахуванням негативного зворотного електроакустичного зв'язку та значень імпедансу електричного навантаження, які раніше не враховувалися, та зменшити відносну похибку на 2 – 3%;

– запропоновано нові схемотехнічні рішення п'єзоелектричних перетворювачів поліелектродної конструкції (трансформаторного типу) з використанням технології додаткових елементів та просторової енергосилової структури (п'єзоелектричні перетворювачі захищені патентами України на корисну модель №№ 67640, 97752), використання яких дозволило підвищити рівень вихідного сигналу на 15-20 дБ порівняно з перетворювачами, побудованими за традиційною схемою;

– отримано зразки дискових п'єзоелектричних перетворювачів з нанесеними методом термовакуумного напылення струмопровідними електродами, якість та експлуатаційні характеристики яких підтверджено методом АСМ.

*Ключові слова:* комп'ютерна система, об'єкт критичного застосування, п'єзоелектричний перетворювач, дисковий п'єзоелемент, методи модифікації, синтез, вихідні характеристики.

### **Summary**

*Bazilo C.V.* Theory of constructing the piezoelectric disk transducers with separated electrodes for critical application computer systems. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The dissertation for the degree of Doctor of Technical Sciences, specialty 05.13.05 –Computer Systems and Components. – Cherkasy State Technological University of the Ministry of Education and Science of Ukraine, Cherkasy, 2020.

Systems used in critical applications such as healthcare, energy, transportation, utilities, space, robotics and national security must be very reliable. The use of computer systems in these critical areas requires their high reliability, which can be achieved by developing fault-tolerant systems.

Stable operation of computer systems, especially of critical applications, largely depends on the reliability of the operation of both the software and hardware of these computer systems. Transducers are integral elements of the hardware of computer systems, the characteristics of which largely determine the accuracy and reliability of their operation.

The objects where it is necessary to use such ultra-reliable transducers are: automatic interplanetary stations, autonomous deep-sea objects, any other objects, access to which is very difficult, impossible or extremely dangerous for humans.

Due to their unique properties, piezoelectric materials find numerous applications in the fields of engineering, hydro- and electroacoustics, robotics and medicine.

Until recently, the scientific and technical basis of the design and improvement of piezoelectric transducers was limited, mainly, only by changing the shape, sizes and material of the piezoelectric elements, as well as the type of excited vibrations. Existing approaches to increasing the efficiency of piezoelectric transducers, in particular, expanding the operating range, increasing the sensitivity and level of the output signal, require an inevitable compromise with the requirements for miniaturization of these transducers, the provision of which is especially important for critical applications. The main advantage of using transducers made from piezoceramic materials in computer systems is due to their special structure, which allows implementing fundamentally different schemes in one such element.

In addition, the development and improvement of the efficiency of critical application computer systems is impossible without first solving the problem of their mathematical modelling.

It is determined that at present there are no reliable methods for constructing mathematical models of piezoelectric transducers with separated electrodes for critical application computer systems that could be used as the theoretical basis for calculating the characteristics and parameters of this class of functional elements of modern piezoelectronics.

Despite the variety of studies, analysis of existing approaches shows that at present, a number of topical issues related to important theoretical aspects and the practical implementation of highly efficient piezoelectric transducers for critical application computer systems have not been fully resolved. Now there is the following contradiction: the need to increase the efficiency of transducers (expanding the operating range, increasing the sensitivity and level of the output signal), on the one hand, and observing the requirements for miniaturization of these transducers, on the other hand.

This contradiction can be overcome by solving the urgent scientific and applied problem of creating highly efficient piezoelectric transducers for critical application computer systems while simultaneously increasing the degree of integration and hybridizing of operational properties.

*The introduction* reveals the essence and state of the scientific problem, substantiates the relevance of the dissertation, formulates the purpose and objectives of the research, sets out the scientific provisions to be defended, reveals the scientific novelty and practical value of the results, provides data on publications and approbation of the work.

*The first section* reviews literature and Internet sources on the current state of the problem of creating highly efficient piezoelectric transducers for critical application computer systems, highlights the requirements for critical application computer systems and existing models of disk piezoelectric transducers. Based on the analysis, the features of the application of piezoelectric transducers in computer systems of critical application and the trends of their development are determined. As a result of this the goal and objectives of the dissertation are formulated.

*The second section* presents a method for experimental determination of material constants of piezoceramics, without reliable data on which it is impossible to obtain meaningful and reliable quantitative estimates of physical state of piezoelectric transducers for critical application computer systems. The mathematical model of electrical impedance of piezoceramic disk, which oscillates in a wide frequency range, is constructed.

Under general initial assumptions, an expression for calculating the electrical impedance of an oscillatory piezoceramic disk taking into account the radial and axial components of the displacement vector of the material particles of the deformed piezoceramics is obtained.

The dielectric constant in the low-frequency region through the material constants used to describe the high-frequency stress-strain state of piezoceramics is estimated for the first time.

*The third section* discusses mathematical models of piezoelectric transducers with ring and disk electrodes in primary electrical circuit and multisectional disk piezoelectric transducers with the possibility of group connection of sections taking into account negative electroacoustic feedback and electric load impedance values. These expands the possibilities of constructing multifunctional piezoelectric transducers for critical application computer systems.

The results of mathematical modelling of frequency dependence of the transformation coefficient modulus of piezoelectric transducers with disk and ring electrodes in the primary electrical circuit are compared with the results of experimental measurement (the error in determining the frequency ratio does not exceed  $\Delta\zeta = 2,3\%$ ). Satisfactory agreement of theoretically and experimentally determined resonance frequency ratios is observed.

*The fourth section* presents a mathematical model of disk piezoelectric transducer with sector electrodes, operating on non-axisymmetric planar oscillations.

A set of computational procedures based on the fundamental principles of mechanics and electrodynamics, the sequential implementation of which allows us to build a mathematical model of piezoelectric disk transducer with sector electrodes, is proposed.

Experimental studies of piezoceramic transducer with sector electrodes show that as the angle of the sector decreases, more and more non-axisymmetric modes begin to take part in the formation of the stress-strain state of the disk and the number of resonances after the first axisymmetric radial resonance increases.

*The fifth section* discusses the design and construction features of mathematical model of bimorph disk piezoelectric transducer with symmetric electrical load in the secondary circuit. This, based on fundamental principles of mechanics and electrodynamics, allows to take into account the geometrical, mechanical and electrical parameters of the real design of piezoelectric transducer, the principle of which is based on the use of axisymmetric bending oscillations.

The technology of additional elements is considered. Wherein the rework of piezoelectric element is not required, and the characteristics of the transducer are changed due to external circuits for piezoelectric element. The effect of additional inductance and capacitance on the amplitude-frequency characteristics of piezoelectric transducer is studied. The influence of additional resistance connected to the input as well as between the piezoelectric transducer and the common wire on the amplitude-frequency characteristics of piezoelectric transducer is studied. This allows controlling the frequency band of the transducer. Using a design with separated electrodes allowed to increase the sensitivity of the pressure sensor by 1.5-2 times.

*The sixth section* presents a method for modifying the conductive electrodes of elements made of piezoelectric ceramics. The surface state of piezoelectric transducers, as well as the dimensions of the structures formed in them are investigated using atomic force microscopy. Methods for modifying disk piezoelectric transducers for critical application computer systems by using a polyelectrode design, additional element technology, spatial energy-power structure of piezoelectric transducers received further development, which makes it possible to synthesize piezoelectric transducers with improved characteristics.

Using the energy-power synthesis method, piezoelectric transducers with partial covered surfaces are developed and studied. The technology of additional elements has allowed to increase the sound pressure level for piezoelectric transducers with additional inductance of about 5-10 dB compared to transducers without inductance. For circuits with an additional inductances and with an angle  $\alpha \approx 90^\circ$ , the sound pressure is 10-15 dB higher than for circuits with a traditional connection.

The main results of the study are formulated in *conclusions*.

The *appendices* present acts on the practical implementation of the results of dissertation and the principles of constructing mathematical models of piezoelectric transducers with separated electrodes.

*The scientific novelty of the dissertation research is as follows:*

1. The mathematical model of the electrical impedance of piezoelectric disk oscillating in a wide frequency range was improved, and on this basis, a method for the experimental determination of the material constants of piezoceramics was developed. This method, unlike the known ones, allows in one experiment to determine three elastic moduli, two piezomoduli and one value of dielectric constant to obtain reliable quantitative estimates of physical state parameters of disk piezoelectric transducers.

2. For the first time, mathematical models of piezoelectric transducers with ring and disk electrodes in primary electrical circuit and multisectional disk piezoelectric transducers with the possibility of group connection of sections taking into account negative electroacoustic feedback and electric load impedance values were developed. These expand the possibilities of constructing multifunctional piezoelectric transducers for critical application computer systems.

3. For the first time, a mathematical model of disk piezoelectric transducer with sector electrodes, constructed with a minimum number of assumptions that simplify the real situation, was developed. This allows predicting the characteristics of the transducer operating on non-axisymmetric planar oscillations.

4. The mathematical model of bimorph piezoelectric transducer with symmetric electrical load in the secondary circuit was improved. This, based on fundamental principles of mechanics and electrodynamics, allows to take into account the geometrical, mechanical and electrical parameters of the real design of piezoelectric transducer, the principle of which is based on the use of axisymmetric bending oscillations.

5. Methods for modifying disk piezoelectric transducers for critical application computer systems by using a polyelectrode design, additional element technology, spatial energy-power structure of piezoelectric transducers received further development, which makes it possible to synthesize piezoelectric transducers with improved characteristics.

*The practical significance of the results.* The results of the dissertation research constitute the scientific basis for the technical implementation and implementation in production and educational process of methodological, mathematical and technical support for the design process of transducers for critical application computer systems based on piezoelectric elements with separated electrodes. The practical value of the results is as follows:

- the developed methods and models, schematic and design solutions have expanded the scientific and technical basis of design of disk piezoelectric transducers with separated electrodes for computer systems of critical application;

- a method for conducting and processing the results of experimental determination of the material constants of piezoelectric ceramics was developed (the method for determining the physicomachanical constants of piezoelectric ceramics is protected by patent of Ukraine for utility model No. 119993), which made it possible to obtain meaningful and reliable quantitative estimates of the physical state of piezoelectric elements and increase the accuracy by 2-2.5 times;

- an algorithm was created and mathematical models for disk piezoelectric transducers with separated electrodes were implemented, it made it possible to evaluate the characteristics of piezoelectric transducers taking into account negative electroacoustic feedback and electrical load impedance values that were not previously taken into account, and reduce the relative error by 2-3%;

- new circuit solutions of piezoelectric transducers of polyelectrode design (transformer type) using the technology of additional elements and spatial energy-power structure are proposed (piezoelectric transducers are protected by patents of Ukraine for utility model No. 67640, 97752), the use of which allowed to increase the output signal level by 15-20 dB compared with transducers built according to the traditional scheme;

- samples of disk piezoelectric transducers with conductive electrodes deposited by thermal vacuum deposition were obtained, the quality and operational characteristics of which were confirmed by the AFM method.



*Keywords:* computer system, critical application object, piezoelectric transducer, disk piezoelectric element, modification methods, synthesis, output characteristics.

### Список публікацій здобувача

[1] О. Н. Петрищев и К. В. Базило, *Принципы и методы математического моделирования колеблющихся пьезоэлектрических элементов*, ЧП Гордиенко Е.И. Черкаскы, 2019, 408 с.

*Здобувачем розроблено методи математичного моделювання коливальних п'єзоелектричних елементів.*

[2] О. Петрищев та К. Базіло, *Основи розрахунку та проектування дискових п'єзотрансформаторів*, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2019, 170 с.

*Здобувачем розроблено методи розрахунку та проектування дискових п'єзоелектричних трансформаторів.*

[3] О. Н. Петрищев и К. В. Базило, "Принципы и методы расчета передаточных характеристик дисковых пьезоэлектрических трансформаторов. Часть 2. Методика расчета параметров и характеристик простейшего дискового пьезоэлектрического трансформатора", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 4, сс. 10–23, 2015.

*Здобувачем побудовано математичну модель п'єзоелектричного дискового трансформатора.*

[4] О. Н. Петрищев и К. В. Базило, "Определение электрического импеданса пьезокерамического диска и его расчет в области низких частот", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 3, сс. 24–35, 2016.

*Здобувачем побудовано математичну модель електричного імпедансу п'єзоелектричного диска в області низьких частот.*

[5] C. Bazilo, A. Zagorskis, O. Petrishchev, Y. Bondarenko, V. Zaika, and Y. Petrushko, "Modelling of Piezoelectric Transducers for Environmental Monitoring", in *Proceedings of 10th International Conference "Environmental Engineering"*, Vilnius Gediminas Technical University, Lithuania, 2017, doi: 10.3846/enviro.2017.008. (**Scopus**)

*Здобувачем розроблено конструкції п'єзоелектричних дискових перетворювачів з розділеними електродами та метод визначення фізичних та механічних констант п'єзокерамічних матеріалів для моніторингу навколишнього середовища.*

[6] О. Н. Петрищев и К. В. Базило, "Математическая модель многосекционного пьезоэлектрического трансформатора с кольцевыми электродами во вторичных электрических цепях", *Вісник Черкаського державного технологічного університету, № 1*, сс. 11–24, 2017.

*Здобувачем побудовано математичну модель багатосекційного дискового п'єзоелектричного трансформатора при груповому включенні секцій.*

[7] O. N. Petrishchev and C. V. Bazilo, "Methodology of Determination of Physical and Mechanical Parameters of Piezoelectric Ceramics", *J. Nano-Electron. Phys.*, vol. 9, issue 3, pp. 03022-1-03022-6, 2017, doi: 10.21272/jnep.9(3).03022. (**Scopus**)

*Здобувачем розроблено метод експериментального визначення матеріальних констант п'єзокераміки, який дозволяє в рамках одного експерименту визначити три модуля пружності, два п'єзомодулі і одне значення діелектричної проникності.*

[8] О. Н. Петрищев и К. В. Базило, "Принципы и методы построения математических моделей дисковых пьезоэлектрических трансформаторов с секторными электродами", *Вісник Черкаського державного технологічного університету, № 2*, сс. 33–44, 2017.

*Здобувачем розроблено схему побудови математичної моделі дискового п'єзоелектричного трансформатора з секторними електродами в первинному та вторинному електричних колах.*

[9] К. В. Базіло, "Принципи розрахунку електричного імпедансу коливального п'єзокерамічного диску в області середніх частот", *Радіоелектроніка, інформатика, управління, № 4*, сс. 15–25, 2017. (**Web of Science**)

[10] О. Н. Петрищев и К. В. Базіло, "Расчет электрического импеданса дискового пьезокерамического трансформатора с закороченным секторным электродом во вторичной электрической цепи", *Вісник Черкаського державного технологічного університету, № 4*, сс. 47–62, 2017.

*Здобувачем побудовано математичну модель електричного імпедансу дискового п'єзоелектричного трансформатора з закороченим секторним електродом у вторинному електричному колі.*

[11] К. В. Базіло, "Дослідження електричного імпедансу п'єзоелектричного диска з секторними електродами", *Вісник Черкаського державного технологічного університету, № 1*, сс. 41–45, 2018.

[12] К. В. Базіло, "Дослідження електричного імпедансу п'єзоелектричного диску в області середніх частот", *Вісник Черкаського державного технологічного університету, № 2*, сс. 100–104, 2018.

[13] С. Bazilo, "Calculation of parameters of tensely deformed state of disk piezoelements with surfaces partially covered by electrodes", *Machines. Technologies. Materials: International scientific journal*, vol. 12, issue 9, pp. 362–366, 2018.

[14] К. В. Базіло, "Дослідження впливу навантаження та розмірів електродів п'єзоелектричного диска на його амплітудно-частотні характеристики", *Вісник Черкаського державного технологічного університету, № 3*, сс. 15–20, 2018.

[15] К. В. Базіло, С. О. Білокінь, М. О. Бондаренко, та В. В. Медяник, "Дослідження мікроелектромеханічних п'єзоелектричних структур методом атомно-силової мікроскопії", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 3, сс. 21–26, 2018.

*Здобувачем проведено дослідження поверхні п'єзоелектричних перетворювачів методом атомно-силової мікроскопії.*

[16] К. В. Базіло, "Розрахунок коефіцієнта трансформації п'єзокерамічного трансформатора з секторними електродами", *Вісник Житомирського державного технологічного університету*, № 2, сс. 179–184, 2018.

[17] К. В. Базіло, "Схема розрахунку дискового п'єзоелемента з частковим електродуванням поверхонь", *Вісник Хмельницького національного університету*, № 6, т. 1, сс. 271–281, 2018.

[18] Bazilo S., "Principles and methods of the calculation of transfer characteristics of disk piezoelectric transformers", *Радіоелектроніка, інформатика, управління*, № 4, сс. 7–22, 2018. **(Web of Science)**

[19] V. V. Medianyuk, Yu. Yu. Bondarenko, S. V. Bazilo, and M. O. Bondarenko, "Research of Current-Conducting Electrodes of Elements from Piezoelectric Ceramics Modified by the Low-Energy Ribbon-Shaped Electron Stream", *J. Nano-Electron. Phys.*, vol. 10, issue 6, pp. 06012-1-06012–6, 2018, doi: 10.21272/jnep.10(6).06012. **(Scopus)**

*Здобувачем встановлено закономірності впливу структурних перетворень, що відбуваються при модифікуванні струмопровідних електродів елементів із п'єзоелектричних керамік стрічковим електронним потоком низької енергії на експлуатаційні характеристики.*

[20] О. М. Петрищев, та К. В. Базіло, "Побудова моделі п'єзоелектричного дискового трансформатора з кільцевим електродом в первинному електричному колі", *Вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут»*. Серія: Приладобудування, № 56(2), сс. 45–49, 2018.

*Здобувачем проведено розрахунок коефіцієнта трансформації п'єзоелектричного трансформатора з кільцевим електродом в первинному електричному колі.*

[21] К. В. Базіло, "Розрахунок електричного імпедансу п'єзокерамічного диску в області високих частот", *Вісник Кременчуцького національного університету ім. М. Остроградського*, № 5, сс. 9–16, 2018.

[22] О. Н. Петрищев и К. В. Базіло, "Математическое описание биморфного пьезоэлектрического элемента", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 1, сс. 48–63, 2019.

*Здобувачем отримано рішення задачі про порушення коливань поперечного вигину в біморфному п'єзоелектричному елементі.*

[23] O. Petrishchev and C. Bazilo, "Modelling of bimorph piezoelectric elements for informational systems", *Mathematical Modeling: International scientific journal*, issue 1, pp. 25–29, 2019.

*Здобувачем розроблено конструкцію й особливості математичного опису біморфного п'єзоелектричного елемента.*

[24] К. В. Базіло, "Дослідження характеристик біморфних п'єзоелектричних перетворювачів", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 2, сс. 5–11, 2019.

[25] О. М. Петрищев та К. В. Базіло, "Побудова математичної моделі біморфного п'єзоелектричного трансформатора", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 3, сс. 5–14, 2019.

*Здобувачем побудовано математичну модель біморфного п'єзоелектричного трансформатора, що працює з використанням коливань поперечного вигину.*

[26] В. М. Шарапов, К. В. Базіло, Ж. В. Сотула, и В. Е. Снитюк, "Исследование пьезоэлектрических преобразователей с добавочными колебательными контурами", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 1, сс. 35–38, 2013.

*Здобувачем розроблено конструкції п'єзоелектричного перетворювача з додатковими коливальними контурами.*

[27] В. М. Шарапов, К. В. Базило, Ж. В. Сотула, А. С. Ткаченко, В. Г. Савин и И. О. Моргун, "Методы синтеза пьезоэлектрических преобразователей: метод добавочных элементов. Индуктивность + емкость", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 2, сс. 59–62, 2011.

*Здобувачем розроблено метод синтезу п'єзоелектричних перетворювачів.*

[28] В. М. Шарапов, В. В. Туз, К. В. Базило, и А. С. Ткаченко, "Схемотехническое моделирование пьезоэлектрических преобразователей с добавочным сопротивлением", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 4, сс. 74–76, 2011.

*Здобувачем проведено дослідження п'єзоелектричних перетворювачів з додатковим опором.*

[29] V. Sharapov, A. Vladišauskas, K. Bazilo, L. Kunitskaya, and Zh. Sotula, "Methods of synthesis of piezoceramic transducers: spatial energy force structure of piezoelement", *Ultrasound, Kaunas, Lithuania, No. 4*, pp. 44–50, 2009.

*Здобувачем розроблено метод проектування п'єзокерамічних перетворювачів з урахуванням енергосилової структури та багатофункціональний перетворювач.*

[30] В. М. Шарапов, О. Н. Петрищев, К. В. Базило, Ж. В. Сотула, и А. И. Маштапа, "Классификация пьезоэлектрических трансформаторов", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 2, сс. 58–61, 2014.

*Здобувачем розроблено класифікацію п'єзоелектричних трансформаторів на основі енергосилової структури.*

[31] В. М. Шарапов, К. В. Базило, Л. Г. Куницкая, Ж. В. Сотула, и С. А. Филимонов, "Сумматоры на основе дискового мономорфного пьезотрансформатора", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 4, сс. 61–64, 2009.

*Здобувачем розроблено конструкції суматорів на основі дискового мономорфного п'єзоелектричного перетворювача.*

[32] В. М. Шарапов, Ж. В. Сотула, Л. Г. Куницкая, и К. В. Базило, "Об одном способе создания низкочастотных акустических колебаний с помощью пьезокерамического излучателя", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 1, сс. 62–65, 2010.

*Здобувачем розроблено метод отримання низькочастотних акустичних коливань за допомогою п'єзоелектричних перетворювачів.*

[33] K. V. Bazilo, O. N. Petrishchev, Yu. Yu. Bondarenko, L. G. Kunytska, and V. V. Medianik, "The research of piezoelectric electrodes for vibroacoustic interference therapy", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 2, сс. 12–15, 2015.

*Здобувачем розроблено конструкції та проведено дослідження п'єзоелектричних перетворювачів для віброакустичної терапії.*

[34] V. Sharapov, R. Kažys, A. Vladišauskas, K. Bazilo, and D. Romanenko, "Adders on a basis of piezoceramic transformers", *Ultrasound, Kaunas, Lithuania*, No. 1, pp. 40–44, 2011.

*Здобувачем розроблено конструкції та проведено дослідження п'єзоелектричних суматорів.*

[35] В. М. Шарапов, К. В. Базило, Р. В. Трёмбовецкая, и В. В. Туз, "Преобразователи с пьезотрансформаторами в схемах полосовых и режекторных электрических фильтров", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 1, сс. 22–26, 2015.

*Здобувачем розроблено конструкції та проведено дослідження п'єзоелектричних перетворювачів в схемах смугового і режекторного фільтрів.*

[36] В. М. Шарапов, И. Г. Минаев, Ж. В. Сотула, К. В. Базило, и В. В. Самойленко, "Об эффекте возникновения изгибных колебаний в

мономорфных пьезоэлементах", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 3, сс. 60–62, 2011.

*Здобувачем досліджено метод збудження коливань згину в мономорфному п'єзоелектричному перетворювачі.*

[37] В. М. Шарапов, К. В. Базило, и Ж. В. Сотула, "Повышение уровня звукового давления низкочастотных колебаний преобразователей на основе дисковых мономорфных пьезоэлементов", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 4, сс. 71–73, 2011.

*Здобувачем розроблено метод підвищення рівня звукового тиску низькочастотних коливань дискових мономорфних п'єзоелектричних перетворювачів.*

[38] V. M. Sharapov, O. N. Petrishchev, Zh. V. Sotula, and K. V. Bazilo, "The increase of the sound pressure created by monomorphic disk piezoelements", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 3, сс. 38–42, 2014.

*Здобувачем розроблено метод синтезу, конструкції та проведено дослідження дискових мономорфних п'єзоелектричних перетворювачів.*

[39] Ж. В. Сотула, К. В. Базіло, та В. В. Туз, "П'єзоелектричні перетворювачі для роботехніки", *Вісник Хмельницького національного університету*, № 1, сс. 190–192, 2015.

*Здобувачем розроблено конструкції п'єзоелектричних перетворювачів для робототехніки.*

[40] K. V. Bazilo and V. V. Medianik, "The research and improvement of piezoelectric transducers for vibroacoustic physiotherapy", в *Проблеми інформатизації: матеріали другої міжнародної науково-технічної конференції*, Черкаси: ЧДТУ; Тольятті: ТДУ, 2014, с. 31.

*Здобувачем проведено дослідження п'єзоелектричних перетворювачів для віброакустичної терапії.*



[41] V. M. Sharapov, K. V. Bazilo, and R. V. Trembovetskaya, "Piezoelectric transducers in the schemes of bandpass and bandstop electrical filters", в *Фізика, електроніка, електротехніка "ФЕЕ–2015": Матеріали та програма наук.-техн. конф.*, Суми, 2015, с. 189.

*Здобувачем розроблено конструкції дискових п'єзоелектричних перетворювачів в схемах смугового і режекторного фільтрів.*

[42] K. V. Bazilo and V. V. Medianyuk, "Research of piezoelectric adders for vibroacoustic physiotherapy", в *Фізика, електроніка, електротехніка "ФЕЕ–2015": Матеріали та програма наук.-техн. конф.*, Суми, 2015, с. 196.

*Здобувачем розроблено конструкції та проведено дослідження перетворювачів для віброакустичної терапії на основі п'єзоелектричних суматорів.*

[43] V. V. Medianyuk and K. V. Bazilo, "Application of informational and measuring systems in vibro-acoustic therapy", в *Проблеми інформатизації: матеріали третьої міжнародної науково-технічної конференції*, Черкаси: ЧДТУ; Баку: ВА ЗС АР; Бельсько-Бяла: УТіГН; Полтава: ПНТУ, 2015, с. 77.

*Здобувачем розроблено метод синтезу п'єзоелектричних перетворювачів для віброакустичної терапії.*

[44] K. V. Bazilo and V. V. Medianyuk, "Research of frequency generator for vibroacoustic therapy device", в *Фізика, електроніка, електротехніка "ФЕЕ–2016": Матеріали та програма наук.-техн. конф.*, Суми, 2016, с. 214.

*Здобувачем проведено дослідження генератора частот пристрою для віброакустичної терапії.*

[45] S. V. Bazilo, "Mathematical modelling of disk piezoelectric transformer with ring electrode in primary electrical circuit", в *Інформатика, математика, автоматика "ІМА –2017": Матеріали та програма наук.-техн. конф.*, Суми, 2017, сс. 233–234.

[46] О. М. Петрищев та К. В. Базіло, "Визначення електричних потенціалів у вторинних електричних колах багатосекційного дискового

п'єзоелектричного трансформатора", в *Датчики, прилади та системи – 2017: тези VI Міжнародної науково-технічної конференції*, Черкаси – Миколаїв – Херсон – Лазурне, 2017, сс. 20–23.

*Здобувачем розроблено схему побудови математичної моделі чотирьохсекційного дискового п'єзоелектричного трансформатора.*

[47] М. А. Бондаренко, К. В. Базіло, Ю. Ю. Бондаренко, и В. В. Медяник, "Изучение микроэлектромеханических пьезоэлектрических структур методом атомно-силовой микроскопии", в *Датчики, прилади та системи – 2017: тези VI Міжнародної науково-технічної конференції*, Черкаси – Миколаїв – Херсон – Лазурне, 2017, сс. 45–48.

*Здобувачем проведено дослідження упорядкованих структур, сформованих в п'єзоелектричній кераміці, методом атомно-силової микроскопії.*

[48] Ю. Ю. Бондаренко, К. В. Базіло, та Л. Г. Куницька, "Підвищення ефективності електроакустичних перетворювачів шляхом зміни енергосилової структури п'єзоелемента", в *Датчики, прилади та системи – 2017: тези VI Міжнародної науково-технічної конференції*, Черкаси – Миколаїв – Херсон – Лазурне, 2017, сс. 58–60.

*Здобувачем розроблено метод підвищення ефективності електроакустичних перетворювачів з енергосиловою структурою.*

[49] К. В. Базіло, "Математичне моделювання п'єзокерамічного трансформатора з секторними електродами", в *Інформатика, математика, автоматика "ІМА –2018": Матеріали та програма наук.-техн. конф.*, Суми, 2018, сс. 213–214.

[50] О. М. Петрищев та К. В. Базіло, "Електричний імпеданс дискового п'єзоелектричного елемента в області середніх частот", в *Датчики, прилади та системи – 2018: тези VII Міжнародної науково-технічної конференції*, Черкаси – Херсон – Лазурне, 2018, сс. 32–35.

*Здобувачем проведено розрахунок електричного імпедансу п'єзоелектричного диску в області середніх частот.*

[51] К. В. Базіло, "Застосування п'єзоелектричних трансформаторів в джерелах вторинного електроживлення", в *Датчики, прилади та системи – 2019: збірник праць VIII Міжнародної науково-технічної конференції*, Черкаси – Херсон – Лазурне, 2019, сс. 21–25.

[52] С. V. Bazilo, "Construction of mathematical model of bimorph piezoelectric transducer", в *Проблеми інформатизації: тези доповідей сьомої міжнародної науково-технічної конференції*, Черкаси: ЧДТУ; Харків: НТУ «ХП»; Баку: ВА ЗС АР; Бельсько-Бяла: УТіГН, 2019, с. 97.

[53] О. М. Петрищев та К. В. Базіло, "Спосіб визначення фізико-механічних констант п'єзокерамічних матеріалів", Патент України на корисну модель №119993, 25.10.2017.

*Здобувачем розроблено спосіб визначення фізико-механічних констант перетворювачів з п'єзокерамічного матеріалу.*

[54] К. В. Базіло, О. М. Петрищев, Ю. Ю. Бондаренко, В. В. Тичков, та Р. В. Трємбовецька, "Електроакустичний перетворювач", Патент України на корисну модель №115962, 10.05.2017.

*Здобувачем розроблено конструкцію п'єзоелектричного перетворювача з додатковими елементами.*

[55] В. М. Шарапов, К. В. Базіло, В. М. Заїка, О. М. Петрищев, та Ж. В. Сотула, "Електроакустичний перетворювач", Патент України на корисну модель №97758, 10.04.2015.

*Здобувачем проведено експериментальні дослідження п'єзоелектричного перетворювача з додатковими елементами.*

[56] В. М. Шарапов, К. В. Базіло, В. М. Заїка, О. М. Петрищев, та Ж. В. Сотула, "Електроакустичний перетворювач", Патент України на корисну модель №97754, 10.04.2015.

*Здобувачем розроблено конструкцію п'єзоелектричного перетворювача з додатковими індуктивностями.*

[57] В. М. Шарапов, К. В. Базіло, Ж. В. Сотула, та О. С. Ткаченко, "Електроакустичний перетворювач", Патент України на корисну модель №67640, 27.02.2012.

*Здобувачем проведено експериментальні дослідження п'єзоелектричного перетворювача з енергосиловою структурою.*

[58] В. М. Шарапов, К. В. Базіло, Ж. В. Сотула, та О. С. Ткаченко, "Електроакустичний перетворювач", Патент України на корисну модель №67639, 27.02.2012.

*Здобувачем проведено експериментальні дослідження п'єзоелектричного перетворювача з енергосиловою структурою.*

[59] В. М. Шарапов, Ж. В. Сотула, І. В. Чорноший, Л. Г. Куницька, та К. В. Базіло, "Електроакустичний перетворювач", Патент України на корисну модель №56932, 25.01.2011.

*Здобувачем проведено експериментальні дослідження п'єзоелектричного перетворювача з додатковими елементами.*

[60] В. М. Шарапов та К. В. Базіло, "Спосіб створення ультразвукових коливань за допомогою п'єзоелектричного перетворювача", Патент України на корисну модель №55516, 10.12.2010.

*Здобувачем розроблено спосіб створення ультразвукових коливань.*

## ЗМІСТ

	стор.
ВСТУП .....	35
РОЗДІЛ 1. СТАН ПРЕДМЕТУ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ФОРМУЛЮВАННЯ ВИРІШУВАНОЇ ПРОБЛЕМИ .....	45
1.1. Комп'ютерні системи критичного застосування та вимоги до них .....	45
1.2. П'єзоелектричні перетворювачі в комп'ютерних системах критичного застосування .....	52
1.2.1. Застосування п'єзоелектричних перетворювачів в робототехнічних та медичних комп'ютерних системах .....	54
1.2.2. Застосування п'єзоелектричних перетворювачів в електро- і гідроакустичних системах .....	57
1.2.3. Застосування п'єзоелектричних перетворювачів в джерелах вторинного електроживлення об'єктів критичного застосування .....	59
1.2.4. Застосування п'єзоелектричних перетворювачів в аерокосмічній галузі .....	66
1.3. Основні відомості про дискові п'єзоелектричні перетворювачі з розділеними електродами .....	69
1.4. Методи розрахунку дискових п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами .....	71
1.5. Формулювання мети та постановка задач дисертаційного дослідження .....	87
1.6. Висновки до розділу .....	89

Список використаних джерел .....	90
<b>РОЗДІЛ 2. ЕЛЕКТРИЧНИЙ ІМПЕДАНС КОЛИВАЛЬНОГО ДИСКА І ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ МАТЕРІАЛЬНИХ КОНСТАНТ П'ЄЗОКЕРАМІКИ .....</b>	
МАТЕРІАЛЬНИХ КОНСТАНТ П'ЄЗОКЕРАМІКИ .....	105
2.1. Визначення електричного імпедансу п'єзокерамічного диска в області низьких частот .....	111
2.2. Визначення та дослідження електричного імпедансу п'єзокерамічного диска в області середніх частот .....	122
2.3. Визначення електричного імпедансу п'єзокерамічного диска в області високих частот .....	135
2.4. Метод експериментального визначення фізико-механічних констант п'єзокерамічних перетворювачів .....	147
2.5. Висновки до розділу .....	153
Список використаних джерел .....	155
<b>РОЗДІЛ 3. ПРИНЦИПИ ТА МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ ДИСКОВИХ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ З РОЗДІЛЕНИМИ ЕЛЕКТРОДАМИ, ЩО ПРАЦЮЮТЬ НА РАДІАЛЬНИХ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ КОЛИВАННЯХ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ДИСКІВ .....</b>	
РОЗДІЛЕНИМИ ЕЛЕКТРОДАМИ, ЩО ПРАЦЮЮТЬ НА РАДІАЛЬНИХ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ КОЛИВАННЯХ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ДИСКІВ .....	158
3.1. Методика розрахунку параметрів і характеристик найпростішого дискового п'єзоелектричного перетворювача з розділеними електродами .....	159
3.1.1. Визначення електричного імпедансу радіально коливального тонкого п'єзокерамічного диска .....	160
3.1.2. Побудова математичної моделі дискового п'єзоелектричного перетворювача з розділеними	

електродами .....	167
3.1.3. Дослідження коефіцієнта трансформації п'єзоелектричного перетворювача з дисковим електродом в первинному електричному колі .....	174
3.2. Математичне моделювання дискового п'єзоелектричного перетворювача з кільцевим електродом в первинному електричному колі .....	180
3.2.1. Розрахунок коефіцієнта трансформації п'єзоелектричного перетворювача з кільцевим електродом в первинному електричному колі .....	180
3.2.2. Дослідження математичної моделі п'єзоелектричного перетворювача з кільцевим електродом в первинному електричному колі .....	189
3.2.3. Дослідження коефіцієнта трансформації п'єзоелектричного перетворювача з кільцевим електродом в первинному електричному колі .....	195
3.3. Математична модель багатосекційного п'єзоелектричного перетворювача з кільцевими електродами у вторинних електричних колах .....	201
3.3.1. Визначення електричних потенціалів у вторинних електричних колах багатосекційного дискового п'єзоелектричного перетворювача .....	201
3.3.2. Визначення радіальних зміщень матеріальних частинок диска та побудова математичної моделі багатосекційного п'єзоелектричного перетворювача .	205
3.3.3. Математичне моделювання багатосекційного дискового п'єзоелектричного перетворювача при	

груповому включенні секцій .....	213
3.4. Висновки до розділу .....	219
Список використаних джерел .....	221
РОЗДІЛ 4. ПРИНЦИПИ ТА МЕТОДИ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДИСКОВИХ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ З СЕКТОРНИМИ ЕЛЕКТРОДАМИ .....	223
4.1. Схема побудови математичної моделі дискового п'єзоелектричного перетворювача з секторними електродами .....	223
4.2. Розрахунок електричного імпедансу дискового п'єзокерамічного перетворювача з закороченим секторним електродом у вторинному електричному колі .	233
4.3. Розрахунок коефіцієнта трансформації та побудова математичної моделі дискового п'єзокерамічного перетворювача з секторними електродами .....	251
4.4. Дослідження електричного імпедансу п'єзоелектричного диска з секторними електродами .....	259
4.5. Висновки до розділу .....	261
Список використаних джерел .....	262
РОЗДІЛ 5. ДИСКОВІ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЮВАЧІ, ЩО ПРАЦЮЮЮТЬ НА ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ КОЛИВАННЯХ ПОПЕРЕЧНОГО ВИГИНУ .....	265
5.1. Математичне моделювання дискового п'єзоелектричного перетворювача, що працює на вісесиметричних коливаннях поперечного вигину .....	265



5.2. Дослідження дискових біморфних п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами .....	306
5.3. Висновки до розділу .....	317
Список використаних джерел .....	318
РОЗДІЛ 6. ТЕХНОЛОГІЯ ВИРОБНИЦТВА ТА ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ДИСКОВИХ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ З РОЗДІЛЕНИМИ ЕЛЕКТРОДАМИ ДЛЯ КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ КРИТИЧНОГО ЗАСТОСУВАННЯ .....	321
6.1. Технологічні основи виробництва елементів пристроїв із п'єзоелектричних керамік .....	321
6.2. Принципи побудови основних елементів п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування .....	340
6.2.1. Дискові п'єзоелектричні трансформатори .....	340
6.2.2. П'єзоелектричні суматори .....	345
6.3. Результати дослідження п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами .....	361
6.4. Висновки до розділу .....	378
Список використаних джерел .....	380
ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ .....	388
ДОДАТКИ .....	392
Додаток А. Документація про наукову значимість, практичне використання та впровадження основних результатів роботи .....	393
Додаток Б. Схема побудови математичних моделей дискових п'єзоелектричних перетворювачів з	

розділеними електродами .....	403
Додаток В. Список опублікованих праць за темою дисертації .....	424

## ВСТУП

*Обґрунтування вибору теми дослідження.* Стабільна робота комп'ютерних систем, особливо в галузях критичного застосування (енергетика, медицина, аерокосмічна техніка, тощо), багато в чому залежить від достовірності функціонування як програмної, так і апаратної частини комп'ютерних систем. Невід'ємними елементами апаратної частини комп'ютерних систем, від характеристик яких значною мірою залежать точність і надійність їх роботи, є перетворювачі.

Серед комп'ютерних систем критичного застосування, де необхідна висока надійність, стабільність, автономність, максимальна тривалість безвідмовної роботи таких наднадійних перетворювачів є: автоматичні міжпланетні станції; автономні глибоководні плаваючі об'єкти; будь-які інші об'єкти, доступ до яких сильно утруднений, неможливий або надзвичайно небезпечний для людини (ядерні реактори; хімічно небезпечні об'єкти, станції в Антарктиді і Арктиці, підземні об'єкти, орбітальні супутники тощо).

За результатами аналізу світового ринку мікропристроїв, в основі яких лежить п'єзо ефект консалтинговою компанією “Yole Développement” (Франція) було встановлено, що на сьогоднішній момент, цей ринок майже досяг відмітки 85 млн. дол. США, а вже до 2023 року – становитиме близько 310 млн. дол. США (при цьому, Compound Annual Growth Rate складатиме 30,3%).

Актуальність застосування різних функціональних елементів п'єзоелектроніки в комп'ютерних системах критичного застосування пояснюється, перш за все, їх високою надійністю, порівняною з показниками інтегральних мікросхем, а також можливістю їх мініатюризації. Беззаперечними перевагами застосування п'єзокераміки є невелика вартість сировини та технології виготовлення п'єзокерамічних елементів, відносно проста технологія виготовлення, більшість технологічних операцій якої уніфіковані з операціями технологій мікроелектроніки, висока інертність до дії кліматичних факторів зовнішнього середовища, високо стабільні

показники електромеханічного коефіцієнту, електричної та механічної міцності, надвисока чутливість до зовнішніх механічних впливів тощо.

До недавнього часу науково-технічна база проектування і вдосконалення п'єзокерамічних перетворювачів обмежувалася, в основному, лише зміною форми, розмірів і матеріалу п'єзоелемента, а також виду порушуваних коливань. Існуючі підходи підвищення ефективності п'єзоелектричних перетворювачів, зокрема розширення робочого діапазону, підвищення чутливості та рівня вихідного сигналу, вимагають неминучого компромісу з вимогами до мініатюризації цих перетворювачів, забезпечення яких є особливо важливим для об'єктів критичного застосування.

Основною перевагою використання в комп'ютерних системах перетворювачів з п'єзокерамічних матеріалів обумовлюється їх особливою структурою, яка дозволяє реалізувати в одному такому елементі принципово різні схеми.

Найбільш важливими роботами в напрямі вивчення та вдосконалення п'єзоелектричних перетворювачів є дослідження зарубіжних і вітчизняних вчених, серед яких слід відзначити наступних: Джагупов Р.Г., Грінченко В.Т., Карлаш В.Л., Петрищев О.М., Савін В.Г., Улітко А.Ф., Шарапов В.М., Шульга Н.А., Аронов Б.С., Берлінкур Д.А., Ван Дайк С., Жуков В.Б., Кудрявцев Б.А., Кеді В.Г., Лавриненко В.В., Новацький В., Оноє М., Партон В.З., Пугачов С.І., Якименко Ю.І., Каразо А.В., Бен-Яаков С., Арнау А. та інші.

Проте, незважаючи на різноманіття проведених досліджень, аналіз існуючих підходів показує, що на сьогодні не повною мірою вирішено низку актуальних питань, пов'язаних з важливими теоретичними аспектами й практичною реалізацією високоефективних п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування. Так, наразі існує наступне **протиріччя**: необхідність підвищення ефективності п'єзоелектричних перетворювачів (розширення робочого діапазону, підвищення чутливості та рівня вихідного сигналу), з одного боку, та дотримання вимог щодо мініатюризації цих перетворювачів, з іншого

боку.

Подолати цю суперечність можна шляхом вирішення **актуальної науково-прикладної проблеми** створення високоефективних п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування з одночасним підвищенням ступеня інтеграції та гібридизацією їх експлуатаційних властивостей.

*Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.*  
Дисертаційна робота виконана на кафедрі приладобудування, мехатроніки та комп'ютеризованих технологій Черкаського державного технологічного університету. Дослідження пов'язані із планом науково-дослідних робіт університету, які виконувались в період 2009-2019 років при безпосередній участі автора: “Створення та дослідження мономорфних та біморфних п'єзотрансформаторів для п'єзоелектричних перетворювачів механічних величин” (№ ДР 0109U002737, 2009–2010 рр., виконавець НДР), “Створення та дослідження методів та засобів розширення робочої смуги частот п'єзоелектричних перетворювачів” (№ ДР 0111U002940, 2011–2012 рр., виконавець НДР), “Розробка нової технології проектування і створення на її основі малогабаритних низькочастотних п'єзоелектричних перетворювачів для гідроакустики, електроакустики, комп'ютерної техніки, приладобудування” (№ ДР 0113U003349, 2013–2014 рр., виконавець НДР), “Розробка високоефективних багатокомпонентних електроакустичних перетворювачів з коливальними системами різної фізичної природи” (науково-дослідна робота за грантом Президента України № Ф56/GP/F56/02-2014, 2014 р., виконавець НДР), “Створення високоефективних мономорфних п'єзоелектричних перетворювачів для електро- і гідроакустики” (№ ДР 0115U000716, 2015–2016 рр., виконавець НДР), “Створення високоефективного інтелектуального комплексу для розробки та дослідження п'єзоелектричних компонентів для приладобудування, медицини та робототехніки” (№ ДР 0117U000936, 2017 р., виконавець НДР), “Розробка мобільного високоефективного ультразвукового хірургічного інструменту для військової та цивільної медицини” (№ ДР 0117U007474,

2017–2019 рр., відповідальний виконавець НДР), «Розробка мобільного багатокомпонентного ультразвукового хірургічного інструменту з коливальними системами різної фізичної природи для військової та цивільної медицини» (науково-дослідна робота за грантом Президента України № GP/Ф75/201/2018, 2018 р., відповідальний виконавець НДР).

*Мета і задачі дослідження.* Метою дисертаційної роботи є підвищення ефективності п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування шляхом створення нових та удосконалення існуючих моделей та методів синтезу дискових п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами.

Для досягнення поставленої мети в роботі вирішуються такі основні задачі:

1. Проаналізувати сучасний стан проблеми дослідження і вдосконалення дискових п'єзокерамічних перетворювачів з розділеними електродами для комп'ютерних систем критичного застосування.

2. Побудувати математичну модель п'єзокерамічного диску, що коливається в широкому діапазоні частот, та розробити на її основі метод експериментального визначення матеріальних констант п'єзокераміки для побудови високоефективних комп'ютерних систем.

3. Побудувати математичні моделі п'єзоелектричного дискового перетворювача з кільцевими електродами та багатосекційного дискового п'єзоелектричного перетворювача для комп'ютерних систем критичного застосування.

4. Побудувати математичну модель п'єзокерамічного перетворювача з секторним електродуванням робочої поверхні диска, який працює на невісесиметричних планарних коливаннях, та може застосовуватися для побудови мікроелектромеханічних систем критичного застосування.

5. Побудувати математичну модель дискового п'єзоелектричного перетворювача, який працює на вісесиметричних коливаннях поперечного вигину, та може застосовуватися для побудови ультразвукових систем спеціального призначення.

6. Розробити методи модифікації п'єзоелектричних перетворювачів для побудови перетворювачів з розділеними електродами для комп'ютерних систем критичного застосування.

*Об'єкт дослідження* – процеси перетворення енергії в дискових п'єзоелектричних перетворювачах з розділеними електродами.

*Предмет дослідження* – математичні моделі та методи синтезу дискових п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами.

*Методи досліджень.* Для вирішення поставлених задач використовувалися математичні методи розв'язування диференціальних рівнянь, теорія п'єзоефекту, фундаментальні принципи механіки та електродинаміки, теорія невісесиметричних планарних коливань, теорії поперечного вигину круглих пластин, методи управління характеристиками п'єзоелектричних перетворювачів, метод визначення матеріальних констант п'єзокераміки, аналітичні методи скануючої АСМ, метод комбінованого електронно-променевого модифікування поверхні, теорія планування експерименту і комп'ютерного моделювання для експериментальної перевірки коректності математичних моделей і результатів теоретичних досліджень.

*Наукова новизна одержаних результатів* полягає у наступному:

1. Удосконалено математичну модель електричного імпедансу коливального п'єзокерамічного диску, що коливається в широкому діапазоні частот, та на цій основі розроблено метод експериментального визначення матеріальних констант п'єзокераміки, який, на відміну від відомих методів, дозволяє в рамках одного експерименту визначити три модуля пружності, два п'єзомодулі і одне значення діелектричної проникності для отримання змістовних і достовірних кількісних оцінок параметрів фізичного стану п'єзоелектричних перетворювачів.

2. Вперше побудовано математичні моделі п'єзоелектричних перетворювачів з кільцевим і дисковим електродами в первинному електричному колі та багатосекційних дискових п'єзоелектричних перетворювачів з можливістю групового включення секцій та з урахуванням

негативного зворотного електроакустичного зв'язку та значень імпедансу електричного навантаження, що розширює можливість побудови багатофункціональних п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування.

3. Вперше побудовано математичну модель дискового п'єзоелектричного перетворювача з секторними електродами, що містить мінімальне число спрощуючих реальну ситуацію припущень, і дозволяє виконувати прогнозування характеристик перетворювача, який працює на невісесиметричних планарних коливаннях.

4. Удосконалено математичну модель біморфного дискового п'єзоелектричного перетворювача з симетричним електричним навантаженням у вторинному електричному колі, що, спираючись на фундаментальні принципи механіки та електродинаміки, дозволяє враховувати геометричні, фізико-механічні та електричні параметри реальної конструкції п'єзоелектричного перетворювача, принцип дії якого заснований на використанні вісесиметричних коливань поперечного вигину.

5. Отримали подальший розвиток методи модифікації дискових п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування шляхом використання поліелектродної конструкції, технології додаткових елементів, просторової енергосилової структури п'єзоелектричних перетворювачів, технології термовакуумного наплення, що забезпечує можливість синтезу таких п'єзоелектричних перетворювачів з покращеними характеристиками.

*Практичне значення одержаних результатів.* Результати дисертаційного дослідження становлять наукову основу для технічної реалізації та впровадження у виробництво та навчальний процес методичного, математичного та технічного забезпечення процесу проектування перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування на основі п'єзоелектричних елементів з розділеними електродами. Практична цінність отриманих результатів полягає в наступному:



– розроблені методи та моделі, схемні та конструктивні рішення розширили науково-технічну базу проектування дискових п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами для комп'ютерних систем критичного застосування;

– розроблено метод проведення та обробки результатів експериментального визначення матеріальних констант п'єзокераміки (спосіб визначення фізико-механічних констант п'єзокерамічних матеріалів захищений патентом України на корисну модель № 119993), що дозволило отримати змістовні і достовірні кількісні оцінки параметрів фізичного стану п'єзоелектричних елементів та підвищити точність їх характеристик у 2-2,5 рази;

– створено алгоритм та програмно реалізовано математичні моделі дискових п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами, що дозволило оцінювати характеристики п'єзоелектричних перетворювачів з урахуванням негативного зворотного електроакустичного зв'язку та значень імпедансу електричного навантаження, які раніше не враховувалися, та зменшити відносну похибку на 2 – 3%;

– запропоновано нові схемотехнічні рішення п'єзоелектричних перетворювачів поліелектродної конструкції (трансформаторного типу) з використанням технології додаткових елементів та просторової енергосилової структури (п'єзоелектричні перетворювачі захищені патентами України на корисну модель №№ 67640, 97752), використання яких дозволило підвищити рівень вихідного сигналу на 15-20 дБ порівняно з перетворювачами, побудованими за традиційною схемою;

– отримано зразки дискових п'єзоелектричних перетворювачів з нанесеними методом термовакуумного напилення струмопровідними електродами, якість та експлуатаційні характеристики яких підтверджено методом АСМ.

Результати теоретичних та експериментальних досліджень, математичні моделі дискових п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами, а також розроблене методичне та технічне

забезпечення знайшли практичне використання та впровадження (підтверджено актами впровадження) на підприємствах ПрАТ “Укрп’єзо” (м. Черкаси), ТОВ “Лілея” (м. Київ) та ПП “Сенсорна електроніка” (м. Черкаси).

Використання технологічних рекомендацій та розроблених методів експериментального визначення матеріальних констант п’єзокераміки, енергосилового методу синтезу п’єзоелектричних перетворювачів, технології додаткових елементів, побудованих математичних моделей розроблених п’єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами дозволило покращити технічні характеристики, зменшити кількість натурних експериментів, скоротити час і вартість розробки нових моделей п’єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами, а також отримати річний економічний ефект 250 тис. гривень. Вартість зекономлених ресурсів становить комерційну ціну математичної моделі.

Отримані у дисертаційній роботі результати використовуються у навчальному процесі при читанні лекцій, проведенні лабораторних та практичних занять, виконанні курсових та дипломних проектів з дисциплін "Спеціальні технології виробництва приладів", "Методологія наукових досліджень", "Процеси та обладнання мікротехніки", "Діагностика та надійність автоматизованих систем", "Основи моделювання технічних систем", "Проектування електромеханічних вузлів робототехнічних систем", "Механічні, електричні та магнітні вимірювання", "Автоматизовані інформаційно-вимірювальні системи" у НТУУ "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського" та Черкаському державному технологічному університеті (підтверджено актами впровадження).

*Особистий внесок здобувача.* Основні теоретичні, розрахункові та експериментальні результати отримано здобувачем самостійно. Наукові положення, що виносяться на захист, та висновки дисертаційної роботи належать автору.

У роботах, опублікованих у співавторстві здобувачем розроблено комплекс моделей дискових п’єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами та багатосекційних дискових п’єзоелектричних перетворювачів

з можливістю групового включення секцій з урахуванням негативного зворотного електроакустичного зв'язку [1–4, 6, 8, 10, 20, 22, 23, 25, 46, 50], метод експериментального визначення матеріальних констант п'єзокераміки [5, 7, 53], удосконалено методи модифікації дискових п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування шляхом використання поліелектродної конструкції [31–36, 39–44], технології додаткових елементів [26–28, 37, 38], просторової енергосилової структури п'єзоелектричних перетворювачів [29, 30, 48], технології термовакuumного напилення [19], досліджено методом атомно-силової мікроскопії поверхні п'єзоелектричних перетворювачів [15, 47], що забезпечує можливість синтезу п'єзоелектричних перетворювачів з покращеними характеристиками та побудови багатофункціональних п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування.

В патентах [54–60] автору належать ідеї та конструктивні рішення щодо покращення технічних характеристик п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами.

Особистий внесок здобувача у наукових працях, написаних у співавторстві, зазначений у списку опублікованих праць за темою дисертації та відповідає темі та змісту дисертації.

*Апробація результатів дисертаційного дослідження.* Матеріали, основні положення та результати дисертаційної роботи доповідались і опубліковані у збірках доповідей та матеріалів науково-технічних конференцій, семінарів, симпозіумів, а саме: Міжнародній науково-технічній конференції “Проблеми інформатизації” (м. Черкаси, 2014–2015, 2019 рр.); науково-технічній конференції “Фізика, електроніка, електротехніка” (м. Суми, 2015–2016 рр.); науково-технічній конференції “Інформатика, математика, автоматика” (м. Суми, 2017–2018 рр.); International Scientific Conference “Environmental Engineering ENVIRO” (Vilnius, Lithuania, 2017); Міжнародній науково-технічній конференції “Датчики, прилади та системи” (Лазурне, 2017–2019 рр.); International Scientific Conference “Machines. Technologies. Materials” (Sofia, Bulgaria, 2018); International Scientific

Conference “Mathematical Modeling” (Sofia, Bulgaria, 2018); International Scientific Congress “Innovations” (Sofia, Bulgaria, 2019). Матеріали дисертаційного дослідження доповідалися на докторальних літніх школах в рамках проекту TEMPUS NETCENG “New Model of the Third Cycle in Engineering Education Due to Bologna Process in BY, RU, UA», що проходили на базі Вільнюського технічного університету Гедиміна (Литва, 2016 р.) та Берлінського технічного університету (Німеччина, 2017 р.).

*Публікації.* Результати досліджень, що подані в дисертації, опубліковані у 60 наукових працях, у тому числі 2 монографіях, 35 статтях у наукових фахових виданнях (з них 4 статті у виданнях іноземних держав, 4 у виданнях України, які включені до міжнародних наукометричних баз Scopus та Web of Science), 8 патентах України на корисну модель, 14 тезах доповідей в збірниках матеріалів конференцій, 1 статті у інших виданнях.

*Структура і об'єм дисертації.* Дисертація складається з анотації, змісту, вступу, шести розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків. Загальний обсяг роботи становить 432 сторінки, з них обсяг основного тексту – 310 сторінок, 125 рисунків, 21 таблиця, список використаних джерел складає 250 найменувань і займає 28 сторінок, а також 3 додатки на 39 сторінках.

# РОЗДІЛ 1

## СТАН ПРЕДМЕТУ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ФОРМУЛЮВАННЯ ВИРІШУВАНОЇ ПРОБЛЕМИ

### 1.1. Комп'ютерні системи критичного застосування та вимоги до них

Системи, що використовуються на об'єктах критичного застосування (ОКЗ), таких як охорона здоров'я, енергетика, транспорт, комунальне господарство, космос, робототехніка і національна безпека, повинні бути дуже надійними. Використання комп'ютерних систем в цих критичних областях вимагає їх високої надійності, яка може досягатися шляхом розробки відмовостійких систем [1].

До «критичних систем» відносять системи, збій в яких може призвести до травм людей, збитку навколишньому середовищу або значних економічних втрат. Прикладами критичних систем є вбудовані системи в медичних пристроях, такі як інсулінова помпа (*safety-critical systems*), навігаційні системи космічного корабля (*mission-critical systems*) і онлайн-системи грошових переказів (*business-critical systems*) [2].

На сьогоднішній день важко знайти галузь людської діяльності, де б не були потрібні комп'ютерні системи високої надійності і безпеки. В енергетиці: системи управління і контролю на атомних, теплових і гідроелектростанціях, системи управління котлами високого тиску, системи управління енергопостачанням, системи управління транзитом енергоресурсів тощо. На транспорті: системи управління рухом транспорту, системи автоматики і автоматизації керування транспортними засобами та ін. В промисловості: системи управління і контролю в сфері небезпечних технологій та інфраструктур тощо. В області життєдіяльності людини: системи охорони, протипожежні системи, системи контролю за станом навколишнього середовища і попередження про екологічні катастрофи,

системи безпеки споруд з великим скупченням людей, системи забезпечення безпеки від терористичних загроз тощо. У військово-промисловому комплексі: системи управління військами, системи керування та навігації об'єктами військового і суміжного призначення, системи безпеки військових арсеналів тощо. В медицині: системи забезпечення життєдіяльності пацієнтів тощо. В області фінансів: системи управління фінансовими установами та платіжними системами тощо [3].

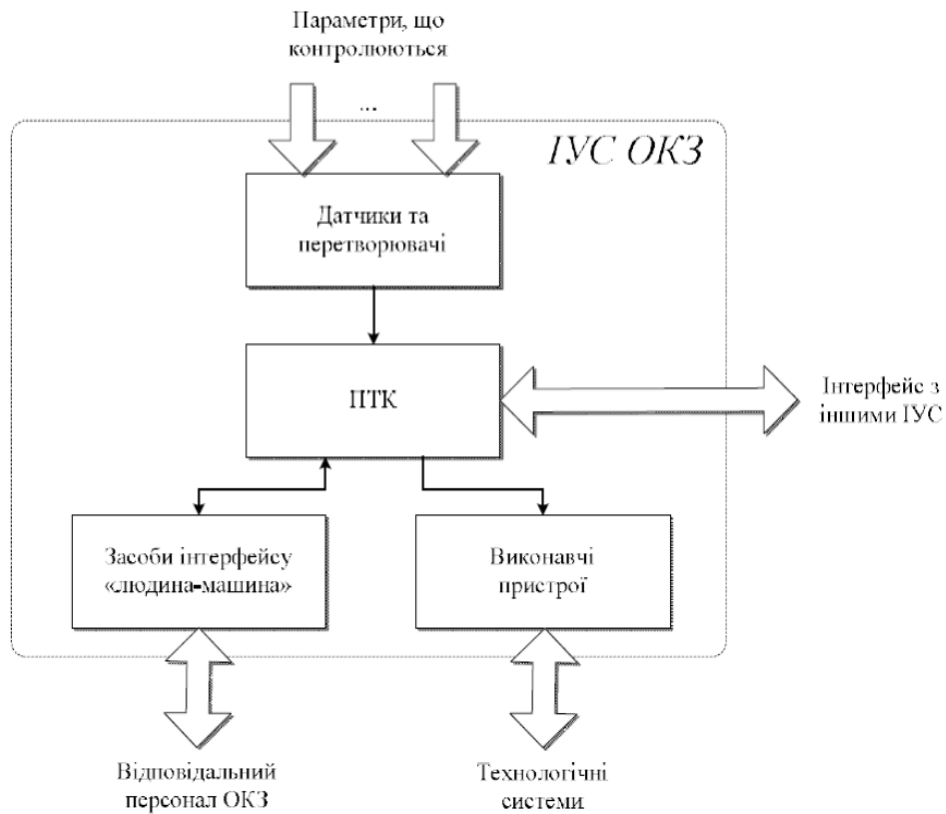
Стабільна робота комп'ютерних систем (КС), особливо критичного застосування, багато в чому залежить від достовірності функціонування таких КС. Важливим в цьому питанні є достовірність функціонування як програмної, так і апаратної частини комп'ютерних систем [4].

КС призначені для виконання певного набору основних та допоміжних функцій, в залежності від призначення КС. Серед основних інформаційних функцій можна виділити наступні: функції моніторингу, функції архівування результатів моніторингу, функції відображення та сигналізації, функції реєстрації. До основних управляючих функцій можна віднести: функції регулювання, функції дискретного управління, функції обмеження, функції захисту, функції блокування [5]. Серед додаткових варто виділити допоміжні та сервісні функції. На сьогодні існуючі КС можуть бути поділені на такі [6]:

- системи нормальної експлуатації: виконують зазначені інформаційні функції та (або) управляючі функції;

- системи безпеки: виконують функції запобігання переростанню аварійної ситуації в аварію та поверненню ОКЗ до контрольованого стану.

Структурно, до складу КС входять усі компоненти, що є необхідними для реалізації вказаних основних та додаткових функцій. В загальному випадку, такими компонентами є такі (рис. 1.1) [7]:

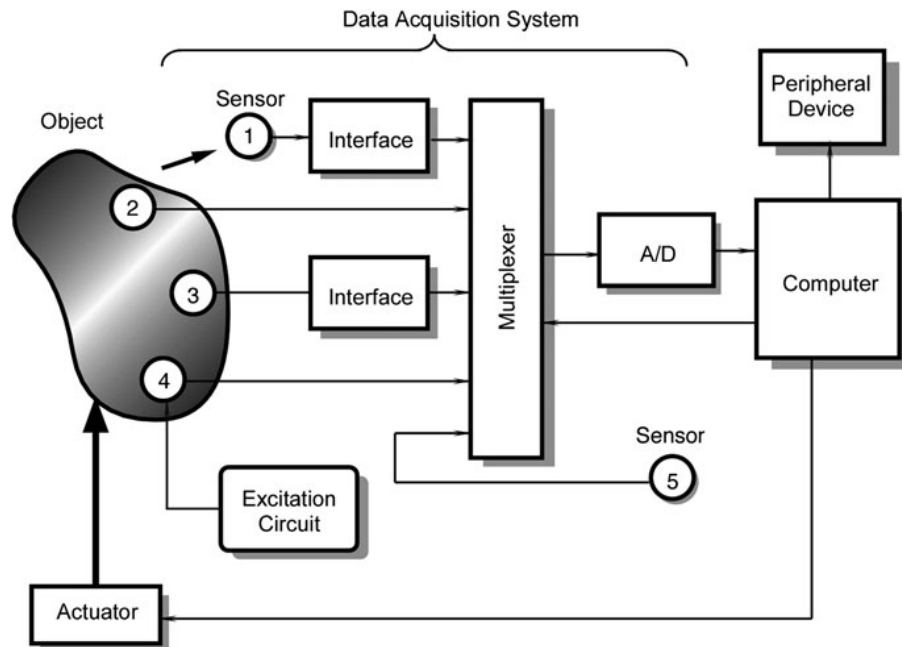


**Рис. 1.1. Структурна схема комп'ютерної системи об'єкту критичного застосування**

- програмно-технічний комплекс (ПТК), що формує центральну частину КС;
- датчики і перетворювачі;
- засоби інтерфейсу «людина-машина»;
- з'єднувальні кабелі;
- допоміжні вироби;
- сервісне обладнання;
- програмне забезпечення (ПЗ);
- виконавчі пристрої.

Окрім того, як правило, кожна КС є унікальною, тобто її призначено для конкретного ОКЗ і її не може бути повторено без змін для інших об'єктів критичного застосування [7].

Щоб проілюструвати приклад розташування датчиків в комп'ютерній системі, на рис. 1.2 показана блок-схема система збору і управління даними [8].



**Рис. 1.2. Розташування датчиків в системі збору даних. Датчик 1 безконтактний, датчики 2 і 3 пасивні, датчик 4 активний, а датчик 5 вбудований в систему збору даних.**

### **Загальні вимоги до комп'ютерних систем об'єктів критичного застосування та їх компонент**

Вимоги до сучасних КС ОКЗ регламентуються на світовому та національному рівнях у формі галузевих стандартів, норм та правил. Можна виділити наступні групи вимог [9]:

- функціональні вимоги;
- вимоги до надійності виконання функцій;
- вимоги до стійкості виконання функцій;
- вимоги до якості функціонування;
- вимоги до незалежності функцій, що виконуються;
- вимоги до видів забезпечення;
- вимоги до оцінки та підтвердження відповідності;



– вимоги до експлуатації.

Функціональні вимоги формують профіль вимог, що стосуються функцій контролю і управління процесом для забезпечення безпеки, а також функцій забезпечення функціонування ОКЗ у експлуатаційних режимах [7].

Вимоги до надійності виконання функцій націлено на прийняття заходів щодо запобігання і захисту від відмов системи з загальної причини, тобто одночасних відмов з однієї причини двох або більше елементів в різних резервованих частинах КС ОКЗ, результатом яких може бути небезпечна відмова КС ОКЗ.

Вимоги до стійкості виконання функцій регламентують профіль вимог до несприйнятливості (стійкості) до зовнішніх факторів впливу. В загальному випадку це такі:

- температура, вологість, тиск, іонізуюче випромінювання, корозійно-активні агенти, пил;
- вібрація, удари, землетруси;
- електричні поля постійного струму й струмів промислової частоти;
- рідидам та газам, що можуть мати вплив під час аварій;
- змінам та відхиленням електроживлення;
- електромагнітним процесам від іншого обладнання.

Вимоги до якості функціонування формують відокремлений профіль, у якому можна виділити наступні групи: вимоги до точності, вимоги до часових характеристик, вимоги до інтерфейсу «людина-машина», вимоги до щитів управління [7].

Множину вимог до незалежності функцій, що виконуються, можна звести до наступних груп: забезпечення незалежності, допустимої емісії завод, забезпечення пожежної безпеки.

Вимоги до видів забезпечення відносяться до наступних компонентів КС ОКЗ: ПЗ (функції, структури, елементи; діагностування та самоконтроль; захист від відмов, спотворень, непередбачуваних дій; процес розробки), інформаційне забезпечення (внутрішня та зовнішня бази даних).

Вимоги до оцінки та підтвердження відповідності мають на меті формування адекватних та повних перевірок працездатності і відповідності певним характеристикам на усіх стадіях життєвого циклу КС ОКЗ. Це включає наступні аспекти: апробацію технічних рішень і компонентів, кваліфікацію обладнання, верифікацію ПЗ, валідацію системи, приймальний контроль виробів та випробування при вводі в експлуатацію системи.

Вимоги до експлуатації покривають наступне: перевірки та технічне обслуговування, відновлення та ремонт, внесення змін та модернізацію.

Останнім часом також спостерігається неухильна тенденція до значного посилення багатьох груп проаналізованих вимог. В значній мірі це стосується посилення вимог до часу реакції КС ОКЗ на події, пов'язані з об'єктом контролю [7].

Одним з найпоширеніших трендів щодо розвитку КС ОКЗ та відповідних КС є впровадження нових технологій, які мають безперечні переваги без зниження надійності в цілому. Застосування нових технологій диктується не лише вимогами покращення функцій управління і захисту, а також необхідністю задовольнити такі потреби [9]:

- моніторинг стану;
- моніторинг охорони;
- датчики, що є стійкими до важких навколишніх умов;
- складні електронні компоненти [7].

До комп'ютерних систем критичного застосування вимоги безпеки, надійності, стійкості (збій в роботі окремих компонентів не повинен призводити до відмови системи в цілому), живучості (виконання покладених функцій в повному або частковому об'ємі при збоях і відмовах), достовірності набувають найбільш важливого значення [10].

Відмовостійкість безпосередньо або опосередковано впливає на такі атрибути, як безвідмовність, довговічність і функціональна безпека.

Відмовостійкість – властивість технічної системи зберігати свою працездатність після відмови одного або декількох складових компонентів.

Відмовостійкість визначається кількістю будь-яких послідовних одиничних відмов компонентів, після яких зберігається працездатність системи в цілому.

Відмовостійка інженерія – це метод проектування відмовостійких систем, які здатні продовжувати виконання запланованих операцій (можливо, з пониженням ефективності) при відмові їх компонентів[11].

Забезпечення відмовостійкості КС може бути досягнуто шляхом резервування, що привносить в систему деякі недоліки, такі як збільшення ваги, вартості, енергоспоживання, ціни і часу, витраченого на проектування, перевірку і випробування.

Безпеку комп'ютерних систем критичного застосування можна розділити на зовнішню і внутрішню. Зовнішня безпека пов'язана з безпекою комп'ютерної системи, як технічного об'єкта, і може порушуватися через зовнішні причини (руйнівний вплив навколишнього середовища або дії людини). Внутрішня безпека – це властивість об'єкта не бути джерелом небезпеки по відношенню до зовнішніх об'єктів (людини, навколишнього середовища). Внутрішня безпека розглядається як складова надійності і безпеки в зв'язку з тим, що відмови елементів КС, які порушують безпеку, одночасно призводять до порушення надійності.

Функціональна безпека – основна частина загальної безпеки КС, що забезпечує відсутність неприйнятної ризику як функціонуванню самої системи, так і здоров'ю людей, їх власності або навколишньому середовищу. Функціональна безпека є дуже важливим атрибутом для систем критичного застосування, пов'язаних з безпекою людей і навколишнього середовища проживання людини (системи енергетики, хімічної промисловості, транспорту, робототехніки тощо). Метою управління функціональною безпекою є мінімізація неприйнятної ризику нанесення шкоди здоров'ю людей (безпосередньо або опосередковано – через нанесення шкоди власності або навколишньому середовищу) [3].

Достовірність функціонування КС – властивість КС виконувати задані функції в заданих умовах в будь-який час або протягом заданого часу за

умови забезпечення необхідними ресурсами. Під заданими функціями розуміється безпомилкова робота всіх необхідних програм і коректна робота всіх компонентів КС.

Достовірність інформації вимірюється ймовірністю того, що відображуване інформацією значення параметра відрізняється від істинного значення цього параметра в межах необхідної точності [4].

Для визначення достовірності ряду аналогових сигналів може проводитися перевірка відповідності сигналу його значенням, розрахованим з використанням інших параметрів [10].

## **1.2. П'єзоелектричні перетворювачі в комп'ютерних системах критичного застосування**

Незважаючи на те, що п'єзоефект був відкритий ще в XIX столітті, а з другої половини XX активно розвивалася теорія і технологія створення п'єзокерамічних матеріалів, вважається, що п'єзокераміка – один з перспективних матеріалів XXI століття. Причиною такого погляду є те, що чудові властивості, що притаманні п'єзокераміці, до сих пір не в повній мірі затребувані наукою, технікою і технологіями.

П'єзокераміка завдяки своїм унікальним властивостям має застосування в різних областях техніки і технології. Виробники п'єзокераміки, елементів і компонентів на її основі, намагаючись більш повно задовольнити сучасні вимоги ринку, проводять дослідження і конструкторські роботи з метою поліпшення параметрів кераміки, розробляють її нові типи, на що виділяються значні фінансові кошти. З метою здешевлення продукції розробляються нові технології, більш енергозберігаючі та які дозволяють автоматизувати процеси виробництва [12], [13], [14].

Розвиток інноваційних технологій виробництва в останній час набув значного поширення в різноманітних сферах людської діяльності по всьому світу. Це пов'язано, в першу чергу, з популяризацією таких напрямів, як

нанотехнології, альтернативна енергетика, біоніка, функціональна медицина, наноелектроніка, нанооптоелектроніка, та інші, а також зі значними інвестиціями провідних світових науково-виробничих компаній в ці галузі. В зв'язку з цим, перспективними є технології та пристрої, що використовують в принципах своєї роботи прямий та/або зворотний п'єзоефект [15]. Так, за результатами аналізу світового ринку мікропристроїв, в основі яких лежить п'єзоефект (п'єзоактуатори, струменеві сопла, мікрофони, давачі тиску, вібрацій, тощо) консалтинговою компанією “Yole Développement” (Франція) було встановлено, що на сьогоднішній момент, цей ринок майже досяг відмітки 85 млн. дол. США, а вже до 2023 року – становитиме близько 310 млн. дол. США (при цьому, Compound Annual Growth Rate складатиме 30,3%) [16]. Слід зауважити, що основний акцент, який робиться даною компанією при аналізі ринку п'єзоелектричних пристроїв, полягає у дослідженні саме пристроїв із п'єзоелектричної кераміки PZT (Lead Zirconate Titanate – ЦТС, цирконат титанат свинцю), беззаперечними перевагами застосування якої є невелика вартість сировини та технології виготовлення п'єзокерамічних елементів, відносно проста технологія виготовлення, більшість технологічних операцій якої уніфіковані з операціями технологій мікроелектроніки, висока інертність до дії кліматичних факторів зовнішнього середовища (в тому числі для агресивних та небезпечних середовищ підвищеної температури, тиску, кислотності, радіоактивності тощо), високо стабільні показники електромеханічного коефіцієнту, електричної та механічної міцності, надвисока чутливість до зовнішніх механічних впливів (до  $10^{-9}$  Н) тощо [15].

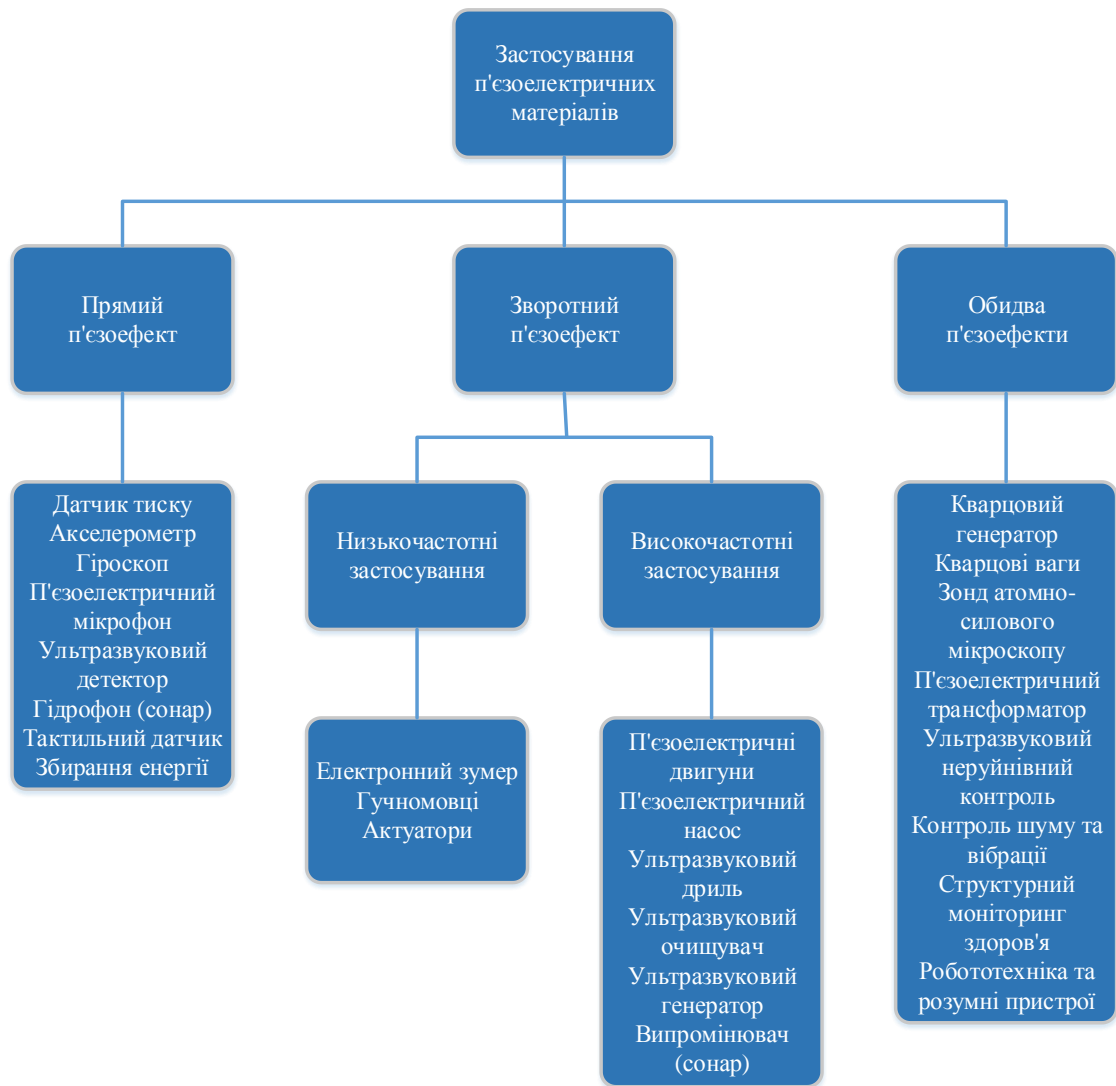
Актуальність застосування різних функціональних елементів п'єзоелектроніки в комп'ютерних системах пояснюється, перш за все, їх високою надійністю [17] – інтенсивність відмов складає  $10^{-6}$ , тобто порівняна з показниками інтегральних мікросхем, а також малими габаритами, що вирішує проблему мініатюризації таких систем.

### **1.2.1. Застосування п'єзоелектричних перетворювачів в робототехнічних та медичних комп'ютерних системах**

П'єзоелектричні матеріали перетворюють механічну енергію в електричну енергію (прямий п'єзоелектричний ефект) і електричну енергію в механічну енергію (зворотний п'єзоелектричний ефект) [18]. Ґрунтуючись на цих ефектах, п'єзоелектричні матеріали мають численні застосування в області інженерії та медицини. Відмітна особливість матеріалу, який у двох напрямках здатністю перетворення енергії, робить п'єзоелектричні матеріали дуже придатними для проектування інтелектуальних систем. Така система має здатність регулювати свою поведінку на основі інформації, яка сприймається в реальному часі з навколишнього середовища. Хороші приклади інтелектуальних систем – промислові та медичні роботи [19], [20]. П'єзоелектричні матеріали знайшли застосування в цій області як: п'єзоелектричні тактильні (чутливі до дотику) датчики [21], датчики вібрації і ультразвукові датчики. П'єзоелектричні двигуни, захватні і прецизійні позиціонуючі пристрої, з іншого боку, використовуються в робототехніці для управління рухом і обслуговування об'єктів [22], [23].

Основні області застосування п'єзоелектричних матеріалів з урахуванням використовованого п'єзоелектричного явища показані на рис. 1.3.

Сенсорні і виконавчі характеристики, здатність генерувати і виявляти ультразвукові частоти (ультразвук) і високий потенціал п'єзоелектричних матеріалів в інтелектуальних системах роблять їх придатними для медичної діагностики і терапії [22], [24], [25].



**Рис. 1.3. Области застосування п'єзоелектричних матеріалів [26]**

Тактильні датчики – це пристрої, які відчують контакт або дотик. В області медицини вони застосовуються в малоінвазивній хірургії (МІХ). Вони достатньо чутливі, щоб виявити присутність м'яких тканин поблизу, що допомагає делікатно та безпечно керувати хірургічними інструментами під час операції. Датчики здатні визначати величину і положення тиску на скальпелі [27].

П'єзоелектричні акселерометри працюють як дуже чутливі датчики вібрації. У медичних застосуваннях вони націлені на виявлення сил інерції, що створюються рухом тіла. Більшість з них реагують на певний діапазон частот вібрації, які характеризують рух тіла під час звичайних фізичних навантажень. Вони контролюють діяльність пацієнтів, яким імплантовані

кардіостимулятори. Вони використовуються для виявлення мимовільного тремтіння рук у пацієнтів з неврологічними розладами [28].

Датчик тиску може використовуватися для безперервного вимірювання артеріального тиску, наприклад, під час операції на серці. Іншими потенційними застосуваннями п'єзоелектричних датчиків тиску є моніторинг тиску під час ангіопластики (хірургічний метод розтину закупорки в артерії), безперервний моніторинг серцевого ритму пацієнтів під час таких дій, як ходьба, біг і вправи на біговій доріжці [26].

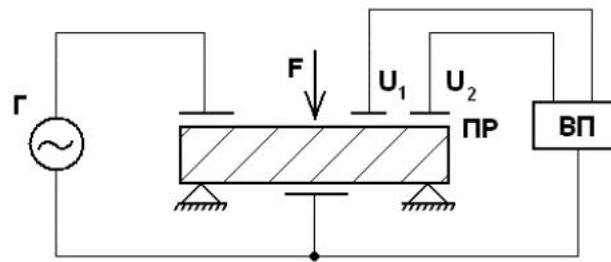
П'єзоелектричні звукові датчики (мікрофони) знайшли своє застосування в медицині в якості контактних мікрофонів для електронних стетоскопів [22].

На основі п'єзоелектричних перетворювачів, оформлених у вигляді п'єзокерамічних трансформаторів (ПКТ) можуть бути побудовані п'єзокерамічні резонансні датчики (ПКРД) [29], [30]. Конструктивно ПКТ є п'єзокерамічною пластиною (п'єзоелементом) з двома парами електродів, до однієї з яких підключений генератор збудження, до іншої – вимірювальний прилад. Вимірюване зусилля прикладається до п'єзоелемента через силопередавальні елементи, які виконуються або з електроізоляційного матеріалу, або з металу. Змінна електрична напруга створює механічні коливання п'єзоелемента (зворотний п'єзоэффект). Внаслідок цього на другій парі електродів за рахунок прямого п'єзоэффекту виникає змінна напруга, амплітуда якої залежить від величини діючого на п'єзоелемент зусилля. Вихідний сигнал являє собою амплітудно-модульовані електричні коливання з частотою, рівною частоті напруги збудження, і огинаючою, яка визначається величиною зміни вимірюваного зусилля [31].

На рисунку 1.4 представлена структурна схема диференціального п'єзотрансформаторного датчика статичних зусиль, що реалізує режим пов'язаних коливань в об'ємі монолітного п'єзоелемента [32]. Принцип роботи вимірювального пристрою такого типу заснований на тому, що під



дією вимірюваного зусилля відбувається неоднакова зміна вихідних напруг на генераторних обкладинках п'єзоелемента [33].



**Рис. 1.4. Структурна схема диференціального п'єзотрансформаторного датчика зусиль на базі монолітного п'єзоелемента; Г – генератор; ПР – п'єзорезонатор; ВП – вимірювальний прилад**

### **1.2.2. Застосування п'єзоелектричних перетворювачів в електро- і гідроакустичних системах**

Особливе місце п'єзоелектричні перетворювачі займають в електро- і гідроакустиці, де вони призначені для випромінювання і прийому акустичних коливань в повітряному або водному середовищі [34].

Широкий спектр п'єзокераміки, зокрема дискові п'єзоелектричні перетворювачі, використовуються в гідролокаційних технологіях і гідроакустичних системах для вимірювання та визначення місця розташування, особливо в морських умовах.

Розробка гідролокаційних систем з високою роздільною здатністю, яка велася в військових цілях, в даний час все частіше замінюється цивільними застосуваннями. Окрім гідролокаційних систем для визначення місцезнаходження підводних човнів, використовуються системи для вимірювання глибини, визначення місцезнаходження косяків риб, дослідження рельєфу надр на мілководді або для підводного зв'язку [35].

Загальним завданням при вдосконаленні п'єзоелектричних випромінювачів є збільшення дальності дії, що можливо досягти шляхом:

- зниження робочої (резонансної) частоти і (або)

– збільшення потужності випромінювання (підвищення рівня звукового тиску).

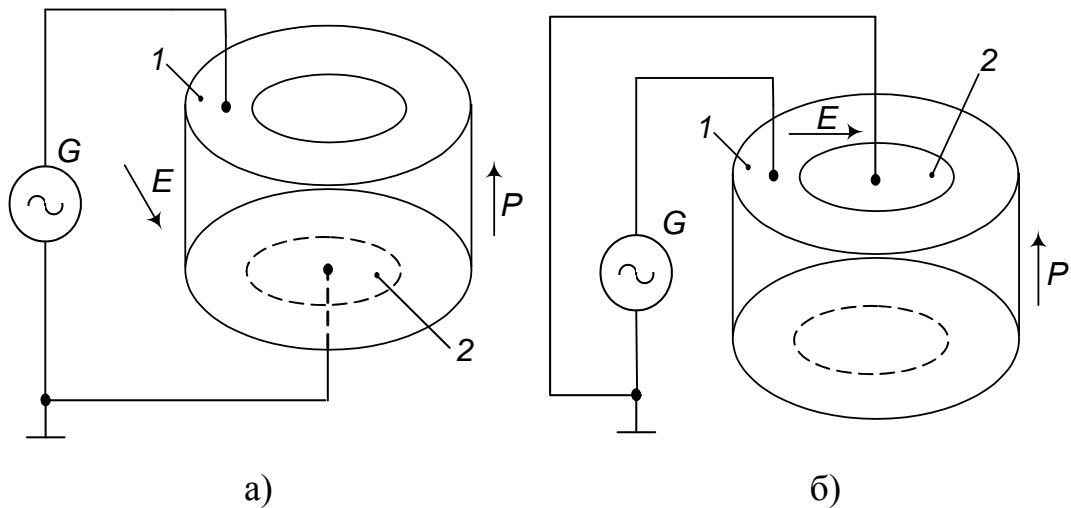
Відомо, що низькочастотний звук поширюється у воді практично без загасання на відстані до декількох тисяч кілометрів. Саме завдяки цьому низькочастотна акустика має очевидні переваги у вирішенні широкого кола задач [36].

Для виготовлення електроакустичних перетворювачів використовуються мономорфні п'єзоелементи, тобто які складаються з одного п'єзоелемента, а також біморфні елементи, що складаються з двох п'єзоелементів або п'єзоелемента і металеві пластилини, з'єднаних за допомогою клею або припою.

Найчастіше в електро- і гідроакустиці використовуються асиметричні біморфні п'єзоелементи, які мають порівняно низьку резонансну частоту і високий рівень створюваного звукового тиску, однак вони складніше мономорфних і, крім того, містять клейове з'єднання, яке зменшує механічну міцність біморфних елементів [15], [34].

Дискові п'єзоелектричні перетворювачі з розділеними електродами знаходять застосування в якості електроакустичних перетворювачів. У більшості електроакустичних перетворювачів має місце подвійне перетворення енергії: електромеханічне, в результаті якого частина електричної енергії, що підводиться до перетворювача переходить в енергію коливань деякої механічної системи, і механоакустичне, при якому за рахунок коливань механічної системи в середовищі створюється звукове поле.

На рисунку 1.5 представлені схеми підключення дискового електроакустичного перетворювача з розділеними електродами [37].



**Рис. 1.5. Схеми підключення дискового п'єзоелемента з розділеними електродами: 1, 2 – електроди; G – генератор; E – вектор електричного поля напруги збудження; P – вектор поляризації**

### **1.2.3. Застосування п'єзоелектричних перетворювачів в джерелах вторинного електроживлення об'єктів критичного застосування**

Пристрої з послідовним використанням зворотного і прямого п'єзоефектів, або перетворювачі подвійної дії (ППД), перетворюють при зворотному п'єзоефекті електричну енергію в механічну енергію деформації (або коливань), а потім, з використанням прямого п'єзоефекту, механічну енергію в електричну. Процеси перетворення енергії можуть відбуватися в одному п'єзоелементі, без використання проміжного середовища, і в різних п'єзоелементах, з використанням проміжного середовища.

Без використання проміжного середовища в одному п'єзоелементі відбуваються процеси перетворення енергії в п'єзокерамічних трансформаторах, що підвищують або знижують електричну напругу, в п'єзоелементах різноманітних п'єзокерамічних резонаторів і фільтрів частотно-селективних пристроїв тощо [38], [39].

Перетворення в твердому тілі п'єзокераміки за рахунок зворотного п'єзоефекту електричної енергії в механічну, а потім, за рахунок прямого

п'єзоефекту знову в електричну можна розглянути на прикладі п'єзоелектричного перетворювача трансформаторного типу [38].

П'єзоелектричним трансформатором умовно називають п'єзоелектричний перетворювач з трьома і більше електродами, підключеними до одного або декількох джерел електричного сигналу і навантаженням. У найпростішому випадку п'єзоелектричний трансформатор являє собою п'єзоелемент з трьома електродами, що складається з двох секцій: вхідної– секції збудження і вихідної – генераторної секції. Обидві секції поляризовані і, отже, мають п'єзоактивність [40], [41].

У п'єзоелектричному перетворювачі трансформаторного типу відбувається як би подвійне перетворення енергії – електричної в механічну, а потім механічної в електричну. У збуджувачі змінний електричний сигнал за рахунок зворотного п'єзоефекту перетворюється в енергію акустичних хвиль, які, зароджуючись на кордонах електродів, поширюються по всьому об'єму перетворювача. На частоті, яка дорівнює одній з резонансних механічних частот перетворювача, утворюється стояча хвиля з максимальною амплітудою коливань. У генераторі п'єзоелектричного перетворювачі трансформаторного типу механічне напруження за рахунок прямого п'єзоефекту перетворюється в електричний сигнал. На резонансних частотах коефіцієнт трансформації має максимальне значення. Підбором розмірів електродів і їх розташування можна отримувати різні значення коефіцієнта трансформації [40], [38], [41].

Використання прямого і зворотного п'єзоефекту дозволяє реалізувати таку важливу функцію електротехнічних пристроїв, як перетворення електричного сигналу одного рівня в сигнал іншого, більш високого або низького рівня. При цьому представляється можливість гальванічно розв'язати вхідні і вихідні кола. Слід з самого початку відзначити, що частотна характеристика перетворювача трансформаторного типу має яскраво виражені вибіркові властивості і значний коефіцієнт трансформації вдається отримати тільки в резонансному режимі роботи [41].

Вперше ідею використання п'єзоелектричних перетворювачів трансформаторного типу (ППТТ) запропонував Розен в 60-х роках ХХ століття. П'ятдесят років по тому технологія ППТТ стала однією з кращих альтернатив електромагнітним трансформаторам в тих сферах їх застосування, де необхідна висока надійність, стабільність, автономність, максимальна тривалість безвідмовної роботи [42]. Об'єктами, де необхідне застосування таких наднадійних трансформаторів напруги є:

- автоматичні міжпланетні станції («Вояджер», «Маринер», «Луна» та інші);
- автономні глибоководні плаваючі об'єкти;
- будь-які інші об'єкти, доступ до яких сильно утруднений, неможливий або надзвичайно небезпечний для людини (ядерні реактори; хімічно небезпечні об'єкти, станції в Антарктиді і Арктиці, підземні об'єкти, орбітальні супутники тощо) [43].

У ряді пристроїв автоматики і обчислювальної техніки в якості основного, базового елемента застосовуються ППТТ з керованим або некерованим коефіцієнтом трансформації. Надзвичайно широкі можливості п'єзотрансформаторів дозволяють використовувати їх при створенні різноманітних аналогових і дискретних пристроїв перетворення сигналів.

Слід зазначити, що на основі ППТТ можливе створення різноманітних керуючих пристроїв, здатних виконувати різні функції перетворення сигналів. Для цього в елемент п'єзотрансформатора вводиться додаткова секція електродів і зв'язок між секціями здійснюється тільки механічним шляхом [44].

П'єзоелектричні перетворювачі трансформаторного типу знайшли застосування в областях, де потрібне отримання високих напруг. Практика застосування п'єзотрансформаторів показує, що вони досить ефективно працюють на першій або на другій моді коливань в області частот від декількох десятків до сотень кілогерц. Однак при конструюванні пристроїв, що використовують ППТТ, необхідно враховувати, що сам

п'єзотрансформатор є механічною віброуючою системою і вимагає правильного закріплення. Для того, щоб не вносити додаткових втрат в механічну систему, кріплення ППТТ необхідно здійснювати в місцях мінімальних зміщень для обраної моди коливань [45].

Різноманітність типів електронних пристроїв на основі ППТТ робить необхідним використання широкого спектру п'єзокерамічних матеріалів із заданими властивостями. Пошук таких п'єзокерамічних матеріалів є самостійною задачею [46].

П'єзоелектричні трансформатори широко застосовуються в електроніці. Відсутність у ППТТ обмоток і магнітної системи, можливість застосування планарної конструкції, висока економічність і надійність істотно поліпшують масогабаритні показники електронних вузлів комп'ютерних систем [47], [48]. Найбільше застосування ППТТ знаходять в високовольтних джерелах вторинного електроживлення (ДВЕЖ) і в пристроях, де потрібен великий коефіцієнт перетворення напруги, зокрема, в медичній техніці [46].

Озоновий стерилізатор їжі є швидким і ефективним способом для стерилізації води, фруктів і овочів, а також м'яса і морепродуктів, і тепер стерилізатори для домашнього використання продаються споживачам в якості безпечного і дешевого способу стерилізації продукту. Обсяг ринку для стерилізатора харчових продуктів складає мільйони одиниць в рік, і він став незамінним побутовим пристроєм.

Останнім часом використання імпульсного електричного поля (ІЕП) в стерилізації харчових продуктів привернуло велику увагу [49], [50], [51]. Основною частиною стерилізатора є іонізатор, в якому високовольтне імпульсне джерело живлення генерує імпульсне поле високої напруги [52], [53]. Високовольтні імпульси можуть генеруватися через високовольтний трансформатор, а амплітуда вихідного імпульсу становить до кількох десятків кіловольт в залежності від конкретного застосування. Маючи перевагу коефіцієнта збільшення високої напруги, ПТ може замінити магнітний трансформатор в побутовому стерилізаторі. Для домашнього

стерилізатора необхідна напруга знаходиться в діапазоні від 6 кВ до 10 кВ [54].

П'єзокерамічні трансформатори застосовуються в іонізаторах і озонаторах, які можна використовувати як для знезараження приміщень, так і для очищення води і інших застосувань.

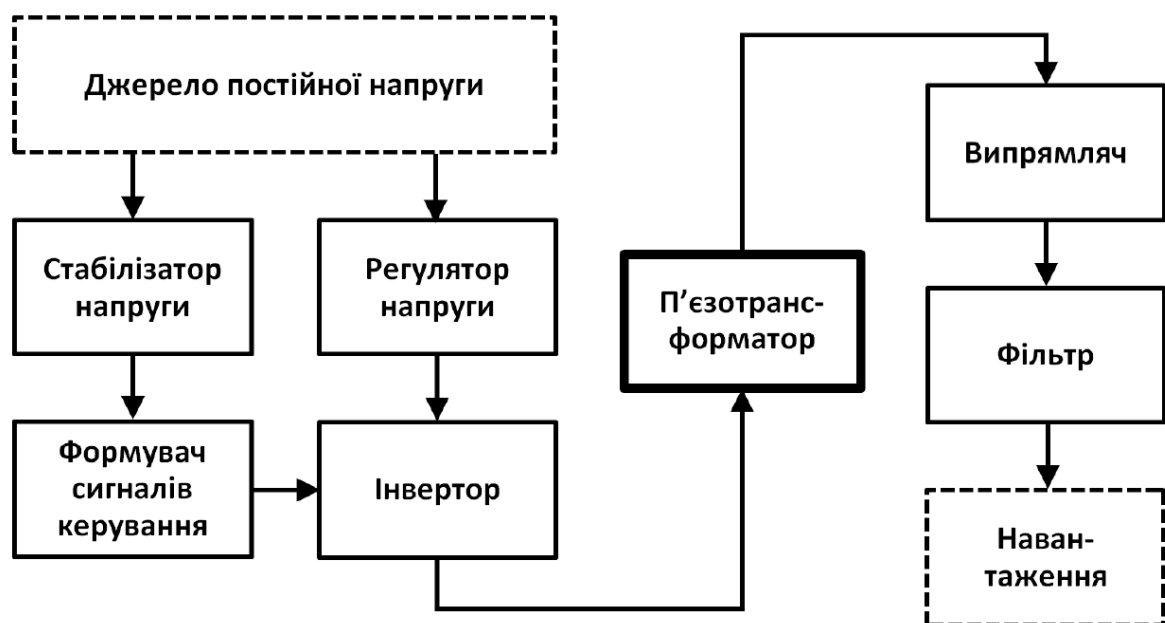
У пристроях для коагуляції крові за рахунок малопотужних високочастотних плазмових розрядів використовуються п'єзокерамічні трансформатори з їх можливостями генерації високочастотної і високовольтної напруги і здатністю зберігати працездатність при коротких замиканнях у вторинному колі [38].

Пристрій вторинного джерела живлення (ВДЖ), який є невід'ємною частиною будь-якого електронного пристрою або системи, зазвичай ґрунтується на використанні електромагнітного трансформатора. Такий спосіб має ряд істотних недоліків: подібним пристроям, як правило, властиві значна потужність розсіювання, високий рівень нагріву, низькі надійність і зносостійкість, незадовільні масогабаритні показники, створення електромагнітних завад, небезпека пробою обмоток тощо. На додаток до цього, отримання високих рівнів напруги за допомогою електромагнітного трансформатора є досить складним завданням. Тому в спектроскопії і рентгеноскопії, іонній оптиці, світлотехніці, радіолокації, електросинтезі озону, іонізації повітря [55] та інших галузях техніки, де застосовується висока напруга, для побудови ВДЖ можливе застосування альтернативних перетворюючих пристроїв – п'єзотрансформаторів. Дослідження в області використання ПТ активно проводяться за кордоном, в основному японськими й американськими вченими, в чому зацікавлені відомі світові гіганти з виробництва електронного обладнання (NEC, Canon, Panasonic тощо)[56]. Деякі розробки в цій області представлені в [57].

Дослідженням параметрів і характеристик ППТТ присвячені роботи [58], аналізу можливостей застосування цих приладів у складі перетворювальних пристроїв [57], [59], [60], [61]. На базі раніше проведених

досліджень [58], [59], [60], [62], враховуючи особливості роботи ППТТ, в роботі [56] запропоновано структуру ВДЖ на основі ППТТ, яка наведена на рисунку 1.6.

Серед основних стримуючих чинників застосування ППТТ можна відзначити відсутність вітчизняної високоякісної п'єзокераміки з необхідними електрофізичними властивостями і відсутність спеціалізованих мікросхем з великим ступенем інтеграції. Проте використання ППТТ у ДВЕЖ малої і середньої потужності (до 20 Вт) дозволяє поліпшити масогабаритні показники в 4-6 разів в порівнянні з аналогічними ДВЕЖ на основі електромагнітних трансформаторів. При необхідності створення електронних вузлів плоскої конструкції ППТТ стають просто незамінними [46].



**Рис. 1.6. Структура вторинного джерела живлення на основі ППТТ**

Основна складність застосування ППТТ полягає в тому, що схемотехнічні принципи побудови ДВЕЖ на базі ППТТ істотно відрізняються від принципів побудови ДВЕЖ на основі електромагнітного трансформатора. Так як ППТТ є функціональним резонансним елементом, необхідно враховувати його специфічні особливості: вузькість резонансних



амплітудно-частотних характеристик (АЧХ) (добротність деяких типів ППТТ може досягати 1000); зміщення АЧХ по амплітуді і частоті при впливі температури, зміні характеру і величини навантаження; висока крутизна фазочастотних характеристик (ФЧХ) на частоті резонансу; сильна зміна повних вхідних і вихідних опорів при дії збурюючих факторів (опори можуть мати ємнісний, індуктивний, активний і комбінований характер). Крім того, можна відзначити сильну залежність передавальних коефіцієнтів і параметрів передавальних функцій, а також ККД ППТТ від струму навантаження. Тому ППТТ можна охарактеризувати як об'єкт управління зі змінною структурою та змінними параметрами.

Перераховані вище особливості показують, що ППТТ і електромагнітні трансформатори вимагають різного системотехнічного підходу до проектування радіоелектронних пристроїв на їх основі.

Наявність специфічних, порівняно з електромагнітними трансформаторами, властивостей дозволяє використовувати ППТТ в областях техніки і медицини, де застосування інших аналогічних радіоелементів або утруднене, або неможливе. Здатність працювати в режимах, близьких і навіть рівних режиму короткого замикання, дозволяє використовувати ППТТ в пристроях для заряду ємнісних накопичувачів. Час заряду можна зменшити в порівнянні з аналогічним по потужності пристроєм на електромагнітному трансформаторі в 2-5 разів. Наявність гальванічної розв'язки у ППТТ з високою напругою пробою, компактність і економічність схем включення дає перевагу його використання в коагуляторах для косметології та стоматології потужністю до 100 Вт [46].

П'єзоелектричний перетворювач трансформаторного типу має ряд переваг в порівнянні з електромагнітним, а саме [40], [63], [64]:

- висока питома потужність;
- відсутність електромагнітних перешкод;
- висока ефективність;
- можливість мініатюризації;

- широкий частотний діапазон;
- вогнестійкість;
- проста технологія виготовлення [43], [65].

Дослідження показали, що п'єзоелектричні перетворювачі трансформаторного типу можуть конкурувати з традиційними електромагнітними як по ефективності, так і по потужності [66], [67], [68], [69], [70], [71].

#### **1.2.4. Застосування п'єзоелектричних перетворювачів в аерокосмічній галузі**

Протягом 2000-х років НАСА надало гранти на кілька проектів по інноваційним дослідженням малого бізнесу (Small Business Innovation Research, SBIR) для інтеграції п'єзоелектричних перетворювачів в космічних застосуваннях [72].

На рисунку 1.7 показана загальна схема системи розподілення електроенергії для супутника. Вхідна енергія надходить в силовий модуль з шини напруги постійного струму, яка зазвичай управляється високоефективними сонячними батареями. Зазвичай регулятор напруги DC/DC включений для регулювання напруги основної розподільної шини. Ця шина розподіляє вхідну енергію на різні системи супутника, такі як система зберігання (заряд батарей для забезпечення енергії, коли супутник працює без сонячної енергії), корисне навантаження (системи зв'язку, детектори та датчики) і рушій. Рівень напруги в кожному з цих пристроїв в цілому відрізняється від рівня напруги інших, а також відрізняється від регульованої шини. Отже, потрібні модулі для перетворення рівнів напруги від низького до високого (підвищуючі) або від високого до низького (знижуючі). Традиційно використання важких, громіздких і малоефективних магнітних трансформаторів було основним рішенням для цього перетворення. В рамках дослідницьких програм NASA SBIR Phase II і DOD SBIR Phase I, Face

Electronics, Норфолк, США [73], [74] було запропоновано альтернативне рішення – застосування технології п'єзоелектричних перетворювачів у багатьох складних областях для космічних застосувань [75].

Немагнітна характеристика ППТТ, компактний розмір, здатність генерувати високі напруги і висока густина потужності були ідеальним поєднанням для портативних пристроїв. У період з середини 1990-х років і протягом першого десятиліття 2000-х років було підраховано, що загальний обсяг продажів на рік перевищив 25-30 мільйонів з основним виробництвом, розташованим в Японії [76].

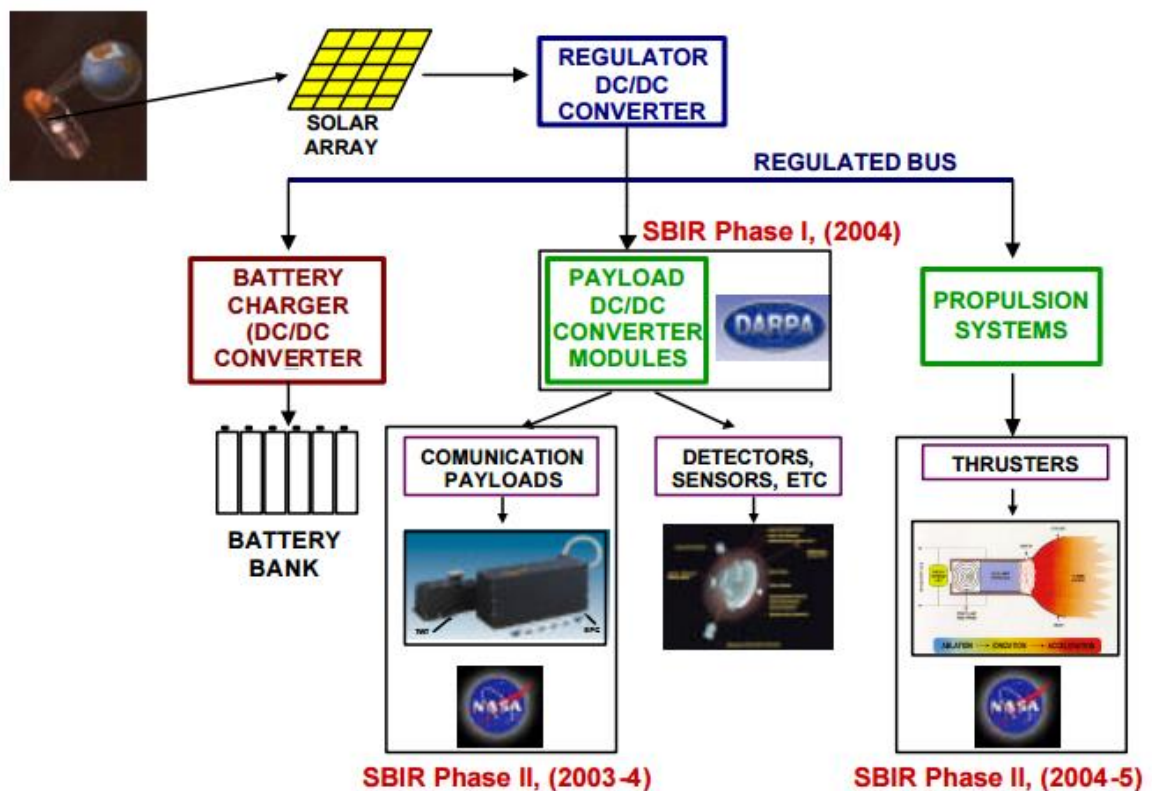


Рис. 1.7. Система розподілення електроенергії для супутника

### *Інші застосування п'єзоелектричних перетворювачів на об'єктах критичного застосування*

Магнітні компоненти, як правило, нелегко мініатюризуються і страждають від насичення і втрат в осерді. Механічні резонатори замість цього можуть бути інтегровані з використанням MEMS-рішень і мають

набагато більш високі якісні показники [77]. П'єзоелектричні трансформатори широко використовувалися в високовольтних застосуваннях, таких як інвертори для рідкокристалічного дисплея, або для надкомпактних зарядних пристроїв для мобільних пристроїв [78].

В даний час передові світлодіодні технології освітлення звертають на себе увагу з точки зору економії енергії, поліпшення терміну служби і стабільності продукту. У порівнянні з деякими іншими джерелами освітлення, індивідуальний світлодіод є дуже маленьким джерелом світла, але світлодіодна система, що містить масиви світлодіодів, буде чудовим джерелом освітлення з такими перевагами як мала споживана потужність, низьке тепловиділення, малий струм, зміна кольору тощо, і вони все частіше використовуються в різних системах освітлення, показаних на рисунку 1.8, наприклад, система освітлення в трамваї і автобусі, в яких можуть бути застосовані п'єзоелектричні перетворювачі електричної енергії [54].

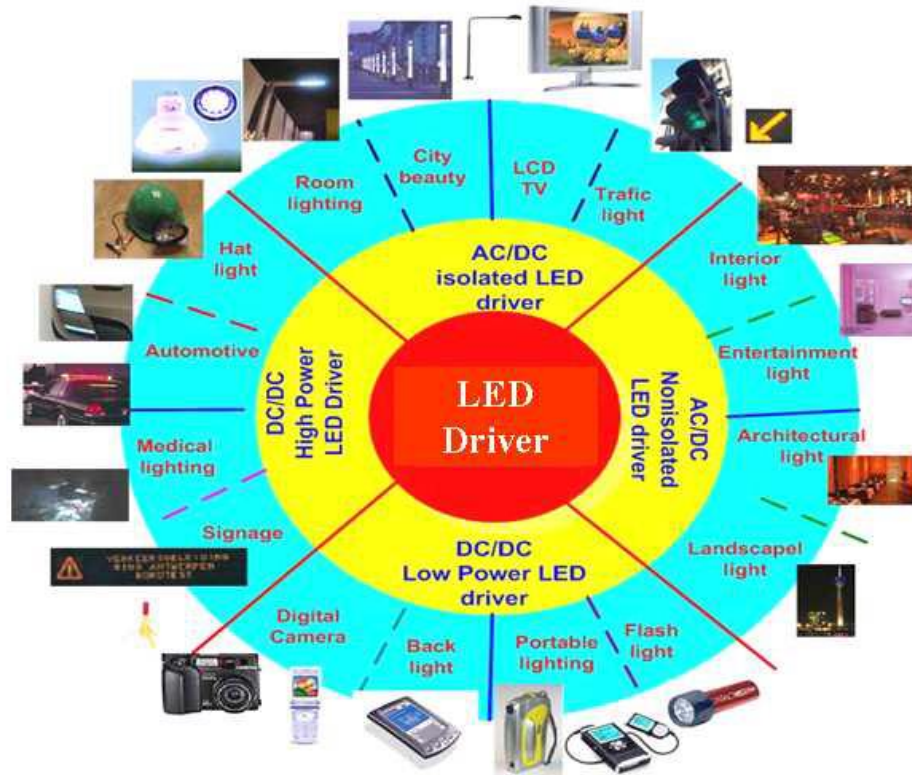


Рис. 1.8. Застосування світлодіодних систем

### 1.3. Основні відомості про дискові п'єзоелектричні перетворювачі з розділеними електродами

Базовим елементом будь-якого п'єзоелектричного виконавчого пристрою є п'єзоелемент, форма і розміри якого вибираються виходячи з конкретної задачі, умов функціонування, необхідних діапазонів переміщень. На сьогоднішній день є великий вибір типорозмірів п'єзоелементів, що виготовляються з різних п'єзоматеріалів (рис. 1.9).



**Рис. 1.9 – П'єзоелектричні елементи**

Існує загальноприйнятий в нашій і зарубіжній практиці умовний розподіл типових п'єзоелементів в залежності від їх конфігурації: пластина (plate), диск (disc), кільце (ring), брусок (bar), стрижень (rod), циліндр (cylinder). Можуть бути виготовлені гнучкі п'єзокерамічні елементи: пластинчасті (plate bender) і дискові (disc bender), які, в свою чергу, поділяються на юніморфи (unimorph), тобто одношарові, і біморфи (bimorph) – двошарові [79].

У великому переліку типів і конструкцій п'єзокерамічних елементів (див. розділ 2.3 в [17]), які використовуються для створення пристроїв п'єзоелектроніки, можна виділити диски з поляризацією по товщині. Вони відрізняються простотою виготовлення і використання в складі того чи

іншого пристрою, що тягне за собою надійну повторюваність параметрів і характеристик пристрою при серійному виробництві.

Широкий спектр п'єзокераміки, зокрема дискові п'єзоелектричні перетворювачі, використовуються в гідролокаційних технологіях і гідроакустичних системах для вимірювання та визначення місця розташування, особливо в морських умовах [35].

П'єзоелектричні диски з частковим електродуванням однієї або двох поверхонь досить часто використовуються для створення різних функціональних пристроїв п'єзоелектроніки [17]. Дискові п'єзоелектричні пристрої широко застосовуються в елементах комп'ютерних систем [80], [81], [82], [83], [84], [85]. Диски з секторним електродуванням поверхні є практично основним елементом багатьох мікроелектромеханічних структур [80]. Дискові п'єзоелектричні перетворювачі з розділеними електродами знаходять застосування в якості електроакустичних перетворювачів [37].

До недавнього часу науково-технічна база проектування і вдосконалення п'єзокерамічних перетворювачів обмежувалася, в основному, лише зміною форми, розмірів і матеріалу п'єзоелемента, а також виду порушуваних коливань. Існуючі підходи підвищення ефективності п'єзоелектричних перетворювачів, зокрема розширення робочого діапазону, підвищення чутливості та рівня вихідного сигналу п'єзоелектричних перетворювачів, вимагають неминучого компромісу з вимогами до мініатюризації цих перетворювачів, забезпечення яких є особливо важливим для об'єктів критичного застосування [15], [34].

Часткове електродування та розділення електродів робочих поверхонь дозволяє порушувати в об'ємі п'єзоелектричних перетворювачів кілька типів пружних коливань. Маніпулюючи геометричними параметрами електродованих поверхонь, можна управляти енергетикою коливальних процесів [86].

Багато сучасних систем повинні вбудовуватися в досить мініатюрні пристрої. Дуже часто геометрія друкованої плати системи визначається

корпусом того пристрою, для якого вона призначена. Тому мініатюризація виконання одна з проблем розробника сучасних систем [87].

Основна перевага використання в комп'ютерних системах перетворювачів з п'єзокерамічних матеріалів з розділеними електродами обумовлюється їх особливою структурою, яка дозволяє реалізувати в одному такому елементі принципово різні схеми, при цьому ступінь інтеграції визначається числом функціональних елементів, об'єднаних в одному вузлі [88].

#### **1.4. Методи розрахунку дискових п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами**

Розвиток і підвищення ефективності комп'ютерних систем критичного застосування неможливо без попереднього рішення задачі їх математичного моделювання [89].

Побудові і дослідженню математичних моделей п'єзоелектричних перетворювачів трансформаторної конструкції (з розділеними електродами) присвячено чимало публікацій. Починаючи з монографії [40] основи розрахунку передавальних характеристик п'єзоелектричних трансформаторів розглядалися, наприклад, в роботах [90], [91], [92], [93], [94], [95], [96], [97], [98], [99], [100], [101], [102], [103], [42], [104], [105], [106], [107], [108], [109], [110], [111], [112].

Роботи, присвячені розрахунку параметрів і характеристик п'єзоелектричних перетворювачів трансформаторної конструкції можна розділити на дві групи. До першої групи належать роботи, які спираються на польову (як в роботі [113]) модель п'єзокерамічного диска [90], [91], [92], [93], [94], [95], [96], [97], [98], [99], [100], [101], [102], [103], [42]. До другої групи належать роботи, засновані на використанні еквівалентних схем [104], [105], [106], [107], [108], [109], [110], [111], [112]. Математичні моделі п'єзоелектричних перетворювачів, побудовані на основі аналізу так званих

еквівалентних схем, не враховують того очевидного факту, що рухи матеріальних частинок п'єзоелектричного диска повинні задовольняти другому і третьому законам Ньютона. Ігнорування цього фундаментального положення виводить ці моделі за рамки механіки деформованого твердого тіла, і, як наслідок, гарантовано визначає їх неадекватність реальним об'єктам і фізичним процесам що відбувається в них [114].

### ***Еквівалентні схеми***

В процесі проектування генераторів з кварцовим резонатором розраховувачі параметрів елементів електричних схем не могли обраховувати ділянку електричного кола, в якому знаходився п'єзоелектричний елемент. І з цієї ситуації був знайдений вихід В.Г. Кеді. В період з 1925 р. по 1928 р. він у співавторстві з К.С. ван Дайком опублікував ряд статей, в яких були запропоновані методи побудови еквівалентних схем кварцових резонаторів. У загальних рисах технологія побудови еквівалентної схеми п'єзоелектричного елемента, який здійснює гармонійні коливання за рахунок енергії генератора електричних сигналів, виглядає наступним чином. Спочатку вирішується гранична задача динамічної теорії пружності про усталені гармонійні коливання п'єзоелектричного елемента тієї чи іншої форми. В результаті вирішення цієї задачі можна визначити електричний імпеданс коливального елемента, тобто визначити його електричну поляризацію і оцінити електричні струми в провідниках, які підключаються до електродованих поверхонь резонатора. Після цього можна побудувати електричну схему з ємностей, індуктивностей і резисторів, включених таким чином, щоб в деякому діапазоні частот характер зміни електричного імпедансу цієї схеми був еквівалентний зміні електричного імпедансу коливального п'єзоелектричного елемента. За відомим з результатів рішення граничної задачі значень зміщень матеріальних частинок п'єзоелектричного елемента знаходиться усереднена по об'єму елемента коливальна швидкість. Після цього використовуються електромеханічні аналогії і формулюються співвідношення для розрахунку значень елементів еквівалентної схеми.



Представляється доречним привести фрагмент тексту § 262 (другий абзац зверху на стор. 314 монографії [115]). В.Г. Кеді пише: «Під «еквівалентною схемою» будь-якої електромеханічної системи зазвичай розуміють групу значень  $R$ ,  $L$  і  $C$ , незалежних від частоти і з'єднаних один з одним так, що при їх підстановці замість дійсної системи в будь-яке електричне коло їх вплив на коло буде таким же, як вплив самої електромеханічної системи, у крайньому випадку в деякому діапазоні частот. У разі п'єзрезонатора електричні константи еквівалентної схеми вибираються так, що вони представляють електричну поведінку резонатора поблизу особливої характерної частоти коливань кристала. Діапазон частот, в якому еквівалентні електричні «константи» можна вважати дійсно постійними, в значній мірі залежить від близькості інших форм коливань. Взагалі кристалічний резонатор даної форми і орієнтації володіє великим числом характерних форм коливань при різних частотах, при кожній з яких резонатор як би має одну ступінь свободи і особливу групу еквівалентних електричних констант. Еквівалентна схема має різні параметри для кожної форми коливань». Далі В.Г. Кеді пише, що «еквівалентна схема, загальноприйнята для п'єзрезонатора в даний час, була виведена з основних рівнянь автора [тобто В.Г. Кеді] ван Дайком незалежно від роботи Баттерворта».

Сам творець еквівалентної схеми п'єзоелектричного резонатора ясно і недвозначно визначає її призначення – бути включеною до складу електронної схеми генератора електричних сигналів.

На жаль, ця виразна і ясна рекомендація не приймається в розрахунок сучасними авторами, які, як вони кажуть, користуються «методом еквівалентних схем» при описі фізичного стану коливальних п'єзоелектричних елементів, тобто за допомогою невідомо як побудованої «еквівалентної» схеми (яка незрозуміло чому еквівалентна) намагаються описати електричний стан п'єзоелектричного елемента, який деформується зовнішніми силами, або напружено-деформований стан п'єзоелектричного

елемента, який формується генератором електричних сигналів.

Цей, з дозволу сказати, «метод» не має ніякого відношення до аналізу напружено-деформованого стану твердих тіл з п'єзоелектричними ефектами. Еквівалентні схеми самі по собі є результатом цього аналізу і про це ясно і виразно пише сам творець еквівалентних схем, професор Вальтер Георг Кеді в своїй неперевершеній донині з чинності викладу монографії «П'єзоелектрика і її практичне застосування» [115]. Основною особливістю «методу еквівалентних схем» (в його сучасній версії) є довільне маніпулювання порядком з'єднання пасивних елементів радіотехнічних кіл (резистор, ємність і індуктивність) з метою опису тієї чи іншої форми частотної характеристики реальної електромеханічної коливальної системи. При цьому основним аргументом на користь таких логічних побудов є твердження, що запропонована схема має частотну характеристику, яка задовільно описує частотно залежну зміну сигналу на електричній стороні п'єзоелектричного коливального елемента. При цьому повністю ігнорується той факт, що є досить добре розроблена теорія синтезу електричних кіл, працездатність якої переконливо доведена багаторічною практикою побудови пасивних і активних фільтрів електричних сигналів, одним з основних результатів якої є твердження, що як завгодно складна частотна характеристика фізично реалізованого пристрою (з негативною фазочастотною характеристикою) може бути апроксимована кінцевим набором стандартних пасивних ланок з набору  $R$ ,  $L$ ,  $C$  елементів. Визначені в процесі розрахунку цих схем струми і електричні напруги задовольняють законам Ома і Кірхгофа. Визначені за цими значеннями механоелектричні аналоги, тобто коливальні швидкості і сили, мало того, що не враховують неоднорідностей напружено-деформованого стану в межах об'єму реального п'єзоелектричного елемента (корисна дія деяких структур якраз і ґрунтується на використанні цих неоднорідностей), вони просто не задовольняють законам Ньютона. Останнє означає, що «метод еквівалентних схем» не тільки не придатний для опису реальних процесів в реальних п'єзоелектричних

елементах, він, взагалі кажучи, не має ніякого відношення до механіки деформованого твердого тіла [86].

### ***Вісесиметричні коливання***

Однією з перших робіт присвячених розгляду властивостей даного класу приладів є монографія Лавриненко В.В. [40], яка була опублікована 1975 р. У ній вперше були сформульовані принципи розрахунку основних параметрів і характеристик п'єзоелектричних перетворювачів трансформаторного типу, систематизовані і узагальнені методики конструювання та виготовлення цього класу приладів п'єзоелектрики. Дана робота [40] багато в чому не втратила актуальності і в даний час. У цій роботі досліджено п'єзоелектронний трансформатор стрижневої конструкції, а також виконано опис цього класу приладів за допомогою еквівалентних схем. Однак в ній недостатньо глибоко досліджений прийом коливань, а також не наведено опис роботи трансформатора на основі рішення польової задачі.

У розділі 2.5 роботи [116] була зроблена спроба описати процеси, що відбуваються в п'єзоелектричному трансформаторі, проте розглянуті тільки вимушені коливання п'єзоелектричного диска з повністю електродованою поверхнею і отвором посередині, але метод розрахунку п'єзоелектричного трансформатора також не приведений [103].

У великому переліку типів і конструкцій п'єзокерамічних елементів (див. розділ 2.3 в [17]), які використовуються для створення пристроїв п'єзоелектроніки, можна виділити диски з поляризацією по товщині. Вони відрізняються простотою виготовлення і використання в складі того чи іншого пристрою, що тягне за собою надійну повторюваність параметрів і характеристик пристрою при серійному виробництві.

Теоретичні та експериментальні дослідження статичного і динамічного напружено-деформованого стану п'єзоелектричних дисків досліджуються протягом п'ятдесяти років. Серед робіт, якими можна відкрити бібліографічний список, можна виділити публікації [117], [118], [119]. Рациональні основи математичного моделювання напружено-деформованого

стану тонких п'єзоелектричних пластин і оболонки розглянуті в працях А.Ф. Улітко, В.Т. Грінченко та їхніх учнів (див. бібліографію в монографії [120]).

У зазначених вище роботах розглядався або зворотний п'єзоелектричний ефект, коли деформування диску забезпечувалося електричним полем зовнішнього генератора, або прямий п'єзоелектричний ефект електрично навантаженого п'єзоелемента [42].

У багатьох з робіт [90], [91], [92], [93], [94], [95], [96], [97], [98], [99], [100] описані лише процеси, що відбуваються в п'єзоелектричному диску з повністю електродованою поверхнею (суцільними електродами). Так, наприклад, в роботі [90] проведено дослідження вимушених коливань круглої п'єзокерамічної пластини з урахуванням в'язкопружності матеріалу на частоті основного резонансу під дією зовнішнього механічного гармонійного навантаження для випадків жорсткого закріплення контуру і шарнірного обпирання пластини. В роботі [91] досліджені вібраційні характеристики тонкого п'єзоелектричного керамічного диску з різним співвідношенням його розмірів. Задача визначення спектра власних частот і форм коливань розглянута в роботах [92], [93], [94]. В роботі [95] виводяться вирази для миттєвої потужності. В роботі [96] побудована математична модель резонансних п'єзоелектричних перетворювачів при закріплених і вільних кінцях. Математична модель стану п'єзоелектрика з градієнтним полем збудження в площині кристалічного елемента представлена в роботі [97]. В роботі [98] визначені основні параметри п'єзокераміки з вимірювання максимальної та мінімальної провідностей. В роботі [99] досліджуються амплітудно-фазові залежності для радіальних переміщень, суми головних напружень та компонент повної провідності в околиці резонансних і антирезонансних частот. Коливання п'єзоелектричних пластин при імпульсному навантаженні досліджені в роботі [100].

Специфічною особливістю деяких пристроїв п'єзоелектроніки (трансформатори, фільтри, резонатори тощо) є наявність як мінімум двох пар електродів. При цьому одна пара електродів збуджує пружні коливання

пластинки, тобто ініціює зворотний п'єзоелектричний ефект, а друга пара електродів, використовуючи прямий п'єзоелектричний ефект, формує різницю електричних потенціалів на опорі навантаження. Такий режим роботи п'єзоелемента будемо називати трансформаторним. Цей режим роботи недостатньо вивчений. Розрахункові співвідношення, які наведені в розділі 2.5 монографії [116], можна не брати до уваги, так як вони не відповідають ні обговорюваному об'єкту, ні процесам, які в ньому відбуваються [42].

У роботах [101] і [102], присвячених вирішенню задачі електромеханічних коливань п'єзоелектричних елементів з розділеними електродами (трансформаторний тип), розглянуті конструкції п'єзоелектричного трансформатора плоского поперечно-поздовжнього і стрижневого типу відповідно. В роботі [103] проведено аналіз залежності коефіцієнта трансформації дискового п'єзоелектричного трансформатора від місця розташування вторинного електрода, від ширини вторинного електрода і від значення електричного навантаження на вторинному електроді. В роботі [42] розглянуті радіальні вісесиметричні коливання тонкого п'єзокерамічного диску з частково електродованою поверхнею.

Розглянуті вище роботи не об'єднані яким-небудь системним підходом, мають характер розрізнених епізодів, на підставі чого можна стверджувати, що в даний час існує потреба у створенні цілісної методики побудови математичних моделей п'єзоелектричних перетворювачів, які могли б використовуватися в якості теоретичних основ розрахунку напружено-деформованого стану п'єзоелектричних компонентів комп'ютерних систем критичного застосування [114].

### ***Невісесиметричні коливання***

Останнім часом широкого поширення в елементах електронних пристроїв отримали мікроелектромеханічні системи (МЕМС). Абревіатура МЕМС (MEMS) з'явилася на сторінках англійських спеціальних періодичних видань в 1986 р. Ці мікромініатюрні пристрої [80], елементи

яких мають розміри в одиниці нанометрів, являють собою симбіоз сучасної мікроелектроніки і мікромініатюрних електромеханічних перетворювачів [86].

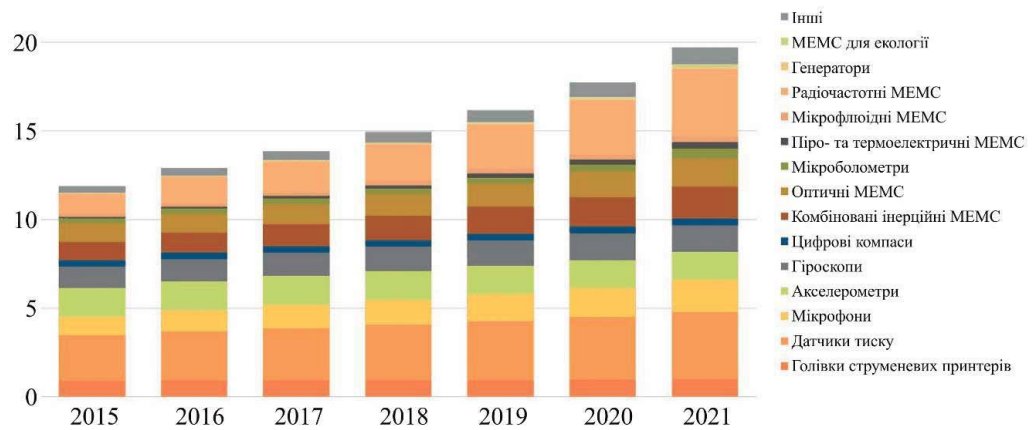
В даний час провідні фірми-виробники радіоелектронних компонентів серійно випускають досить великий перелік елементів, до складу яких включені різні МЕМС. Це, перш за все, різні акселерометри, які випускаються багатомільйонними тиражами, резонатори і реалізовані на їх основі фільтри електричних сигналів, трансформатори та інші мікромініатюрні електромеханічні системи.

Згідно статистичних даних [16] розвиток МЕМС у 2018 році мав наступний вигляд рис. 1.10.



**Рис. 1.10. Поширення пристроїв МЕМС у світі**

За результатами аналізу світового ринку пристроїв МЕМС консалтинговою компанією “Yole Développement” (Франція) [121] було встановлено, що до 2021 року цей ринок складатиме близько 20 млрд. дол. США (рис. 1.11).



**Рис. 1.11. Прогнозування світового ринку пристроїв MEMS (у млрд. дол. США)**

Технології виготовлення MEMS в даний час прийнято називати мікросистемними технологіями. MEMS або, що те ж саме, п'єзоелектричні елементи, виготовлені за допомогою мікросистемних технологій, мають багато спільного зі звичайними, тобто немікроскопічних розмірів, п'єзоелектричними елементами, які виготовляються з п'єзокераміки. Для реалізації тих чи інших функціональних можливостей в MEMS використовуються полікристалічні сегнетоелектрики, які поляризуються постійним електричним полем в заданому напрямку. Звичайні п'єзоелектричні елементи виготовляються з п'єзокераміки, яка спочатку є полікристалічним сегнетоелектриком, який на останньому технологічному етапі виготовлення п'єзокерамічного виробу поляризується постійним електричним полем заданої орієнтації. Відмінною рисою між MEMS і звичайними п'єзоелементами є спосіб електродування робочих поверхонь. Звичайні п'єзоелектричні елементи мають, як правило, суцільне електродування поверхні. У деяких спеціальних випадках електроди поділяються (розрізаються) на окремі області, які не мають між собою гальванічного зв'язку. У MEMS, як правило, використовується часткове електродування робочих поверхонь, коли тільки частина поверхні поляризованого сегнетоелектрика покривається металевою плівкою. Цей спосіб електродування дозволяє порушувати в об'ємі MEMS кілька типів

пружних коливань. Маніпулюючи геометричними параметрами електродованих поверхонь, можна управляти енергетикою коливальних процесів в МЕМС, тобто створювати умови, коли один тип коливання буде домінувати над іншими за амплітудою вектора пружних зміщень матеріальних частинок [122].

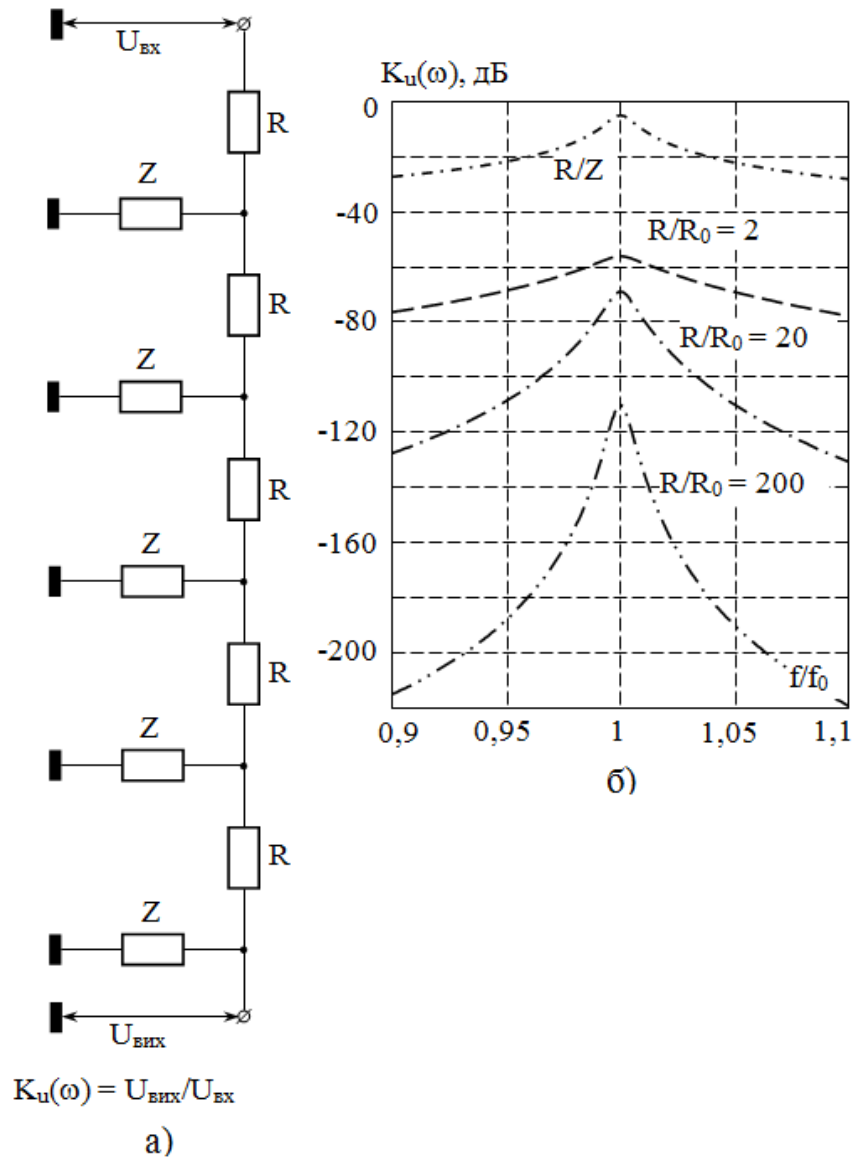
Якщо часткове електродування виконано з порушенням осьової симетрії всієї конструкції, то відкриваються додаткові можливості по управлінню параметрами напружено-деформованого стану п'єзоелектричного диска і передавальними характеристиками електромеханічної системи в цілому [123].

Сучасні технології дозволяють створювати мікроструктури, які об'єднують в собі властивості і якості електронних схем і механічних коливальних систем. В одному корпусі (чіпі) можуть знаходитися десятки однотипних модулів. Під модулем розуміється сукупність мікромініатюрної механічної коливальної системи і електронної схеми, що забезпечує її роботу. Послідовне з'єднання декількох модулів з досить простими індивідуальними характеристиками дозволяє створювати пристрої з унікальними параметрами. Сказане можна проілюструвати так (рис. 1.12).

Припустимо, що є найпростіший дільник електричної напруги, в верхнє плече якого включений резистор  $R$ , а в нижній – МЕМС-резонатор, електричний імпеданс якого  $Z_{en}(\omega)$  визначається характеристичним опором  $R_0 = 5 \text{ Ом}$  і добротністю  $Q_0 = 100$ . Якщо прийняти значення  $R = 1000 \text{ Ом}$ , то коефіцієнт ділення одиночного дільника змінюється так, як це показано на рис. 1.12, б штрих пунктирною кривою, виділеною символом  $R/Z$ . По осі абсцис на рис. 1.12, б відкладається безрозмірна частота  $f/f_0$ . Чітко видно, що одиночний дільник забезпечує подавлення сигналу поза смугою пропускання не більше ніж на 30 дБ. Послідовне з'єднання за сходою схемою (рис. 1.12, а) всього лише п'яти подібних дільників забезпечує подавлення сигналу поза смугою пропускання не менше 120 дБ. Криві, відмічені на рис. 1.12, б символами  $R/R_0=2$  і  $R/R_0=20$ , показують, що при



фіксованих параметрах МЕМС-резонатора, результат роботи сходової схеми значною мірою залежить від вибору величини резистора  $R$ . Загасання сигналу на резонансній частоті можна компенсувати за допомогою коригувальних підсилювачів, які включаються між ланками сходової схеми.



**Рис. 1.12. Сходова схема включення (а) однакових ділянок напруги і частотні характеристики сходового фільтра (б)**

Розглянутий приклад переконливо демонструє можливості створення за допомогою мікросистемних технологій в малих об'ємах (в об'ємі одного корпусу мікросхеми) пристроїв з унікальними характеристиками і параметрами. Тут же треба відзначити, що мікросистемні технології, які на

одній кремнієвій пластині дозволяють створювати планарні електронні схеми і об'ємні механічні структури, є досить дорогими процесами. Запуск технологічного процесу виготовлення того чи іншого МЕМС передбачає використання дорогих витратних матеріалів і супроводжується амортизацією дорогого технологічного обладнання. З цієї причини запуску технологічного процесу передують математичне моделювання МЕМС, метою і результатом якого є якісний і кількісний прогноз залежності характеристик і параметрів пристрою від значень геометричних і фізико-механічних параметрів елементів мікроструктури. Очевидно, що ступінь адекватності математичного моделювання реальної ситуації, безпосередньо пов'язаний з мінімізацією втрат часу і ресурсів в період налагодження виробництва нових моделей МЕМС.

Незважаючи на те, що аббревіатура МЕМС (MEMS) відома вже більше 30 років, і практичне використання деяких типів МЕМС становить обсяги в десятки мільйонів екземплярів на рік [80], у відкритій пресі відсутні відомості про достовірні і надійні методи розрахунку їх основних технічних характеристик. Йдеться, звичайно, про механічний компонент МЕМС. Опис динамічного напружено-деформованого стану механічної коливальної підсистеми МЕМС за допомогою методу еквівалентних схем (див., наприклад, статті [124], [125], [126]; можна скласти надзвичайно об'ємний перелік публікацій подібного типу) не витримує ніякої критики. Справа в тому, що сама структура еквівалентної схеми деформованого пружного елемента і числові значення еквівалентних ємностей, індуктивностей і резисторів визначаються після обробки результатів рішення відповідної граничної задачі теорії пружності, тобто після аналітичного опису і дослідження напружено-деформованого стану коливального елемента МЕМС. Про такий порядок конструювання еквівалентних схем деформованих твердих тіл з п'єзоелектричними властивостями ясно і чітко писав Вальтер Георг Кеді – автор еквівалентної схеми кварцового резонатора (1922 рік) в колі стабілізації частоти генерації генератора несучої частоти – в

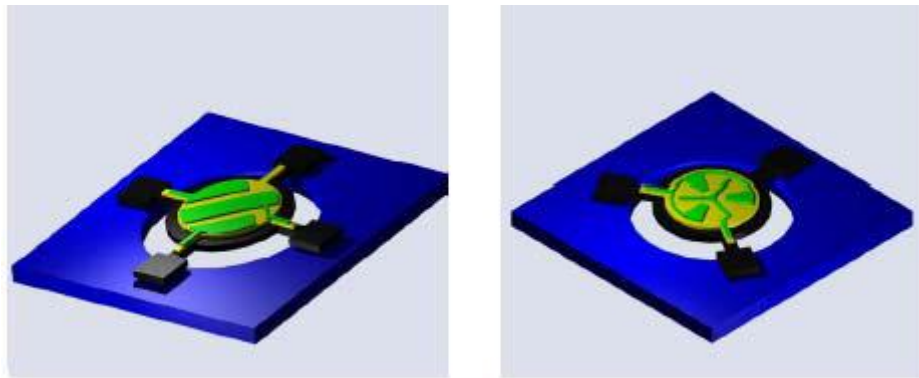
монографії [115], яка і до цього дня залишається неперевершеною по глибині і всебічності викладу матеріалу. Після прочитання глави цієї монографії, яка називається «Електрична еквівалентна схема п'єзрезонатора» стає очевидним, що еквівалентні схеми розроблені механіками для радіоінженерів, щоб ті могли використовувати стандартні методи розрахунку електричних кіл при проектуванні генераторів радіочастот з кварцовим стабілізатором частоти генерації. Повсюдне перекручене застосування еквівалентних схем для опису динамічного механічного стану п'єзоелектричних елементів не піддається якомусь виразному логічному поясненню [86].

Диски з секторним електродуванням поверхні є практично основним елементом багатьох мікроелектромеханічних структур [80]. Множинність і різноманіття практичного застосування дисків з секторним електродуванням природним чином стимулює теоретичні дослідження, метою яких є прогнозування характеристик і технічних параметрів пристроїв п'єзоелектроніки, які створюються на їх основі. Прогноз здійснюється на підставі математичної моделі, яка є основним результатом теоретичного опису реального пристрою. Практична значимість адекватної реальному об'єкту математичної моделі очевидна. В результаті дослідження математичної моделі реального пристрою можна визначити той набір геометричних, фізико-механічних та електричних параметрів реального об'єкта, який забезпечує реалізацію технічних показників функціонального елемента п'єзоелектроніки обумовлених в технічному завданні. Це істотно скорочує час і вартість розробки нових функціональних елементів п'єзоелектроніки. Вартість зекономлених ресурсів становить комерційну ціну математичної моделі [127].

На умові сталості напруженості змінного, створеного зовнішнім генератором електричних сигналів, електричного поля в об'ємі п'єзоелектричного елемента базуються методики розрахунку напружено-деформованого стану п'єзоелектричних пластин [128] і оболонок [120]. У разі

часткового електродування поверхні п'єзоелектричного елемента ці методики не працюють [122].

Аналізуючи конструкції сучасних дискових п'єзоелементів [129], [130], [131], [132], можна помітити що більшість з них мають несиметричне розташування електродів на своїй поверхні (наприклад, рис. 1.13 [129]). Таке розташування електродів, а також кріплення елементів, викликає наявність невісесиметричних коливань в дискових елементах. При аналізі частотних характеристик таких пристроїв необхідно враховувати вплив на них цих коливань.



**Рис. 1.13. Модель сучасних дискових МЕМС резонаторів**

У ряді робіт [133], [134], [135] наведено моделювання невісесиметричних коливань тонких дисків покритих несиметричними електродами, але використані при цьому моделі елементів відрізняються від застосовуваних у сучасних пристроях. В роботі [81] є моделювання невісесиметричних коливань дискового резонатора, але його недоліком є неповне врахування п'єзоелектричних властивостей пристрою [85].

В тонких п'єзоелектричних дисках з розділеними електродами виникають невісесиметричні пружні коливання. Теоретичні та експериментальні дослідження кінематичних характеристик невісесиметричних планарних коливань в п'єзоелектричних тонких дисках взагалі і в дисках з частковим електродуванням однієї або двох поверхонь зокрема почалися в другій половині двадцятого століття. Результати цих

робіт певною мірою узагальнені в монографії [81]. В даний час продовжують публікуватися роботи [82], [83], [84], в яких розглядаються різні аспекти теорії невісесиметричних планарних коливань в тонких п'єзоелектричних дисках. Згадані вище роботи об'єднує, якщо так можна сказати, кінематичний підхід до опису невісесиметричних коливань, тобто підхід який враховує сам факт відсутності осьової симетрії (ряд по тригонометричним  $\cos m\varphi$  або  $\sin m\varphi$ , де  $m=1,2,3,\dots$ ;  $\varphi$  – окружна координата циліндричної системи координат), але не беруться до уваги реальні умови збудження і існування цих коливань. Так, в монографії [81] при побудові теорії планарних невісесиметричних коливань в тонкому п'єзокерамічному диску було неправомірно використано представлення Гельмгольца вектора зміщення матеріальних частинок коливального п'єзокерамічного диску через скалярний і векторний потенціали. Неправомірність полягає в тому, що в анізотропних пружних середовищах представлення Гельмгольца не призводить до розпаду рівняння руху на два рівняння Гельмгольца щодо скалярного і векторного потенціалів. Скалярний і векторний потенціали в монографії [81] записані як вирішення відповідних рівнянь Гельмгольца. Останнє призводить до виразів для розрахунку компонентів вектора зміщення матеріальних частинок п'єзокерамічного диску, в яких присутні циліндричні функції цілочисельних порядків, що не відповідає реальному стану речей. Слід також зазначити, що у всіх роботах не розглядається і не враховується реальний електричний стан елементів об'єму п'єзокерамічного диску під різними електродами, що виключає саму можливість використання опублікованих теоретичних побудов в якості методики розрахунку передавальних характеристик функціональних елементів п'єзоелектроніки на основі дисків з розділеними електродами [127].

Сказаного вище цілком достатньо для висновку про те, що в даний час відсутні математичні моделі дискових п'єзокерамічних елементів з частковим електродуванням однієї або двох поверхонь, які в достатній мірі адекватні реальним об'єктам.

Таким чином, розробка принципів і методів розрахунку характеристик і параметрів механічного компонента МЕМС залишається і в даний час актуальною і практично значущою проблемою.

Розробка і подальше виробництво нових функціональних пристроїв п'єзоелектроніки, зокрема п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування, передбачає, як правило, попереднє теоретичне дослідження характеристик проектованого приладу з метою прогнозування впливу геометричних і фізико-механічних параметрів його елементів на техніко-економічні показники. Достовірність і надійність такого роду прогнозів забезпечується математичною моделлю п'єзоелектричного елемента, яка повинна бути в достатній мірі адекватної реальному об'єкту. Крім цього, розробник повинен володіти достовірною інформацією про фізико-механічні параметри використовуваних п'єзоелектричних матеріалів. Судячи за доступними публікаціями, в даний час, за рідкісним винятком, відсутні зазначені вище необхідні умови для успішної реалізації і завершення технічної розробки. Розробка нових та вдосконалення існуючих пристроїв п'єзоелектроніки, зокрема п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування, ведеться, в основному, методом проб і виключення помилок [86].

Останнє спонукає шукати нові підходи до процедури розрахунку параметрів напружено-деформованого стану і передавальних характеристик п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами.

Все сказане вище є досить вагомою мотивацією для дослідження параметрів і характеристик динамічних електропружних полів в об'ємі дискових п'єзоелектричних перетворювачів з частковим електродуванням поверхонь.

Таким чином, актуальність розробки фізично змістовних математичних моделей дискових п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем зберігається і в даний час.

## 1.5. Формулювання мети та постановка задач дисертаційного дослідження

Незважаючи на різноманіття досліджень, аналіз існуючих підходів показує, що на сьогодні не повною мірою вирішено низку актуальних питань, пов'язаних з важливими теоретичними аспектами й практичною реалізацією високоефективних п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування. Наразі існує наступне *протиріччя*: необхідність підвищення ефективності перетворювачів (розширення робочого діапазону, підвищення чутливості та рівня вихідного сигналу), з одного боку, та дотримання вимог щодо мініатюризації цих перетворювачів, з іншого боку.

Подолати цю суперечність можна шляхом вирішення *актуальної науково-прикладної проблеми* створення високоефективних п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування з одночасним підвищенням ступеня інтеграції та гібридизацією їх експлуатаційних властивостей.

На основі проведеного аналізу визначені мета і задачі дисертації.

*Метою дисертаційного дослідження* є підвищення ефективності п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування шляхом створення нових та удосконалення існуючих моделей та методів синтезу дискових п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі основні *задачі*:

– проаналізувати сучасний стан проблеми дослідження і вдосконалення дискових п'єзокерамічних перетворювачів з розділеними електродами для комп'ютерних систем критичного застосування;

– побудувати математичну модель п'єзокерамічного диску, що коливається в широкому діапазоні частот, та розробити на її основі метод

експериментального визначення матеріальних констант п'єзокераміки для побудови високоефективних комп'ютерних систем;

– побудувати математичні моделі п'єзоелектричного дискового перетворювача з кільцевими електродами та багатосекційного дискового п'єзоелектричного перетворювача для комп'ютерних систем критичного застосування;

– побудувати математичну модель п'єзокерамічного перетворювача з секторним електродуванням робочої поверхні диска, який працює на невісесиметричних планарних коливаннях, та може застосовуватися для побудови мікроелектромеханічних систем критичного застосування;

– побудувати математичну модель дискового п'єзоелектричного перетворювача, який працює на вісесиметричних коливаннях поперечного вигину, та може застосовуватися для побудови ультразвукових систем спеціального призначення;

– розробити методи модифікації п'єзоелектричних перетворювачів для побудови перетворювачів з розділеними електродами для комп'ютерних систем критичного застосування.

Схема виконання дисертаційного дослідження приведена на рис. 1.14.





**Рис. 1.14. Схема виконання дисертаційного дослідження**

## 1.6. Висновки до розділу

Проведено аналіз науково-прикладної проблеми, досліджено сучасний стан та вимоги до комп'ютерних систем об'єктів критичного застосування.

Стабільна робота комп'ютерних систем, особливо критичного застосування, багато в чому залежить від достовірності функціонування як програмної, так і апаратної частини комп'ютерних систем. Невід'ємними елементами апаратної частини комп'ютерних систем, від характеристик яких значною мірою залежать точність і надійність їх роботи, є перетворювачі.

На основі проведеного аналізу визначені особливості застосування п'єзоелектричних перетворювачів в комп'ютерних системах критичного застосування та тенденції їх розвитку.

Встановлено, що розвиток і підвищення ефективності комп'ютерних систем критичного застосування неможливі без попереднього розв'язання задачі їх математичного моделювання.

Показано, що в даний час відсутні надійні і достовірні методи побудови математичних моделей п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами для комп'ютерних систем критичного застосування, які могли б використовуватися в якості теоретичних основ розрахунку характеристик і параметрів цього класу функціональних елементів сучасної п'єзоелектроніки.

### **Список використаних джерел:**

- [1] Israel Koren and C. M. Krishna, *Fault-tolerant systems*. Amsterdam ; Boston: Elsevier/Morgan Kaufmann, 2007, 378pp.
- [2] Ian Sommerville, *Software engineering*, Tenth edition. Boston: Pearson, 2016, 796pp.
- [3] А.В. Федухин и А.А. Муха, "Стратегия отказобезопасности как альтернатива полной отказоустойчивости при проектировании гарантоспособных компьютерных систем. Часть 1", *Молодий вчений*, № 8, с. 169–173, 2016.
- [4] Н.В. Сеспедес Гарсия, "Достоверность работы компьютерных систем", *Математичні машини і системи*, № 4, с. 146–151, 2016.
- [5] В.С. Харченко, М.А. Ястребенецкий, и В.В. Скляр, "Новые информационные технологии и безопасность информационно-управляющих систем АЭС", *Ядерная и радиационная безопасность*, № 2, с. 19–28, 2003.
- [6] М.А. Ястребенецкий и Г.М. Иванова, *Надежность автоматизированных систем управления технологическими процессами*. М.: Энергоатомиздат, 1989, 264 с.

- [7] A.A. Kovalenko і Н.А. Kuchuk, "Сучасний стан та тенденцій розвитку комп'ютерних систем об'єктів критичного застосування", *Системи управління, навігації та зв'язку*, т. 1, № 47, с. 110–113, Сер 2018.
- [8] Jacob Fraden, *Handbook of Modern Sensors*. New York, NY: Springer New York, 2010.
- [9] Georgiy Kuchuk, Vyacheslav Kharchenko, Andriy Kovalenko, and Eugen Ruchkov, "Approaches to selection of combinatorial algorithm for optimization in network traffic control of safety-critical systems", in *2016 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS)*, Yerevan, Armenia, 2016, pp. 1–6.
- [10] А.В. Федухин и Ар.А. Муха, "Обеспечение живучести систем противоаварийной автоматики на гидроэлектростанциях", *Математичні машини і системи*, № 2, с. 169–194, 2018.
- [11] Barry Johnson, "Fault-Tolerant Microprocessor-Based Systems", *IEEE Micro*, vol. 4, no. 6, pp. 6–21, Dec. 1984.
- [12] С. Жуков, "Пьезокерамика и перспективы ее применения", *МТТ. Техно plus*, № 5, с. 56–60, 2009.
- [13] Ю.А. Смирнов и А.В. Муханов, *Электронные и микропроцессорные системы управления автомобилей: Учебное пособие*. СПб.: Издательство «Лань», 2012, 624 с.
- [14] "Системы контроля с использованием пьезокерамики". URL: <http://www.lektsii.com/3-39952.html>.
- [15] V. Sharapov, *Piezoceramic Sensors*. Springer, 2011, 500pp.
- [16] "Status of the MEMS Industry 2018", Lyon, France, 2018.
- [17] Р.Г. Джагупов и А.А. Ерофеев, *Пьезоэлектронные устройства вычислительной техники, систем контроля и управления: Справочник*. СПб.: Политехника, 1994, 608 с.
- [18] Ahmad Safari and E. Koray Akdogan, Eds., *Piezoelectric and acoustic materials for transducer applications*. New York: Springer, 2008, 481pp.

- [19] Jung-Woo Sohn and Seung-Bok Choi, "Various Robots Made from Piezoelectric Materials and Electroactive Polymers: A Review", *Int J Mech Syst Eng*, vol. 3, no. 1, Sep. 2017.
- [20] Yonas Tadesse, Shashank Priya, Harry Stephanou, Dan Popa, and David Hanson, "Piezoelectric Actuation and Sensing for Facial Robotics", *Ferroelectrics*, vol. 345, no. 1, pp. 13–25, Jun. 2006.
- [21] Zhanat Kappassov, Juan-Antonio Corrales, and Véronique Perdereau, "Tactile sensing in dexterous robot hands—Review", *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 74, pp. 195–220, Dec. 2015.
- [22] M. Lukasz Krzysztof Sienkiewicz, "Concept, implementation and analysis of the piezoelectric resonant sensor/actuator for measuring the aging process of human skin", Institut National Polytechnique de Toulouse, Toulouse, 2016.
- [23] Ramutis Bansevicius, Vytautas Jurenas, and Genadijus Kulvietis, "Manipulators with two levels of friction control between links, implemented using piezoelectric transducers, oscillating in burst type excitation mode", *J VIBROENG*, vol. 18, no. 4, pp. 2221–2228, Jun. 2016.
- [24] Xinhua Zhu, "Piezoelectric ceramic materials: Processing, properties, characterization, and applications", in *Piezoelectric materials: structure, properties, and applications*, Nova Science Publishers, Inc, 2009.
- [25] A. Arnau Vives, *Piezoelectric Transducers and Applications*. Springer, 2008, 549pp.
- [26] M. S. Vijaya, *Piezoelectric Materials and Devices*, CRC Press. 2013.
- [27] Ville Jalkanen, Britt M Andersson, Anders Bergh, Börje Ljungberg, and Olof A Lindahl, "Resonance sensor measurements of stiffness variations in prostate tissue in vitro—a weighted tissue proportion model", *Physiol. Meas.*, vol. 27, no. 12, pp. 1373–1386, Jan. 2006.
- [28] Ryuhei Okuno, Masaru Yokoe, Kenzo Akazawa, Kazuo Abe, and Saburo Sakoda, "Finger taps movement acceleration measurement system for quantitative diagnosis of Parkinson's disease", in *2006 International*

- Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, New York, NY, 2006, pp. 6623–6626.
- [29] Б.М. Кербель, "Вопросы конструирования пьезопреобразователей статических усилий", на *МНПК «Пьезотехника–94»*, Томск, 1994, с. 17–19.
- [30] V.M. Sharapov, O.N. Petrishchev, Zh.V. Sotula, and K.V. Bazilo, "New generation of piezoelectric transducers for robotics", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 1, pp. 5–9, 2015.
- [31] Б.М. Кербель, "Свойства пьезокерамических резонансных датчиков как элементов систем автоматического управления и регулирования", *Доклады ТУСУРа*, № 2 (24), Ч. 3, с. 142–146, 2011.
- [32] В.Н. Седалищев и О.И. Хомутов, *Высокочувствительные пьезорезонансные датчики с использованием связанных колебаний для экстремальных условий эксплуатации*. Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2006, 184 с.
- [33] В.Н. Седалищев, М.Ю. Ларионов, Е.М. Крючков, и др., "Механизмы чувствительности пьезорезонансных МСК трибодатчиков", *Ползуновский альманах*, № 1, с. 162–165, 2013.
- [34] V. Sharapov, Z. Sotula, and L. Kunickaya, *Piezo-Electric Electro-Acoustic Transducers*. Springer, 2014, 230pp.
- [35] "Sonar Technology and Hydroacoustics with Piezo Transducers". URL: <https://www.piceramic.com/en/applications/high-power-ultrasound/sonar-technology-hydroacoustics/>.
- [36] В.В. Богородский, Л.А. Зубарев, Е.А. Корепин, и В.И. Якушев, *Подводные электроакустические преобразователи. Расчет и проектирование*. Л.: Судостроение, 1983, 248 с.
- [37] В.М. Шараров, К.В. Базило, и Ж.В. Сотула, "Повышение уровня звукового давления низкочастотных колебаний преобразователей на основе дисковых мономорфных пьезоэлементов", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 4, с. 71–73, 2011.

- [38] В.А. Головнин, И.А. Каплунов, О.В. Малышкина, и др., *Физические основы, методы исследования и практическое применение пьезоматериалов*. Москва: Техносфера, 2016, 272 с.
- [39] В.А. Головнин, И.А. Каплунов, О.В. Малышкина, и Б.Б. Педько, "Пьезоэлектрическая керамика: применение, производство, перспективы", *Вестник ТвГУ. – Серия: Физика*, № 11, с. 47–58, 2010.
- [40] В.В. Лавриненко, *Пьезоэлектрические трансформаторы*. М.: Энергия, 1975, 112 с.
- [41] В.М. Плужников и В.С. Семенов, *Пьезокерамические твердые схемы*. М.: Энергия, 1971, 168 с.
- [42] А.В. Богдан, О.Н. Петрищев, Ю.И. Якименко, и Ю.Ю. Яновская, "Математическое моделирование колебаний тонких пьезокерамических дисков для создания функциональных элементов пьезоэлектроники", *Электроника и связь. Тематический выпуск «Электроника и нанотехнологии»*, Ч. 2, с. 35–42, 2009.
- [43] А.М. Заболотный, "Исследование характеристик пьезоэлектрического трансформатора совместимого с микросистемными технологиями", *Збірник наукових праць SWorld*, т. 8, с. 6–10, 2012.
- [44] Н.А. Сенник, "Моделирование и расчет электроупругих полей пьезокерамических оболочек и пластин", Москва, 1984.
- [45] Ю.Э. Паэранд, П.В. Охрименко, и К.Ю. Филоненко, "Влияние места закрепления пьезотрансформатора на эффективность его работы", на *МНПК «Современные информационные и электронные технологии»*, 2014, с. 69–70.
- [46] С.Г. Бочкарев, Б.Б. Педько, и В.П. Каменцев, "Амплитудный и частотный способы управления работой пьезотрансформаторов в радиоэлектронных устройствах", *Вестник ТвГУ. Серия «Физика»*, № 4(6), с. 110–114, 2004.

- [47] А.А. Ерофеев, Г.А. Данов, и В.Н. Фролов, *Пьезокерамические трансформаторы и их применение в радиоэлектронике*. М.: Радио и связь, 1988, 128 с.
- [48] А.И. Ладик и А.И. Сташкевич, *Изделия электронной техники. Пьезоэлектрические и электромеханические приборы*. М.: Радио и связь, 1993, 104 с.
- [49] J.E. Dunn and J.S. Pearlman, "Methods and apparatus for extending the shelf life of fluid food products", United States Patent Free Patent Online, 4695472, 1987.
- [50] K.H. Schoenbach, S. Katsuki, R.H. Stark, E.S. Buescher, and S.J. Beebe, "Bioelectrics-new applications for pulsed power technology", *IEEE Transactions on Plasma Science*, vol. 30, no. 1, pp. 293–300, 2002.
- [51] Xiangxiao Qiu, L. Tuhela, and Q.H. Zhang, "Application of pulsed power technology in nonthermal food processing and system optimization", 1997, vol. 1, pp. 85–90.
- [52] F. Espino-Cortes, A. El-hag, O. Adedayo, S. Jayaram, and W. Anderson, "Water Processing by High Intensity Pulsed Electric Fields", 2006, pp. 684–687.
- [53] S. Katsuki, K. Moreira, F. Dobbs, R.P. Joshi, and K.H. Schoenbach, "Bacterial decontamination with nanosecond pulsed electric fields", 2002, pp. 648–651.
- [54] Do Manh Cuong, "Piezoelectric Transformer Integration Possibility in High Power Density Applications", PhD thesis, Techn. Univ., Dresden, 2008.
- [55] "Универсальный очиститель воздуха «ФотоИон»". URL: <http://www.photoion.ru/instrukciya-polzovatelya.html>.
- [56] Д.А. Кривошей, "Дослідження характеристик вторинного джерела живлення на основі п'єзотрансформатора". URL: <http://sbornik.dstu.education/articles/UA/151.pdf>.

- [57] Д.А. Кривошей, "Преобразователи электрической энергии на основе пьезотрансформаторов", *Технічна електродинаміка. Тем. вип. Силова електроніка та енергоефективність: у 4-х ч. – Ч. 3*, с. 5–10, 2012.
- [58] Ю.Е. Паеранд і Д.А. Кривошей, "Дослідження характеристик п'єзоелектричних трансформаторів", *Електроніка та зв'язок. Тем. вип. Електроніка і нанотехнології*, № 5, с. 28–34, 2010.
- [59] Ю.Э. Паэранд и Д.А. Кривошей., "Вторичные источники питания с пьезоэлектрическими трансформаторами", *Електроніка та зв'язок. Тем. вип. Електроніка і нанотехнології*, № 3, с. 121–125, 2011.
- [60] Д.А. Кривошей, "Дослідження впливу технологічного розкиду параметрів компонентів на характеристики джерела живлення з п'єзотрансформатором", *Технічна електродинаміка*, № 2, с. 139–140, 2012.
- [61] Ю.Е. Паеранд і Д.А. Кривошей, "Розробка та дослідження електронного перетворювального пристрою на основі п'єзоелектричного трансформатора: звіт про НДР: № 33-К, № ДР 0110U007767", Алчевськ, 2012.
- [62] D. Kryvoshei and Yu. Paerand, "High-Voltage Power Supply Based on Piezoelectric Transformer", in *Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science*, Lviv, 2012, p. 498.
- [63] Yu-Hsiang Hsu, Chih-Kung Lee, and Wen-Hsin Hsiao, "Electrical and mechanical fully coupled theory and experimental verification of Rosen-type piezoelectric transformers", *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 52, no. 10, pp. 1829–1839, 2005.
- [64] A.M. Flynn and S.R. Sanders, "Fundamental limits on energy transfer and circuit considerations for piezoelectric transformers", *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 17, no. 1, pp. 8–14, 2002.
- [65] К.В. Базіло, "Застосування п'єзоелектричних трансформаторів в джерелах вторинного електроживлення", в *Датчики, прилади та*



системи – 2019: збірник праць VIII Міжнародної науково-технічної конференції, Черкаси – Херсон – Лазурне, 2019, с. 21–25.

- [66] T. Andersen and M.A.E. Andersen, "Simulation of Piezoelectric Transformers with COMSOL", in *Proceedings of the 2012 COMSOL Conference in Milan*.
- [67] Wei Wei Shao, Li Juan Chen, Cheng Liang Pan, Yong Bin Liu, and Zhi Hua Feng, "Power density of piezoelectric transformers improved using a contact heat transfer structure", *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 59, no. 1, pp. 73–81, 2012.
- [68] G. Ivensky, I. Zafrany, and S. Ben-Yaakov, "Generic operational characteristics of piezoelectric transformers", 2000, vol. 3, pp. 1657–1662.
- [69] S. Ben-Yaakov and S. Lineykin, "Frequency tracking to maximum power of piezoelectric transformer HV converters under load variations", 2002, vol. 2, pp. 657–662.
- [70] R. Prieto, M. Sanz, J.A. Cobos, P. Alou, O. Garcia, and J. Uceda, "Design considerations of multi-layer piezoelectric transformers", 2001, vol. 2, pp. 1258–1263.
- [71] Junhui Hu, "Temperature field of the piezoelectric transformer operating in longitudinal vibration mode", 2002, pp. 1003–1006.
- [72] A.V. Carazo, "Piezoelectric transformers for space applications". In *MRS Proceedings*; Materials Research Society: Warrendale, PA, USA, 2003; Volume 785, pp. D6–D8.
- [73] Richard P. Bishop, US Patent No. 5,834,882, Ноябрь 10, 1998.
- [74] Alfredo Vazquez Carazo, US Patent No. 2003/006752, Апрель 10, 2003.
- [75] Alfredo Vázquez Carazo, "Piezoelectric Transformers for Space Applications". .
- [76] Alfredo Vazquez Carazo, "Piezoelectric Transformers: An Historical Review", *Actuators*, vol. 5, no. 2, p. 12, Апрель 26, 2016.
- [77] G.K. Ho, R. Abdolvand, A. Sivapurapu, S. Humad, and F. Ayazi, "Piezoelectric-on-Silicon Lateral Bulk Acoustic Wave Micromechanical

- Resonators", *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 17, no. 2, pp. 512–520, 2008.
- [78] T. Bove, W. Wolny, E. Ringgaard, and K. Breboel, "New type of piezoelectric transformer with very high power density", 2001, vol. 1, pp. 321–324.
- [79] А.А. Бобцов, В.И. Бойков, С.В. Быстров, и В.В. Григорьев, *Исполнительные устройства и системы для микроперемещений*. СПб ГУ ИТМО, 2011, 131 с.
- [80] В. Варадан, К. Виной, и К. Джозе, *ВЧ МЭМС и их применение*. Москва: Техносфера, 2004, 528 с.
- [81] М.О. Шульга і В.Л. Карлаш, *Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин*. К.: Наукова думка, 2008, 272 с.
- [82] Ismail Naciri, "Modeling of MEMS Resonator Piezoelectric Disc Partially Covered with Electrodes", *American Journal of Mechanics and Applications*, vol. 4, no. 1, p. 1, 2016.
- [83] M. Staworko and T. Uhl, "Modeling and simulation of piezoelectric elements – comparison of available methods", *Mechanics, Vol. 27, No. 4*, pp. 161–171, 2008.
- [84] Mikko Leinonen, Jaakko Palosaari, Jari Juuti, and Heli Jantunen, "Combined electrical and electromechanical simulations of a piezoelectric cymbal harvester for energy harvesting from walking", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 25, no. 4, pp. 391–400, 2014.
- [85] А.В. Богдан, О.Н. Петрищев, Ю.И. Якименко, и Ю.Ю. Яновская, "Неосесимметричные радиальные колебания тонких пьезоэлектрических дисков", *Электроника и связь. Тематический выпуск «Электроника и нанотехнологии», Ч. 3*, с. 195–199, 2011.
- [86] О.Н. Петрищев, *Гармонические колебания пьезокерамических элементов. Часть 1. Гармонические колебания пьезокерамических элементов в вакууме и метод резонанса – антирезонанса*. Киев: Аверс, 2012, 300 с.

- [87] Steven F. Barrett and Daniel J. Pack, *Embedded systems design and applications with the 68HC12 and HCS12*. Upper Saddle River, NJ: Pearson/Prentice Hall, 2005, 645pp.
- [88] В.Д. Вавилов, С.П. Тимошенко, и А.С. Тимошенко, *Микросистемные датчики физических величин: монография в двух частях*. Москва: Техносфера, 2018, 550 с.
- [89] С.М. Порошин и С.Г. Семенов, "Разработка и исследования математической модели компьютеризированной информационно-измерительной управляющей системы критического применения с учетом фактора внешних воздействий", *Системи обробки інформації*, № 2 (109), с. 226–234, 2013.
- [90] І.П. Кудзіновська, "Математичне моделювання коливань круглої п'єзокерамічної пластини з урахуванням в'язкопружності матеріалу", *Вісник Запорізького національного університету: фізико-математичні науки*, № 1, с. 59–66, 2014.
- [91] Lang Wu, Ming-Cheng Chure, Yeong-Chin Chen, King-Kung Wu, and Bing-Huei Che, "Electrode Size and Dimensional Ratio Effect on the Resonant Characteristics of Piezoelectric Ceramic Disk", in *Ceramic Materials—Progress in Modern Ceramics*, Feng Shi, Ed. InTech, Апрель 5, 2012, pp. 25–40.
- [92] А.А. Бондаренко, В.В. Мелешко, С.-Л. Huang, и С.-С. Ма, "Спектральный и модовый анализ планарных колебаний прямоугольных пьезокерамических пластин", в *Акустичний симпозіум „Консонанс-2005“*, 2005, с. 14–19.
- [93] Hector Calas, Eduardo Moreno, Jose Antonio Eiras, Arturo Vera, Roberto Munoz, and Lorenzo Leija, "Model for Radial Modes in a Thin Piezoelectric Annular Array", *Jpn. J. Appl. Phys.*, Vol. 47, No. 10, pp. 8057–8064, 2008.
- [94] Dragan Mančić, Violeta Dimić, and Milan Radmanović, "Resonance frequencies of PZT piezoceramic disks: a numerical approach", *Facta*

- Universitatis. Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics, Vol. 3, No. 12, pp. 431–442, 2002.*
- [95] О. Безверхий, Л. Зінчук, і В. Карлаш, "Вплив режиму електричного навантаження на характеристики коливань п'єзокерамічних резонаторів", *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, № 18, с. 9–20, 2013.*
- [96] В.И. Зубцов, "Математическая модель преобразователя статических механических напряжений внутри деформируемых материалов", *Инженерная физика, № 4, с. 31–36, 2004.*
- [97] С.В. Хуторненко, А.Н. Воейков, и Д.П. Васильчук, "Математическая модель пьезоэлектрического резонатора при наличии градиентного поля в плоскости кристаллического элемента", *Наукові праці ДонНТУ. Серія: «Гірничо-електромеханічна», № 21(189), с. 168–172, 2011.*
- [98] М.О. Шульга і В.Л. Карлаш, "Ефективність електромеханічного перетворення енергії при резонансних коливаннях елементів конструкцій із п'єзокераміки", *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, № 3, с. 225–237, 2006.*
- [99] М.О. Шульга і В.Л. Карлаш, "Амплітудно-фазові характеристики радіальних коливань тонкого п'єзокерамічного диска біля резонансів", *Доповіді Національної академії наук України, № 9, с. 80–86, 2013.*
- [100] И.В. Янчевский, "Минимизация прогибов круглой электроупругой биморфной пластины при импульсном нагружении", *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій, № 16, с. 303–313, 2011.*
- [101] V.L. Karlash, "Longitudinal and lateral vibrations of a plate piezoceramic transformer", *Ukr. J. Phys., Vol. 51, No. 10, pp. 986–992, 2006.*
- [102] В.Л. Карлаш, "Вынужденные электромеханические колебания прямоугольных пьезокерамических стержней с разделенными электродами", *Прикладная механика, Том 49, № 3, с. 125–134, 2013.*

- [103] А.В. Богдан, О.Н. Петрищев, Ю.И. Якименко, и Ю.Ю. Яновская, "Исследование характеристик пьезоэлектрического трансформатора на основе радиальных колебаний в тонких пьезокерамических дисках", *Электроника и связь. Тематический выпуск «Электроника и нанотехнологии»*, Ч. 1, с. 269–274, 2009.
- [104] S. Lineykin and S. Ben-Yaakov, "Feedback isolation by piezoelectric transformers: comparison of amplitude to frequency modulation", 2004, pp. 1834–1840.
- [105] M. Peerasaksophol, S. Srilomsak, P. Laoratanakul, and T. Kulworawanichpong, "Design and Implementation of Ring-Dot Piezo-Electric Ballasts for 36-W Fluorescent Lamps", *European Journal of Scientific Research*, Vol. 64, No. 2, pp. 189–205, 2011.
- [106] S. Ozeri and D. Shmilovitz, "A Time Domain Measurements Procedure of Piezoelectric Transformers Equivalent Scheme Parameters", 2006, pp. 2281–2284.
- [107] A. Buchacz, M. Placzek, and A. Wrobel, "Modelling of passive vibration damping using piezoelectric transducers – the mathematical model", *Maintenance and reliability*, Vol. 16, No. 2, pp. 301–306, 2014.
- [108] Yu. Paerand and D. Kryvoshei, "Secondary power supplies with piezoelectric transformers", in *Electronics and Nanotechnology*, Kyiv, 2011, p. 55.
- [109] D. Livingston, P. Kiran Kumar, and N. Venugopal, "Modeling and simulation of multiple piezoelectric transformer converters", *International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering*, Vol. 3, No. 8, pp. 237–245, 2013.
- [110] A. Buchacz and A. Wrobel, "Piezoelectric layer modelling by equivalent circuit and graph method", *Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering*, Vol. 20, No. 1-2, pp. 299–302, 2007.
- [111] K.W.E. Cheng *et al.*, "Modeling and analysis of piezoelectric transformer using multi-mesh loop matrix circuit under square-wave excitation condition", 2005, vol. 3, pp. 2207–2211.

- [112] Y. Huang and Z. Ling, "Progress in research on piezoelectric transformers", *Electronic Components & Materials*, Vol. 23, No. 1, pp. 7–10, 2004.
- [113] О.Н. Петрищев и К.В. Базило, "Принципы математического моделирования трансформаторов, работающих на планарных осесимметричных колебаниях пьезокерамических дисков", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 3, с. 10–20, 2015.
- [114] В.М. Шарапов, И.Г. Минаев, Ж.В. Сотула, К.В. Базило, и В.В. Самойленко, "Об эффекте возникновения изгибных колебаний в мономорфных пьезоэлементах", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 3, с. 60–62, 2011.
- [115] У. Кэди, *Пьезоэлектричество и его практические применения*. М.: ИЛ, 1949, 718 с.
- [116] В.М. Шарапов, М.П. Мусиенко, и Е.В. Шарапова, *Пьезоэлектрические преобразователи физических величин*. Черкассы: ЧГТУ, 2005, 631 с.
- [117] C. V. Stephenson, "Radial Vibrations in Short, Hollow Cylinders of Barium Titanate", *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 28, no. 1, pp. 51–56, 1956.
- [118] Morio Onoe and Hiromichi Jumonji, "Useful Formulas for Piezoelectric Ceramic Resonators and Their Application to Measurement of Parameters", *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 41, no. 4B, pp. 974–980, 1967.
- [119] Д. Берлинкур, Г. Жаффе, и Д. Керран, "Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях", в *Физическая акустика, т.1. Методы и приборы ультразвуковых исследований. Часть А*, М.: Наука, 1966, с. 204 – 326.
- [120] В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, и Н.А. Шульга, *Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость*. Киев: Наук. думка, 1989, 280 с.
- [121] "Yole Développement". URL: <http://www.yole.fr/>.

- [122] O.N. Petrishchev, V.M. Sharapov, Zh.V. Sotula, and K.V. Bazilo, "Principles of calculation of piezoelectric elements with surfaces partial covering by electrodes", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 3, pp. 47–55, 2014.
- [123] O.N. Petrishchev, V.M. Sharapov, Zh.V. Sotula, and K.V. Bazilo, "Calculation of parametres of tensely deformed state of disk piezoelement with partial covering by electrodes surfaces", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 3, pp. 56–67, 2014.
- [124] M. Lematre, L.-P. Tran-Huu-Hue, and G. Feuillard, "Modeling and numerical study of the electroacoustic behavior in integrated piezoelectric structures under external mechanical stress", *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 56, no. 5, pp. 1085–1099, 2009.
- [125] Joung-Hu Park, Bo-Hyung Cho, Sung-Jin Choi, and Sang-Min Lee, "Analysis of the Thermal Balance Characteristics for Multiple-Connected Piezoelectric Transformers", *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 56, no. 8, pp. 1617–1626, 2009.
- [126] V. Loyau, Yuan-Ping Liu, and F. Costa, "Analyses of the Heat Dissipated by Losses in a Piezoelectric Transformer", *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 56, no. 8, pp. 1745–1752, 2009.
- [127] О.Н. Петрищев и К.В. Базило, "Принципы и методы построения математических моделей дисковых пьезоэлектрических трансформаторов с секторными электродами", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 2, с. 33–44, 2017.
- [128] А.А. Ананьева, "К расчету поршневого пьезоэлектрического излучателя без учета внутренних потерь", *Акустический журнал*, т. 4, № 3, с. 223–232, 1958.
- [129] Le Yan, Jian Wu, and W.C. Tang, "Piezoelectric micromechanical disk resonators towards UHF band", 2004, vol. 2, pp. 926–929.

- [130]Jing Wang, Z. Ren, and C.T.-C. Nguyen, "1.156-GHz self-aligned vibrating micromechanical disk resonator", *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 51, no. 12, pp. 1607–1628, 2004.
- [131]C. T.-C. Nguyen, "Integrated Micromechanical Circuits Fueled By Vibrating RF MEMS Technology", 2006, pp. 957–966.
- [132]Clark Nguyen, "MEMS technology for timing and frequency control", *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 54, no. 2, pp. 251–270, 2007.
- [133]Chi-Hung Huang, Yu-Chih Lin, and Chien Ching Ma, "Theoretical analysis and experimental measurement for resonant vibration of piezoceramic circular plates", *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 51, no. 1, pp. 12–24, 2004.
- [134]Yu-Chih Lin and Chien-Ching Ma, "Experimental measurement and numerical analysis on resonant characteristics of piezoelectric disks with partial electrode designs", *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 51, no. 8, pp. 937–947, 2004.
- [135]Chi-Hung Huang, "Resonant vibration investigations for piezoceramic disks and annuli by using the equivalent constant method", *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 52, no. 8, pp. 1217–1228, 2005.



## РОЗДІЛ 2

### ЕЛЕКТРИЧНИЙ ІМПЕДАНС КОЛИВАЛЬНОГО ДИСКА І ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ МАТЕРІАЛЬНИХ КОНСТАНТ П'ЄЗОКЕРАМІКИ

Розвиток і підвищення ефективності комп'ютерних систем критичного застосування неможливо без попереднього вирішування задачі їх математичного моделювання [1].

Кінцевою метою математичного моделювання фізичного стану п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування є якісний і кількісний опис характеристик і параметрів існуючих в них електричних і пружних полів. Абсолютно ясно, що отримання змістовних і достовірних кількісних оцінок параметрів фізичного стану п'єзоелектричних (п'єзокерамічних) перетворювачів не представляється можливим без достовірних даних про величини фізико-механічних констант матеріалів.

Академік Харкевич О.О. в заключній статті до своєї роботи «Теорія перетворювачів» [2] пише: «З приводу експериментального визначення деяких фізичних констант. ... справа йде про дуже важливі речі, і страшно бачити, що вони повністю ігноруються в цілому ряді експериментальних робіт. Інженер-розрахувач або проектувальник, щонайменше, в скрутному становищі. Він не може звернутися до інженерних довідників типу Хютте, так як подібних для даної галузі техніки не існує. Але він не може почерпнути потрібних йому даних навіть у довідниках фізичних констант. Достатньо зауважити, що у вживаному у нас довіднику Дорфмана і Фріша відділ п'єзоелектрики взагалі відсутній, а застарілі дані по магнітострикції наведені в абсолютно незадовільному стані. Таким чином, інженеру доводиться звертатися до новітніх оригінальних експериментальних робіт. Але і тут він не знаходить того, що потрібно.

У кращому випадку, читаючи між рядків і піддаючи дані автора

додатково обробці, можна витягти з них щось більш-менш достовірне і корисне для практики.

Такий стан необхідно докорінно змінити, шляхом постановки заново експериментів, що відповідають поставленим вище вимогам. ... Можна було б привести ряд прикладів порушення елементарної вимоги: так, сумбур, що панує в області визначення чисельних значень констант хоча б тієї ж сегнетової солі, слід значною мірою віднести за рахунок зазначених методичних похибок ... ».

Наведена вище досить велика цитата запозичена з монографії, яка була опублікована в 1948 р. Минуло майже сімдесят років, але, дана Харкевичем О.О. характеристика того стану експериментального забезпечення теорії п'єзоелектричних функціональних елементів взагалі, і теорії п'єзоелектричних перетворювачів зокрема, цілком застосовна і до нинішнього стану речей. Для того, щоб в цьому переконатися, достатньо поглянути на ГОСТ 12370-80 (Матеріали п'єзокерамічні. Методи випробувань) та на ОСТ 110444-87 (Матеріали п'єзокерамічні. Технічні умови), що прийшов йому на зміну. Справедливості заради треба сказати, що відносно матеріальних констант п'єзоактивних кристалів, які використовуються в акустоелектроніці і акустооптиці, є цілком доброякісні довідкові дані [3]. Довідники такого рівня якості по п'єзоелектричній кераміці відсутні.

Очевидно, що без знання матеріальних констант п'єзокераміки годі й думати про яке-небудь осмислене зіставлення теоретичних і експериментальних результатів в області теорії і практики п'єзоелектричних функціональних елементів комп'ютерних систем. Для того щоб бути впевненим у достовірності цифр, отриманих в результаті математичного моделювання реальної ситуації, необхідно бути впевненим у достовірності числових значень матеріальних констант, які багато в чому визначають не тільки кількісний, але в ряді випадків і якісний зміст результатів обчислень. Таким чином, питання про експериментальне визначення фізико-механічних

констант п'єзоелектричних керамік не втрачає своєї актуальності і до цього дня.

Інтенсивне і широкомасштабне практичне застосування синтетичних п'єзоелектриків (п'єзокераміка) стало новим імпульсом, що стимулює розвиток експериментальних методів визначення фізико-механічних параметрів п'єзоактивних матеріалів.

Автори довідкового посібника [4], перераховуючи існуючі методи вимірювання матеріальних констант п'єзоелектричних керамік, наводять одинадцять назв динамічних методів експериментального визначення модулів пружності і п'єзомодулів. При ближчому розгляді різноманіття методів можна розбити на три групи, а саме:

- метод резонансу-антирезонансу та його модифікації;
- метод кругових діаграм і його модифікації;
- ультразвукові методи.

Ультразвукові методи в своїй теоретичній основі спираються на формалізм власних чисел і власних векторів тензора Кристофеля [5] і припускають вимірювання швидкостей поширення плоских хвиль різної поляризації [6], [7]. Недоліками цього методу експериментальних досліджень є складність підготовки зразків і складність збудження плоских хвиль, які повинні поширюватися в суворо визначених в просторі кристалографічних осей напрямках. При цьому збуджувані хвилі повинні мати наперед задану поляризацію. Крім цього, обробка результатів вимірювання швидкостей поширення плоских хвиль неможлива без знання числових значень компонентів тензора діелектричної проникності п'єзоелектрика і компонентів тензора п'єзомодулів. У різних версіях ультразвукового методу ці величини передбачаються заздалегідь відомими. Так як в ультразвуковому методі діелектричні проникності і п'єзомодулі не вимірюються за визначенням, то його взагалі не можна розглядати як самостійний і замкнутий метод експериментального визначення матеріальних констант п'єзоелектриків.

Метод кругових діаграм і деякі його модифікації досить докладно описані в монографії [8]. Цей метод базується на математичній моделі електричного імпедансу досліджуваного зразка. Достовірність результатів, які виходять за допомогою цього методу, визначається ступенем адекватності математичної моделі реальному об'єкту. Суть методу полягає у вимірюванні дійсної і уявної частин електричного імпедансу п'єзокерамічного зразка на 20-30 частотах. За результатами цих вимірів будується кругова діаграма комплексного опору або провідності і за характеристичними точками на діаграмі визначаються матеріальні константи п'єзоелектричних матеріалів. Метод кругових діаграм вимагає дорогої апаратури і великого обсягу вимірювань. Основний недолік методу кругових діаграм полягає в тому, що для визначення матеріальних констант п'єзокераміки необхідно проводити вимірювання на зразках різної форми і різної поляризації. При цьому виникають похибки двох типів. Перший тип похибки – це похибка модельного уявлення напружено-деформованого стану коливального зразка. Ці похибки піддаються оцінці і можуть бути враховані при визначенні довірчих інтервалів числових значень вимірюваних матеріальних констант. Другий тип похибок, їх можна назвати похибками технологічного походження, обумовлений тим, що електрична поляризація зразків різної форми може бути в принципі, різною. Це означає, що п'єзоелектричні константи і діелектричні проникності різних за формою зразків, виготовлених з однакової вихідної сировини, можуть, в принципі, відрізнятися один від одного. якщо, до того ж, різні за формою зразки поляризовані в різних напрямках, то числові значення п'єзомодулів цих зразків будуть обов'язково відрізнятися один від одного. Цей тип похибок практично не піддається оцінюванню, і питання про достовірність вимірюваних числових значень матеріальних констант залишається без відповіді.

Метод резонансу-антирезонансу, за свідченням У. Кеді [9], сходить до робіт Уоррена Мезона (1943 р.) і передбачає вимір частот електромеханічних резонансів і антирезонансів сталих коливань досліджуваних зразків. Як і в

методі кругових діаграм, теоретичною основою є математична модель електричного імпедансу досліджуваного зразка. З цієї причини всі похибки методу кругових діаграм притаманні і методу резонансу-антирезонансу. До того ж треба додати, що описані в довідковому посібнику [4] моделі побудовані із застосуванням електромеханічних аналогій, тобто електричний імпеданс досліджуваного зразка визначався за його еквівалентної схемою. Електромеханічні аналогії і вихідні з них еквівалентні схеми можна використовувати лише в разі однорідного напружено-деформованого стану досліджуваного зразка. Незалежні від значень координат точки спостереження розподілу напружень і деформацій мають місце, як правило, на частотах значно менших частоти першого електромеханічного резонансу. Визначення числового значення константи електромеханічного зв'язку як відношення різниці частот антирезонансу і резонансу до частоти резонансу, запозичене без будь-якого попереднього дослідження і обґрунтування з аналізу характеристик еквівалентної схеми кварцового резонатора [9]. На це свого часу вказали автори монографії [10]. Добротність кварцового резонатора істотно перевершує добротність коливального контуру, в якому використовується п'єзоелектрична кераміка, тому зазначене вище запозичення є, по всій видимості, неправомірним.

Найбільш істотним недоліком всіх без винятку версій методу резонансу-антирезонансу є неясність в порядку визначення числових значень діелектричної проникності п'єзокераміки. Розмірковування [4] про те, що цей параметр визначається за результатами вимірювання електричної ємності зразка на дуже високих частотах, не цілком правомірні.

В роботі [11] вперше була зроблена спроба розробки методики експериментального визначення фізико-механічних властивостей п'єзоелектричної кераміки, яка спиралася на основні уявлення механіки деформованого твердого тіла з ускладненими (п'єзоелектричними) властивостями. Єдиним слабким місцем способу, описаного в роботі [11], є склеювання двох п'єзокерамічних дисків. Це склеювання володіє погано

відтворюваними (особливо на тривалому інтервалі часу) характеристиками, які хоча і в незначній мірі, але впливають на результати експериментального визначення модулів пружності біморфного п'єзокерамічного елемента. Саме з цієї причини вважається за необхідне так змінити тридіапазонний метод резонансу-антирезонансу [11], щоб виключити з результатів експерименту важко прогнозований вплив параметрів шару склеювання.

Відомо [10], що при описі різних форм коливань одного і того ж об'єкта використовуються різні набори матеріальних констант. Так, при описі товщинних коливань поляризованої по товщині п'єзокерамічної пластинки потрібно, як мінімум, знання модуля пружності  $c_{33}^E$  (модуль пружності, вимірюваний в режимі сталості (рівності нулю) напруженості електричного поля), п'єзомодуля  $e_{33}$  і діелектричної проникності  $\chi_{33}^E$  (діелектрична проникність, яка вимірюється в режимі сталості (рівності нулю) деформації або, як іноді кажуть, але це правильно лише наполовину, проникність затиснутого п'єзоелектрика). При описі радіальних коливань поляризованого по товщині п'єзокерамічного диску потрібне знання набагато більшого числа матеріальних констант, а саме  $c_{11}^E$ ,  $c_{12}^E$ ,  $c_{13}^E$ ,  $c_{33}^E$ ,  $e_{31}$ ,  $e_{33}$  і  $\chi_{33}^E$ . Зіставляючи між собою результати вимірювання модулів пружності  $c_{12}^E$  і  $c_{13}^E$ , нескладно помітити, що вони відрізняються один від одного на величину, яка рідко перевищує рівень 0,3-0,5% від номінального значення (див., наприклад, таблиці, наведені в монографіях [4], [10], [12]). Насправді, пружні властивості поляризованої по товщині п'єзокерамічної пластинки в площині, яка перпендикулярна до кристалографічної осі  $z$ , є трансверсально ізотропними. Цей факт дає підстави для висновку, що оцінка числових значень модулів пружності  $c_{\alpha\beta}^E$  може і повинна проводитися в припущенні, що  $c_{12}^E = c_{13}^E$ . Більш того, можна довести шляхом формальних міркувань, що напружено-деформований стан пластинки в режимі товщинних коливань описується за допомогою модуля пружності  $c_{33}^E$  тільки в тому випадку, коли виконується рівність  $c_{12}^E = c_{13}^E$ .

Таким чином, необхідно побудувати несуперечливу методику експериментального визначення матеріальних констант п'єзокераміки, яка доставляє достовірні значення мінімум трьох модулів пружності, двох елементів матриці п'єзомодулів і одного елемента матриці діелектричної проникності.

## 2.1. Визначення електричного імпедансу п'єзокерамічного диска в області низьких частот

Розглянемо (рис. 2.1) диск, товщина якого  $\alpha$  в багато разів менше радіуса  $R$ . Поверхні диска  $z = 0$  і  $z = \alpha$  ( $z$  – координатна вісь циліндричної системи координат  $\rho, \varphi, z$ , початок якої поєднано з центром нижньої поверхні диска) електродовані – покриті тонким (не більше 10 мкм) шаром срібла. На верхню поверхню  $z = \alpha$  подається електричний потенціал  $U_0 e^{i\omega t}$  ( $U_0$  – амплітудне значення електричного потенціалу, величина котрого вибирається з умови  $U_0/\alpha \ll 0,1E_0$ , де  $E_0 \cong 2$  МВ/м – напруженість електричного поля, яким поляризовано матеріал диску, що гарантує відсутність нелінійних ефектів;  $i = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця;  $\omega$  – колова частота зміни знака потенціалу;  $t$  – час). Нижня електродована поверхня  $z = 0$  заземлена, тобто має нульовий потенціал.

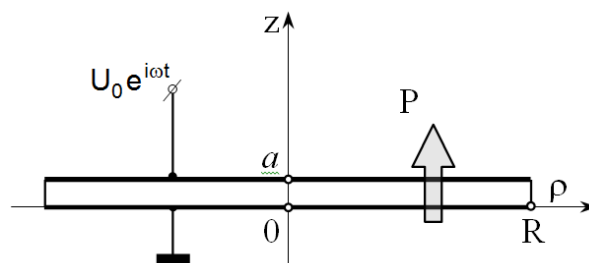


Рис. 2.1. Розрахункова схема коливального п'єзокерамічного диску

Прикладена до диску різницю електричних потенціалів створює в його об'ємі електричне поле, яке зміщує іони цирконію, титану, свинцю і кисню з

положення рівноваги. В результаті гармонійно змінного в часі деформування диску в ньому виникають поляризаційні заряди, які взаємодіють на електродованих поверхнях з електричними зарядами, які доставляються на ці поверхні генератором різниці електричних потенціалів. Результуючий електричний заряд  $Qe^{i\omega t}$  на поверхні  $z = \alpha$  своїм електричним полем формує електричний струм  $Ie^{i\omega t}$  в провіднику, який з'єднує поверхню  $z = \alpha$  з виходом електричного генератора. У будь-який момент часу  $Ie^{i\omega t} = -\partial Q/\partial t = -i\omega Qe^{i\omega t}$ , тобто амплітуди струму і електричного заряду на поверхні  $z = \alpha$  пов'язані лінійною залежністю  $I = -i\omega Q$ .

Очевидно, що електричний імпеданс  $Z_{\text{ел}}(\omega)$  коливального диску повинен підкорятися закону Ома для ділянки кола з чого випливає, що

$$Z_{\text{ел}}(\omega) = \frac{U_0}{I} = -\frac{U_0}{i\omega Q}. \quad (2.1)$$

Амплітудне значення поверхневої густини  $\sigma_0$  електричного заряду визначається через амплітудне значення нормального цій поверхні компонента вектора електричної індукції  $\bar{D}(\rho, \varphi, z)$ . У ситуації, що розглядається  $\sigma_0 = D_z(\rho, z)$  і, оскільки всі фізичні поля в коливальному п'єзокерамічному диску а ргіогі володіють осьовою симетрією

$$Q = \int_S \sigma_0 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho D_z(\rho, z) d\rho d\varphi = 2\pi \int_0^R \rho D_z(\rho, z) d\rho. \quad (2.2)$$

Електричний стан диска визначається законом електричної поляризації діелектрика, який має п'єзоелектричні властивості [13], і в термінах амплітудних значень характеристик гармонійно змінних в часі фізичних полів записується в наступному вигляді

$$D_k = e_{knm} \varepsilon_{nm} + \chi_{kj}^e E_j, \quad k, n, m, j = 1, 2, 3, \quad (2.3)$$

де  $D_k$  – амплітудне значення  $k$ -го компонента вектора електричної індукції (розмірність кулон, ділений на метр квадратний);  $e_{knm}$  – компонент тензора п'єзоелектричних модулів (розмірність кулон, ділений на метр квадратний);  $\varepsilon_{nm}$  – амплітудне значення компонента тензора нескінченно малих



деформацій (безрозмірна величина);  $\chi_{kj}^{\varepsilon}$  – компонент тензора діелектричної проникності, який експериментально визначається в режимі сталості (рівності нулю) пружних деформацій (верхній символ  $\varepsilon$ );  $E_j$  – амплітудне значення  $j$ -го компонента вектора напруженості електричного поля в об'ємі деформованого п'єзоелектрика. При записі співвідношення (2.3) за замовчуванням передбачається, що виконується погодження про підсумовування по двічі повторюваним індексам. Між індексами координатних осей правосторонньої декартової системи координат і символами осей циліндричної системи координат існує взаємно однозначна відповідність, а саме:  $1 \Leftrightarrow \rho$ ;  $2 \Leftrightarrow \varphi$  и  $3 \Leftrightarrow z$ .

Компоненти тензора нескінченно малих деформацій задовольняють узагальненому закону Гука для пружного середовища з п'єзоелектричними властивостями [13], який записується наступним чином:

$$\sigma_{ij} = c_{ijk\ell}^E \varepsilon_{k\ell} - e_{kij} E_k, \quad (2.4)$$

де  $\sigma_{ij}$  – амплітудне значення компонента тензора механічних напружень (розмірність ньютон, ділений на метр квадратний або паскаль);  $c_{ijk\ell}^E$  – компонент тензора модулів пружності, який експериментально визначається в режимі сталості (рівності нулю) напруженості електричного поля (верхній символ  $E$ ) в об'ємі п'єзоелектрика, який деформується.

Пружні напруження  $\sigma_{ij}$  і сили інерції, які виникають в об'ємі динамічно деформованого твердого тіла, пов'язані між собою другим законом Ньютона в диференціальній формі або, як частіше говорять, рівняннями руху, які в разі вісесиметричного, змінного в часі за гармонійним законом напружено-деформованого стану записуються в циліндричній системі координат наступним чином [14]:

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} (\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \rho_0 \omega^2 u_\rho = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \sigma_{z\rho}) + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho_0 \omega^2 u_z = 0, \quad (2.6)$$

де  $\rho_0$  – густина п'єзокераміки;  $u_\rho$  і  $u_z$  – амплітудні значення компонентів

вектора зміщення матеріальних частинок – нескінченно малих об'ємів п'єзокераміки. Нормальні і дотичні напруження на поверхнях диска повинні задовольняти третьому закону Ньютона. Якщо диск коливається в вакуумі або, що, практично, те ж саме, в повітрі, тобто не має механічних контактів з іншими матеріальними об'єктами (рис. 2.1), то на поверхнях диска повинні виконуватися наступні умови:

$$\sigma_{z\rho}|_{z=0,\alpha} = \sigma_{zz}|_{z=0,\alpha} = 0 \forall \rho \in [0, R], \quad (2.7)$$

$$\sigma_{\rho z}|_{\rho=R} = \sigma_{\rho\rho}|_{\rho=R} = 0 \forall z \in [0, \alpha]. \quad (2.8)$$

Оскільки деформації визначаються через компоненти вектора зміщення (в розглянутій задачі це  $\varepsilon_{\rho\rho} = \partial u_\rho / \partial \rho$ ,  $\varepsilon_{\phi\phi} = u_\rho / \rho$ ,  $\varepsilon_{zz} = \partial u_z / \partial z$  і  $\varepsilon_{\rho z} = (\partial u_\rho / \partial z + \partial u_z / \partial \rho) / 2$ ), оскільки можна стверджувати, що адекватний реальній ситуації математичний опис електричного імпедансу передбачає адекватний математичний опис динамічного напружено-деформованого стану коливального п'єзокерамічного диску. Природно, що на якісні і кількісні характеристики напружено-деформованого стану в об'ємі диску робить істотний вплив електричне поле, яке є алгебраїчною сумою електричного поля створеного генератором різниці електричних потенціалів (надалі – електричне поле зовнішнього джерела), і електричного поля, яке виникає через зміщення іонів з положення рівноваги (прямий п'єзоелектричний ефект). Це поле в подальшому будемо називати внутрішнім електричним полем.

Вектор напруженості  $\vec{E}(\rho, \phi, z)e^{i\omega t}$  сумарного електричного поля або, як раніше говорилося – електричного поля в об'ємі деформованого п'єзоелектрика, задовольняє рівнянням Максвелла, які в термінах амплітудних значень характеристик гармонійно змінних в часі фізичних полів записуються у вигляді

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + i\omega \vec{D}, \quad (2.9)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -i\omega \vec{B}, \quad (2.10)$$

де  $\vec{H}$  і  $\vec{B}$  – амплітудні значення векторів напруженості і індукції змінного

магнітного поля, причому  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  ( $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнітна проникність вакууму або магнітна постійна);  $\vec{J} = r\vec{E}$  – поверхнева густина струму провідності;  $r$  – питома електрична провідність середовища. П'єзоелектрична кераміка є досить хорошим ізолятором електричного струму. Не впадаючи в зайву ідеалізацію, можна покласти  $r = 0$ , Після чого рівняння (2.9) набирає вигляду

$$\text{rot} \vec{H} = i\omega \vec{D}. \quad (2.11)$$

Обчислюючи дивергенцію від лівої і правої частини рівняння (2.11), приходимо до висновку, що

$$\text{div} \vec{D} = 0. \quad (2.12)$$

Умову (2.12), що визначає аналітичні властивості вектора електричної індукції, прийнято називати умовою відсутності вільних носіїв електрики в об'ємі п'єзодіелектрика, що деформується.

У монографії [9] показано, що в частотному діапазоні порядку одиниць мегагерц змінне магнітне поле в об'ємі деформованої п'єзокераміки настільки мале, що можна вважати, що  $\text{rot} \vec{E} \approx 0$ . З останньої рівності випливає, що електричне поле в об'ємі деформованої п'єзокераміки є безвихровим, тобто потенційним, і може бути описано за допомогою скалярного електричного потенціалу  $\Phi(\rho, \varphi, z)e^{i\omega t}$ . При цьому амплітудне значення вектора напруженості електричного поля визначається через амплітудне значення скалярного потенціалу стандартним чином:

$$\vec{E} = -\text{grad} \Phi. \quad (2.13)$$

Підставляючи визначення (2.13) в співвідношення (2.3), а отримані результати – в умову (2.12), отримуємо диференціальне рівняння другого порядку в часткових похідних, яке в циліндричній системі координат записується в наступному вигляді

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \left( \epsilon_{1nm} \epsilon_{nm} - \frac{\chi_{1j}^e}{h_j} \frac{\partial \Phi}{\partial q_j} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \epsilon_{2nm} \epsilon_{nm} - \frac{\chi_{2j}^e}{h_j} \frac{\partial \Phi}{\partial q_j} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left( \epsilon_{3nm} \epsilon_{nm} - \frac{\chi_{3j}^{\epsilon}}{h_j} \frac{\partial \Phi}{\partial q_j} \right) = 0, \quad (2.14)$$

де  $h_j$  – коефіцієнти Ламе циліндричної системи координат ( $h_1 = 1$ ;  $h_2 = \rho$ ;  $h_3 = 1$ );  $q_j$  ( $q_1 = \rho$ ;  $q_2 = \varphi$  і  $q_3 = z$ ) –  $j$ -а координата циліндричної системи координат. Розв'язок цього рівняння для об'єкта, показаного на рис. 1, тобто скалярний потенціал  $\Phi(\rho, z)$  повинен задовольняти очевидним умовам:

$$\Phi(\rho, z)|_{z=0} = 0, \quad \Phi(\rho, z)|_{z=\alpha} = U_0. \quad (2.15)$$

На бічній поверхні диска  $\rho = R$  має виконуватися наближена умова [10]

$$\left. \frac{\partial \Phi(\rho, z)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} \cong 0. \quad (2.16)$$

Таким чином, аналітичний опис електричного імпедансу  $Z_{\text{ел}}(\omega)$  коливального п'єзокерамічного диска передбачає розв'язок граничної задачі динамічної електропружності, яка складається з трьох диференціальних рівнянь (2.5), (2.6) і (2.14) і граничних умов (2.7), (2.8) і (2.15), (2.16). Сполучною ланкою між пружною і електричною частинами цієї задачі є рівняння (2.3) і (2.4) фізичного стану п'єзоелектрика.

Конкретний зміст рівнянь фізичного стану (2.3) і (2.4) визначається конструкцією матриць матеріальних констант п'єзокераміки.

Для поляризованого в напрямку осі  $z$  (напрямок поляризації показано на рис. 2.1 стрілкою, позначеною символом  $P$ ) п'єзокерамічного диска, матриці матеріальних констант записуються в наступному вигляді [15]:

– матриця модулів пружності

$$|c_{\beta\lambda}^E| = \begin{vmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22}^E & c_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44}^E & 0 & 0 \\ & & & & c_{55}^E & 0 \\ & & & & & c_{66}^E \end{vmatrix}, \quad (2.17)$$

де  $\beta$  і  $\lambda$  – індекси Фойгта, кожен з яких об'єднує пару тензорних індексів за наступною схемою  $\beta \Leftrightarrow i, j$  і  $\lambda \Leftrightarrow k, l$ ; між числовими значеннями індексів Фойгта ( $\beta, \lambda = 1, 2, \dots, 6$ ) і тензорних індексів ( $i, j, k, l = 1, 2, 3$ ) існує взаємно

однозначна відповідність:  $1 \Leftrightarrow (1,1)$ ;  $2 \Leftrightarrow (2,2)$ ;  $3 \Leftrightarrow (3,3)$ ;  $4 \Leftrightarrow (2,3;3,2)$ ;  $5 \Leftrightarrow (1,3;3,1)$  і  $6 \Leftrightarrow (1,2;2,1)$ . Між числовими значеннями елементів матриці (2.17) існують такі співвідношення:  $c_{11}^E = c_{22}^E \neq c_{33}^E$ ;  $c_{12}^E = c_{13}^E = c_{23}^E$ ;  $c_{44}^E = c_{55}^E$ ;  $c_{66}^E = (c_{11}^E - c_{12}^E)/2$ .

– матриця п'єзоелектричних модулів  $e_{kij} \Leftrightarrow e_{k\beta}$  ( $\beta$  – індекс Фойгта)

$$|e_{k\beta}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (2.18)$$

де  $e_{15} = e_{24}$ ;  $e_{31} = e_{32} \neq e_{33}$ ; в роботі [13] показано, що п'єзомодуль  $e_{15} = e_{24} = (e_{33} - e_{31})/2$ .

– матриця діелектричних проникностей  $\chi_{kj}^E$ :

$$|\chi_{kj}^E| = \begin{vmatrix} \chi_{11}^E & 0 & 0 \\ & \chi_{22}^E & 0 \\ & & \chi_{33}^E \end{vmatrix}, \quad (2.19)$$

де  $\chi_{11}^E = \chi_{22}^E \neq \chi_{33}^E$ .

Розглянемо якісний склад вектора електричної індукції  $\vec{D}(\rho, z)$ . В загальному (невісесиметричному) випадку вектор електричної індукції має три компоненти  $D_\rho$ ,  $D_\varphi$  і  $D_z$ . У розглянутій задачі фізичний стан диска має осьову симетрію, яка забезпечується суцільним електродуванням поверхонь  $z = 0$  і  $z = \alpha$ , з цієї причини  $D_\varphi = 0$ . Радіальний компонент вектора електричної індукції  $D_\rho = 2e_{15}\varepsilon_{\rho z} + \chi_{11}^E E_\rho$ . Радіальний компонент вектора напруженості електричного поля дорівнює нулю на поверхнях  $z = 0$  і  $z = \alpha$ , а також на вісі симетрії (вісі  $Oz$ ) диска і на бічній поверхні  $\rho = R$ . На цих же поверхнях і на вісі  $Oz$  обертаються в нуль дотичні напруження  $\sigma_{\rho z} = 2c_{55}^E \varepsilon_{\rho z} - e_{15} E_\rho$ , звідки випливає, що зсувні деформації  $\varepsilon_{\rho z} = \varepsilon_{z\rho}$  також обертаються в нуль на поверхнях  $\rho = R$ ,  $z = 0$ ,  $z = \alpha$  і на вісі  $Oz$ . Одночасне обернення в нуль зсувних деформацій  $\varepsilon_{\rho z}$  і радіального компонента  $E_\rho$  вектора напруженості електричного поля дозволяє стверджувати, що радіальний компонент  $D_\rho = 0$  на поверхнях  $\rho = R$ ,  $z = 0$ ,  $z = \alpha$  і на вісі  $Oz$ . Можна показати, що в об'ємі диска існує площина  $z > 0$ , на якій обертаються в нуль  $\varepsilon_{\rho z}$  і  $E_\rho$  і, як наслідок

компонент  $D_\rho$ . Якщо диск досить тонкий, то, беручи до уваги велику кількість областей, де  $D_\rho = 0$ , можна, в першому наближенні, покласти, що  $D_\rho = 0 \forall (\rho, z) \in V$ , де  $V$  – об'єм диска.

Таким чином, вектор електричної індукції в тонких дисках практично повністю визначається аксіальним компонентом  $D_z(\rho, z)$ , який, як це випливає з умови (2.12), повинен задовольняти співвідношенню  $\partial D_z / \partial z = 0$ , що еквівалентно твердженням, що аксіальний компонент не залежить від значень координати  $z$ , тобто  $D_z(\rho, z) \equiv D_z(\rho)$ . З визначення (2.3) випливає, що

$$\begin{aligned} D_z(\rho) &= e_{31}\epsilon_{\rho\rho} + e_{32}\epsilon_{\varphi\varphi} + e_{33}\epsilon_{zz} + \chi_{33}^\epsilon E_z \equiv \\ &\equiv e_{31}\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{u_\rho}{\rho}\right) + e_{33}\frac{\partial u_z}{\partial z} - \chi_{33}^\epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial z} = e_{31}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}[\rho u_\rho(\rho, z)] + e_{33}\frac{\partial u_z}{\partial z} - \chi_{33}^\epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

При записі виразу (2.20) було використано прийняте в механіці погодження про позначення однаковими символами чисельно рівних матеріальних констант  $e_{31}$  і  $e_{32}$ .

Скористаємося тим, що аксіальний компонент вектора електричної індукції не залежить від значень координати  $z$ , і проінтегруємо співвідношення (2.20) по змінній  $z$  в межах від нуля до  $\alpha$ :

$$\alpha D_z(\rho) = e_{31}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho \int_0^\alpha u_\rho(\rho, z) dz\right] + e_{33}[u_z(\rho, \alpha) - u_z(\rho, 0)] - \chi_{33}^\epsilon [\Phi(\alpha) - \Phi(0)]. \quad (2.21)$$

Введемо позначення

$$u_\rho^{(z)}(\rho) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha u_\rho(\rho, z) dz, \quad (2.22)$$

і будемо називати величину  $u_\rho^{(z)}(\rho)$  усередненим по товщині диска радіальним компонентом вектора зміщення матеріальних частинок диска. Так як  $\Phi(\alpha) - \Phi(0) \equiv U_0$ , то вираз (2.21) можна представити в наступному вигляді

$$D_z(\rho) = e_{31}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}[\rho u_\rho^{(z)}(\rho)] + \frac{e_{33}}{\alpha}[u_z(\rho, \alpha) - u_z(\rho, 0)] - \chi_{33}^\epsilon \frac{U_0}{\alpha}. \quad (2.23)$$

Випереджаючи підстановку виразу (2.23) в співвідношення (2.2), введемо позначення

$$u_z^{(\rho)}(z) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho u_z(\rho, z) d\rho d\varphi = \frac{2}{R^2} \int_0^R \rho u_z(\rho, z) d\rho, \quad (2.24)$$

і будемо називати величину  $u_z^{(\rho)}(z)$  усередненим по площі диска аксіальним компонентом вектора зміщення матеріальних частинок диска.

Підставляючи вираз (2.23) у визначення (2.2) електричного заряду  $Q$  на поверхні  $z = \alpha$ , отримуємо з урахуванням визначення (2.24) наступний результат

$$Q = 2\pi e_{31} R u_p^{(z)}(R) + \frac{\pi R^2}{\alpha} e_{33} [u_z^{(\rho)}(\alpha) - u_z^{(\rho)}(0)] - \frac{\pi R^2}{\alpha} \chi_{33}^\varepsilon U_0. \quad (2.25)$$

Введемо позначення

$$C_\partial^\varepsilon = \frac{\pi R^2}{\alpha} \chi_{33}^\varepsilon, \quad (2.26)$$

і будемо називати величину  $C_\partial^\varepsilon$  динамічною електричною ємністю коливального п'єзокерамічного диска. З урахуванням визначення (2.26) вираз (2.25) можна представити в наступному вигляді

$$Q = C_\partial^\varepsilon \Xi^{(\varepsilon)}(\omega), \quad (2.27)$$

де

$$\Xi^{(\varepsilon)}(\omega) = \frac{2e_{31}\alpha}{\chi_{33}^\varepsilon R} u_p^{(z)}(R) + \frac{e_{33}}{\chi_{33}^\varepsilon} [u_z^{(\rho)}(\alpha) - u_z^{(\rho)}(0)] - U_0. \quad (2.28)$$

Підставляючи співвідношення (2.27) у визначення (2.1), отримуємо вираз для розрахунку електричного імпедансу коливального диска

$$Z_{\text{ел}}(\omega) = \frac{U_0}{-i\omega C_\partial^\varepsilon \Xi^{(\varepsilon)}(\omega)}. \quad (2.29)$$

Вираз (2.29) справедливий в області високих частот, коли одночасно існують і радіальні і аксіальні зміщення матеріальних частинок диска, тобто коли довжина пружної хвилі стає співмірною з товщиною диска.

Необхідно особливо відзначити те, що електричний імпеданс диска визначається усередненими значеннями компонентів вектора зміщення матеріальних частинок. Це дозволяє застосувати операції усереднення (2.22) і (2.24) до рівнянь (2.5) і (2.6) відповідно і тим самим перетворити їх у звичайні диференціальні рівняння, які, в принципі, завжди можна розв'язати з

тією або іншою точністю. Тут же треба сказати, що система диференціальних рівнянь в часткових похідних (2.5) і (2.6) принципово не розв'язна в загальному вигляді.

В області середніх і низьких частот через особливості електропружного стану коливального диска відбувається зміна числових значень динамічної електричної ємності і аналітичної конструкції  $\Xi^{(e)}(\omega)$ .

Розглянемо послідовно електричний імпеданс коливального п'єзокерамічного диска в області низьких, середніх і високих частот [16].

### ***Електричний імпеданс п'єзокерамічного диска в області низьких частот***

Низькими частотами будемо називати той діапазон частот, в якому довжина пружної хвилі (масштабна одиниця просторової неоднорідності напружено-деформованого стану диска) істотно (на порядок і більше) перевищує радіальний розмір  $R$  диска. При цьому механічні напруги і пружні деформації практично не змінюються, а в межі, при  $\omega \rightarrow 0$ , залишаються постійними, в об'ємі п'єзокерамічного диска.

З граничних умов (2.7) і (2.8) випливає, що нормальні напруги  $\sigma_{\rho\rho}$  і як наслідок  $\sigma_{\varphi\varphi}$ , а також  $\sigma_{zz}$ , дорівнюють нулю як на поверхні, так і в будь-якій точці об'єму п'єзокерамічного диска. Те ж твердження справедливо і для дотичних напружень  $\sigma_{\rho z}$ , причому умова  $\sigma_{\rho z} = 0 \forall (\rho, z) \in V$  при  $E_\rho = 0$  еквівалентна умові  $\varepsilon_{\rho z} = 0 \forall (\rho, z) \in V$ . При таких припущеннях з узагальненого закону Гука (2.4) слідує система алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} c_{11}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{12}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{12}^E \varepsilon_{zz} &= e_{31} E_z, \\ c_{12}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{11}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{12}^E \varepsilon_{zz} &= e_{31} E_z, \\ c_{12}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{12}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{33}^E \varepsilon_{zz} &= e_{33} E_z. \end{aligned} \quad (2.30)$$

При записі системи рівнянь (2.30) однакові за величиною матеріальні константи позначені однаковими символами.

Оскільки нормальні і дотичні напруження дорівнюють нулю, остільки рівняння (2.5) і (2.6) сталих гармонійних коливань нескінченно малих об'ємів



п'єзокераміки виконуються з похибкою, яка пропорційна неврахованій об'ємній густині сил інерції.

Розв'язок системи рівнянь (2.30) щодо шуканих деформацій стискання-розтягування  $\varepsilon_{pp}$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$  і  $\varepsilon_{zz}$  записуються в наступному вигляді

$$\varepsilon_{pp} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{e_{31}c_{33}^E - e_{33}c_{12}^E}{\left[ c_{33}^E(c_{11}^E + c_{12}^E) - 2(c_{12}^E)^2 \right]} E_z, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{e_{33}(c_{11}^E + c_{12}^E) - 2e_{31}c_{12}^E}{\left[ c_{33}^E(c_{11}^E + c_{12}^E) - 2(c_{12}^E)^2 \right]} E_z. \quad (2.31)$$

Підставляючи співвідношення (2.31) в формулу (2.20), приходимо до висновку, що

$$D_z = \chi_{33}^\sigma E_z = -\chi_{33}^\sigma \frac{U_0}{\alpha}, \quad (2.32)$$

де  $\chi_{33}^\sigma$  – діелектрична проникність п'єзокераміки в режимі сталості (рівності нулю) механічної напруги в об'ємі і на поверхні коливального диска. Ця діелектрична проникність розраховується за формулою

$$\chi_{33}^\sigma = \chi_{33}^\varepsilon (1 + \Delta\chi_{33}^\sigma), \quad (2.33)$$

де

$$\Delta\chi_{33}^\sigma = \frac{2e_{31}^2 c_{33}^E - 4e_{31}e_{33}c_{12}^E + e_{33}^2 (c_{11}^E + c_{12}^E)}{\chi_{33}^\varepsilon \left[ c_{33}^E (c_{11}^E + c_{12}^E) - 2(c_{12}^E)^2 \right]}. \quad (2.34)$$

При типових для п'єзокераміки ЦТС значеннях матеріальних констант ( $c_{11}^E = 110$  ГПа;  $c_{12}^E = 60$  ГПа;  $c_{33}^E = 100$  ГПа;  $e_{33} = 18$  Кл/м<sup>2</sup>;  $e_{31} = -8$  Кл/м<sup>2</sup> і  $\chi_{33}^\varepsilon = 1400\chi_0$ ;  $\chi_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – діелектрична проникність вакууму або діелектрична постійна) розрахунок за формулою (2.34) дає наступний результат:  $\Delta\chi_{33}^\sigma = 0,844$ , тобто діелектрична проникність в області низьких частот мало не вдвічі більше високочастотної діелектричної проникності  $\chi_{33}^\varepsilon$ .

При визначенні  $D_z$  формулою (2.32) функція  $\Xi^{(\sigma)}(\omega) = -U_0$ , а динамічна, правильніше сказати – квазістатична електрична ємність п'єзокерамічного диска  $C_\sigma^\sigma = \pi R^2 \chi_{33}^\sigma / \alpha$ . При цьому вираз (2.29) набуває вигляду загальновідомої формули для розрахунку реактивного опору електричної ємності

$$Z_{\text{ел}}(\omega) = \frac{1}{i\omega C_\sigma^\sigma}.$$

Отже, в області низьких частот, коли механічні напруги в

п'єзокерамічному диску практично дорівнюють нулю, а прямий п'єзоелектричний ефект практично не проявляється, електричний імпеданс коливального п'єзокерамічного диска має характер реактивного опору конденсатора з електричної ємністю  $c_{\rho}^{\sigma}$  [16].

## 2.2. Визначення та дослідження електричного імпедансу п'єзокерамічного диска в області середніх частот

Середніми частотами будемо називати частотний діапазон, в якому масштабна одиниця просторової неоднорідності напружено-деформованого стану (довжина пружної хвилі) стає порівняною з радіусом п'єзокерамічного диску. Для тонких дисків, коли відношення  $\alpha/R \ll 1$ , з наведеного вище формулювання випливає, що напружено-деформований стан практично не змінюється по товщині диску. З граничних умов (2.7) випливає, що  $\sigma_{\rho z} = \sigma_{zz} = 0 \forall (\rho, z) \in V$ . Рівність  $\sigma_{\rho z} = 0$  при  $E_{\rho} = 0$  означає, що  $\varepsilon_{\rho z} = \varepsilon_{z\rho} = 0 \forall (\rho, z) \in V$ .

При зроблених припущеннях узагальнений закон Гука (2.4) доставляє наступні співвідношення:

$$\sigma_{\rho\rho} = c_{11}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{12}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{12}^E \varepsilon_{zz} - e_{31}^E E_z, \quad (2.35)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = c_{12}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{11}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{12}^E \varepsilon_{zz} - e_{31}^E E_z, \quad (2.36)$$

$$0 = c_{12}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{12}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{33}^E \varepsilon_{zz} - e_{33}^E E_z. \quad (2.37)$$

Зі співвідношення (2.37) випливає, що

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{c_{12}^E}{c_{33}^E} (\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) + \frac{e_{33}^E}{c_{33}^E} E_z. \quad (2.38)$$

Підстановка виразу (2.38) в формули (2.35) і (2.36) приводить до наступних результатів

$$\sigma_{\rho\rho} = c_{11} \varepsilon_{\rho\rho} + c_{12} \varepsilon_{\varphi\varphi} - e_{31}^* E_z, \quad (2.39)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = c_{12} \varepsilon_{\rho\rho} + c_{11} \varepsilon_{\varphi\varphi} - e_{31}^* E_z, \quad (2.40)$$

де  $c_{11} = c_{11}^E - (c_{12}^E)^2 / c_{33}^E$ ;  $c_{12} = c_{12}^E - (c_{12}^E)^2 / c_{33}^E$ ;  $e_{31}^* = e_{31}^E - e_{33}^E / c_{33}^E$  – матеріальні константи для режиму планарних коливань, тобто для режиму деформування, коли

$$\sigma_{zz} = 0.$$

Компонент вектора електричної індукції  $D_z = e_{31}(\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\phi\phi}) + e_{33}\varepsilon_{zz} + \chi_{33}^e E_z$  після виключення деформації  $\varepsilon_{zz}$  визначається наступним виразом

$$D_z = \frac{e_{31}^*}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u_\rho^{(z)}(\rho)] - \chi_{33}^* \frac{U_0}{\alpha}, \quad (2.41)$$

де  $\chi_{33}^* = \chi_{33}^e (1 + \Delta\chi_{33}^*)$  – діелектрична проникність для режиму планарних коливань. Надбавка  $\Delta\chi_{33}^* = e_{33}^2 / (\chi_{33}^e c_{33}^E)$  при типових для п'єзокерамік ЦТС значеннях матеріальних констант ( $c_{11}^E = 110$  ГПа;  $c_{12}^E = 60$  ГПа;  $c_{33}^E = 100$  ГПа;  $e_{33} = 18$  Кл/м<sup>2</sup>;  $e_{31} = -8$  Кл/м<sup>2</sup> і  $\chi_{33}^e = 1400\chi_0$ ;  $\chi_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – діелектрична проникність вакууму або діелектрична постійна) не перевищує 0,262.

При визначенні компонента  $D_z$  виразом (2.41) формула для розрахунку електричного імпедансу коливального диску записується в наступному вигляді

$$Z_{\text{ел}}(\omega) = -\frac{U_0}{i\omega C_\delta^* \Xi^{(*)}(\omega)}, \quad (2.42)$$

де  $C_\delta^* = \pi R^2 \chi_{33}^* / \alpha$  – динамічна електрична ємність п'єзокерамічного диску для режиму планарних коливань, тобто електрична ємність в області середніх частот. Функція  $\Xi^{(*)}(\omega)$  розраховується за формулою

$$\Xi^{(*)}(\omega) = \frac{2e_{31}^* \alpha}{\chi_{33}^* R} u_\rho^{(z)}(R) - U_0. \quad (2.43)$$

Для визначення усередненого по товщині диска радіального компонента вектора зміщення матеріальних частинок диска на середніх частотах піддамо операції усереднення (2.22) рівняння сталих радіальних коливань (2.5). Приймаючи до уваги, що

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial z} dz = \frac{1}{\alpha} [\sigma_{\rho z}(\rho, \alpha) - \sigma_{\rho z}(\rho, 0)] = 0,$$

результат усереднення можна представити таким виразом

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}^{(z)}(\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} [\sigma_{\rho\rho}^{(z)}(\rho) - \sigma_{\phi\phi}^{(z)}(\rho)] + \rho_0 \omega^2 u_\rho^{(z)}(\rho) = 0. \quad (2.44)$$

Нормальні напруження  $\sigma_{\rho\rho}^{(z)}(\rho)$  і  $\sigma_{\phi\phi}^{(z)}(\rho)$  визначаються з співвідношень

(2.39) і (2.40):

$$\sigma_{\rho\rho}^{(z)}(\rho) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \sigma_{\rho\rho}(\rho) dz = c_{11} \frac{\partial u_\rho^{(z)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{12} \frac{u_\rho^{(z)}(\rho)}{\rho} - e_{31}^* E_z^{(z)}(\rho), \quad (2.45)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(z)}(\rho) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \sigma_{\varphi\varphi}(\rho) dz = c_{12} \frac{\partial u_\rho^{(z)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{11} \frac{u_\rho^{(z)}(\rho)}{\rho} - e_{31}^* E_z^{(z)}(\rho). \quad (2.46)$$

Так як

$$D_z(\rho) = \frac{e_{31}^*}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u_\rho^{(z)}(\rho)] + \chi_{33}^* E_z^{(z)}(\rho), \quad (2.47)$$

то з порівняння двох, фізично еквівалентних, визначень (2.41) і (2.47) аксіального компонента вектора електричної індукції слідує, що

$$E_z^{(z)}(\rho) = -U_0/\alpha. \quad (2.48)$$

Підставляючи співвідношення (2.45) і (2.46) в звичайне диференціальне рівняння (2.44), отримуємо стандартне рівняння для функцій Бесселя

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u_\rho^{(z)}(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial u_\rho^{(z)}(\rho)}{\partial \rho} + [(\lambda\rho)^2 - 1] u_\rho^{(z)}(\rho) = 0,$$

розв'язок якого, очевидно, має такий вигляд

$$u_\rho^{(z)}(\rho) = A J_1(\lambda\rho), \quad (2.49)$$

де  $A$  – константа, що підлягає визначенню;  $J_1(\lambda\rho)$  – функція Бесселя першого порядку;  $\lambda = \omega/\sqrt{c_{11}/\rho_0}$  – хвильове число радіальних коливань п'єзокерамічного диску.

Константа  $A$  визначається з граничної умови  $\sigma_{\rho\rho}^{(z)}(R) = 0$  (умова  $\sigma_{\rho z}(R) = 0$  виконується автоматично) наступним чином

$$A = -\frac{e_{31}^* U_0}{\alpha c_{11}} \frac{R}{[\lambda R J_0(\lambda R) - (1-k) J_1(\lambda R)]},$$

де  $J_0(\lambda R)$  – функція Бесселя нульового порядку;  $k = c_{12}/c_{11}$  – число менше одиниці.

Підставляючи значення константи  $A$  в формулу (2.49), а отриманий результат – в співвідношення (2.43), отримуємо можливість записати вираз (2.42) в наступному вигляді [17]:

$$Z_{\text{еп}}(\omega) = \frac{1}{i\omega C_0^*} F^{(*)}(\omega), \quad (2.50)$$

де

$$F^{(*)}(\omega) = \frac{\lambda R J_0(\lambda R) - (1 - k) J_1(\lambda R)}{\lambda R J_0(\lambda R) - (1 - k - 2K_{31}^2) J_1(\lambda R)}; \quad (2.51)$$

$K_{31}^2 = (e_{31}^*)^2 / (c_{11}\chi_{33}^*)$  – квадрат коефіцієнта електромеханічного зв'язку п'єзокераміки в режимі радіальних коливань диску, поляризованого по товщині.

Функція  $F^{(*)}(\omega)$ , що задана виразом (2.51), має ряд характерних точок на осі частот  $\omega$ . На частоті  $\omega_m$ , яка відповідає  $m$ -му за номером кореню рівняння

$$x J_0(x) - (1 - k) J_1(x) = 0, \quad (2.52)$$

функція  $F^{(*)}(\omega_m) = 0$ . На частоті  $\omega_m$  частота зміни знаку сил Кулона, які деформують п'єзокерамічний диск, збігається з  $m$ -ою по номеру власною частотою радіальних вісесиметричних коливань круглого диску і відбувається резонансне споживання енергії джерела пружних коливань. Оскільки ідеальне джерело гармонійно змінної в часі різниці електричних потенціалів володіє нескінченним запасом енергії, остільки на частотах радіальних електромеханічних резонансів амплітудні значення радіального компонента  $u_p^{(z)}(\rho)$  вектора зміщення матеріальних частинок диска необмежено зростають. Відповідно до цього зростають амплітудні значення компонентів тензора деформацій і, як наслідок, необмежено зростають амплітудні значення електричного заряду на поверхні  $z = \alpha$ . Останнє є причиною необмеженого зростання амплітудних значень змінного струму в провідниках, які підключені до електродованих поверхонь диска. Нескінченні струми на виході ідеального генератора електричної напруги виникають в результаті короткого замикання, тобто коли опір навантаження  $Z_{\text{еп}}(\omega_m) = 0$ .

У таблиці 2.1 наведені числові значення перших двох коренів ( $x_1$  і  $x_2$ ) рівняння (2.52) і їх відношення  $\xi_{21} = x_2/x_1$  в залежності від значень параметра

к. Необхідно підкреслити, що відношення  $\xi_{21}$  в точності дорівнює відношенню  $\omega_{21} = \omega_{r2}/\omega_{r1}$ , тобто кругових частот другого і першого радіальних електромеханічних резонансів, яке легко і точно визначається експериментально. Необхідно звернути увагу ще й на те, що числові значення коренів рівняння (2.52) змінюються досить мало в порівнянні зі зміною параметра к. Це необхідно враховувати при виконанні вимірювань, які необхідно виконувати з усією можливою ретельністю.

**Таблиця 2.1. Перші два кореня рівняння  $xJ_0(x) - (1-k)J_1(x) = 0$**

k	$x_1$	$x_2$	$\xi_{21}$
0,00	1,841184	5,331443	2,895660
0,05	1,878980	5,341153	2,842582
0,10	1,915393	5,350843	2,793601
0,15	1,950511	5,360511	2,748259
0,20	1,984414	5,370155	2,706167
0,25	2,017172	5,379773	2,666988
0,30	2,048850	5,389364	2,630434
0,35	2,079508	5,398928	2,596253
0,40	2,109198	5,408462	2,564226
0,45	2,137971	5,417963	2,534162
0,50	2,165871	5,427433	2,505889
0,55	2,192942	5,436869	2,479259
0,60	2,219221	5,446270	2,454137
0,65	2,244744	5,455635	2,430404
0,70	2,269547	5,464962	2,407953
0,75	2,293658	5,474251	2,386690
0,80	2,317109	5,483500	2,366527
0,85	2,339926	5,492708	2,347385
0,90	2,362135	5,501874	2,329195
0,95	2,383761	5,510998	2,311892
1,00	2,404826	5,520078	2,295417

Слідом за частотами  $\omega_{rm}$  радіальних резонансів слідує частоти, на яких обертається в нуль знаменник виразу (2.51). На цих частотах функція  $F^{(*)}(\omega)$  необмежено зростає. Відповідно до цього необмежено зростає електричний імпеданс  $Z_{el}(\omega)$  п'єзокерамічного диску. Це відбувається через те, що поляризаційні заряди повністю компенсують електричний заряд, який формує на електродованих поверхнях диску генератор електричних сигналів.

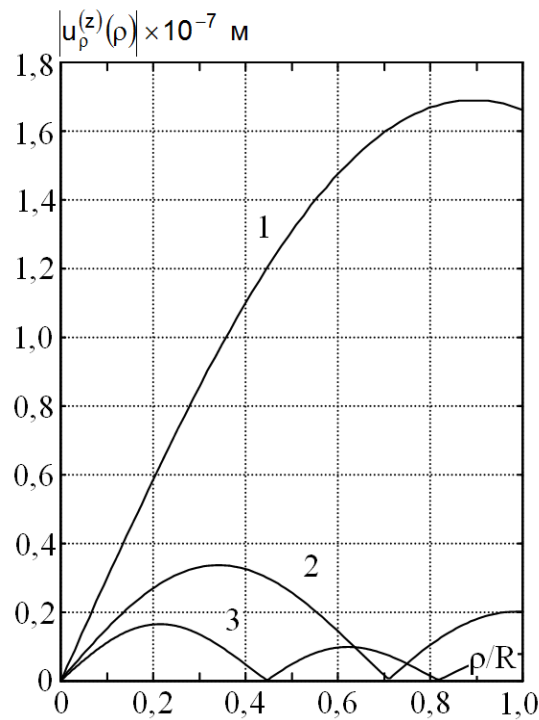
Результуючий заряд  $Q$  обертається в нуль, і електричний струм в провідниках зникає. Це відповідає розімкнутому електричному колу або електричному колу, в якому включено нескінченно великий опір. При цьому п'єзокерамічний диск, природно, не споживає енергії від джерела коливальних, тобто від генератора. Щоб підкреслити специфіку і відмінність цього стану від стану на частотах електромеханічного резонансу, частота  $\omega_{ам}$ , на яких  $Z_{ел}(\omega_{ам}) \rightarrow \infty$ , називають частотами електромеханічного антирезонансу.

У реальному експерименті нулі і нескінченності відсутні, оскільки в реальних пружних матеріалах завжди існують втрати на в'язке тертя. Ці втрати можна врахувати за допомогою параметра  $Q_m$ , який має зміст механічної добротності матеріалу. Як відомо, добротністю називається безрозмірне число, величина якого обернено пропорційна втратам енергії в коливальній системі за період. В ідеальних пружних тілах, де втрати енергії на в'язке тертя відсутні,  $Q_m \rightarrow \infty$ . У реальних об'єктах добротність  $Q_m$  має кінцеве значення. При цьому модулі пружності  $c_{\beta\lambda}^E(Q_m)$  записуються наступним чином [18]

$$c_{\beta\lambda}^E(Q_m) = c_{\beta\lambda}^E (1 + i/Q_m), \quad (2.53)$$

де  $c_{\beta\lambda}^E$  – статичний модуль пружності;  $i = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця.

На рис. 2.2 показані модулі радіальних зміщень  $u_p^{(z)}(\rho)$  в п'єзокерамічному диску радіусом  $R = 33 \cdot 10^{-3}$  м і товщиною  $\alpha = 3 \cdot 10^{-3}$  м. Параметри матеріалу диску (п'єзокераміки):  $c_{11}^E = 110$  ГПа;  $c_{12}^E = 60$  ГПа;  $c_{33}^E = 100$  ГПа;  $e_{33} = 18$  Кл/м<sup>2</sup>;  $e_{31} = -8$  Кл/м<sup>2</sup> і  $\chi_{33}^E = 1400 \chi_0$ ;  $Q_m = 100$ ;  $k = c_{12}/c_{11} = 0,324$ . Розрахунки були виконані на частотах перших трьох електромеханічних резонансів. Номер резонансної частоти проставлений в полі рисунку біля відповідної кривої. Для зазначеного вище значення параметра  $k$  резонансним частотам відповідають наступні значення коренів рівняння (2.52):  $x_1 = 2,063690$ ;  $x_2 = 5,393958$  і  $x_3 = 8,574693$ . Різниця електричних потенціалів  $U_0 = 1$ В. По осі абсцис на рис. 2.2 відкладені значення безрозмірною радіальною координати  $\rho/R$ .

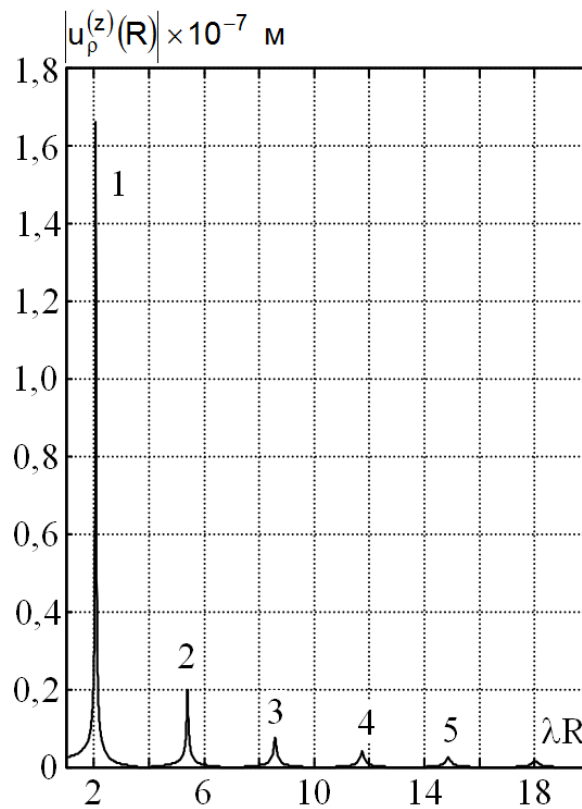


**Рис. 2.2. Радіальні зміщення матеріальних частинок п'єзокерамічного диску на частотах перших трьох електромеханічних резонансів**

Звертає на себе увагу надзвичайно швидке зменшення рівнів радіальних зміщень у міру зростання номера електромеханічного резонансу.

Цей факт додатково ілюструється на рис. 2.3, де показана зміна модуля радіального зміщення  $u_p^{(z)}(R)$  бічної поверхні  $\rho = R$  п'єзокерамічного диску в широкому діапазоні частот. Обчислення проводилися при зазначеному вище наборі геометричних і фізико-механічних параметрів коливального диску. Цифрами в полі рисунку вказані номери електромеханічних резонансів. По осі абсцис на рис. 2.3 відкладено безрозмірне хвильове число  $x = \lambda R$ . З представлених на рис. 2.3 результатів обчислень випливає, що на частотах в околиці першого товщинного резонансу (це приблизно відповідає значенням  $\lambda R \cong 40 \div 60$ ) радіальні зміщення матеріальних частинок диску, розраховані в припущенні, що  $\sigma_{zz} = 0$ , перестають існувати.





**Рис. 2.3. Радіальні зміщення бічної поверхні п'єзокерамічного диску в широкому діапазоні частот**

На рис. 2.4 показана зміна модуля електричного імпедансу п'єзокерамічного диску в діапазоні середніх частот (рис. 2.4,*a*). На вставці в поле рис. 2.4,*a* показано зміну значень модуля  $Z_{en}(\omega)$  в найближчій околиці частоти  $\omega_{r1}$  першого електромеханічного резонансу. На рис. 2.4,*б* показана зміна модуля електричного імпедансу в околиці частоти  $\omega_{a1}$  першого електромеханічного антирезонансу. Геометричні і фізико-механічні параметри диску, які використовувалися при обчисленнях за формулою (2.50), вказані в коментарях до рис. 2.3.

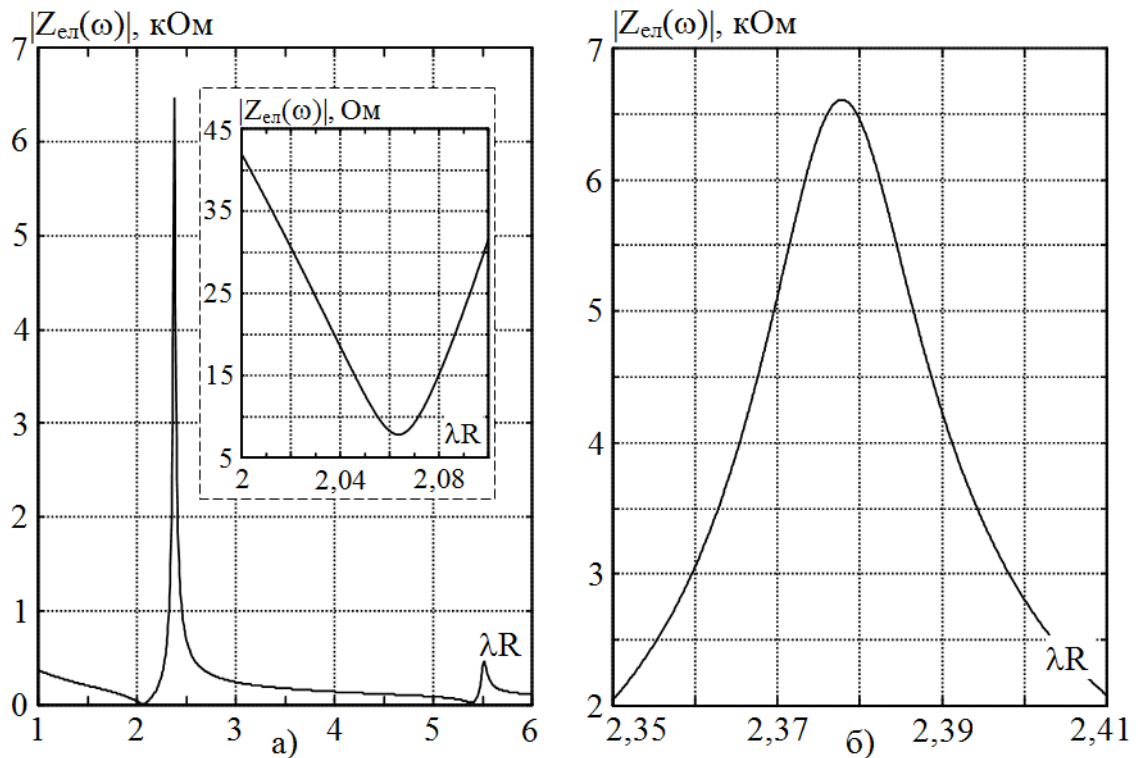


Рис. 2.4. Модуль електричного імпедансу диску в області середніх частот

Як випливає з формули (2.53), вирази (2.50) і (2.51) є функціями малого параметра  $\varepsilon = 1/Q_m$ . Розкладаючи функцію  $Z_{\text{ел}}(\omega)$  в степеневий ряд по малому параметру  $\varepsilon$ , і обмежуючи розкладання першим ступенем цього параметра, отримуємо наступну оцінку механічної добротності п'єзокераміки:

$$Q_m = \frac{R[(x_m^2 + k - 1)J_1(x_m) - kJ_0(x_m)]}{4x_m \nu C_{\text{д}}^*(0) K_{31}^2 J_1(x_m) Z_{\text{ел}}(x_m)}, \quad (2.54)$$

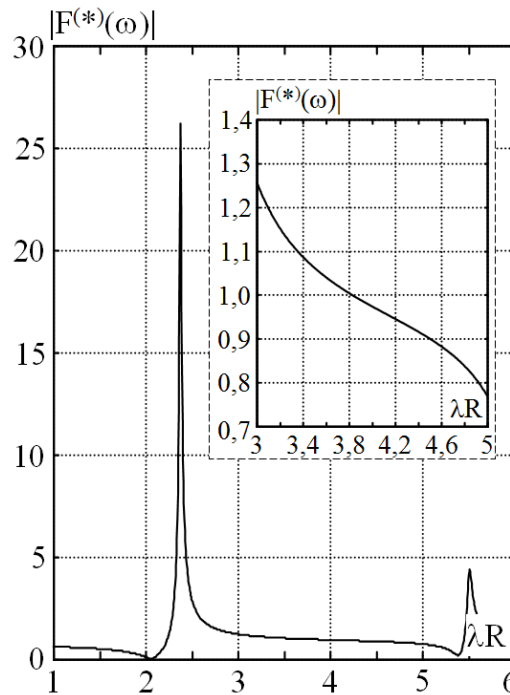
де  $x_m$  –  $m$ -ий корінь рівняння (2.52);  $\nu = \sqrt{\text{Re } c_{11}/\rho_0}$  – швидкість поширення радіальних коливань в п'єзокераміці, визначена без урахування втрат на в'язке тертя;  $C_{\text{д}}^*(0)$  – динамічна електрична ємність коливального диску, визначена через діелектричну проникність  $\text{Re } \chi_{33}^*$ , в якій не враховуються втрати на в'язке тертя;  $Z_{\text{ел}}(x_m)$  – електричний імпеданс диску на частоті  $m$ -ого електромеханічного резонансу. Слід підкреслити, що  $Z_{\text{ел}}(x_m)$  є дійсною величиною. З показаної на рис. 2.4,а вставки, можна визначити  $Z_{\text{ел}}(x_1) = 7,8$  Ом. Підстановка цієї величини в формулу (2.54) дає значення  $Q_m = 100,096$ . У розрахунок було закладено значення  $Q_m = 100$ , тобто отримана оцінка

знаходиться в добрій згоді з істинним значенням механічної добротності.

У деяких роботах робляться спроби визначення механічної добротності як відношення  $\omega_{a1}/\Delta\omega_{0,707}$ , де  $\omega_{a1}$  – кругова частота першого електромеханічного антирезонансу;  $\Delta\omega_{0,707}$  – смуга частот на рівні  $-3$  дБ від значення модуля  $Z_{ел}(\omega_{a1})$ , тобто максимального значення електричного імпедансу на частоті першого антирезонансу. Виконуючи ці розрахунки за допомогою графіка, який показаний на рис. 2.4,б, отримуємо значення  $Q_m = 153,3$ , яке істотно відрізняється від закладеної в розрахунок величини  $Q_m = 100$ . Причина такого стану речей полягає в тому, що електромеханічний антирезонанс формується за рахунок взаємодії (взаємної компенсації) електричного заряду, який наводиться на електродованій поверхні диску генератором різниці електричних потенціалів, і поляризаційного заряду, який утворюється в результаті деформування п'єзоелектрика. Говорячи іншими словами, втрати на в'язке тертя не є, на відміну від електромеханічного резонансу, єдиним фактором, який визначає величину електричного імпедансу.

На рис. 2.5 показано частотно залежну зміну модуля безрозмірної функції  $F^{(*)}(\omega)$ , яка визначена виразом (2.51). Розрахунок був виконаний для того ж набору геометричних і фізико-механічних параметрів, який використовувався при обчисленнях, результати яких показані на рис. 2.3 і рис. 2.4. На вставці в поле рис. 2.5 показана зміна модуля функції  $F^{(*)}(\omega)$  в діапазоні безрозмірних хвильових чисел  $3 \leq \lambda R \leq 5$  або, що те ж саме, безрозмірних частот  $3 \leq \omega \tau_0 \leq 5$  ( $\tau_0 = R/v$ ), де  $|F^{(*)}(\omega)| \approx 1$ . При значеннях  $\lambda^* R = \omega^* \tau_0 = 3,83$  модуль функції  $F^{(*)}(\omega)$  дорівнює одиниці і електричний імпеданс  $|Z_{ел}(\omega^*)| = 1/\omega^* |C_0^*|$ . Знаючи значення  $|Z_{ел}(\omega^*)|$ , можна визначити модуль динамічної електричної ємності в режимі планарних коливань п'єзокерамічного диску, і, як наслідок, отримати оцінку модуля діелектричної проникності  $\chi_{33}^*$ . Оскільки під час виконання вимірювань

значення частоти  $\omega^*$ , на якій  $|F^{(*)}(\omega^*)| = 1$ , а priori невідомо, оскільки її значення, в першому наближенні, можна оцінити таким чином:  $\omega^* \cong (\omega_r + \omega_a)/2$ , де  $\omega_r = (\omega_{r1} + \omega_{r2})/2$  і  $\omega_a = (\omega_{a1} + \omega_{a2})/2$  [19].

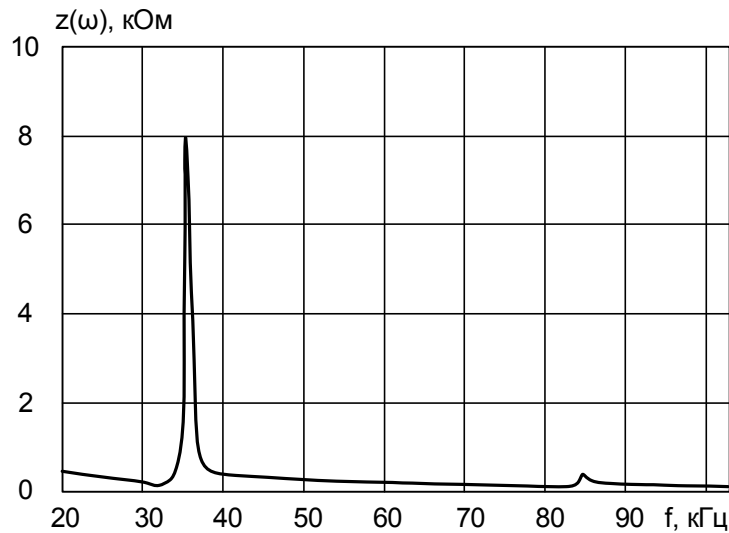


**Рис. 2.5.** Частотно залежна зміна модуля функції  $F^{(*)}(\omega)$

### *Дослідження електричного імпедансу п'єзокерамічного диска в області середніх частот*

Для експериментальних досліджень був використаний дисковий п'єзоелектричний елемент  $\text{Ø}66 \times 3$  мм з матеріалу типу ЦТС.

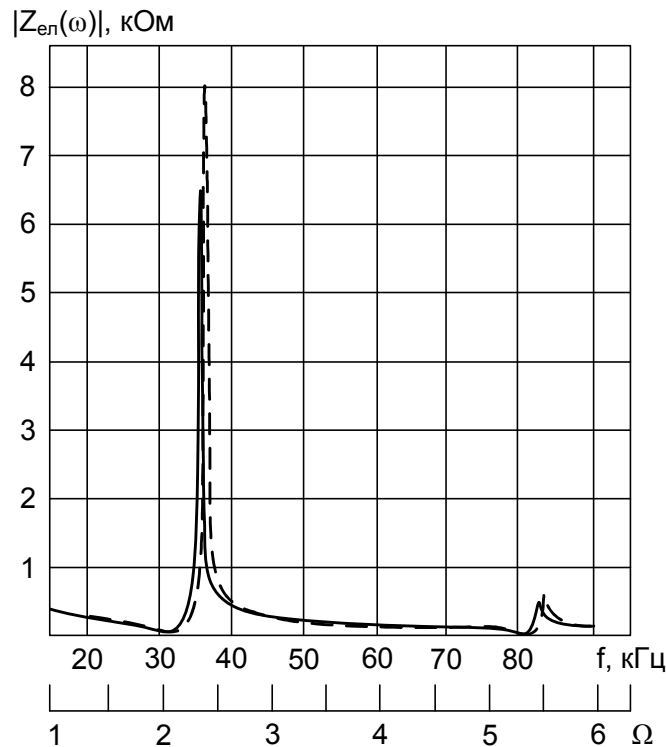
Результати вимірювання електричного імпедансу п'єзоелектричного диску в області середніх частот представлені на рис. 2.6.



**Рис. 2.6. Електричний імпеданс п'єзоелектричного диску в області середніх частот**

При порівнянні результатів математичного моделювання електричного імпедансу п'єзоелектричного диску в області середніх частот (рис. 2.4), виконаних згідно з виразом (2.50), та результатів експериментального вимірювання, наведених на рис. 2.6, видно, що отримана оцінка добре узгоджується з істинним значенням електричного імпедансу.

На рис. 2.7 наведені розрахункова (суцільна лінія) і експериментально отримана (штрихова лінія) криві частотної залежності електричного імпедансу п'єзоелектричного диску в області середніх частот. Природно, що розміри диску в розрахунку і експерименті були обрані однаковими, тобто радіус  $R = 33 \cdot 10^{-3}$  м і товщина  $\alpha = 3 \cdot 10^{-3}$  м. По осі ординат відкладаються значення електричного імпедансу п'єзоелектричного диску, а по осі абсцис – частота  $f$  (безрозмірна величина  $\Omega = \omega\tau_0$ , де  $\tau_0 = R/\sqrt{c_{11}/\rho_0}$  – постійна часу п'єзокерамічного диску). Значенню  $\Omega = 1$  відповідає частота  $f = 15206$  Гц.



**Рис. 2.7. Розрахункова (суцільна лінія) і експериментально отримана (штрихова лінія) криві частотної залежності електричного імпедансу п'єзоелектричного диску в області середніх частот**

Як і слід було очікувати, абсолютні значення частот резонансів в розрахунку і експерименті відрізняються один від одного. Так, слідуючи розрахунку, частоти першого і другого електромеханічних резонансів відповідно дорівнюють  $f_{r1} = 31410 \text{ Hz}$  і  $f_{r2} = 81352 \text{ Hz}$ ; відношення частот  $\zeta = f_{r2}/f_{r1} = 2,59$ .

Експериментальні значення тих же величин дорівнюють відповідно  $f_{r1} = 31940 \text{ Hz}$ ,  $f_{r2} = 82930 \text{ Hz}$  і  $\zeta = f_{r2}/f_{r1} = 2,596$ . Якщо експериментальні дані прийняти в якості істинних, то похибка визначення відношення частот складе  $\Delta\zeta = 0,2\%$ . Отримані результати пояснюються дуже просто. Числові значення частот резонансів визначаються розмірами і фізико-механічними параметрами матеріалу дискового елемента. Відношення частот резонансів одного і того ж диску визначаються практично тільки розмірами. З цієї причини спостерігається досить задовільний збіг теоретично і

експериментально визначених відношень частот резонансів. Розбіжності абсолютних значень частот резонансів пояснюється невідповідністю фізико-механічних параметрів п'єзокераміки, які були закладені в розрахунок і які притаманні експериментально досліджуваному об'єкту. Зіставляючи криві можна зробити висновок, що добротність матеріалу експериментально досліджуваного зразка мінімум в 1,2 рази більше закладеної в розрахунок добротності.

Таким чином, можна стверджувати, що характер зміни обох кривих, наведених на рис. 2.7, в досить широкому діапазоні частот збігається з точністю до деталей. Це означає, що якісний зміст виразу (2.50) адекватний процесам, які відбуваються в реальному об'єкті. Говорячи іншими словами, вираз (2.50) – математична модель п'єзоелектричного диску в області середніх частот – в достатній мірі адекватний реальному об'єкту і процесам, що відбувається в ньому. Останнє дозволяє припускати, що математичний опис напружено-деформованого стану дискового елемента також досить добре відповідає реальному стану речей [20].

### **2.3. Визначення електричного імпедансу п'єзокерамічного диска в області високих частот**

В області високих частот, коли довжина пружної хвилі стає сумірною з товщиною диска, вектор зміщення матеріальних частинок володіє і радіальним і аксіальним компонентами. Електричний імпеданс коливального п'єзокерамічного диску визначений формулою (2.29).

Усереднений по товщині диска радіальний компонент  $u_r^{(z)}(\rho)$  вектора зміщення матеріальних частинок диска повинен задовольняти рівняння (2.44). Усереднений за площею електродованої поверхні аксіальний компонент  $u_z^{(\rho)}(z)$  повинен задовольняти рівняння

$$\frac{\partial \sigma_{zz}^{(\rho)}(z)}{\partial z} + \rho_0 \omega^2 u_z^{(\rho)}(z) = 0, \quad (2.55)$$

яке виходить з рівняння усталених аксіальних коливань (2.6) після застосування до нього процедури усереднення (2.24). Символом  $\sigma_{zz}^{(\rho)}(z)$  в співвідношенні (2.55) позначено нормальне напруження  $\sigma_{zz}(\rho, z)$ , усереднене по площі електродованої поверхні диска, тобто

$$\sigma_{zz}^{(\rho)}(z) = \frac{2}{R^2} \int_0^R \rho \sigma_{zz}(\rho, z) d\rho. \quad (2.56)$$

Нормальні напруження  $\sigma_{\rho\rho}^{(z)}(\rho)$ ,  $\sigma_{\phi\phi}^{(z)}(\rho)$  і  $\sigma_{zz}^{(\rho)}(z)$  отримуються шляхом відповідного усереднення наступних виразів:

$$\sigma_{\rho\rho}(\rho, z) = c_{11}^E \frac{\partial u_\rho(\rho, z)}{\partial \rho} + c_{12}^E \frac{u_\rho(\rho, z)}{\rho} + c_{12}^E \frac{\partial u_z(\rho, z)}{\partial z} - e_{31} E_z(\rho, z), \quad (2.57)$$

$$\sigma_{\phi\phi}(\rho, z) = c_{12}^E \frac{\partial u_\rho(\rho, z)}{\partial \rho} + c_{11}^E \frac{u_\rho(\rho, z)}{\rho} + c_{12}^E \frac{\partial u_z(\rho, z)}{\partial z} - e_{31} E_z(\rho, z), \quad (2.58)$$

$$\sigma_{zz}(\rho, z) = c_{12}^E \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u_\rho(\rho, z)] + c_{33}^E \frac{\partial u_z(\rho, z)}{\partial z} - e_{33} E_z(\rho, z). \quad (2.59)$$

Аксіальний компонент  $D_z(\rho)$  вектора електричної індукції записується в такий спосіб

$$D_z(\rho) = e_{31} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u_\rho(\rho, z)] + e_{33} \frac{\partial u_z(\rho, z)}{\partial z} + \chi_{33}^\varepsilon E_z(\rho, z). \quad (2.60)$$

З умови  $\partial D_z(\rho) / \partial z = 0$  випливає фізично еквівалентне виразу (2.60) представлення компонента  $D_z(\rho)$

$$D_z(\rho) = e_{31} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u_\rho^{(z)}(\rho)] + \frac{e_{33}}{\alpha} [u_z(\rho, \alpha) - u_z(\rho, 0)] - \chi_{33}^\varepsilon \frac{U_0}{\alpha}. \quad (2.61)$$

Віднімаючи з виразу (2.60) співвідношення (2.61), отримуємо наступний результат

$$\begin{aligned} \frac{e_{31}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \rho [u_\rho(\rho, z) - u_\rho^{(z)}(\rho)] \right\} + e_{33} \left\{ \frac{\partial u_z(\rho, z)}{\partial z} - \frac{1}{\alpha} [u_z(\rho, \alpha) - u_z(\rho, 0)] \right\} + \\ + \chi_{33}^\varepsilon \left[ E_z(\rho, z) + \frac{U_0}{\alpha} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Усереднюючи вираз (2.62) по товщині диска, отримуємо

$$E_z^{(z)}(\rho) = -U_0 / \alpha. \quad (2.63)$$

Піддаючи вираз (2.62) процедурі усереднення (2.56), приходимо до висновку, що в разі тонкого диска, коли  $u_\rho(R, z) - u_\rho^{(z)}(R) \cong 0$ , усереднений по



площі електродованої поверхні диска аксіальний компонент вектора напруженості електричного поля записується у вигляді

$$E_z^{(p)}(z) = -\frac{U_0}{\alpha} - \frac{e_{33}}{\chi_{33}^e} \left\{ \frac{\partial u_z^{(p)}(z)}{\partial z} - \frac{1}{\alpha} [u_z^{(p)}(\alpha) - u_z^{(p)}(0)] \right\}. \quad (2.64)$$

Усереднюючи вираз (2.57) і (2.58) по товщині диска, і беручи до уваги визначення (2.63), отримуємо

$$\sigma_{pp}^{(z)}(\rho) = c_{11}^E \frac{\partial u_p^{(z)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{12}^E \frac{u_p^{(z)}(\rho)}{\rho} + \frac{c_{12}^E}{\alpha} [u_z(\rho, \alpha) - u_z(\rho, 0)] + \frac{e_{31}}{\alpha} U_0, \quad (2.65)$$

$$\sigma_{\phi\phi}^{(z)}(\rho) = c_{12}^E \frac{\partial u_p^{(z)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{11}^E \frac{u_p^{(z)}(\rho)}{\rho} + \frac{c_{12}^E}{\alpha} [u_z(\rho, \alpha) - u_z(\rho, 0)] + \frac{e_{31}}{\alpha} U_0. \quad (2.66)$$

Для тонкого диска справедлива оцінка:  $u_z(\rho, \alpha) - u_z(\rho, 0) \cong u_z^{(p)}(\alpha) - u_z^{(p)}(0)$ . З урахуванням цього факту підстановка співвідношень (2.65) і (2.66) в рівняння (2.44) приводить до наступного результату:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u_p^{(z)}(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial u_p^{(z)}(\rho)}{\partial \rho} + \left[ (\lambda^E R)^2 - 1 \right] u_p^{(z)}(\rho) = 0, \quad (2.67)$$

де  $\lambda^E = \omega / \sqrt{c_{11}^E / \rho_0}$  – хвильове число радіальних коливань п'єзокерамічного диска в області високих частот, коли  $\sigma_{zz}(\rho, z) \neq 0$ . Розв'язок рівняння (2.67) очевидний

$$u_p^{(z)}(\rho) = C J_1(\lambda^E \rho), \quad (2.68)$$

де  $C$  – частотно залежна константа, що підлягає визначенню.

Піддаючи операції усереднення (2.56) співвідношення (2.59), і вважаючи при цьому, що для тонкого диску справедлива оцінка  $u_p(R, z) \cong u_p^{(z)}(R)$ , отримуємо наступний результат

$$\sigma_{zz}^{(p)}(z) \cong \frac{2c_{12}^E}{R} u_p^{(z)}(R) + c_{33}^D \frac{\partial u_z^{(p)}(z)}{\partial z} - \frac{e_{33}^2}{\chi_{33}^e \alpha} [u_z^{(p)}(\alpha) - u_z^{(p)}(0)] + \frac{e_{33}}{\alpha} U_0, \quad (2.69)$$

де  $c_{33}^D = c_{33}^E (1 + K_{33}^2)$ ;  $K_{33}^2 = e_{33}^2 / (\chi_{33}^e c_{33}^E)$  – квадрат коефіцієнта електромеханічного зв'язку для режиму товщинних коливань поляризованої по товщині п'єзокерамічної пластинки.

Підставляючи вираз (2.69) в рівняння (2.55), приводимо його до наступного вигляду:

$$\frac{\partial^2 u_z^{(\rho)}(z)}{\partial z^2} + \gamma^2 u_z^{(\rho)}(z) = 0, \quad (2.70)$$

де  $\gamma = \omega / \sqrt{c_{33}^D / \rho_0}$  – хвильове число аксіальних (товщинних) коливань п'єзокерамічного диску. Розв'язок рівняння (2.70) очевидний:

$$u_z^{(\rho)}(z) = A \cos \gamma z + B \sin \gamma z, \quad (2.71)$$

де  $A$  і  $B$  – частотно залежні константи, що підлягають визначенню.

Константи  $A$ ,  $B$  і  $C$  визначаються з граничних умов

$$\sigma_{\rho\rho}^{(z)}(R) \equiv \left[ c_{11}^E \frac{\partial u_\rho^{(z)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{12}^E \frac{u_\rho^{(z)}(\rho)}{\rho} \right]_{\rho=R} + \frac{c_{12}^E}{\alpha} [u_z^{(\rho)}(\alpha) - u_z^{(\rho)}(0)] + \frac{e_{31}}{\alpha} U_0 = 0, \quad (2.72)$$

$$\sigma_{zz}^{(\rho)}(z) \Big|_{z=\alpha;0} = 0, \quad (2.73)$$

де нормальне напруження  $\sigma_{zz}^{(\rho)}(z)$  визначене співвідношенням (2.69).

Підстановка рішень (2.68) і (2.71) в умови (2.72) і (2.73) приводить до наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} Am_{11} + Bm_{12} + Cm_{13} &= -\frac{e_{31}U_0}{c_{12}^E} p_1, \\ Am_{21} + Bm_{22} + Cm_{23} &= -\frac{e_{31}U_0}{c_{12}^E} p_2, \\ Am_{31} + Bm_{32} + Cm_{33} &= -\frac{e_{31}U_0}{c_{12}^E} p_3, \end{aligned} \quad (2.74)$$

де

$$\begin{aligned} m_{11} &= -\frac{1 - \cos \gamma \alpha}{\gamma \alpha}; \quad m_{12} = \frac{\sin \gamma \alpha}{\gamma \alpha}; \quad m_{13} = \xi_1 \left[ J_0(\xi_3 \gamma \alpha) - \frac{1 - k^E}{\xi_3 \gamma \alpha} J_1(\xi_3 \gamma \alpha) \right]; \quad \xi_1 = \frac{\sqrt{c_{11}^E c_{33}^D}}{c_{12}^E}; \quad \xi_3 = \frac{R}{\alpha} \sqrt{\frac{c_{33}^D}{c_{11}^E}}; \\ p_1 &= 1; \quad m_{21} = \frac{K_{33}^2}{1 + K_{33}^2} \frac{(1 - \cos \gamma \alpha)}{\gamma \alpha} - \sin \gamma \alpha; \quad m_{22} = -\frac{K_{33}^2}{1 + K_{33}^2} \frac{\sin \gamma \alpha}{\gamma \alpha} + \cos \gamma \alpha; \quad m_{23} = \frac{2c_{12}^E \alpha}{c_{33}^D R} \frac{J_1(\xi_3 \gamma \alpha)}{\gamma \alpha}; \\ p_2 &= \frac{e_{33} c_{12}^E}{e_{31} c_{33}^D}; \quad m_{31} = \frac{K_{33}^2}{1 + K_{33}^2} \frac{(1 - \cos \gamma \alpha)}{\gamma \alpha}; \quad m_{32} = -\frac{K_{33}^2}{1 + K_{33}^2} \frac{\sin \gamma \alpha}{\gamma \alpha} + 1; \quad m_{33} = m_{23}; \quad p_3 = p_2. \end{aligned}$$

Розв'язок системи рівнянь (2.74) можна записати в наступному вигляді:

$$A = -\frac{e_{31}U_0}{\gamma \alpha c_{12}^E} \frac{\Delta(A)}{\Delta_0}, \quad B = -\frac{e_{31}U_0}{\gamma \alpha c_{12}^E} \frac{\Delta(B)}{\Delta_0}, \quad C = -\frac{e_{31}U_0}{\gamma \alpha c_{12}^E} \frac{\Delta(C)}{\Delta_0},$$

де  $\Delta(A)$ ,  $\Delta(B)$ ,  $\Delta(C)$  і  $\Delta_0$  визначники наступних матриць:

$$\Delta(A) = \det \begin{vmatrix} p_1 & m_{12} & m_{13} \\ p_2 & m_{22} & m_{23} \\ p_3 & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta(B) = \det \begin{vmatrix} m_{11} & p_1 & m_{13} \\ m_{21} & p_2 & m_{23} \\ m_{31} & p_3 & m_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta(C) = \det \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & p_1 \\ m_{21} & m_{22} & p_2 \\ m_{31} & m_{32} & p_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_0 = \det \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix}.$$

Після визначення констант  $A$ ,  $B$  і  $C$  можна записати в явному вигляді усереднені зміщення  $u_r^{(z)}(R)$ ,  $u_z^{(p)}(\alpha)$  і  $u_z^{(p)}(0)$ , і визначити вираз для функції  $\Xi^\varepsilon(\omega)$  (2.28) в явному вигляді

$$\Xi^\varepsilon(\omega) = \frac{U_0}{\Delta_0} F^\varepsilon(\omega, \Pi),$$

де  $F^\varepsilon(\omega, \Pi)$  – функція, що залежить від частоти і набору геометричних і фізико-механічних параметрів (символ  $\Pi$  у списку аргументів функції) диску, числові значення якої задаються формулою

$$F^\varepsilon(\omega, \Pi) = \frac{2e_{31}^2 \alpha}{\chi_{33}^\varepsilon c_{12}^E R} \Delta(C) \frac{J_1(\lambda^E R)}{\gamma \alpha} + \frac{e_{33} e_{31}}{\chi_{33}^\varepsilon c_{12}^E} \left[ -\Delta(A) \frac{(1 - \cos \gamma \alpha)}{\gamma \alpha} + \Delta(B) \frac{\sin \gamma \alpha}{\gamma \alpha} \right] + 1.$$

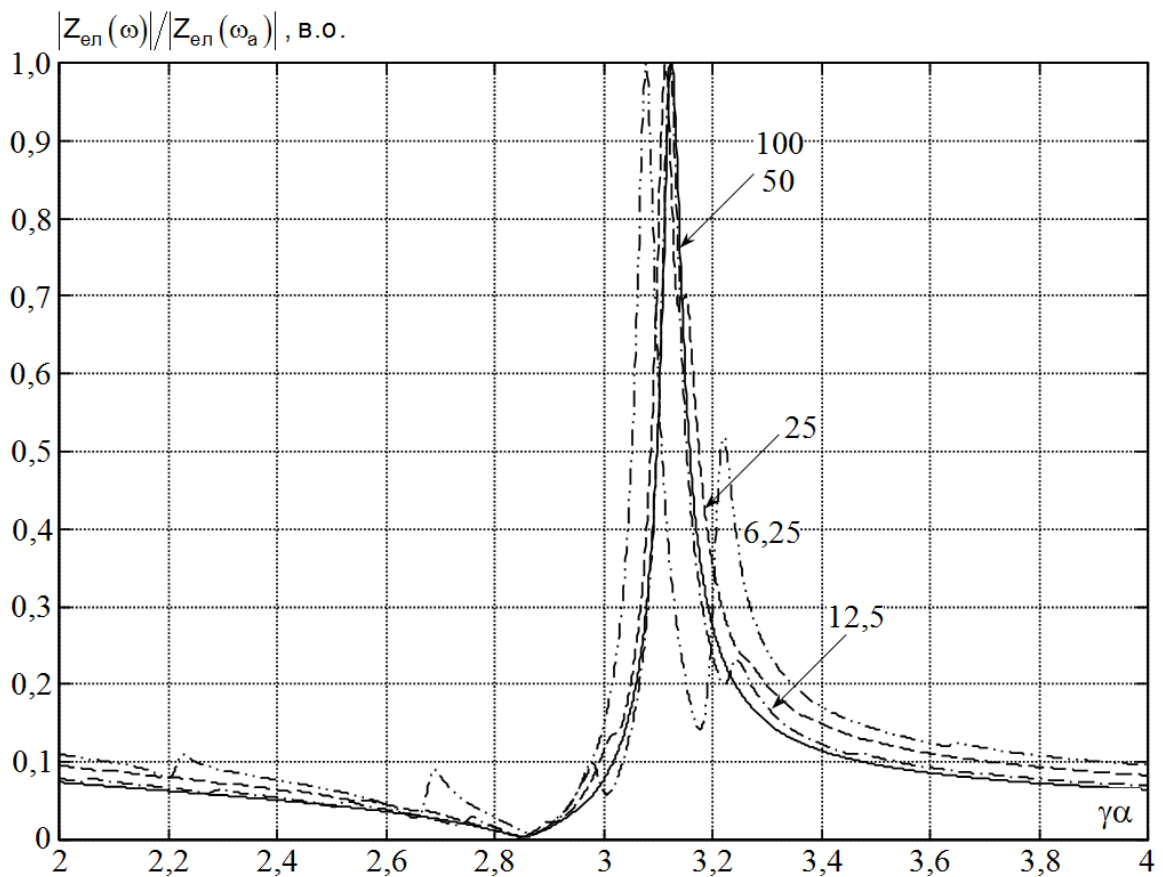
При цьому електричний імпеданс п'єзокерамічного диску в області високих частот задається наступним виразом

$$Z_{\text{еп}}(\omega) = \frac{U_0}{-i\omega C_\delta^\varepsilon \Xi^\varepsilon(\omega)} = \frac{\Delta_0}{-i\omega C_\delta^\varepsilon F^\varepsilon(\omega, \Pi)}, \quad (2.75)$$

де  $C_\delta^\varepsilon = \pi R^2 \chi_{33}^\varepsilon / \alpha$  – динамічна електрична ємність п'єзокерамічного диску на високих частотах.

На рис. 2.8 показані результати розрахунків модуля електричного імпедансу диска, які виконувалися за формулою (2.75) при наступному фіксованому наборі параметрів:  $c_{11}^E = 110$  ГПа;  $c_{12}^E = 60$  ГПа;  $c_{33}^E = 100$  ГПа;  $e_{33} = 18$  Кл/м<sup>2</sup>;  $e_{31} = -8$  Кл/м<sup>2</sup> і  $\chi_{33}^\varepsilon = 1400 \chi_0$ ;  $\chi_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – діелектрична постійна; механічна добротність п'єзокераміки  $Q_m = 100$ ; густина п'єзокераміки  $\rho_0 = 7400$  кг/м<sup>3</sup>. Товщина диску  $\alpha = 3 \cdot 10^{-3}$  м. Варійованим параметром сімейства кривих, показаних на рис. 2.8, є співвідношення  $R/\alpha$ , яке задавалося рівним 100; 50; 25; 12,5 і 6,25. Числові значення співвідношення  $R/\alpha$  проставлені в полі рисунка біля відповідних кривих. По вісі ординат на рис. 2.8 відкладаються нормовані на величину модуля  $Z_{\text{еп}}(\omega_a)$  на частоті

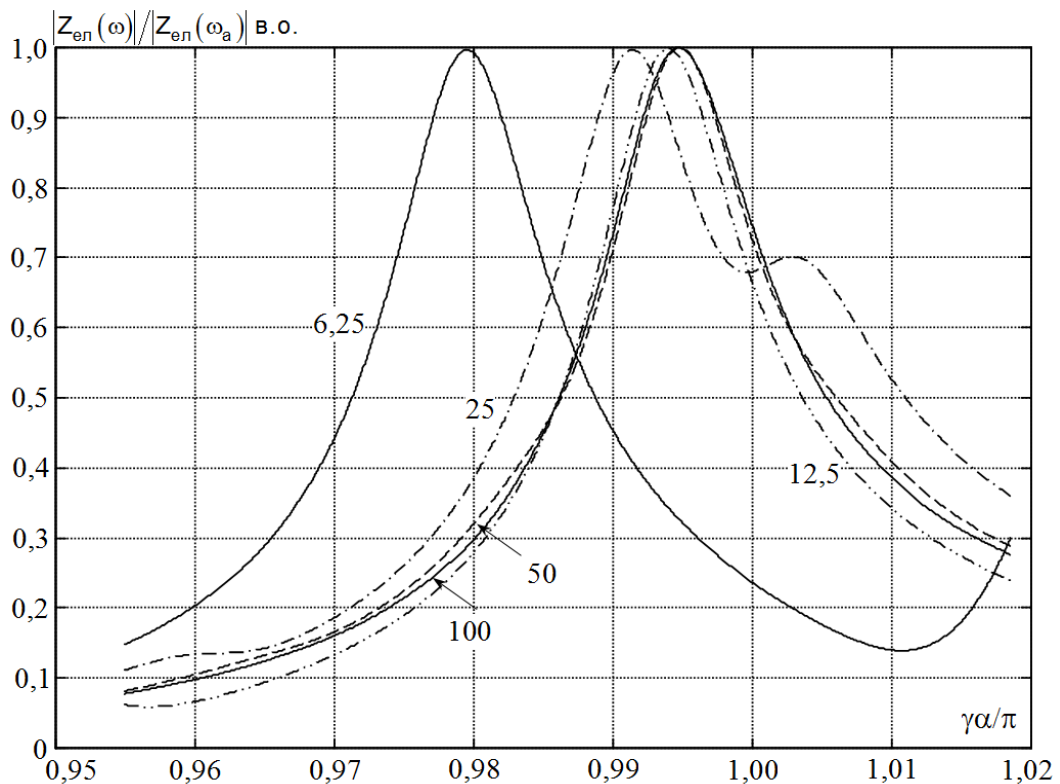
$\omega_a$  товщинного антирезонансу значення модуля електричного імпедансу  $Z_{ел}(\omega)$ . По осі абсцис відраховується безрозмірне хвильове число  $\gamma\alpha$ . При обумовлених вище значеннях параметрів диска значенням  $\gamma\alpha = 1$  відповідає циклічна частота  $f = v^D / (2\pi\alpha) = 219,1$  кГц, де  $v^D = \sqrt{c_{33}^D / \rho_0} = 4130$  м/с – швидкість поширення плоских хвиль стиснення-розтягування вздовж напрямку електричної поляризації диска.



**Рис. 2.8. Частотно залежна зміна модуля електричного імпедансу п'єзокерамічного диска в околиці частоти першого товщинного електромеханічного резонансу-антирезонансу**

З показаних на рис. 2.8 результатів випливає, що при значній зміні співвідношення  $R/\alpha$ , значення безрозмірної частоти першого товщинного електромеханічного антирезонансу залишається практично незмінним. Сказане підтверджують побудови, наведені на рис. 2.9, де показані

результати обчислення співвідношення  $|Z_{\text{ел}}(\omega)|/|Z_{\text{ел}}(\omega_a)|$  в найближчій околиці частоти антирезонансу. По вісі абсцис відкладаються значення безрозмірної частоти  $\gamma\alpha$  в одиницях числа  $\pi$ , тобто величини  $\gamma\alpha/\pi$ . Чітко видно, що максимально можлива зміна безрозмірної частоти електромеханічного антирезонансу не перевищує  $0,02\pi$ . Аналогічний висновок можна зробити про вплив параметра  $R/\alpha$  на значення безрозмірної частоти першого товщинного електромеханічного резонансу (рис. 2.8), де модуль  $Z_{\text{ел}}(\omega)$  приймає мінімальне значення.



**Рис. 2.9. Частотно залежна зміна модуля електричного імпедансу п'єзокерамічного диска в найближчій околиці частоти першого товщинного електромеханічного антирезонансу**

На підставі цього можна зробити висновок, що радіальні зміщення  $u_p^{(z)}(R)$  матеріальних частинок диска практично не впливають на числові значення частот першого товщинного електромеханічного резонансу і антирезонансу. Говорячи іншими словами, числові значення частот

електромеханічного резонансу і антирезонансу практично повністю визначаються аксіальними зміщеннями  $u_z^{(p)}(z)$ .

Беручи до уваги цю обставину, можна стверджувати, що в області високих частот функція  $\Xi^\varepsilon(\omega)$ , яка визначає електричний імпеданс коливального диска в цьому частотному діапазоні, може бути записана в наступному вигляді

$$\Xi^\varepsilon(\omega) \cong \frac{e_{33}}{\chi_{33}^\varepsilon} [u_z^{(p)}(\alpha) - u_z^{(p)}(0)] - U_0. \quad (2.76)$$

При виконанні розрахунку електричного імпедансу по формулі (2.76), природно, будуть втрачені деякі деталі частотно залежної зміни функції  $Z_{\text{ел}}(\omega)$ . Зате буде збережено головне – числові значення частот електромеханічного резонансу і антирезонансу.

Константи  $A$  і  $B$ , які входять в опис аксіальних зміщень  $u_z^{(p)}(z)$  (див. вираз (2.71)), визначаються з граничних умов (2.73), де нормальне напруження  $\sigma_{zz}^{(p)}(z)$  задається наступним виразом

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(p)}(z) = \gamma c_{33}^D \left\{ -A \left[ \sin \gamma z + \frac{K_{33}^2}{1 + K_{33}^2} \frac{(\cos \gamma \alpha - 1)}{\gamma \alpha} \right] + \right. \\ \left. + B \left[ \cos \gamma z - \frac{K_{33}^2}{1 + K_{33}^2} \frac{\sin \gamma \alpha}{\gamma \alpha} \right] + \frac{e_{33} U_0}{\gamma \alpha c_{33}^D} \right\}. \quad (2.77) \end{aligned}$$

Підставляючи у вираз (2.77) значення  $z = \alpha$  і  $z = 0$ , і прирівнюючи отримані результати нулю, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з яких єдиним чином визначаються константи  $A$  і  $B$ :

$$A = \frac{e_{33} U_0}{c_{33}^D} \frac{\text{tg}(\gamma \alpha / 2)}{\gamma \alpha F^\varepsilon(\omega, \Pi)}, \quad B = -A \text{tg}(\gamma \alpha / 2), \quad (2.78)$$

де

$$F^\varepsilon(\omega, \Pi) = 1 - \frac{K_{33}^2}{1 + K_{33}^2} \frac{\text{tg}(\gamma \alpha / 2)}{(\gamma \alpha / 2)}. \quad (2.79)$$

Підстановка виразів (2.78) у визначення (2.71) аксіальних зміщень матеріальних частинок п'єзокерамічного диску, дозволяє визначити величини  $u_z^{(p)}(\alpha)$  і  $u_z^{(p)}(0)$ , після чого визначається в явному вигляді функція  $\Xi^\varepsilon(\omega)$ , задана співвідношенням (2.76). Після цього вираз для розрахунку

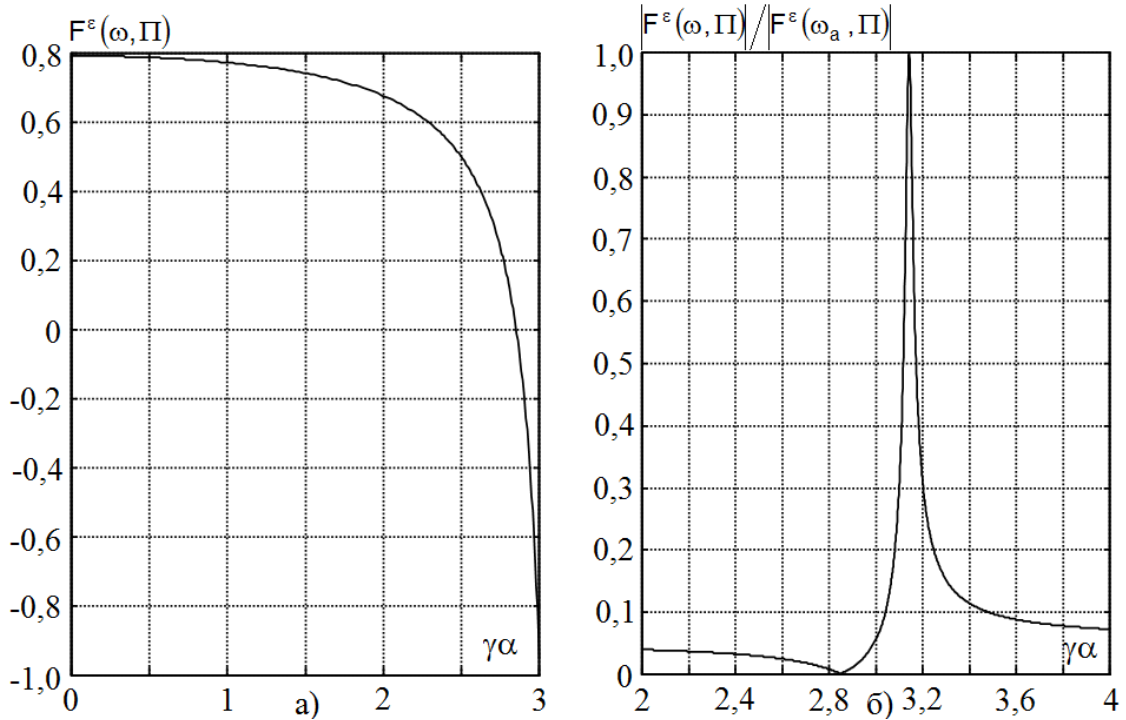
електричного імпедансу  $Z_{\text{еп}}(\omega)$  можна записати в наступному вигляді

$$Z_{\text{еп}}(\omega) = \frac{1}{i\omega C_0^\varepsilon} F^\varepsilon(\omega, \Pi). \quad (2.80)$$

З виразу (2.80) випливає, що при наближенні  $\gamma\alpha/2$  зліва до значення  $\pi/2$ , функція  $F^\varepsilon(\omega, \Pi)$  спочатку має позитивні значення, потім обертається в нуль, що відповідає електромеханічного резонансу, а потім спрямовується до мінус нескінченності. У разі відсутності втрат енергії на в'язке тертя в матеріалі п'єзокерамічного диску ( $Q_m \rightarrow \infty$ ) при  $\gamma\alpha = \pi$  електричний імпеданс  $Z_{\text{еп}}(\omega_a) \rightarrow \infty$ .

На рис. 2.10,*а* показана зміна функції  $F^\varepsilon(\omega, \Pi)$  для випадку  $Q_m \rightarrow \infty$  і  $\kappa_{33}^2 = 0,262$ , що відповідає набору фізико-механічних параметрів, які були використані при розрахунках кривих, які показані на рис. 2.8 і рис. 2.9. На рис. 2.10,*б* показаний нормований на своє максимальне значення модуль комплекснозначної функції  $F^\varepsilon(\omega, \Pi)$ , коли механічна добротність матеріалу диска  $Q_m = 100$  і безрозмірне хвильове число  $\gamma\alpha$  стає комплексним числом  $\gamma\alpha(1 - i/(2Q_m))$ . Зіставляючи між собою криві, які показані на рис. 2.8 і рис. 2.10,*б*, можна зробити висновок, що деталізований розрахунок електричного імпедансу коливального п'єзокерамічного диску слід здійснювати за формулою а оцінку числових значень частот резонансу і антирезонансу виконувати з використанням функції  $F^\varepsilon(\omega, \Pi)$ , яка задана виразом (2.79).

Завершуючи дослідження електричного імпедансу п'єзокерамічного диску в області високих частот, розглянемо його значення на частоті першого електромеханічного резонансу.



**Рис. 2.10.** Частотно залежна зміна функції при відсутності втрат енергії в матеріалі диска (а) і для матеріалу з механічною добротністю  $Q_m = 100$  (б)

У формулі (2.80) від значення механічної добротності  $Q_m$  залежать хвильове число  $\gamma$  і квадрат коефіцієнта електромеханічного зв'язку  $\kappa_{33}^2$ . При цьому  $\gamma = \omega/v^D \cong \gamma^0(1 - i/(2Q_m))$  і  $\kappa_{33}^2 = e_{33}^2 / [\chi_{33}^\varepsilon c_{33}^E (1 + i/Q_m)]$ , де  $\gamma^0$  хвильове число осьових коливань диска, визначене без урахування втрат енергії на в'язке тертя. Очевидно, що параметр  $\varepsilon = 1/(2Q_m) \ll 1$ . Розкладаючи вираз (2.80) на частоті першого електромеханічного резонансу в ряд за ступенями малого параметра  $\varepsilon$ , і обмежуючись при цьому нульовим і першим членами розкладання, отримуємо

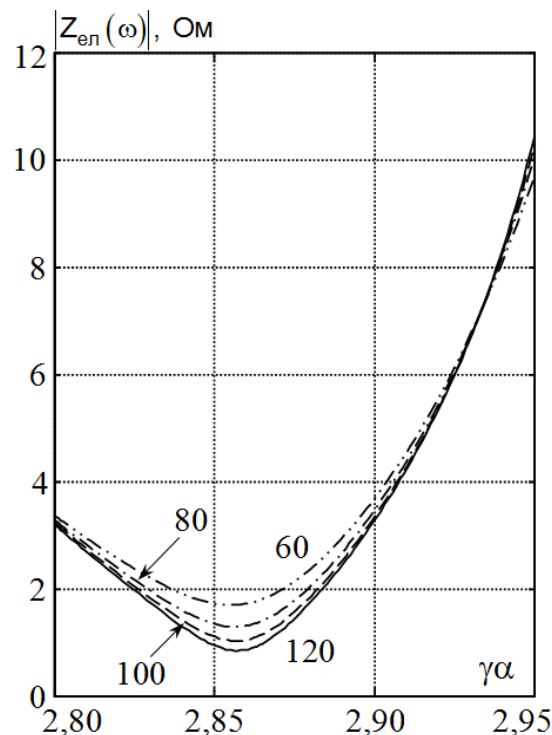
$$Z_{\text{ел}}(\omega_p) = \varepsilon \frac{\kappa_{33}^2 \Psi(\omega_p)}{\omega_p C_{33}^\varepsilon (1 + \kappa_{33}^2)}, \quad (2.81)$$

$$\text{де } \kappa_{33}^2 = \frac{e_{33}^2}{\chi_{33}^\varepsilon c_{33}^E}; \quad \Psi(\omega_p) = \frac{2 \operatorname{tg}(\gamma^0 \alpha / 2)}{(1 + \kappa_{33}^2)(\gamma^0 \alpha / 2)} + \frac{1 + \sin(\gamma^0 \alpha) / (\gamma^0 \alpha)}{\cos^2(\gamma^0 \alpha / 2)}.$$

На рис. 2.11 наведені графіки модуля електричного імпедансу  $Z_{\text{ел}}(\omega)$ , розраховані за формулою (2.75) в найближчій околиці частоти першого електромеханічного резонансу. По вісі ординат відкладаються значення



модуля функції  $Z_{\text{ел}}(\omega)$  в Ом, по вісі абсцис – безрозмірна частота  $\gamma\alpha = \omega\alpha/v^D$ , де  $v^D = \sqrt{c_{33}^D/\rho_0}$  – швидкість плоских хвиль стиснення-розтягування, при визначенні якої не враховуються втрати в п'єзоелектрику. Розрахунки виконувалися для диска зі співвідношенням  $R/\alpha = 12,5$ . Інші параметри вказані в коментарях до рис. 2.8. Змінним параметром сімейства кривих на рис. 2.11 є механічна добротність  $Q_m$ , якій присвоювалися значення 60, 80, 100 і 120 одиниць. Значення добротності проставлені біля відповідних кривих. Чітко видно, що найбільшому значенню  $Q_m$  відповідає найменше значення електричного імпедансу  $Z_{\text{ел}}(\omega_p)$ , який, як випливає з формули (2.81), має позитивні дійсні значення, тобто  $|Z_{\text{ел}}(\omega_p)| \equiv Z_{\text{ел}}(\omega_p)$ .



**Рис. 2.11. Розрахунок за формулою (2.75) модуля електричного імпедансу диска в околиці частоти першого електромеханічного резонансу**

Оскільки величина  $Z_{\text{ел}}(\omega_p)$  є вимірюваною в реальному експерименті, остільки з виразу (2.81) випливає оцінка механічної добротності  $Q_m$  на частоті першого товщинного електромеханічного резонансу

$$Q_M = \frac{K_{33}^2 \Psi(\omega_p)}{2Z_{\text{эл}}(\omega_p) \omega_p C_{\text{д}}^{\varepsilon} (1 + K_{33}^2)}. \quad (2.82)$$

Необхідно особливо відмітити, що механічна добротність  $Q_M$ , знайдена за формулою (2.54) (позначимо цю добротність символом  $Q_M^{(p)}$ ) і механічна добротність  $Q_M^{(z)}$ , визначена виразом (2.82), не рівні одна одній. Більш того, має виконуватися нерівність  $Q_M^{(p)} > Q_M^{(z)}$ . Причина такого стану речей в достатній мірі очевидна – втрати енергії на в'язке тертя зростають з ростом частоти [21].

З теорії Ліфшиця – Пархомовського – Меркулова [22] випливає, що коефіцієнт загасання ультразвуку в широкому діапазоні частот можна описати таким виразом

$$\beta \cong \delta_1 f^2 + \delta_2 f^4,$$

де  $\delta_1$  і  $\delta_2$  – структурні параметри, числові значення яких визначаються середньостатистичними розмірами зерен матеріалу;  $f$  – циклічна частота.

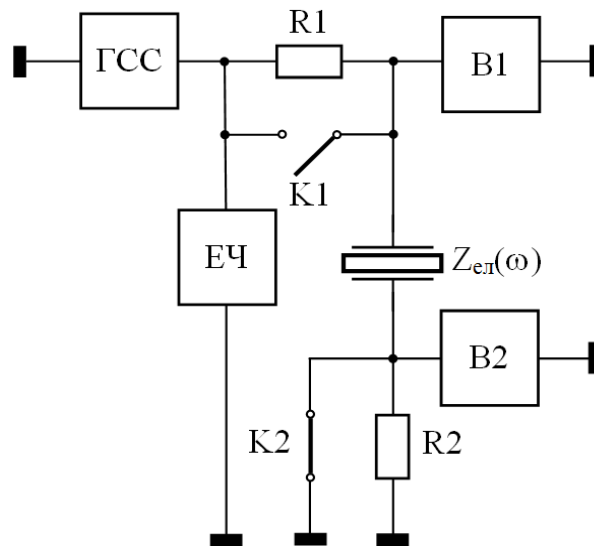
Коефіцієнт загасання  $\beta$  і механічна добротність  $Q_M$  пов'язані між собою в такий спосіб: в області середніх частот  $\beta = \lambda / (2Q_M^{(p)})$ , в області високих частот –  $\beta = \gamma / (2Q_M^{(z)})$ , де  $\lambda$  і  $\gamma$  – хвильові числа радіальних і товщинних коливань круглого диску. Знаючи значення механічних добротностей  $Q_M^{(p)}$  і  $Q_M^{(z)}$  на частотах першого і другого радіального, а також першого і другого товщинного електромеханічних резонансів можна побудувати оцінки частотної залежності механічної добротності в області середніх і високих частот. Крім того, можна сформулювати оцінку частотної залежності добротності в перехідному частотному діапазоні. Зазначені оцінки надзвичайно важливі при математичному моделюванні функціональних пристроїв п'єзоелектроніки, які працюють в широкому частотному діапазоні [19].

## 2.4. Метод експериментального визначення фізико-механічних констант п'єзокерамічних перетворювачів

Перед початком вимірювання електричного імпедансу п'єзокерамічний диск зважують і вимірюють його товщину  $\alpha$  і радіус  $R$ . За відомою масою  $m$  і розмірами  $\alpha$  і  $R$  визначається щільність п'єзокераміки  $\rho_0 = m/(\pi\alpha R^2)$ , кг/м<sup>3</sup>. Для виконання експериментальних досліджень рекомендується використовувати масивні диски. При цьому мінімізуються ефекти, пов'язані з приєднаною масою, яка виникає в процесі пайки провідників до електродованих поверхонь диска.

При вимірюванні електричного імпедансу  $Z_{en}(\omega)$  диск рекомендується підвішувати в повітрі на тонких нитках для того, щоб уникнути механічного контакту з іншими об'єктами. У приміщенні, де виконуються вимірювання, повинен дотримуватися режим тиші.

Вимірювання електричного імпедансу рекомендується проводити на макеті, електрична схема якого показана на рис. 2.12. На схемі аббревіатурою ГСС позначений генератор синусоїдальних сигналів, ЕЧ – електронний частотомір, В1 і В2 – електронні вольтметри, К1 і К2 – ключі, що механічно замикаються й розмикаються, R1 і R2 – навантажувальні резистори. Символом  $Z_{en}(\omega)$  на рис. 2.12 позначений досліджуваний зразок. Показане на схемі положення ключів К1 і К2 відповідає режиму вимірювання електричного імпедансу в околиці частоти електромеханічного резонансу. При вимірах в околиці частот електромеханічного антирезонансу ключ К1 повинен бути замкнутий, а ключ К2 – розімкнутий. Навантажувальні резистори R1 і R2 підбираються таким чином, щоб вольтметри В1 і В2 працювали в діапазоні своєї максимальної чутливості, тобто на шкалах  $(1 \div 10)$  мВ. Величини резисторів R1 і R2 повинні бути визначені з точністю до одного Ома [23], [24].



**Рис. 2.12. Електрична схема макета для вимірювання електричного імпедансу п'єзокерамічного диска в широкому діапазоні частот**

Перед початком вимірювань в широкому діапазоні частот на вимірювальному мосту визначається динамічна електрична ємність  $C_{\phi}^{\sigma}$  в області низьких частот. За значеннями цієї ємності знаходиться діелектрична проникність  $\chi_{33}^{\sigma} = \alpha C_{\phi}^{\sigma} / (\pi R^2)$ , Ф/м.

В ході вимірювання електричного імпедансу  $Z_{ел}(\omega)$  має бути сформовано чітке уявлення про частотно залежну зміну функції  $Z_{ел}(\omega)$  і повинні бути встановлені межі областей середніх і високих частот, а також визначено межі перехідної області. Після виконання всіх вимірювань утворюється наступна база експериментальних даних:

– *область середніх частот:*

частоти першого і другого електромеханічних резонансів ( $f_{p1}$  і  $f_{p2}$ ) і антирезонансу ( $f_{a1}$  і  $f_{a2}$ ), які визначаються з точністю до одного герца;

електричний імпеданс на частотах першого і другого електромеханічних резонансів, тобто дійсні позитивні величини  $Z_{ел}(f_{p1})$  і  $Z_{ел}(f_{p2})$ , визначені з точністю до десятих часток ома;

значення динамічної електричної ємності  $C_{\phi}^*$  п'єзокерамічного диска, яке визначається через електричний імпеданс диска, виміряний на частоті

$f^* = (f_p + f_a)/2$ , де  $f_p = (f_{p1} + f_{p2})/2$  і  $f_a = (f_{a1} + f_{a2})/2$ ;

– *область високих частот:*

частоти першого і другого товщинного електромеханічного резонансу, тобто величини  $F_{p1}$  і  $F_{p2}$ , виміряні з точністю до одного герца, а також виміряна з тією ж точністю циклічна частота  $F_{a1}$  першого товщинного антирезонансу;

числові значення  $Z_{ел}(F_{p1})$  і  $Z_{ел}(F_{p2})$  електричного імпедансу диска на частотах першого і другого електромеханічного резонансу, визначені з точністю до десятих часток ома;

числове значення динамічної електричної ємності  $C_\delta^\varepsilon$ , яка, в принципі повинна визначатися на нескінченно великій частоті, коли сили інерції забезпечать режим сталості (рівності нулю) механічних деформацій. В реальній ситуації  $C_\delta^\varepsilon$  визначається через модуль електричного імпедансу  $Z_{ел}(F^\varepsilon)$ , де  $F^\varepsilon \geq (F_{p1} + F_{p2})/2$  [25].

Порядок обробки експериментальних даних.

1. За відомим значенням  $C_\delta^\varepsilon$  визначається діелектрична проникність

$$\chi_{33}^\varepsilon = \frac{\alpha C_\delta^\varepsilon}{\pi R^2}, \text{ Ф/м.}$$

2. За відомим значенням частоти першого товщина електромеханічного антирезонансу  $F_{a1}$  визначається модуль пружності

$$c_{33}^D = \rho_0 (2\alpha F_{a1})^2, \text{ Па.}$$

3. За відомим числовим значенням частот  $F_{p1}$  і  $F_{a1}$  визначається їх відношення  $\eta = F_{p1}/F_{a1}$  і квадрат коефіцієнта електромеханічного зв'язку для товщинних коливань п'єзокерамічного диска

$$K_{33}^2 = \frac{(\pi\eta/2)}{\text{tg}(\pi\eta/2) - (\pi\eta/2)}.$$

4. За відомими значеннями  $K_{33}^2$  і  $c_{33}^D$  визначається модуль пружності

$$c_{33}^E = \frac{c_{33}^D}{1 + K_{33}^2}, \text{ Па.}$$

5. За відомими значеннями  $K_{33}^2$ ,  $\chi_{33}^\varepsilon$  і  $c_{33}^E$  визначається п'єзомодуль

$$e_{33} = K_{33} \sqrt{\chi_{33}^{\epsilon} c_{33}^E}, \text{ Кл/м}^2.$$

6. За відомими значеннями  $Z_{\text{ел}}(F_{p1})$  і  $Z_{\text{ел}}(F_{p2})$  електричного імпедансу диска на частотах першого і другого електромеханічного резонансу визначаються механічні добротності

$$Q_{mj}^{(z)} = \frac{K_{33}^2 \Psi(\Omega_{pj})}{2Z_{\text{ел}}(F_{pj}) \Omega_{pj} c_{\theta}^{\epsilon} (1 + K_{33}^2)}, \quad j = 1; 2,$$

$$\text{де } \Psi(\Omega_{pj}) = \frac{2 \operatorname{tg}(\gamma_j \alpha / 2)}{(1 + K_{33}^2) (\gamma_j \alpha / 2)} + \frac{1 - \sin(\gamma_j \alpha) / (\gamma_j \alpha)}{\cos^2(\gamma_j \alpha / 2)}; \quad \Omega_{pj} = 2\pi F_{pj}; \quad \gamma_j = \Omega_{pj} / \sqrt{c_{33}^D / \rho_0}.$$

7. За відомими добротностями  $Q_{mj}^{(z)}$  визначаються коефіцієнти загасання  $\beta_j^{(z)}$  (непер, поділений на метр) в області високих частот

$$\beta_j^{(z)} = \frac{\gamma_j}{2Q_{mj}^{(z)}}, \text{ Нп/м}, \quad j = 1; 2.$$

8. За відомими коефіцієнтами загасання  $\beta_j^{(z)}$  на частотах  $F_{pj}$  визначаються структурні коефіцієнти  $\delta_1^{(z)}$  і  $\delta_2^{(z)}$  в області високих частот

$$\delta_1^{(z)} = \frac{\beta_1^{(z)} F_{p2}^4 - \beta_2^{(z)} F_{p1}^4}{F_{p1}^2 F_{p2}^4 - F_{p2}^2 F_{p1}^4}, \quad \delta_2^{(z)} = \frac{\beta_2^{(z)} F_{p1}^4 - \beta_1^{(z)} F_{p2}^4}{F_{p1}^2 F_{p2}^4 - F_{p2}^2 F_{p1}^4}.$$

9. За відомими структурними коефіцієнтами  $\delta_1^{(z)}$  і  $\delta_2^{(z)}$  будується частотна залежність коефіцієнта загасання  $\beta^{(z)} = \delta_1^{(z)} f^2 + \delta_2^{(z)} f^4$  в області високих частот і визначається частотна залежність механічної добротності в цьому частотному діапазоні

$$Q_m^{(z)}(f) = \frac{\pi f}{v^D (\delta_1^{(z)} f^2 + \delta_2^{(z)} f^4)},$$

де  $v^D = \sqrt{c_{33}^D / \rho_0}$  – швидкість поширення плоских хвиль стискання-розтягування в напрямку вектора електричної поляризації п'єзоелектричного диска.

10. За відомим значенням динамічної електричної ємності  $c_{\theta}^*$  визначається діелектрична проникність  $\chi_{33}^{\epsilon}$ . Виконується перевірка на відповідність з раніше визначеними значеннями  $\chi_{33}^{\epsilon}$  і  $K_{33}^2$ , оскільки  $\chi_{33}^* = \chi_{33}^{\epsilon} (1 + K_{33}^2)$ . У разі істотної розбіжності розрахункової величини  $\chi_{33}^*$  зі значенням  $\chi_{33}^*$ , яке визначено з експерименту, необхідно проаналізувати

ситуацію і, в разі необхідності, повторити вимірювання.

11. За відомими значеннями частот  $f_{p1}$  і  $f_{p2}$  знаходиться відношення  $\xi_{21} = f_{p2}/f_{p1}$ , і з цього відношення з таблиці 1 знаходиться параметр  $k$  і числове значення кореня  $x_1$ .

12. За відомим значенням  $x_1$  визначається модуль пружності

$$c_{11} = \rho_0 (2\pi R f_{p1} / x_1)^2, \text{ Па.}$$

13. За відомим величинам  $c_{11}$  і  $k$  визначається модуль пружності

$$c_{12} = k c_{11}, \text{ Па.}$$

14. За відомими значеннями  $c_{11}$ ,  $c_{12}$  і  $c_{33}^E$  визначаються модулі пружності

$$c_{12}^E = \frac{c_{33}^E}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - 4 \frac{c_{12}}{c_{33}^E}} \right), \text{ Па; } c_{11}^E = c_{11} + \frac{(c_{12}^E)^2}{c_{33}^E}, \text{ Па.}$$

15. За відомим значенням параметра  $k$  і вимірної частоти  $f_{a1}$  першого електромеханічного антирезонансу визначається квадрат коефіцієнта електромеханічного зв'язку в режимі радіальних (планарних) коливань п'єзокерамічного диска

$$K_{31}^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 - k - \frac{\zeta_1 J_0(\zeta_1)}{J_1(\zeta_1)} \right],$$

де  $\zeta_1 = x_1 f_{a1} / f_{p1}$ .

16. За відомими значеннями  $K_{31}^2$ ,  $c_{11}$  і  $\chi_{33}^*$  визначається п'єзомодуль для режиму планарних коливань

$$e_{31}^* = -K_{31} \sqrt{c_{11} \chi_{33}^*}, \text{ Кл/м}^2.$$

17. За відомими значеннями  $e_{31}^*$ ,  $e_{33}$ ,  $c_{12}^E$  і  $c_{33}^E$  визначається п'єзомодуль

$$e_{31} = e_{31}^* + e_{33} c_{12}^E / c_{33}^E, \text{ Кл/м}^2.$$

18. За відомими значеннями електричного імпедансу диска  $Z_{en}(f_{p1})$  і  $Z_{en}(f_{p2})$  на частотах першого і другого електромеханічного резонансу радіальних коливань визначаються добротності

$$Q_{mj}^{(\rho)} = \frac{R[(x_j^2 + k - 1)J_1(x_j) - kx_j J_0(x_j)]}{4x_j v C_\delta^* K_{31}^2 J_1(x_j) Z_{\text{эл}}(f_{pj})}, \quad j = 1; 2,$$

де  $x_j$  – числове значення  $j$ -го кореня з таблиці 1;  $v = \sqrt{c_{11}/\rho_0}$  – швидкість поширення радіальних (планарних) коливань в п'єзокерамічному диску, визначена без урахування втрат на в'язке тертя.

19. За відомими добротностями  $Q_{m1}^{(\rho)}$  і  $Q_{m2}^{(\rho)}$  за аналогією з процедурами п.п. 7 – 9 виконується оцінка частотної залежності механічної добротності в області середніх частот.

20. За відомими значеннями матеріальних параметрів п'єзокераміки розраховується діелектрична проникність

$$\chi_{33}^\sigma = \chi_{33}^\varepsilon (1 + \Delta\chi_{33}^\sigma), \quad \Phi/\text{м},$$

де

$$\Delta\chi_{33}^\sigma = \frac{2e_{31}^2 c_{33}^E - 4e_{31}e_{33}c_{12}^E + e_{33}^2(c_{11}^E + c_{12}^E)}{\chi_{33}^\varepsilon [c_{33}^E(c_{11}^E + c_{12}^E) - 2(c_{12}^E)^2]}.$$

Розраховане значення  $\chi_{33}^\sigma$  порівнюється зі значенням  $\chi_{33}^\varepsilon$ , яке отримано в результаті вимірювання ємності  $C_\delta^\sigma$  на вимірювальному приладі. У разі великої розбіжності числових значень діелектричної проникності  $\chi_{33}^\sigma$  виконується аналіз попередніх обчислень, і, якщо це необхідно, виконуються нові вимірювання [25].

Результати експериментального визначення матеріальних констант п'єзокераміки наведені в табл. 2.2.



**Таблиця 2.2. Результати експериментального визначення матеріальних констант п'єзокераміки**

Вхідні величини		Вихідні величини	
параметр	значення	параметр	значення
Матеріал	кераміка типу ЦТС	Частота $f_{a1}$ , Гц	$35,695 \cdot 10^3$
Радіус диска $R$ , м	$33 \cdot 10^{-3}$	Частота $f_{a2}$ , Гц	$84,530 \cdot 10^3$
Товщина диска $\alpha$ , м	$3 \cdot 10^{-3}$	Густина $\rho_0$ , кг/м <sup>3</sup>	7428
Статична ємність $C_0^\sigma$ , Ф	$16,68 \cdot 10^{-9}$	Модуль пружності $c_{33}^E$ , ГПа	105,4
Частота $F_{p1}$ , Гц	$641,748 \cdot 10^3$	Модуль пружності $c_{11}^E$ , ГПа	99,32
Частота $F_{p2}$ , Гц	$1516,364 \cdot 10^3$	Модуль пружності $c_{12}^E$ , ГПа	50,46
Частота $F_{a1}$ , Гц	$714,546 \cdot 10^3$	П'єзомодуль $e_{33}$ , Кл/м <sup>2</sup>	13,049
Модуль $Z_{ел}(F_{p1})$ , Ом	3,895	П'єзомодуль $e_{31}$ , Кл/м <sup>2</sup>	-4,953
Модуль $Z_{ел}(F_{p2})$ , Ом	2,282	Діелектр. проникність $\chi_{33}^\sigma$ , Ф/м	$14,63 \cdot 10^{-9}$
Частота $f_{p1}$ , Гц	$31,906 \cdot 10^3$	Добротність $Q_{M1}^{(z)}$	48,481
Частота $f_{p2}$ , Гц	$82,840 \cdot 10^3$	Добротність $Q_{M1}^{(p)}$	204,786

### 2.5. Висновки до розділу

1. Вперше при загальних початкових припущеннях отримано вираз для розрахунку електричного імпедансу коливального п'єзокерамічного диска, що враховує радіальний і аксіальний компоненти вектора зміщення матеріальних частинок деформованої п'єзокераміки.

2. Показано, що електричний імпеданс визначається усередненими значеннями компонентів вектора зміщення матеріальних частинок п'єзокераміки. Усереднену (інтегруючу) дію виконують електроди, які повністю покривають торцеві поверхні диска.

3. Зроблено припущення, що за допомогою операцій усереднення по товщині і по торцевій поверхні диска можна редукувати систему диференціальних рівнянь динамічної теорії пружності до системи звичайних диференціальних рівнянь, що дає можливість для виконання чисельних

оцінок компонентів вектора зміщення матеріальних частинок коливального диска.

4. Вперше дана оцінка діелектричної проникності  $\chi_{33}^o$  в області низьких частот через матеріальні константи, які використовуються для опису високочастотного напружено-деформованого стану п'єзокераміки.

5. Побудовано вираз для розрахунку електричного імпедансу коливального п'єзокерамічного диска в області середніх частот, де вектор зміщення матеріальних частинок диска практично повністю визначається радіальним компонентом.

6. Проведено порівняння результатів математичного моделювання електричного імпедансу п'єзоелектричного диску в області середніх частот з результатами експериментального вимірювання. Похибка визначення відношення частот склала  $\Delta\zeta = 0,2\%$ , тобто доводить задовільний збіг теоретично і експериментально визначених відношень частот резонансів. Розбіжності абсолютних значень частот резонансів пояснюється невідповідністю фізико-механічних параметрів п'єзокераміки, які були закладені в розрахунок і які притаманні експериментально досліджуваному об'єкту. Добротність матеріалу експериментально досліджуваного зразка мінімум в 1,2 рази більше закладеної в розрахунок добротності. Таким чином, можна стверджувати, що характер зміни експериментальної та розрахункової кривих в досить широкому діапазоні частот збігається з точністю до деталей. Це означає, що математична модель п'єзоелектричного диску в області середніх частот адекватна реальному об'єкту і процесам, що відбувається в ньому.

7. За допомогою методу усереднення вирішена система диференціальних рівнянь в часткових похідних і на цій основі побудована математична модель електричного імпедансу п'єзокерамічного диска в області високих частот, де вектор зсуву матеріальних частинок визначається радіальним і аксіальним компонентами.

8. Показано, що радіальні коливання практично не впливають на

числові значення частот товщинного електромеханічного резонансу і антирезонансу.

9. Розроблено метод експериментального визначення матеріальних констант п'єзокераміки, який дозволяє в рамках експерименту на одному зразку визначити три (з чотирьох не рівних один одному) модуля пружності  $c_{11}^E$ ,  $c_{12}^E$  і  $c_{33}^E$ , два (з двох не рівних один одному) п'єзомодулі  $e_{31}$  і  $e_{33}$ , і одне (з двох не рівних один одному) значення діелектричної проникності  $\chi_{33}^E$ .

10. На основі запропонованого методу були визначені матеріальні константи п'єзокераміки для отримання змістовних і достовірних кількісних оцінок параметрів фізичного стану п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування.

#### Список використаних джерел:

- [1] С.М. Порошин и С.Г. Семенов, "Разработка и исследования математической модели компьютеризированной информационно-измерительной управляющей системы критического применения с учетом фактора внешних воздействий", *Системи обробки інформації*, № 2 (109), с. 226–234, 2013.
- [2] А.А. Харкевич, *Избранные труды в трех томах*, т. 1. М.: Наука, 1973, 400 с.
- [3] А.А. Блистанов, В.С. Бондаренко, В.В. Чкалова, и др., *Акустические кристаллы: Справочник*. М.: Наука, 1982, 632 с.
- [4] В.В. Ганопольский, Б.А. Касаткин, Ф.Ф. Легуша, Н.И. Прудько, и С.И. Пугачев, *Пьезокерамические преобразователи: Справочник*. Л.: Судостроение, 1984, 256 с.
- [5] В.Е. Лямов, *Поляризационные эффекты и анизотропия взаимодействия акустических волн в кристаллах*. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983, 223 с.

- [6] С.В. Богданов, "Определение упругих и пьезокерамических постоянных ромбических кристаллов акустическим методом", *Акуст. журн.*, т. 43, № 3, с. 304, 1997.
- [7] С.В. Богданов, "Акустический метод определения упругих и пьезоэлектрических постоянных кристаллов 6 mm- и 4 mm-классов", *Акуст. журн.*, т. 46, № 5, с. 609, 2000.
- [8] Н.А. Шульга и А.М. Болкисев, *Колебания пьезоэлектрических тел*. Киев: Наукова думка, 1990, 228 с.
- [9] У. Кэди, *Пьезоэлектричество и его практические применения*. М.: ИЛ, 1949, 718 с.
- [10] В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, и Н.А. Шульга, *Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость*. Киев: Наук. думка, 1989, 280 с.
- [11] В.С. Дидковский, О.Н. Петрищев, и А.Н. Шаблатович, "К вопросу об определении физико-механический констант пьезокерамических материалов", *Электроника и связь*, № 22, с. 76–87, 2004.
- [12] В.З. Партон и Б.А. Кудрявцев, *Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел*. М.: Наука, 1988, 472 с.
- [13] О.Н. Петрищев, *Гармонические колебания пьезокерамических элементов. Часть 1. Гармонические колебания пьезокерамических элементов в вакууме и метод резонанса – антирезонанса*. Киев: Аверс, 2012, 300 с.
- [14] В. Новацкий, *Теория упругости*. М.: Мир, 1975, 872 с.
- [15] В. Новацкий, *Электромагнитные эффекты в твердых телах*. М.: Мир, 1986, 160 с.
- [16] О.Н. Петрищев и К.В. Базило, "Определение электрического импеданса пьезокерамического диска и его расчет в области низких частот", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 3, с. 24–35, 2016.
- [17] О.М. Петрищев і К.В. Базіло, "Електричний імпеданс дискового п'єзоелектричного елемента в області середніх частот", в *Датчики*,

- прилади та системи – 2018: тези VII Міжнародної науково-технічної конференції*, Черкаси – Херсон – Лазурне, 2018, с. 32–35.
- [18] А.Ф. Улитко, "Амплитуды и фазы продольных колебаний пьезокерамических стержней с учетом переменной механической добротности", *Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет»*, с. 204–208, 2004.
- [19] К.В. Базіло, "Принципи розрахунку електричного імпедансу коливального п'єзокерамічного диску в області середніх частот", *Радіоелектроніка, інформатика, управління, № 4*, с. 15–25, 2017.
- [20] К.В. Базіло, "Дослідження електричного імпедансу п'єзоелектричного диску в області середніх частот", *Вісник Черкаського державного технологічного університету, № 2*, с. 100–104, 2018.
- [21] К.В. Базіло, "Розрахунок електричного імпедансу п'єзокерамічного диску в області високих частот", *Вісник Кременчуцького національного університету ім. М. Остроградського, № 5*, с. 9–16, 2018.
- [22] Э. Пападакис, "Затухание ультразвука, обусловленное рассеянием в поликристаллических средах", в *Физическая акустика, т. IV, Часть Б. Приложения физической акустики в квантовой физике и физике твердого тела*, М.: Мир, 1970, с. 317 – 381.
- [23] Constantine Bazilo, Alvydas Zagorskis, Oleg Petrishchev, Yulia Bondarenko, Vasyl Zaika, and Yulia Petrushko, "Modelling of Piezoelectric Transducers for Environmental Monitoring", in *Proceedings of 10th International Conference 'Environmental Engineering'*, Vilnius Gediminas Technical University, Lithuania, 2017.
- [24] О.М. Петрищев і К.В. Базіло, "Спосіб визначення фізико-механічних констант п'єзокерамічних матеріалів", патент України на корисну модель №119993, 25.10.2017.
- [25] O. N. Petrishchev and C. V. Bazilo, "Methodology of Determination of Physical and Mechanical Parameters of Piezoelectric Ceramics", *Journal of Nano- and Electronic Physics*, vol. 9, no. 3, pp. 03022-1-03022–6, 2017.

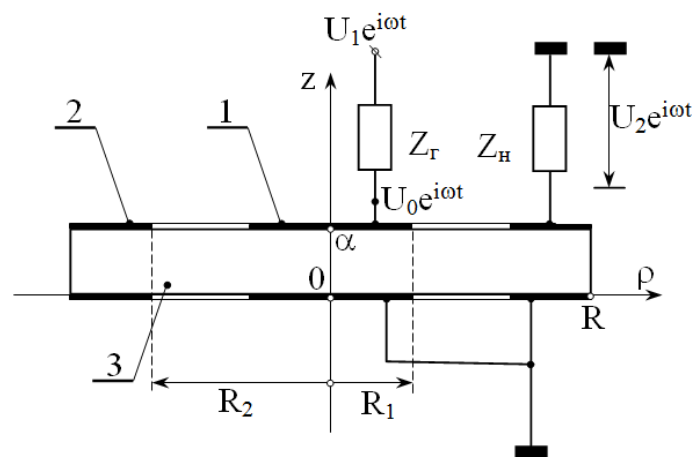
### **РОЗДІЛ 3**

## **ПРИНЦИПИ ТА МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ ДИСКОВИХ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ З РОЗДІЛЕНИМИ ЕЛЕКТРОДАМИ, ЩО ПРАЦЮЮТЬ НА РАДІАЛЬНИХ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ КОЛИВАННЯХ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ДИСКІВ**

Відомо, що при динамічному деформуванні пружного об'єкта різні ділянки його поверхні роблять коливання з різними амплітудами. Утворюються області, які називаються вузлами, в яких амплітуда коливань матеріальних частинок поверхні деформованого твердого тіла приймає мінімальні значення. Разом з цим на поверхні коливається об'єкта можна знайти ділянки, де амплітуда коливань приймає максимальні значення. Ділянки локальних максимумів амплітуд коливань матеріальних частинок поверхні деформованого твердого тіла називаються пучностями. Очевидно, що пружні деформації в вузлових областях мають істотно менші значення в порівнянні з деформаціями в пучностях. Якщо матеріал пружного об'єкта має п'єзоелектричні властивості, то поляризаційні заряди, які формуються у вузлах і пучностях внаслідок прояву прямого п'єзоелектричного ефекту, будуть значною мірою відрізнятися один від одного за величиною. Цей, в достатній мірі очевидний, факт використовується при побудові п'єзоелектричних перетворювачів трансформаторної конструкції. Якщо електрод вторинного електричного кола розмістити в області існування пучності, то на опорі навантаження можна очікувати досить велике падіння електричної напруги. Природно, що при розміщенні електрода в вузловій області, слід очікувати істотного зменшення вихідної різниці електричних потенціалів на опорі навантаження у вторинному електричному колі перетворювача [1].

### 3.1. Методика розрахунку параметрів і характеристик найпростішого дискового п'єзоелектричного перетворювача з розділеними електродами

Найпростіший дисковий п'єзоелектричний перетворювач трансформаторної конструкції (з розділеними електродами) (рис. 3.1) містить в своєму складі первинне електричне коло, що складається з генератора різниці електричних потенціалів  $U_1 e^{i\omega t}$  ( $i = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця;  $\omega$  – кругова частота;  $t$  – час) з внутрішнім електричним опором  $Z_r$  і дискового електрода (позиція 1 на рис. 3.1), і вторинне електричне коло, що складається з кільцевого електрода (позиція 2) з підключеною до нього електронною схемою з вхідним електричним опором  $Z_H$ , на якому формується різниця електричних потенціалів  $U_2 e^{i\omega t}$ . Первинне і вторинне електричні кола п'єзоелектричного перетворювача не мають гальванічного зв'язку. Енергообмін між ними здійснюється за допомогою пружних коливань поляризованого по товщині п'єзокерамічного диска (позиція 3 на рис. 3.1).



**Рис. 3.1. Розрахункова схема найпростішого дискового п'єзоелектричного перетворювача з розділеними електродами**

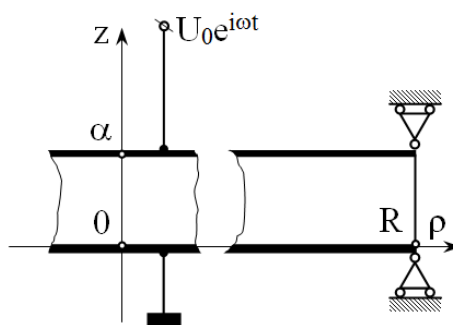
Очевидно, що робота функціонального елемента п'єзоелектроніки, який схематично показаний на рис. 3.1, повністю описується коефіцієнтом

трансформації  $K(\omega, \Pi) = U_2/U_1$  (символом  $\Pi$  позначений набір електричних, геометричних і фізико-механічних параметрів перетворювача), який, по суті, є математичною моделлю даного пристрою. Схема побудови математичної моделі п'єзоелектричного перетворювача в загальних рисах викладена в додатку Б.

### 3.1.1. Визначення електричного імпедансу радіально коливального тонкого п'єзокерамічного диска

Для того, щоб сформувані базу кількісних даних, які можна використовувати при порівняльному аналізі знов одержуваних результатів, розглянемо спочатку електричний імпеданс радіально коливального тонкого п'єзокерамічного диска.

Припустимо, що на електродовані поверхні  $z=0$  і  $z=\alpha$  тонкого ( $\alpha/R \ll 1$ ) п'єзокерамічного диска (рис. 3.2) подається гармонійно змінна в часі за законом  $e^{i\omega t}$  різниця електричних потенціалів з амплітудним значенням  $U_0$ . Будемо вважати, що п'єзокерамічний диск поляризований по товщині. В цьому випадку матриці його матеріальних констант визначаються співвідношеннями [2].



**Рис. 3.2.** До розрахунку електричного імпедансу радіально коливального п'єзокерамічного диска

В області низьких частот, коли довжина пружної хвилі істотно перевищує товщину диска, в ньому існують радіальні коливання



матеріальних частинок, вектор зміщення яких практично повністю визначається радіальним компонентом  $u_r(\rho)$ . Радіальне зміщення  $u_r(\rho)$  задовольняє рівняння усталених коливань, яке записується [3] в наступному вигляді

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}(\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \rho_0 \omega^2 u_r = 0, \quad (3.1)$$

де  $\sigma_{\rho\rho}$  і  $\sigma_{\varphi\varphi}$  – механічні напруження стискання-розтягування, які в циліндричній системі координат  $(\rho, \varphi, z)$  розраховуються за такими формулами [3]:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= c_{11}\varepsilon_{\rho\rho} + c_{12}\varepsilon_{\varphi\varphi} + e_{31}^* \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= c_{12}\varepsilon_{\rho\rho} + c_{11}\varepsilon_{\varphi\varphi} + e_{31}^* \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

де  $c_{11} = c_{11}^E - (c_{12}^E)^2 / c_{33}^E$ ;  $c_{12} = c_{12}^E (1 - c_{12}^E / c_{33}^E)$  – модулі пружності для режиму радіальних коливань тонкого п'єзокерамічного диска;  $\varepsilon_{\rho\rho} = \partial u_r / \partial \rho$  і  $\varepsilon_{\varphi\varphi} = u_r / \rho$  – деформації стискання-розтягування уздовж відповідних координатних ліній циліндричної системи координат;  $\Phi$  – електричний потенціал в об'ємі п'єзокерамічного диска, що деформується.

Похідна  $\partial \Phi / \partial z$  в розрахункових співвідношеннях (3.2) визначається наступним чином.

Вектор електричної індукції  $\vec{D}$  в тонкому п'єзокерамічному диску, що вісесиметрично деформується практично повністю визначається аксіальним компонентом  $D_z$ , який розраховується [3] за формулою

$$D_z = e_{31}^*(\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) - \chi_{33}^\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (3.3)$$

Так як в діелектрику відсутні вільні носії електрики, то  $\text{div} \vec{D} = 0$ . З цієї умови випливає, що  $\partial D_z / \partial z = 0$ . З огляду на цю обставину, проінтегруємо ліву і праву частини співвідношення (3.3) по координаті  $z$  в межах від нуля до  $\alpha$ . Виконавши цю дію, отримуємо

$$\alpha D_z = \alpha e_{31}^*(\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) - \chi_{33}^\sigma [\Phi(\alpha) - \Phi(0)].$$

Так як  $\Phi(\alpha) - \Phi(0) = U_0$ , то з останньої рівності випливає, що

$$D_z = e_{31}^*(\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) - \chi_{33}^\sigma \frac{U_0}{\alpha}. \quad (3.4)$$

Порівнюючи праві частини двох, фізично еквівалентних, визначень(3.3) і (3.4) однієї і тієї ж величини, знаходимо, що

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{U_0}{\alpha}. \quad (3.5)$$

Таким чином

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= c_{11} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + c_{12} \frac{u_\rho}{\rho} + e_{31}^* \frac{U_0}{\alpha}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= c_{12} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + c_{11} \frac{u_\rho}{\rho} + e_{31}^* \frac{U_0}{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Підставляючи співвідношення (3.6) в рівняння (3.1), отримуємо рівняння Бесселя такого вигляду

$$x^2 \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial x^2} + x \frac{\partial u_\rho}{\partial x} + (x^2 - 1)u_\rho = 0, \quad (3.7)$$

де безрозмірна величина  $x = \gamma\rho$ ;  $\gamma = \omega/\sqrt{c_{11}/\rho_0}$  – хвильове число радіальних коливань тонкого диска.

Розв'язок рівняння (3.7), яке не обертається в нескінченність в точці  $\rho = 0$ , записується [4] в наступному вигляді

$$u_\rho(\rho) = A J_1(\gamma\rho), \quad (3.8)$$

де  $A$  – константа;  $J_1(\gamma\rho)$  – функція Бесселя першого порядку.

У разі шарнірного (рис. 3.2) або вільного (м'якого) закріплення диска по контуру  $\rho = R$  повинна виконуватися умова

$$\sigma_{\rho\rho}|_{\rho=R} = 0. \quad (3.9)$$

Підставляючи в умову (3.9) перше співвідношення (3.6), визначаємо значення константи  $A$ :

$$A = -\frac{e_{31}^* R U_0}{\alpha c_{11}} \frac{1}{[\Omega J_0(\Omega) - (1 - k_1) J_1(\Omega)]},$$

де  $\Omega = \gamma R$  – безрозмірне хвильове число;  $k_1 = c_{12}/c_{11}$  – безрозмірний параметр, який в англійській літературі часто називають відношенням Пуассона.

Таким чином, радіальні зміщення матеріальних частинок тонкого п'єзокерамічного диска розраховуються за формулою

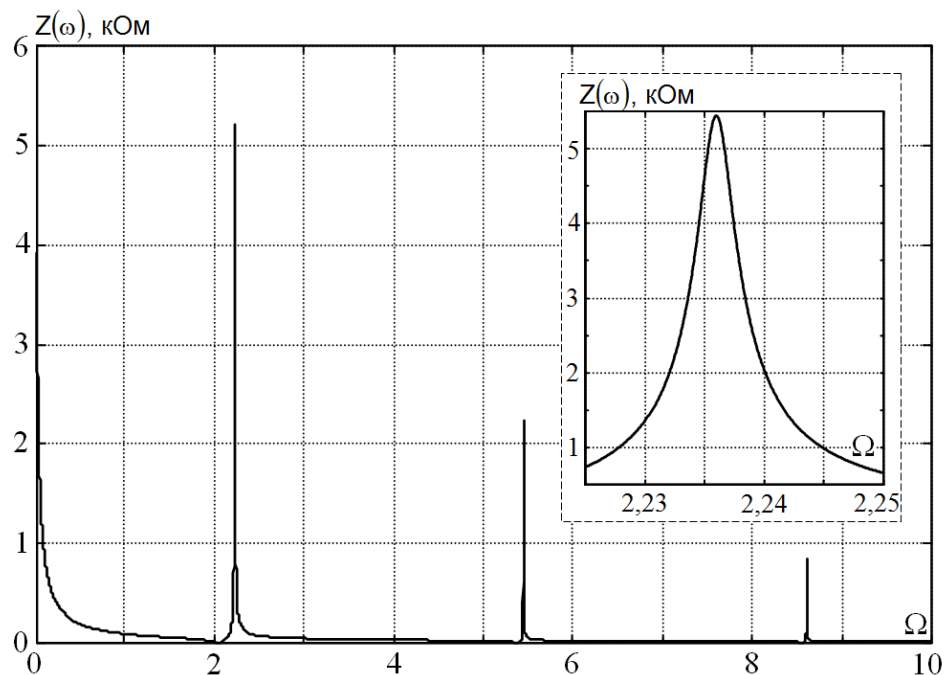
$$u_p(\rho) = -\frac{e_{31}^* R U_0}{\alpha c_{11}} \frac{J_1(\Omega \rho / R)}{[\Omega J_0(\Omega) - (1 - \kappa_1) J_1(\Omega)]} \quad (3.10)$$

Підставляючи чутливість  $F_p(R) = u_p(R)/U_0$  в визначення функції  $F_1^{(0)}(\omega, \Pi)$ , отримуємо вираз для розрахунку електричного імпедансу радіально коливального диска

$$Z(\omega) = \frac{1}{i\omega C^\sigma} \frac{[\Omega J_0(\Omega) - (1 - \kappa_1) J_1(\Omega)]}{[\Omega J_0(\Omega) - (1 - \kappa_1 - 2\kappa_p^2) J_1(\Omega)]}, \quad (3.11)$$

де  $\kappa_p^2 = (e_{31}^*)^2 / (\chi_{33}^\sigma c_{11})$  – квадрат коефіцієнта електромеханічного зв'язку для режиму радіальних коливань тонкого п'єзокерамічного диска.

На рис. 3.3 показаний графік модуля електричного імпедансу  $Z(\omega)$  диска з п'єзоелектричної кераміки типу ЦТС з наступними параметрами:  $\rho_0 = 7400 \text{ кг/м}^3$ ;  $c_{11}^E = 112 \text{ ГПа}$ ;  $c_{12}^E = 62 \text{ ГПа}$ ;  $c_{33}^E = 100 \text{ ГПа}$ ;  $e_{33} = 20 \text{ Кл/м}^2$ ;  $e_{31} = -9 \text{ Кл/м}^2$ ;  $\chi_{33}^E = 1800\chi_0$ ;  $\chi_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ . Добротність п'єзокераміки  $Q_m = 80$ . Розміри диска:  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ;  $R = 25 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ .



**Рис. 3.3.** Модуль електричного імпедансу радіально коливального диска

По осі ординат відкладені значення модуля електричного імпедансу в кілоомах, по осі абсцис відраховується безрозмірна частота  $\Omega = \gamma R = \omega \tau_0$ , де

$\tau_0 = R/v$  – часовий масштаб;  $v = \sqrt{c_{11}/\rho_0}$  – швидкість поширення пружних збурень у тонкому диску. Для наведених вище значень параметрів  $v = 3153$  м/с і  $\tau_0 = 7,93 \cdot 10^{-6}$  с. Значенням  $\Omega = 1$  відповідає циклічна частота  $f = 20072$  Гц. Розрахунок електричного імпедансу починався з частоти  $\Omega_0 = 0,025$ .

Чітко видно, що електричний імпеданс диска на деяких частотах приймає практично нульові значення. Ці частоти прийнято називати частотами електромеханічного резонансу [3]; їх позначимо символом  $\Omega_p$ . При порівняно невеликому збільшенні частоти зміни знаку напружено-деформованого стану понад значення  $\Omega_p$  спостерігається різке і вельми значне збільшення модуля електричного імпедансу  $Z(\omega)$  радіально коливального диска. Ці частоти називаються частотами електромеханічного антирезонансу, і позначаються символом  $\Omega_a$ . Числові значення частот  $\Omega_p$  і  $\Omega_a$  визначаються як не нульові корені трансцендентних рівнянь

$$\Omega_p J_0(\Omega_p) - (1 - k_1) J_1(\Omega_p) = 0, \quad (3.12)$$

$$\Omega_a J_0(\Omega_a) - (1 - k_1 - 2K_p^2) J_1(\Omega_a) = 0. \quad (3.13)$$

Як впливає з рівнянь (3.12) і (3.13), числові значення частот резонансів  $\Omega_p$  залежать від значень параметра  $k_1 = c_{12}/c_{11}$ . Числові значення частот антирезонансу  $\Omega_a$  визначаються двома параметрами – параметром  $k_1$  і коефіцієнтом електромеханічного зв'язку  $K_p$ . У таблиці 3.1 наведені числові значення безрозмірних частот перших трьох електромеханічних резонансів (символи  $\Omega_{pk}$  ( $k = 1; 2; 3$ )) в дисках з різними значеннями параметра  $k_1$ . Легко помітити, що чутливість числових значень резонансних частот до варіацій параметра  $k_1$  максимальна для частот першого резонансу і різко зменшується для частот наступних за номером резонансів.

**Таблиця 3.1. Частоти електромеханічних резонансів радіально  
коливального тонкого диска**

$k_1$	$\Omega_{p1}$	$\Omega_{p2}$	$\Omega_{p3}$
0,00	1,841184	5,331443	8,536316
0,05	1,878980	5,341153	8,542253
0,10	1,915393	5,350843	8,548183
0,15	1,950511	5,360511	8,554112
0,20	1,984414	5,370155	8,560033
0,25	2,017172	5,379773	8,565949
0,30	2,048850	5,389364	8,571859
0,35	2,079508	5,398928	8,577761
0,40	2,109198	5,408461	8,583657
0,45	2,137971	5,417963	8,589546
0,50	2,165872	5,427433	8,595426
0,55	2,192942	5,436869	8,601299
0,60	2,219221	5,446270	8,607163
0,65	2,244744	5,455635	8,613018
0,70	2,269547	5,464962	8,618864
0,75	2,293658	5,474251	8,624701
0,80	2,317109	5,483500	8,630528
0,85	2,339926	5,492708	8,636344
0,90	2,362135	5,501874	8,642150
0,95	2,383761	5,510998	8,647944
1,00	2,404826	5,520078	8,653728

Терміни «електромеханічний резонанс» і «електромеханічний антирезонанс» обумовлені наступними обставинами. На частоті  $\Omega_p$  сили пружності  $\sigma_{\rho\rho}^{упр}(\rho) = c_{11}\partial u_\rho/\partial\rho + c_{12}u_\rho/\rho$ , які в будь-якому циліндричному перетині  $\rho = \text{const}$  врівноважують сили Кулона  $\sigma_{\rho\rho}^K = e_{31}^*U_0/\alpha$ , обертаються практично в нуль на поверхні  $\rho = R$ . Внаслідок цього сили Кулона  $\sigma_{\rho\rho}^K$  практично безперешкодно відхиляють від положення рівноваги матеріальні частинки циліндричного шару  $\rho = R$ . Природно, що радіальні зміщення матеріальних частинок цього шару різко зростають. Оскільки матеріальні частинки диска досить жорстко пов'язані між собою, остільки збільшення радіальних зміщень в перетині  $\rho = R$  супроводжується збільшенням зміщень по всьому об'єму диска. При цьому п'єзокерамічний диск починає споживати істотно більшу енергію від джерела коливань, тобто від генератора різниці електричних потенціалів. Стан фізичної системи, при якому споживається

максимальна кількість енергії від джерела, яке живить цю систему, називається резонансним або просто резонансом. Таким чином, на частоті  $\Omega_p$  радіально коливальний тонкий п'єзокерамічний диск входить в стан резонансу і споживає від генератора гармонійних коливань, який, як відомо, володіє нескінченним запасом енергії, максимальну кількість енергії. Говорячи іншими словами, електричний струм в провідниках (рис. 3.2) істотно збільшується. Оскільки амплітудне значення  $U_0$  різниці електричних потенціалів залишається постійним, остільки збільшення струму забезпечується зменшенням модуля електричного імпедансу  $Z(\omega)$ .

На частоті електромеханічного антирезонансу спостерігається мінімальне споживання енергії від джерела радіальних коливань, тобто від генератора електричних сигналів. на частоті  $\Omega_a$  розподіл об'ємної деформації  $\varepsilon_v = \varepsilon_{pp} + \varepsilon_{\varphi\varphi}$  вздовж радіуса диска таке, що інтеграл від аксіального компонента  $D_z$  вектору електричної індукції стає мінімальним. На межі, коли механічна добротність  $Q_m \rightarrow \infty$ , тобто у разі відсутності втрат енергії пружних коливань в матеріалі диска, інтеграл стає рівним нулю. Процедуру інтегрування виконує електродована поверхня диска. Мінімуму, на межі – нульового, значенню інтеграла відповідає мінімальний (нульовий) електричний заряд на електродованих поверхнях коливального диска. Електричний струм в провідниках і заряд на електродованих поверхнях диска лінійно пов'язані між собою, тобто мінімуму (нульовому) заряду відповідає мінімальний (на межі – нульовий) електричний струм в провідниках. Оскільки різниця потенціалів  $U_0$  на виході ідеального генератора електричної напруги є постійною величиною, остільки зменшення амплітуди електричного струму в провідниках відбувається через збільшення (на межі – до нескінченності) електричного імпедансу коливального диска.

На вставці в поле рис. 3.3 показано зміну модуля електричного імпедансу в найближчій околиці частоти першого електромеханічного антирезонансу.

Спираючись на отримані результати, розглянемо найпростіший (рис. 3.1) дисковий п'єзоелектричний перетворювач з розділеними електродами (трансформаторної конструкції).

### 3.1.2. Побудова математичної моделі дискового п'єзоелектричного перетворювача з розділеними електродами

Згідно показаному на рис. 3.1 розташуванню електродів, в об'ємі п'єзокерамічного диска можна виділити три області, а саме: область 1 ( $0 \leq \rho \leq R_1$ ), область 2 ( $R_1 \leq \rho \leq R_2$ ) і область 3 ( $R_2 \leq \rho \leq R$ ). Область 2 відрізняється від областей 1 і 3 граничними електричними умовами. Дійсно, в області 2 аксіальний компонент  $D_z^{(2)}$  вектору електричної індукції повинен обертатися в нуль на поверхнях  $z=0$  і  $z=\alpha$  [5]. Оскільки розглядається тонкий диск, то зі сказаного вище випливає, що

$$D_z^{(2)} = 0 \forall (\rho, z) \in V, \quad (3.14)$$

де  $V$  – об'єм диска.

З рівності (3.3) при  $D_z^{(2)} = 0$  випливає, що

$$\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z} = \frac{e_{31}^*}{\chi_{33}^\sigma} (\varepsilon_{\rho\rho}^{(2)} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)}), \quad (3.15)$$

де  $\Phi^{(2)}$  – електричний потенціал, а  $\varepsilon_{\rho\rho}^{(2)}$  і  $\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)}$  – деформації стискання-розтягування в другій області. Підставляючи похідну  $\partial\Phi^{(2)}/\partial z$  в співвідношення (3.2), отримуємо формули для розрахунку механічного напруження  $\sigma_{\rho\rho}^{(2)}$  і  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}$  в області без електродного покриття:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(2)} &= c_{11}^D \varepsilon_{\rho\rho}^{(2)} + c_{12}^D \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)}, \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} &= c_{12}^D \varepsilon_{\rho\rho}^{(2)} + c_{11}^D \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

де  $c_{11}^D = c_{11}^E + (e_{31}^*)^2 / \chi_{33}^\sigma$  і  $c_{12}^D = c_{12}^E + (e_{31}^*)^2 / \chi_{33}^\sigma$  – модулі пружності, які враховують узгоджену (пов'язану) дію сил пружності і сил Кулона.

В областях під електродами, тобто в областях 1 і 3, узагальнений закон Гука записується в наступному вигляді

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho\rho}^{(1)} &= c_{11}\varepsilon_{\rho\rho}^{(1)} + c_{12}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)} + e_{33}^* U_0/\alpha, \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} &= c_{12}\varepsilon_{\rho\rho}^{(1)} + c_{11}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)} + e_{33}^* U_0/\alpha,\end{aligned}\quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho\rho}^{(3)} &= c_{11}\varepsilon_{\rho\rho}^{(3)} + c_{12}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(3)} + e_{33}^* U_2/\alpha, \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(3)} &= c_{12}\varepsilon_{\rho\rho}^{(3)} + c_{11}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(3)} + e_{33}^* U_2/\alpha.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Підставляючи співвідношення (3.17), (3.16) і (3.18) в рівняння сталих коливань (3.1), отримуємо вирази для розрахунку радіальних компонентів  $u_\rho^{(k)}(\rho)$  ( $k = 1; 2; 3$ ) вектора зміщення матеріальних частинок  $k$ -ої області диска:

$$u_\rho^{(1)}(\rho) = A_1 J_1(\gamma_1 \rho), \quad (3.19)$$

$$u_\rho^{(2)}(\rho) = A_2 J_1(\gamma_2 \rho) + A_3 N_1(\gamma_2 \rho), \quad (3.20)$$

$$u_\rho^{(3)}(\rho) = A_4 J_1(\gamma_1 \rho) + A_5 N_1(\gamma_1 \rho), \quad (3.21)$$

де  $A_1, \dots, A_5$  – константи, що підлягають визначенню;  $\gamma_1 = \omega/v_1$  ( $v_1 = \sqrt{c_{11}/\rho_0}$ ) – хвильове число радіальних коливань в 1 і 3 областях дискового перетворювача;  $\gamma_2 = \omega/v_2$  ( $v_2 = \sqrt{c_{11}^D/\rho_0} = v_1 \sqrt{1 + \kappa_\rho^2}$ ) – хвильове число радіальних коливань в області без електродного покриття;  $N_1(\gamma_k \rho)$  ( $k = 1; 2$ ) – функції Неймана першого порядку.

На умовних межах розділу областей повинні виконуватися умови кінематичного і динамічного сполучення рішень:

$$u_\rho^{(1)}(R_1) - u_\rho^{(2)}(R_1) = 0, \quad (3.22)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)}(R_1) - \sigma_{\rho\rho}^{(2)}(R_1) = 0, \quad (3.23)$$

$$u_\rho^{(2)}(R_2) - u_\rho^{(3)}(R_2) = 0, \quad (3.24)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2)}(R_2) - \sigma_{\rho\rho}^{(3)}(R_2) = 0. \quad (3.25)$$

Умови (3.22)–(3.25) доповнюються умовою на границі диска  $\rho = R$ . У разі шарнірного або вільного (м'якого) закріплення вона записується в наступному вигляді

$$\sigma_{\rho\rho}^{(3)}(R) = 0. \quad (3.26)$$

Підставляючи вирази (3.19)–(3.21) в формули для розрахунку деформацій  $\varepsilon_{\rho\rho}^{(k)} = \partial u_\rho^{(k)}/\partial \rho$  і  $\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)} = u_\rho^{(k)}/\rho$  ( $k = 1; 2; 3$ ), а отримані результати – в співвідношення (3.16)–(3.18), отримуємо наступну систему алгебраїчних



рівнянь

$$\sum_{n=1}^5 \alpha_{mn} A_n = P_m \quad (m; n = 1, \dots, 5), \quad (3.27)$$

де  $\alpha_{11} = J_1(\Omega r_1)$ ;  $\Omega = \gamma_1 R$ ;  $r_1 = R_1/R$ ;  $\alpha_{12} = -J_1(\Omega r_1/\xi)$ ;  $\xi = \sqrt{1 + K_p^2}$ ;  $\alpha_{13} = -N_1(\Omega r_1/\xi)$ ;

$\alpha_{14} = \alpha_{15} = 0$ ;  $P_1 = 0$ ;  $\alpha_{21} = J_0(\Omega r_1) - \frac{1-k_1}{\Omega r_1} J_1(\Omega r_1)$ ;  $k_1 = \frac{c_{12}}{c_{11}}$ ;  $\alpha_{22} = -\xi \left[ J_0(\Omega r_1/\xi) - \frac{1-k_2}{\Omega r_1/\xi} J_1(\Omega r_1/\xi) \right]$ ;

$k_2 = \frac{c_{12}^D}{c_{11}^D} = \frac{k_1 + K_p^2}{1 + K_p^2}$ ;  $\alpha_{23} = -\xi \left[ N_0(\Omega r_1/\xi) - \frac{1-k_2}{\Omega r_1/\xi} N_1(\Omega r_1/\xi) \right]$ ;  $\alpha_{24} = \alpha_{25} = 0$ ;  $P_2 = -q \frac{U_0}{\Omega}$ ;  $q = \frac{Re_{31}^*}{\alpha c_{11}}$ ;

$\alpha_{31} = 0$ ;  $\alpha_{32} = J_1(\Omega r_2/\xi)$ ;  $r_2 = R_2/R$ ;  $\alpha_{33} = N_1(\Omega r_2/\xi)$ ;  $\alpha_{34} = -J_1(\Omega r_2)$ ;  $\alpha_{35} = -N_1(\Omega r_2)$ ;  $P_3 = 0$ ;

$\alpha_{41} = 0$ ;  $\alpha_{42} = \xi \left[ J_0(\Omega r_2/\xi) - \frac{1-k_2}{\Omega r_2/\xi} J_1(\Omega r_2/\xi) \right]$ ;  $\alpha_{43} = \xi \left[ N_0(\Omega r_2/\xi) - \frac{1-k_2}{\Omega r_2/\xi} N_1(\Omega r_2/\xi) \right]$ ;

$\alpha_{44} = -\left[ J_0(\Omega r_2) - \frac{1-k_1}{\Omega r_2} J_1(\Omega r_2) \right]$ ;  $\alpha_{45} = -\left[ N_0(\Omega r_2) - \frac{1-k_1}{\Omega r_2} N_1(\Omega r_2) \right]$ ;  $P_4 = q \frac{U_2}{\Omega}$ ;

$\alpha_{51} = \alpha_{52} = \alpha_{53} = 0$ ;  $\alpha_{54} = J_0(\Omega) - \frac{1-k_1}{\Omega} J_1(\Omega)$ ;  $\alpha_{55} = N_0(\Omega) - \frac{1-k_1}{\Omega} N_1(\Omega)$ ;  $P_5 = -q \frac{U_2}{\Omega}$ .

Для визначення коефіцієнта трансформації, тобто для побудови математичної моделі найпростішого п'єзокерамічного трансформаторного перетворювача, необхідно визначити коефіцієнти  $A_1$ ,  $A_4$  і  $A_5$ . Розв'язок системи рівнянь (3.27) доставляє наступні розрахункові співвідношення:

$$A_1 = \frac{qU_0}{\Omega} A_{11} - \frac{qU_2}{\Omega} A_{12}, \quad A_4 = -\frac{qU_0}{\Omega} A_{41} + \frac{qU_2}{\Omega} A_{42}, \quad A_5 = \frac{qU_0}{\Omega} A_{51} - \frac{qU_2}{\Omega} A_{52}, \quad (3.28)$$

де  $A_{11} = B_1/D_0$ ;  $A_{12} = C_1/D_0$ ;  $A_{41} = B_4/D_0$ ;  $A_{42} = C_4/D_0$ ;  $A_{51} = B_5/D_0$ ;  $A_{52} = C_5/D_0$ ;

$$D_0 = \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} \\ 0 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{54} & \alpha_{55} \end{vmatrix}; \quad B_1 = \det \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 & 0 \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} \\ \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} + \alpha_{54} & \alpha_{45} + \alpha_{55} \\ 0 & 0 & \alpha_{54} & \alpha_{55} \end{vmatrix};$$

$$C_1 = \det \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 & 0 \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 & 0 \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} \\ \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} + \alpha_{54} & \alpha_{45} + \alpha_{55} \end{vmatrix}; \quad B_4 = \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{35} \\ 0 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{45} + \alpha_{55} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{55} \end{vmatrix};$$

$$C_4 = \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{35} \\ 0 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{45} + \alpha_{55} \end{vmatrix}; \quad B_5 = \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} + \alpha_{54} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{54} \end{vmatrix};$$

$$C_5 = \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} + \alpha_{54} \end{vmatrix}.$$

З визначень (3.28) коефіцієнтів  $A_1$ ,  $A_4$  і  $A_5$  випливає, що вони залежать від значень двох потенціалів, тобто дисковий п'єзоелектричний перетворювач з розділеними електродами (як, втім, і будь-який п'єзоелектричний перетворювач трансформаторної конструкції) є функціональним елементом п'єзоелектроніки з негативним зворотним зв'язком.

Очевидно, що потенціали  $U_0$  і  $U_2$  пов'язані між собою лінійною залежністю. Для того, щоб встановити цей зв'язок, визначимо потенціал  $U_2$ .

Електричний заряд  $Q^{(3)}$  на кільцевих електродах, що покривають область 3 п'єзокерамічного диска, визначається наступним чином

$$Q^{(3)} = 2\pi \int_{R_2}^R \rho D_\rho^{(3)} d\rho = 2\pi \int_{R_2}^R \rho \left[ \frac{e_{31}^*}{\rho} \frac{\partial(\rho u_\rho^{(3)})}{\partial \rho} - \chi_{33}^\sigma \frac{U_2}{\alpha} \right] d\rho, \quad (3.29)$$

де  $u_\rho^{(3)} = A_4 J_1(\Omega \rho / R) + A_5 N_1(\Omega \rho / R)$ .

Виконуючи інтегрування у виразі (3.29), отримуємо

$$Q^{(3)} = 2\pi e_{31}^* [R u_\rho^{(3)}(R) - R_2 u_\rho^{(3)}(R_2)] - C_3^\sigma U_2, \quad (3.30)$$

де  $C_3^\sigma = \pi(R^2 - R_2^2) \chi_{33}^\sigma / \alpha$  – статична електрична ємність електродованої області 3.

Оскільки  $U_2 = -i\omega Q^{(3)} Z_H$ , остільки зі співвідношення (3.30) слідує

$$U_2 = i\omega C_3^\sigma Z_H U_0 K_\rho^2 \Psi_1(\Omega, R_2) - i\omega C_3^\sigma Z_H U_2 K_\rho^2 \Psi_2(\Omega, R_2) + i\omega C_3^\sigma Z_H U_2,$$

де

$$\Psi_1(\Omega, R_2) = \frac{2}{\Omega(1-r_2^2)} \{A_{41}[J_1(\Omega) - r_2 J_1(\Omega r_2)] - A_{51}[N_1(\Omega) - r_2 N_1(\Omega r_2)]\}; \quad r_2 = R_2/R;$$

$$\Psi_2(\Omega, R_2) = \frac{2}{\Omega(1-r_2^2)} \{A_{42}[J_1(\Omega) - r_2 J_1(\Omega r_2)] - A_{52}[N_1(\Omega) - r_2 N_1(\Omega r_2)]\}.$$

З останньої рівності випливає, що

$$U_2 = U_0 K_2(\Omega, \Pi), \quad (3.31)$$

де

$$K_2(\Omega, \Pi) = \frac{i\omega C_3^\sigma Z_H K_\rho^2 \Psi_1(\Omega, R_2)}{1 - i\omega C_3^\sigma Z_H [1 - K_\rho^2 \Psi_2(\Omega, R_2)]}.$$

Підставляючи вираз (3.31) в співвідношення для розрахунку коефіцієнта  $A_1$ , визначаємо радіальне зміщення  $u_p^{(1)}(\rho)$  з урахуванням негативного зворотного зв'язку в об'ємі радіально коливального п'єзокерамічного диска

$$u_p^{(1)}(\rho) = A_1 J_1(\Omega \rho / R) = \frac{q U_0}{\Omega} [A_{11} - K_2(\Omega, \Pi) A_{12}] J_1(\Omega \rho / R). \quad (3.32)$$

Електричний заряд  $Q^{(1)}$  на електродах області 1 визначається наступним чином

$$Q^{(1)} = 2e_{31}^* \pi R_1 u_p^{(1)}(R_1) - C_1^\sigma U_0, \quad (3.33)$$

де  $C_1^\sigma = \pi R_1^2 \chi_{33}^\sigma / \alpha$  – статична електрична ємність першої області. Електричний імпеданс  $Z_1(\omega)$  цієї області записується [3] у вигляді

$$Z_1(\omega) = \frac{U_0}{-i\omega Q^{(1)}}. \quad (3.34)$$

Підставляючи вираз (3.32) у визначення (3.33) електричного заряду  $Q^{(1)}$ , а отриманий результат – в формулу (3.34), отримуємо

$$Z_1(\omega) = -\frac{1}{i\omega C_1^\sigma F_1^{33}(\Omega, \Pi)},$$

де  $F_1^{33}(\Omega, \Pi) = \frac{2K_p^2}{\Omega r_1} [A_{11} - K_2(\Omega, \Pi) A_{12}] J_1(\Omega r_1) - 1$  – частотно залежна функція, яка враховує негативний зворотний зв'язок (символ  $oc$ ) в об'ємі п'єзоелектричного диска;  $r_1 = R_1/R$  – безрозмірний радіус електрода первинного електричного кола перетворювача.

Знаючи електричний імпеданс  $Z_1(\omega)$ , можна визначити потенціал  $U_0$  на електроді

$$U_0 = \frac{U_1 Z_1(\omega)}{Z_r + Z_1(\omega)} = \frac{U_1}{1 - i\omega C_1^\sigma Z_r F_1^{oc}(\Omega, \Pi)}. \quad (3.35)$$

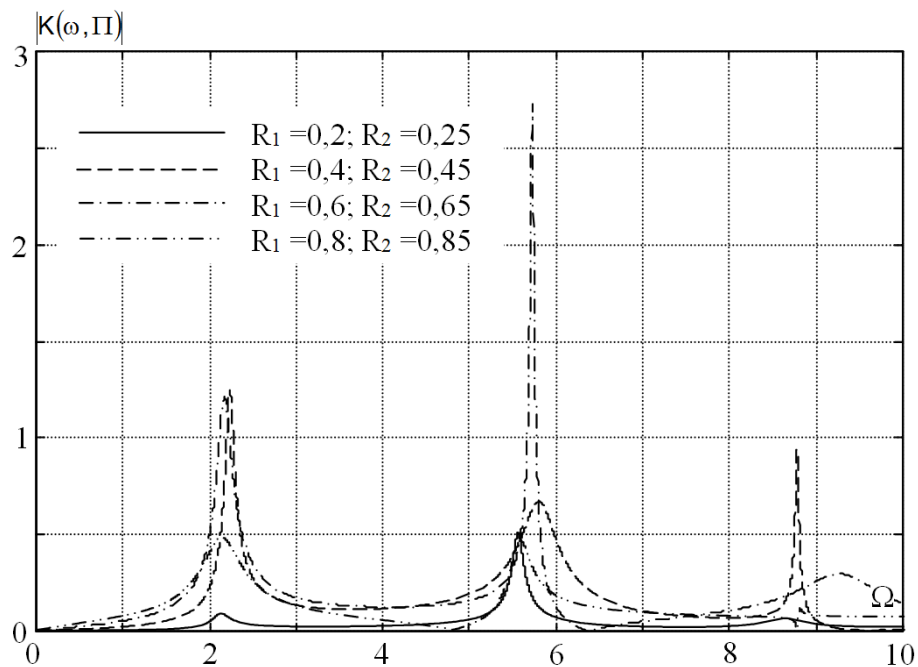
Підставляючи співвідношення (3.35) в вираз (3.31), визначаємо коефіцієнт трансформації найпростішого дискового п'єзоелектричного перетворювача

$$K(\omega, \Pi) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{K_2(\Omega, \Pi)}{1 - i\omega C_1^\sigma Z_r F_1^{oc}(\Omega, \Pi)}. \quad (3.36)$$

Вираз (3.36) є математичною моделлю дискового п'єзокерамічного

трансформаторного перетворювача, яка враховує зворотні зв'язки, що існують в об'ємі коливального диска.

На рис. 3.4 показані графіки модуля коефіцієнта трансформації для різних розмірів електродів в первинному та вторинному електричних колах дискового п'єзоелектричного трансформаторного перетворювача. Значення матеріальних констант п'єзокераміки ті ж, що були використані при побудові рис. 3.3. Радіус диска  $R = 2,5 \cdot 10^{-2}$  м, товщина диска  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-3}$  м. Вихідний електричний імпеданс генератора  $Z_{\text{н}} = 50$  Ом, імпеданс електричного навантаження –  $Z_{\text{н}} = 1000$  Ом.

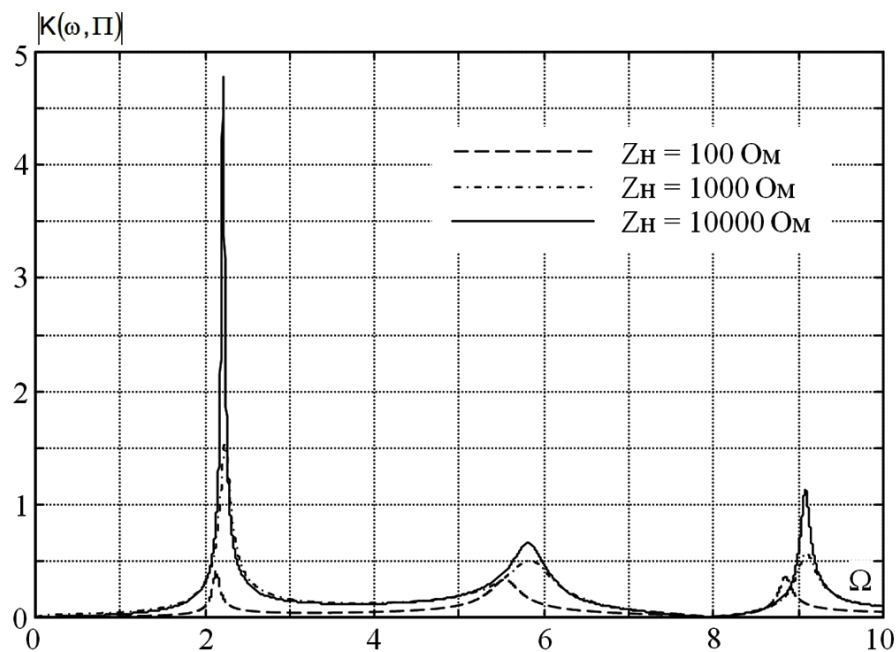


**Рис. 3.4. Абсолютні значення коефіцієнта трансформації для різних розмірів електродів в первинному та вторинному електричних колах дискового п'єзоелектричного перетворювача з розділеними електродами**

Легко помітити, що частотно залежні значення коефіцієнта трансформації істотно змінюються при зміні розмірів електродів. Частоти локальних максимумів модуля функції  $K(\omega, \Pi)$  також залежать від розмірів електродів. Разом з тим, частоти локальних максимумів розташовуються в найближчій околиці частот електромеханічних резонансів радіально

коливального диска (див. табл. 3.1). Таким чином, вибір розмірів диска і первинна оцінка частот максимальних значень коефіцієнта трансформації можуть бути здійснені на підставі даних таблиці 3.1.

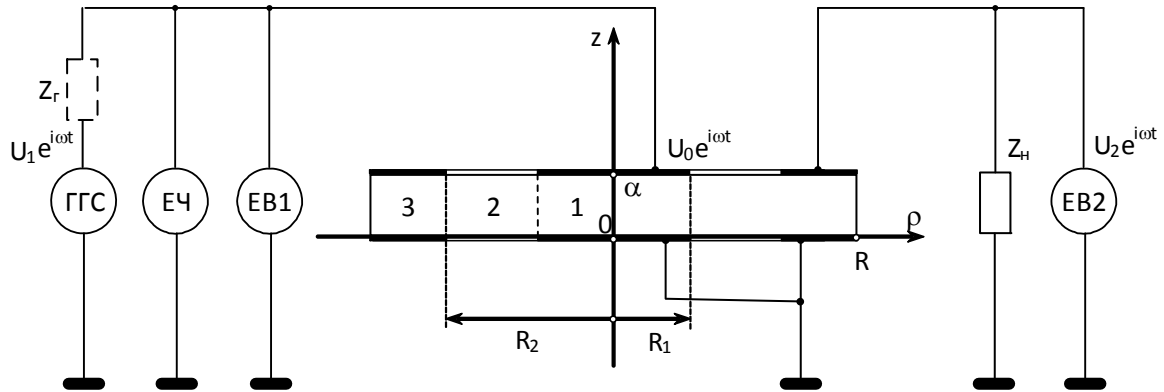
На рис. 3.5 показані графіки модуля функції  $K(\omega, \Pi)$ , які розраховувалися для фіксованих значень радіусів електродів ( $R_1 = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$  і  $R_2 = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ) диска, параметри якого вказані в коментарях до рис. 3.3, і фіксованого значення імпедансу джерела  $Z_r = 50 \text{ Ом}$ . Варійованим параметром для сімейства кривих на рис. 3.5 є значення електричного навантаження  $Z_n$ . При малому значенні  $Z_n$  перетворювач працює в режимі близькому до короткого замикання у вторинному колі. Коефіцієнт трансформації при цьому, природно, прагне до нуля. Нескладно дійти висновку, що для кожної конкретної конструкції п'єзоелектричного перетворювача існує оптимальне (в сенсі величини коефіцієнта трансформації) значення електричного імпедансу навантаження [6].



**Рис. 3.5. Абсолютні значення коефіцієнта трансформації для різних значень електричного навантаження  $Z_n$  у вторинному електричному колі дискового п'єзоелектричного перетворювача**

### 3.1.3. Дослідження коефіцієнта трансформації п'єзоелектричного перетворювача з дисковим електродом в первинному електричному колі

На рис. 3.6 приведена схема експериментальних досліджень дискового п'єзокерамічного трансформаторного перетворювача типу диск-кільце.



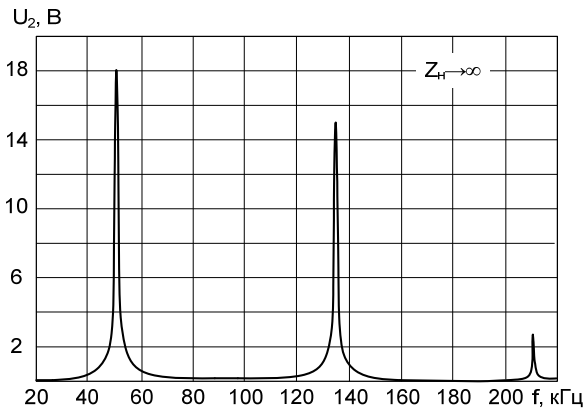
**Рис. 3.6. Електрична схема для вимірювання п'єзоелектричного трансформаторного перетворювача з дисковим електродом в первинному електричному колі**

На схемі аббревіатурою ГГС позначений генератор гармонійних сигналів ГЗ-19, ЕЧ – електронний частотомір ЧЗ-57, ЕВ1 і ЕВ2 – електронні вольтметри ВЗ-41.

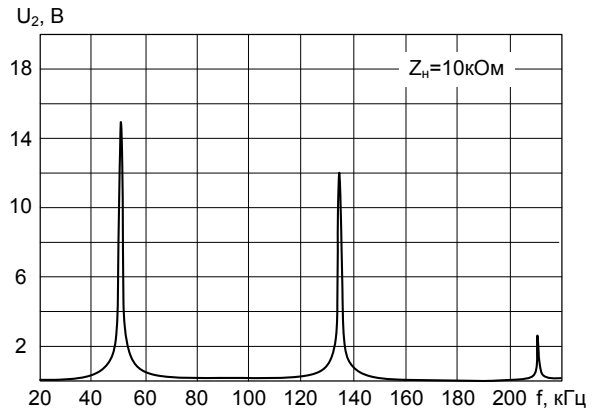
Для експериментальних досліджень був використаний дисковий п'єзоелектричний елемент  $\text{Ø}50 \times 1,2$  мм ( $\alpha = 1,2 \times 10^{-3}$  м;  $R = 25 \times 10^{-3}$  м;  $R_1 = 12 \times 10^{-3}$  м;  $R_2 = 14,5 \times 10^{-3}$  м) з матеріалу типу ЦТБС. Вхідна напруга  $U_1 = 1$  В.

Результати вимірювання амплітудно-частотної характеристики дискового п'єзоелектричного трансформаторного перетворювача типу диск-кільце в залежності від величини навантаження представлені на рис. 3.7.

$$f_1 = 51,57 \text{ кГц}; f_2 = 134,5 \text{ кГц}; f_3 = 210,12 \text{ кГц} \quad f_1 = 51,64 \text{ кГц}; f_2 = 134,4 \text{ кГц}; f_3 = 210 \text{ кГц}$$



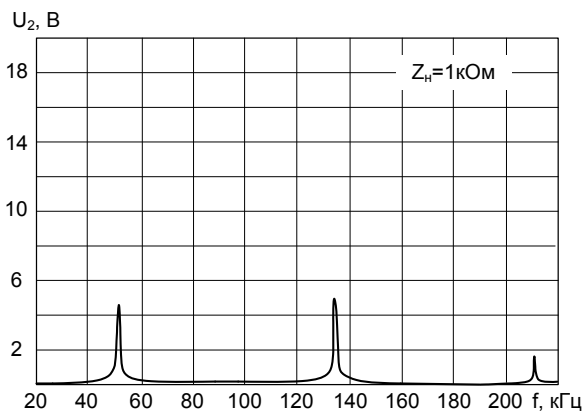
а)



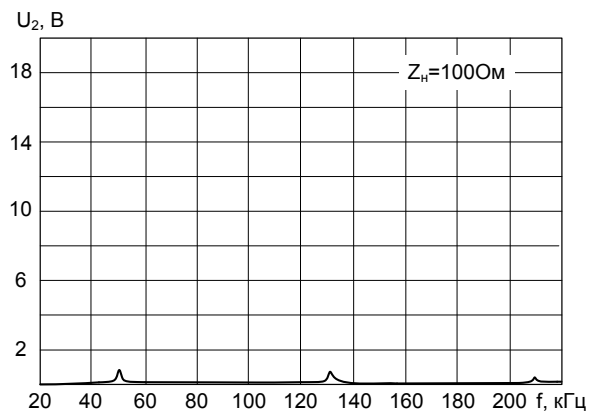
б)

$$f_1 = 51,5 \text{ кГц}; f_2 = 134,5 \text{ кГц}; f_3 = 209,8 \text{ кГц}$$

$$f_1 = 50,2 \text{ кГц}; f_2 = 132,7 \text{ кГц}; f_3 = 209,6 \text{ кГц}$$



г)



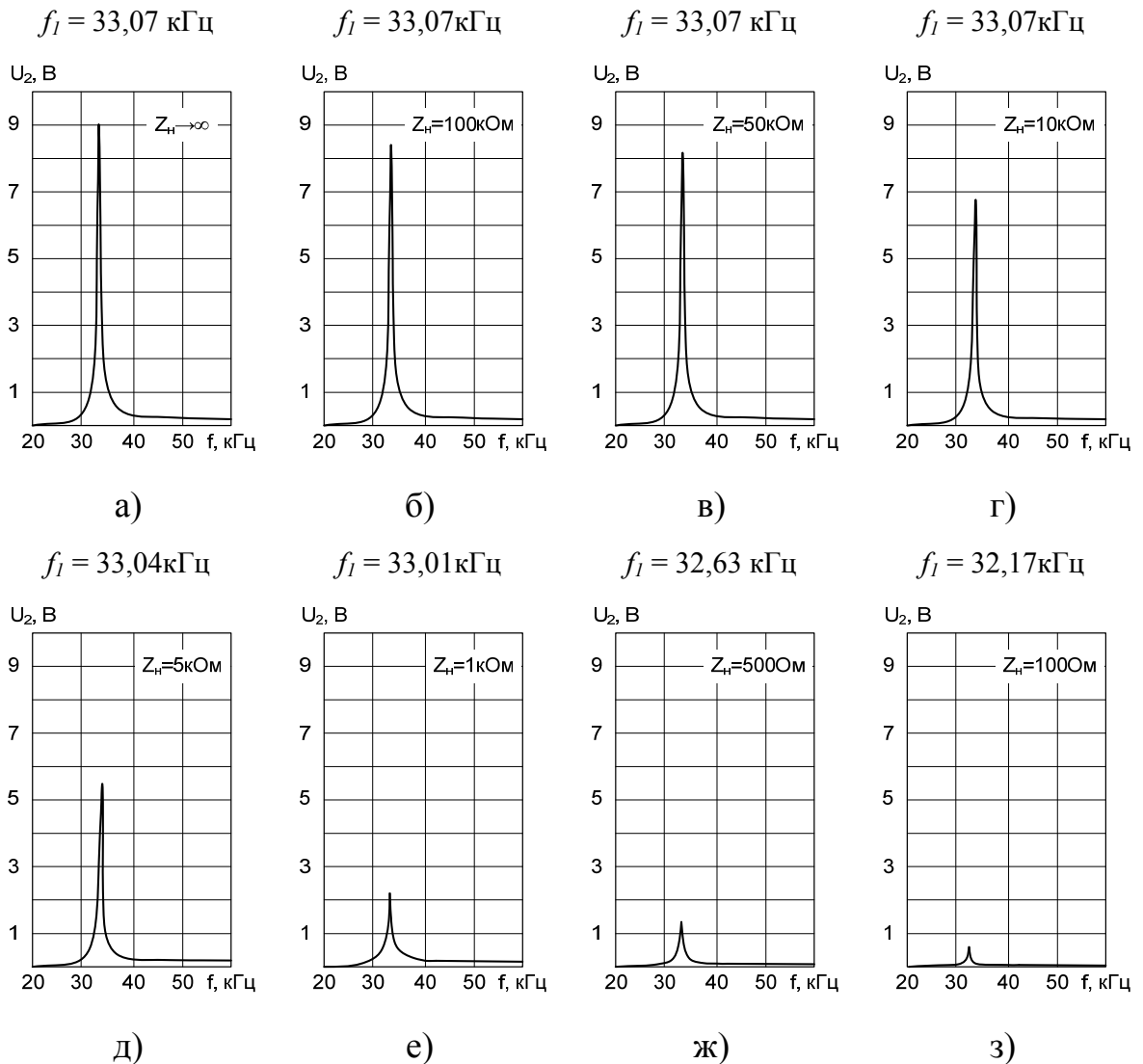
д)

**Рис. 3.7. Амплітудно-частотні характеристики п'єзoeлектричного трансформаторного перетворювача з дисковим електродом в первинному електричному колі в залежності від величини навантаження**

Як видно з рис. 3.7 при малому значенні  $z_n$  перетворювач працює в режимі близькому до короткого замикання у вторинному колі. Коефіцієнт трансформації при цьому прямує до нуля. При збільшенні навантаження  $z_n$  зменшується його вплив на коефіцієнт трансформації (збільшується коефіцієнт трансформації) [7].

На рис. 3.8 представлені результати вимірювання амплітудно-частотної характеристики п'єзoeлектричного трансформаторного перетворювача типу

диск-кільце в околиці частот першого радіального електромеханічного резонансу в залежності від величини навантаження для диску  $\text{Ø}66 \times 3$  мм ( $\alpha = 3 \times 10^{-3}$  м;  $R = 33 \times 10^{-3}$  м;  $R_1 = 19 \times 10^{-3}$  м;  $R_2 = 20 \times 10^{-3}$  м) з матеріалу типу ЦТС. Вхідна напруга  $U_1 = 1$  В.



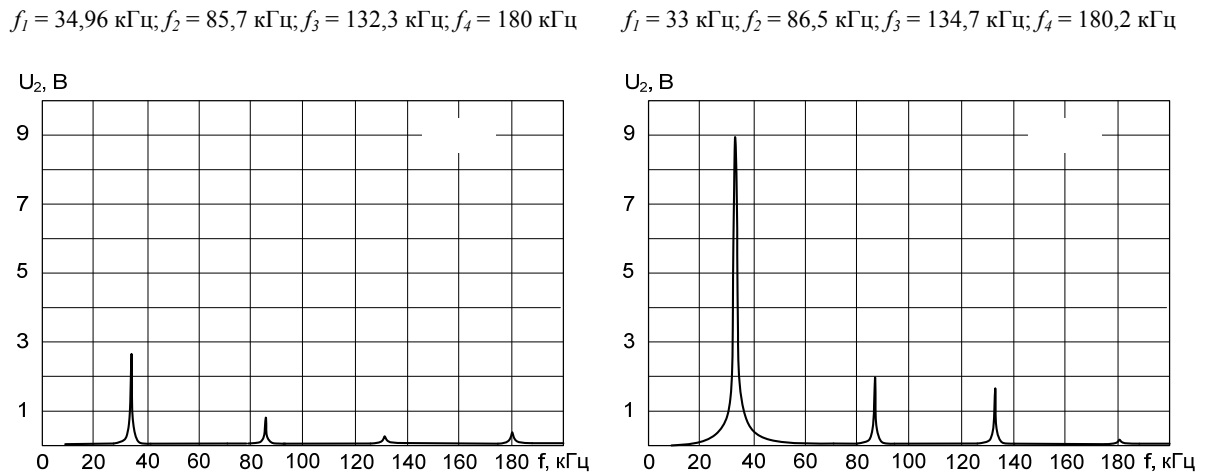
**Рис. 3.8.** Ампліудно-частотні характеристики п'єзоелектричного трансформаторного перетворювача з дисковим електродом в первинному електричному колі в околиці частот першого радіального електромеханічного резонансу в залежності від величини навантаження

Результати вимірювання ампліудно-частотної характеристики дискового п'єзоелектричного трансформаторного перетворювача типу диск-



кільце в залежності від розмірів електродів представлені на рис. 3.9 [7].

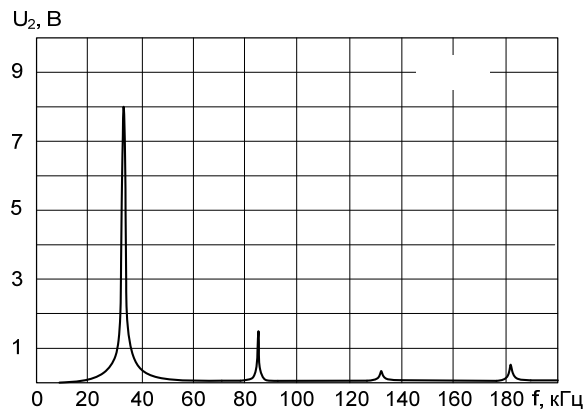
Для експериментальних досліджень був використаний дисковий п'єзоелектричний елемент  $\varnothing 66 \times 3$  мм ( $\alpha = 3 \times 10^{-3}$  м;  $R = 33 \times 10^{-3}$  м) з матеріалу типу ЦТС. Вхідна напруга  $U_1 = 1$  В.



а)

б)

$$f_1 = 32,35 \text{ кГц}; f_2 = 84,4 \text{ кГц}; f_3 = 134,4 \text{ кГц}; f_4 = 182 \text{ кГц}$$



в)

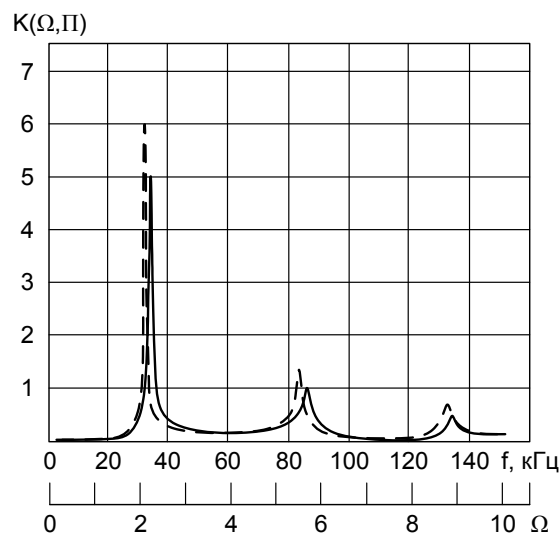
**Рис. 3.9. Амплітудно-частотні характеристики п'єзоелектричного трансформаторного перетворювача з дисковим електродом в первинному електричному колі в залежності від розмірів електродів**

а)  $R_1 = 6 \cdot 10^{-3}$  м;  $R_2 = 7 \cdot 10^{-3}$  м; б)  $R_1 = 19 \cdot 10^{-3}$  м;  $R_2 = 20 \cdot 10^{-3}$  м;

в)  $R_1 = 25,5 \cdot 10^{-3}$  м;  $R_2 = 26,5 \cdot 10^{-3}$  м

З рис. 3.9 видно, що найбільше значення коефіцієнту трансформації отримується при розділенні електродів на приблизно рівні за площею диск та кільце.

На рис. 3.10 наведені розрахункова (суцільна лінія) і експериментально отримана (штрихова лінія) криві частотної залежності модуля коефіцієнта трансформації п'єзокерамічного дискового трансформаторного перетворювача. Природно, що розміри дискового перетворювача в розрахунку і експерименті були обрані однаковими, тобто радіус  $R = 33 \cdot 10^{-3}$  м і товщина  $\alpha = 3 \cdot 10^{-3}$  м. По осі ординат відкладаються значення модуля коефіцієнта трансформації п'єзокерамічного дискового перетворювача, а по осі абсцис – частота  $f$  (безрозмірна величина  $\Omega = \omega\tau_0$ , де  $\tau_0 = R/\sqrt{c_{11}/\rho_0}$  – постійна часу п'єзокерамічного диску). Значенню  $\Omega = 1$  відповідає частота  $f = 15206$  Гц.



**Рис. 3.10.** Розрахункова (суцільна лінія) і експериментально отримана (штрихова лінія) криві частотної залежності модуля коефіцієнта трансформації п'єзокерамічного дискового перетворювача

Як і слід було очікувати, абсолютні значення частот резонансів в розрахунку і експерименті відрізняються один від одного. Так, слідуючи

розрахунку, частоти першого, другого і третього електромеханічних резонансів відповідно дорівнюють  $f_{r1} = 33453 \text{ Hz}$ ,  $f_{r2} = 86195 \text{ Hz}$  і  $f_{r3} = 136375 \text{ Hz}$ ; відношення частот  $\zeta = f_{r2}/f_{r1} = 2,577$ .

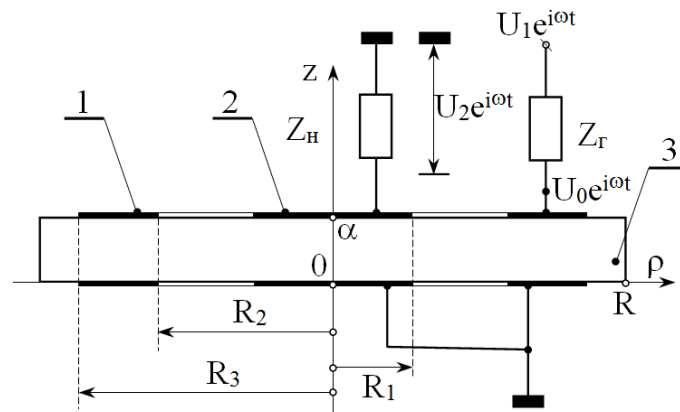
Експериментальні значення тих же величин дорівнюють відповідно  $f_{r1} = 32351 \text{ Hz}$ ,  $f_{r2} = 84429 \text{ Hz}$ ,  $f_{r3} = 134415 \text{ Hz}$  і  $\zeta = f_{r2}/f_{r1} = 2,61$ . Якщо експериментальні дані прийняти в якості істинних, то похибка визначення відношення частот складе  $\Delta\zeta = 1,3\%$ . Отримані результати пояснюються дуже просто. Числові значення частот резонансів визначаються розмірами і фізико-механічними параметрами матеріалу дискового елемента. Відношення частот резонансів одного і того ж диску визначаються практично тільки розмірами. З цієї причини спостерігається досить задовільний збіг теоретично і експериментально визначених відношень частот резонансів. Розбіжності абсолютних значень частот резонансів пояснюється невідповідністю фізико-механічних параметрів п'єзокераміки, які були закладені в розрахунок і які притаманні експериментально досліджуваному об'єкту. Зіставляючи криві можна зробити висновок, що добротність матеріалу експериментально досліджуваного зразка мінімум в 1,2 рази більше закладеної в розрахунок добротності.

Таким чином, можна стверджувати, що характер зміни обох кривих, наведених на рис. 3.10, в досить широкому діапазоні частот збігається з точністю до деталей. Це означає, що якісний зміст виразу (3.36) адекватний процесам, які відбуваються в реальному об'єкті. Говорячи іншими словами, вираз (3.36) – математична модель п'єзоелектричного трансформаторного перетворювача з дисковим електродом в первинному електричному колі – в достатній мірі адекватний реальному об'єкту і процесам, що відбувається в ньому. Останнє дозволяє припускати, що математичний опис напружено-деформованого стану дискового п'єзоелектричного перетворювача також досить добре відповідає реальному стану речей.

### 3.2. Математичне моделювання дискового п'єзоелектричного перетворювача з кільцевим електродом в первинному електричному колі

#### 3.2.1. Розрахунок коефіцієнта трансформації п'єзоелектричного перетворювача з кільцевим електродом в первинному електричному колі

Розглянемо тепер конструкцію дискового п'єзоелектричного перетворювача трансформаторної конструкції з дисковим електродом у вторинному електричному колі (рис. 3.11).



**Рис. 3.11. Розрахункова схема дискового п'єзоелектричного перетворювача з розділеними електродом**

Первинне електричне коло цього перетворювача складається з генератора різниці електричних потенціалів  $U_1 e^{i\omega t}$  ( $U_1$  – амплітудне значення різниці електричних потенціалів;  $i = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця;  $\omega$  – кругова частота зміни знаку потенціалу;  $t$  – час) з вихідним електричним опором  $Z_r$  і кільцевого електрода (позиція 1 на рис. 3.11). Вторинне електричне коло складається з електрода в формі диска (позиція 2) з підключеною до нього електронною схемою з вхідним електричним опором  $Z_H$ , на якому формується різниця електричних потенціалів  $U_2 e^{i\omega t}$ . Первинне і вторинне електричні кола п'єзоелектричного перетворювача не мають гальванічного

зв'язку. Енергообмін між первинним і вторинним електричними колами здійснюється за допомогою вісесиметричних радіальних коливань матеріальних частинок п'єзокераміки в об'ємі поляризованого по товщині диска (позиція 3 на рис. 3.11) [8].

Очевидно, що робота функціонального елемента п'єзоелектроніки, який схематично показаний на рис. 3.11, повністю описується коефіцієнтом трансформації  $K(\omega, \Pi) = U_2/U_1$  (символом  $\Pi$  позначений набір електричних, геометричних і фізико-механічних параметрів перетворювача), який, слідуючи визначенню А.М. Тихонова [9], є математичною моделлю даного пристрою. Схема побудови математичної моделі п'єзоелектричного перетворювача в загальних рисах викладена в додатку Б.

Амплітудне значення  $U_2$  потенціалу на виході п'єзоелектричного перетворювача визначається, очевидно, як падіння електричної напруги на опорі навантаження  $Z_n$ , тобто

$$U_2 = I_2 Z_n, \quad (3.37)$$

де  $I_2$  – амплітудне значення струму у вторинному електричному колі. В роботі [3] показано, що  $I_2 = -i\omega Q_2$ , де  $Q_2$  – амплітуда поляризаційного заряду під електродом у вторинному електричному колі трансформаторного перетворювача, причому

$$Q_2 = 2\pi \int_0^{R_1} \rho D_z^{(1)}(\rho) d\rho, \quad (3.38)$$

де  $D_z^{(1)}(\rho)$  – амплітудне значення аксіального компонента вектора електричної індукції під центральним електродом, тобто в області 1, де значення поточної радіальної координати  $\rho \in [0, R_1]$ . Раніше було показано [6], що для тонких ( $\alpha/R \ll 1$ ) п'єзокерамічних дисків справедливо наступне визначення компонента  $D_z^{(1)}(\rho)$ :

$$\begin{aligned} D_z^{(1)}(\rho) &= e_{31}^* (\epsilon_{\rho\rho}^{(1)} + \epsilon_{\phi\phi}^{(1)}) - \chi_{33}^\sigma \frac{U_2}{\alpha} = e_{31}^* \left[ \frac{\partial u_\rho^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{u_\rho^{(1)}}{\rho} \right] - \chi_{33}^\sigma \frac{U_2}{\alpha} = \\ &= \frac{e_{31}^*}{\rho} \frac{\partial u_\rho^{(1)}}{\partial \rho} [\rho u_\rho^{(1)}] - \chi_{33}^\sigma \frac{U_2}{\alpha}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

де  $e_{31}^*$  і  $\chi_{33}^\sigma$  – п'єзоелектричний модуль і компонент тензора діелектричної проникності п'єзокераміки для режиму планарних коливань, причому  $e_{31}^* = e_{31} - e_{33}c_{12}^E/c_{33}^E$ ,  $\chi_{33}^\sigma = \chi_{33}^\varepsilon + e_{33}^2/c_{33}^E$ ;  $e_{31}$ ,  $e_{33}$ ,  $c_{12}^E$ ,  $c_{33}^E$  і  $\chi_{33}^\varepsilon$  – довідникові значення п'єзомодулів, модулів пружності і діелектричної проникності поляризованої по товщині п'єзокерамічної пластинки;  $\varepsilon_{\rho\rho}^{(1)}(\rho)$ ,  $\varepsilon_{\phi\phi}^{(1)}(\rho)$  і  $u_\rho^{(1)}(\rho)$  – амплітудні значення змінних в часі за законом  $e^{i\omega t}$  компонентів тензора малих деформацій і радіального компонента вектора зміщення матеріальних частинок п'єзокераміки в області 1.

Підставляючи визначення електричної індукції  $D_2^{(1)}(\rho)$  в співвідношення (3.38), отримуємо вираз для розрахунку амплітуди електричного заряду  $Q_2$  в наступному вигляді

$$Q_2 = 2 \frac{\alpha e_{31}^*}{R_1 \chi_{33}^\sigma} C_1^\sigma u_\rho^{(1)}(R_1) - C_1^\sigma U_2, \quad (3.40)$$

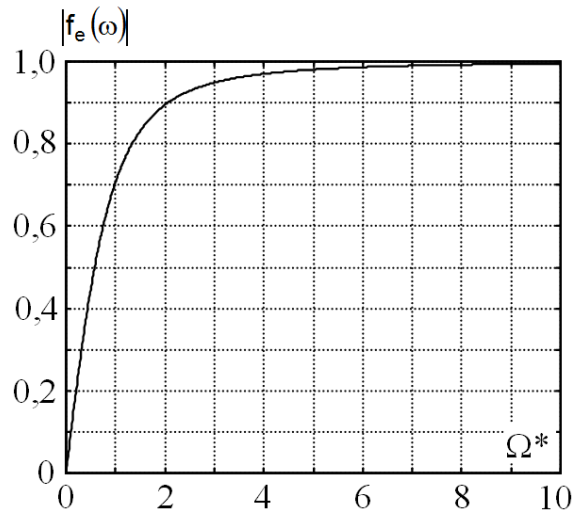
де  $C_1^\sigma = \pi R_1^2 \chi_{33}^\sigma / \alpha$  – статична електрична ємність електрода у вторинному електричному колі п'єзоелектричного перетворювача. Підставляючи вираз (3.40) в визначення амплітуди струму  $I_2$ , а отриманий результат – в співвідношення (3.37), отримуємо формулу для розрахунку амплітудного значення різниці електричних потенціалів на виході п'єзоелектричного перетворювача

$$U_2 = -2f_e(\omega) \frac{\alpha e_{31}^*}{R_1 \chi_{33}^\sigma} u_\rho^{(1)}(R_1), \quad (3.41)$$

де символом  $f_e(\omega)$  позначена функція включення електрода у вторинному електричному колі п'єзоелектричного перетворювача. Числові значення функції включення розраховуються за формулою

$$f_e(\omega) = \frac{i\Omega^*}{1 - i\Omega^*}, \quad (3.42)$$

де  $\Omega^* = \omega \tau_H$  – безрозмірна частота;  $\tau_H = C_1^\sigma Z_H$  – постійна часу вторинного електричного кола п'єзоелектричного перетворювача. На рис. 3.12 показаний графік модуля функції включення  $f_e(\omega)$  в залежності від значень безрозмірною частоти  $\Omega^*$ .



**Рис. 3.12. Зміна модуля функції включення електрода у вторинному електричному колі п'єзоелектричного перетворювача**

Раніше було показано [6], що потенціали  $U_2$  і  $U_0$  (амплітудне значення різниці електричних потенціалів на електроді в первинному електричному колі п'єзоелектричного перетворювача) є взаємопов'язаними величинами. Пов'язаність потенціалів  $U_2$  і  $U_0$  забезпечується пов'язаністю напружено-деформованого стану в різних областях об'єму коливального п'єзокерамічного диска. Звідси випливає, що амплітудний множник зміщення  $u_p^{(1)}(\rho)$  одночасно визначається як потенціалом  $U_2$ , так і потенціалом  $U_0$ .

З'ясуємо, як пов'язані між собою потенціали  $U_2$  і  $U_0$ .

В роботі [6] визначені пружні напруження і зміщення матеріальних частинок п'єзокераміки в областях, які знаходяться під електродами, і в областях, де електроди відсутні. Слідуючи викладеній в роботі [6] методиці, можемо записати, що

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)}(\rho) = c_{11} \frac{\partial u_p^{(1)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{12} \frac{u_p^{(1)}(\rho)}{\rho} + e_{31}^* \frac{U_2}{\alpha}, \quad (3.43)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2)}(\rho) = c_{11}^D \frac{\partial u_p^{(2)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{12}^D \frac{u_p^{(2)}(\rho)}{\rho}, \quad (3.44)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(3)}(\rho) = c_{11} \frac{\partial u_{\rho}^{(3)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{12} \frac{u_{\rho}^{(3)}(\rho)}{\rho} + e_{31}^* \frac{U_0}{\alpha}, \quad (3.45)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(4)}(\rho) = c_{11}^D \frac{\partial u_{\rho}^{(4)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{12}^D \frac{u_{\rho}^{(4)}(\rho)}{\rho}, \quad (3.46)$$

де  $c_{11} = c_{11}^E - (c_{12}^E)^2 / c_{33}^E$ ;  $c_{12} = c_{12}^E (1 - c_{12}^E / c_{33}^E)$ ;  $c_{11}^D = c_{11} + (e_{31}^*)^2 / \chi_{33}^{\sigma}$ ;  $c_{12}^D = c_{12} + (e_{31}^*)^2 / \chi_{33}^{\sigma}$  – модулі пружності для режиму вісесиметричних радіальних коливань матеріальних частинок п'єзокерамічного диска в областях під електродами (це область 1, де  $\rho \in [0, R_1]$ , і область 3, де  $\rho \in [R_2, R_3]$ ) і в областях без електродування (це область 2, де  $\rho \in [R_1, R_2]$ , і область 4, де  $\rho \in [R_3, R]$ ).

Амплітудні значення радіальних компонентів векторів зміщень матеріальних частинок в областях 1, ..., 4, визначаються наступним чином:

$$u_{\rho}^{(1)}(\rho) = A_1 J_1(\gamma \rho), \quad (3.47)$$

$$u_{\rho}^{(2)}(\rho) = A_2 J_1(\gamma_1 \rho) + A_3 N_1(\gamma_1 \rho), \quad (3.48)$$

$$u_{\rho}^{(3)}(\rho) = A_4 J_1(\gamma \rho) + A_5 N_1(\gamma \rho), \quad (3.49)$$

$$u_{\rho}^{(4)}(\rho) = A_6 J_1(\gamma_1 \rho) + A_7 N_1(\gamma_1 \rho), \quad (3.50)$$

де  $A_1, \dots, A_7$  – частотно залежні константи (амплітудні множники) радіальних зміщень матеріальних частинок в різних областях;  $J_1(z)$ ,  $N_1(z)$  ( $z = \gamma \rho$ ;  $z = \gamma_1 \rho$ ) – функції Бесселя і Неймана [4] першого порядку;  $\gamma = \omega / \sqrt{c_{11} / \rho_0}$  і  $\gamma_1 = \omega / \sqrt{c_{11}^D / \rho_0}$  – хвильові числа радіальних коливань в областях під електродами і без електродного покриття;  $\rho_0$  – густина п'єзокераміки.

На умовних границях розділів областей амплітудні значення зміщень і напруг повинні відповідати умовам динамічного і кінематичного сполучення, які записуються в такий спосіб:

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)}(R_1) - \sigma_{\rho\rho}^{(2)}(R_1) = 0, \quad (3.51)$$

$$u_{\rho}^{(1)}(R_1) - u_{\rho}^{(2)}(R_1) = 0, \quad (3.52)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2)}(R_2) - \sigma_{\rho\rho}^{(3)}(R_2) = 0, \quad (3.53)$$

$$u_{\rho}^{(2)}(R_2) - u_{\rho}^{(3)}(R_2) = 0, \quad (3.54)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(3)}(R_3) - \sigma_{\rho\rho}^{(4)}(R_3) = 0, \quad (3.55)$$

$$u_{\rho}^{(3)}(R_3) - u_{\rho}^{(4)}(R_3) = 0. \quad (3.56)$$



Якщо границя  $\rho=R$  п'єзокерамічного диска вільна від механічних контактів з іншими матеріальними об'єктами, то на контурі  $\rho=R$  повинна виконуватися умова

$$\sigma_{\rho\rho}^{(4)}(R) = 0. \quad (3.57)$$

Підставляючи в умови (3.51)–(3.57) вирази (3.43)–(3.50), отримуємо неоднорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка складається з семи рівнянь, в яких міститься сім шуканих констант  $A_1, \dots, A_7$ . Очевидно, що ця система рівнянь розв'язується відносно шуканих констант єдиним способом. У загальному вигляді зазначену систему рівнянь можна записати в такий спосіб

$$\sum_{k=1}^7 m_{jk} A_k = P_j, \quad (j, k = 1, 2, \dots, 7). \quad (3.58)$$

Коефіцієнти  $m_{jk}$  і праві частини  $P_j$  системи рівнянь (3.58) мають наступні вигляд:

$$\begin{aligned} m_{11} &= J_0(\gamma R_1) - (1 - k)J_1(\gamma R_1)/(\gamma R_1); \quad k = c_{12}/c_{11}; \quad m_{12} = \xi[J_0(\gamma_1 R_1) - (1 - k_1)J_1(\gamma_1 R_1)/(\gamma_1 R_1)]; \\ \xi &= \sqrt{1 + K_{31}^2}; \quad K_{31}^2 = (e_{31}^*)^2 / (\chi_{33}^\sigma c_{11}); \quad k_1 = c_{12}^D / c_{11}^D; \\ m_{13} &= \xi[N_0(\gamma_1 R_1) - (1 - k_1)N_1(\gamma_1 R_1)/(\gamma_1 R_1)]; \quad m_{14} = m_{15} = m_{16} = m_{17} = 0; \quad P_1 = -qU_2/\Omega; \quad q = e_{31}^* R / (c_{11} \alpha); \\ \Omega &= \gamma R; \quad m_{21} = J_1(\gamma R_1); \quad m_{22} = J_1(\gamma_1 R_1); \quad m_{23} = N_1(\gamma_1 R_1); \quad m_{24} = m_{25} = m_{26} = m_{27} = 0; \quad P_2 = 0; \quad m_{31} = 0; \\ m_{32} &= \xi[J_0(\gamma_1 R_2) - (1 - k_1)J_1(\gamma_1 R_2)/(\gamma_1 R_2)]; \quad m_{33} = \xi[N_0(\gamma_1 R_2) - (1 - k_1)N_1(\gamma_1 R_2)/(\gamma_1 R_2)]; \\ m_{34} &= J_0(\gamma R_2) - (1 - k)J_1(\gamma R_2)/(\gamma R_2); \quad m_{35} = N_0(\gamma R_2) - (1 - k)N_1(\gamma R_2)/(\gamma R_2); \quad m_{36} = m_{37} = 0; \\ P_3 &= qU_0/\Omega; \quad m_{41} = 0; \quad m_{42} = J_1(\gamma_1 R_2); \quad m_{43} = N_1(\gamma_1 R_2); \quad m_{44} = J_1(\gamma R_2); \quad m_{45} = N_1(\gamma R_2); \quad m_{46} = m_{47} = 0; \\ P_4 &= 0; \quad m_{51} = m_{52} = m_{53} = 0; \quad m_{54} = J_0(\gamma R_3) - (1 - k)J_1(\gamma R_3)/(\gamma R_3); \\ m_{55} &= N_0(\gamma R_3) - (1 - k)N_1(\gamma R_3)/(\gamma R_3); \quad m_{56} = \xi[J_0(\gamma_1 R_3) - (1 - k_1)J_1(\gamma_1 R_3)/(\gamma_1 R_3)]; \\ m_{57} &= \xi[N_0(\gamma_1 R_3) - (1 - k_1)N_1(\gamma_1 R_3)/(\gamma_1 R_3)]; \quad P_5 = -qU_0/\Omega; \quad m_{61} = m_{62} = m_{63} = 0; \quad m_{64} = J_1(\gamma R_3); \\ m_{65} &= N_1(\gamma R_3); \quad m_{66} = J_1(\gamma_1 R_3); \quad m_{67} = N_1(\gamma_1 R_3); \quad P_6 = 0; \quad m_{71} = m_{72} = m_{73} = m_{74} = m_{75} = 0; \\ m_{76} &= J_0(\gamma_1 R) - (1 - k_1)J_1(\gamma_1 R)/(\gamma_1 R); \quad m_{77} = N_0(\gamma_1 R) - (1 - k_1)N_1(\gamma_1 R)/(\gamma_1 R); \quad P_7 = 0. \end{aligned}$$

Розв'язки для констант  $A_1, A_4$  і  $A_5$ , які визначають радіальні зміщення матеріальних частинок диска під електродами первинного і вторинного

електричного кола п'єзоелектричного перетворювача, мають такий вигляд:

$$A_1 = -\frac{q}{\Omega}(U_2 A_{11} + U_0 A_{12}); \quad A_{11} = \frac{B_{11}}{D_0}; \quad A_{12} = \frac{B_{12}}{D_0}; \quad (3.59)$$

$$A_4 = \frac{q}{\Omega}(U_2 A_{41} + U_0 A_{42}); \quad A_{41} = \frac{B_{41}}{D_0}; \quad A_{42} = \frac{B_{42}}{D_0}; \quad (3.60)$$

$$A_5 = -\frac{q}{\Omega}(U_2 A_{51} + U_0 A_{52}); \quad A_{51} = \frac{B_{51}}{D_0}; \quad A_{52} = \frac{B_{52}}{D_0}; \quad (3.61)$$

де  $D_0$  – визначник системи рівнянь (3.58), а  $B_{11}, \dots, B_{52}$  – визначники наступних матриць:

$$B_{11} = \begin{vmatrix} -m_{22} & -m_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{32} & m_{33} & -m_{34} & -m_{35} & 0 & 0 \\ m_{42} & m_{43} & -m_{44} & -m_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{54} & m_{55} & -m_{56} & -m_{57} \\ 0 & 0 & m_{64} & m_{65} & -m_{66} & -m_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{76} & m_{77} \end{vmatrix};$$

$$B_{12} = \begin{vmatrix} -m_{12} & -m_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{22} & -m_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{32} & m_{33} & -m_{34} + m_{54} & -m_{35} + m_{55} & -m_{56} & -m_{57} \\ m_{42} & m_{43} & -m_{44} & -m_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{64} & m_{65} & -m_{66} & -m_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{76} & m_{77} \end{vmatrix};$$

$$B_{41} = \begin{vmatrix} m_{21} & -m_{22} & -m_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{32} & m_{33} & -m_{35} & 0 & 0 \\ 0 & m_{42} & m_{43} & -m_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{55} & -m_{56} & -m_{57} \\ 0 & 0 & 0 & m_{65} & -m_{66} & -m_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{76} & m_{77} \end{vmatrix};$$

$$B_{42} = \begin{vmatrix} m_{11} & -m_{12} & -m_{13} & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & -m_{22} & -m_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{32} & m_{33} & -m_{35} + m_{55} & -m_{56} & -m_{57} \\ 0 & m_{42} & m_{43} & -m_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{65} & -m_{66} & -m_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{76} & m_{77} \end{vmatrix};$$

$$B_{51} = \begin{vmatrix} m_{21} & -m_{22} & -m_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{32} & m_{33} & -m_{34} & 0 & 0 \\ 0 & m_{42} & m_{43} & -m_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{54} & -m_{56} & -m_{57} \\ 0 & 0 & 0 & m_{64} & -m_{66} & -m_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{76} & m_{77} \end{vmatrix};$$

$$B_{52} = \begin{vmatrix} m_{11} & -m_{12} & -m_{13} & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & -m_{22} & -m_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{32} & m_{33} & -m_{34} + m_{54} & -m_{56} & -m_{57} \\ 0 & m_{42} & m_{43} & -m_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{64} & -m_{66} & -m_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{76} & m_{77} \end{vmatrix}.$$

Підставляючи визначення (3.59) константи  $A_1$  в співвідношення (3.47), а отриманий результат – в формулу (3.41) для розрахунку потенціалу  $U_2$ , приходимо до висновку, що

$$U_2 = 2f_e(\omega) \frac{e_{31}^* \alpha q}{\chi_{33}^\sigma R_1 \Omega} (U_2 A_{11} + U_0 A_{12}) J_1(\gamma R_1),$$

звідки випливає, що

$$U_2 = U_0 K_2(\Omega, \Pi); \quad (3.62)$$

$$K_2(\Omega, \Pi) = \frac{2f_e(\omega) K_{31}^2 A_{12} [J_1(\Omega R_1/R)/(\Omega R_1/R)]}{1 - 2f_e(\omega) K_{31}^2 A_{11} [J_1(\Omega R_1/R)/(\Omega R_1/R)]},$$

символом  $\Pi$  позначений набір геометричних, електричних і фізико-механічних параметрів перетворювача;  $K_{31}^2 = (e_{31}^*)^2 / (c_{11} \chi_{33}^\sigma)$  – квадрат коефіцієнта електромеханічного зв'язку для режиму радіальних коливань матеріальних частинок поляризованого по товщині п'єзокерамічного диска.

Визначимо амплітудне значення  $U_0$  різниці електричних потенціалів на електроді первинного електричного кола п'єзоелектричного перетворювача.

Очевидно, що

$$U_0 = \frac{U_1 Z_3}{Z_r + Z_3}, \quad (3.63)$$

де  $Z_3$  – електричний імпеданс області 3 під кільцевим електродом первинного електричного кола п'єзоелектричного перетворювача. Відповідно до закону Ома для ділянки електричного кола  $Z_3 = U_0 / I_3$ , де  $I_3$  – амплітуда змінного електричного струму в провіднику, який з'єднує генератор різниці електричних потенціалів з кільцевим електродом. Як і раніше, будемо вважати, що  $I_3 = -i\omega Q_3$ , де  $Q_3$  – амплітудне значення поляризаційного заряду під кільцевим електродом, яке визначається наступним чином

$$Q_3 = 2\pi \int_{R_2}^{R_3} \rho D_z^{(3)}(\rho) d\rho = C_3^\sigma U_0 \left\{ \frac{2\alpha e_{31}^*}{R_3 \chi_{33}^\sigma (1-\beta^2)} U_0 [u_p^{(3)}(R_3) - u_p^{(3)}(R_2)] - 1 \right\}, \quad (3.64)$$

де  $C_3^\sigma = \pi \chi_{33}^\sigma (R_3^2 - R_2^2) / \alpha$  – статична електрична ємність кільцевого електрода;  
 $\beta = R_2 / R_3$  – геометричний параметр кільця.

Підставляючи вирази (3.60) і (3.61) для розрахунку констант  $A_4$  і  $A_5$  в визначення (3.49), і враховуючи при цьому вираз (3.62), отримуємо наступну формулу для розрахунку зміщень  $u_p^{(3)}(\rho)$ :

$$u_p^{(3)}(\rho) = \frac{U_0 \text{Re} e_{31}^*}{\Omega C_{11} \alpha} \{ [K_2(\Omega, \Pi) A_{41} + A_{42}] J_1(\Omega \rho / R) + [K_2(\Omega, \Pi) A_{51} + A_{52}] N_1(\Omega \rho / R) \}. \quad (3.65)$$

Після обчислення значень  $u_p^{(3)}(R_2)$  і  $u_p^{(3)}(R_3)$  за формулою (3.65) можна записати, що  $Q_3 = C_3^\sigma U_0 K_3(\Omega, \Pi)$ , де

$$K_3(\Omega, \Pi) = \frac{2K_{31}^2}{1-\beta^2} \{ [K_2(\Omega, \Pi) A_{41} + A_{42}] J(\Omega) + [K_2(\Omega, \Pi) A_{51} + A_{52}] N(\Omega) \} - 1;$$

$$J(\Omega) = [J_1(\Omega R_3 / R) - \beta J_1(\beta \Omega R_3 / R)] / (\Omega R_3 / R); \quad N(\Omega) = [N_1(\Omega R_3 / R) - \beta N_1(\beta \Omega R_3 / R)] / (\Omega R_3 / R).$$

Після визначення заряду  $Q_3$  електричний імпеданс  $Z_3$  визначається виразом  $Z_3 = -1 / [i\omega C_3^\sigma K_3(\Omega, \Pi)]$ , звідки впливає визначення різниці потенціалів на кільцевому електроді

$$U_0 = \frac{U_1}{1 - i\omega C_0^\sigma Z_r K_3(\Omega, \Pi)}. \quad (3.66)$$

Підставляючи вираз (3.66) в співвідношення (3.62), приходимо до висновку, що

$$U_2 = U_1 \frac{K_2(\Omega, \Pi)}{1 - i\omega C_0^\sigma Z_r K_3(\Omega, \Pi)},$$

звідки впливає формула для розрахунку коефіцієнта трансформації

$$K(\omega, \Pi) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{K_2(\Omega, \Pi)}{1 - i\omega C_0^\sigma Z_r K_3(\Omega, \Pi)}. \quad (3.67)$$

Аналітична конструкція (3.67) є математичною моделлю п'єзоелектричного перетворювача з кільцевим електродом в первинному електричному колі [2].

### 3.2.2. Дослідження математичної моделі п'єзоелектричного перетворювача з кільцевим електродом в первинному електричному колі

Вираз (3.67), що визначає коефіцієнт передачі п'єзоелектронного пристрою з електричного входу на електричний вихід, має конструкцію, яка є типовою для електронних пристроїв з негативним зворотним зв'язком. Чітко видно, що глибина зворотного зв'язку прямо пропорційна значенню вихідного опору джерела сигналу, тобто імпедансу  $Z_r$ . При значенні  $Z_r = 0$  зворотний зв'язок зникає, і коефіцієнт трансформації повністю визначається частотно залежною функцією  $K_2(\Omega, \Pi)$ .

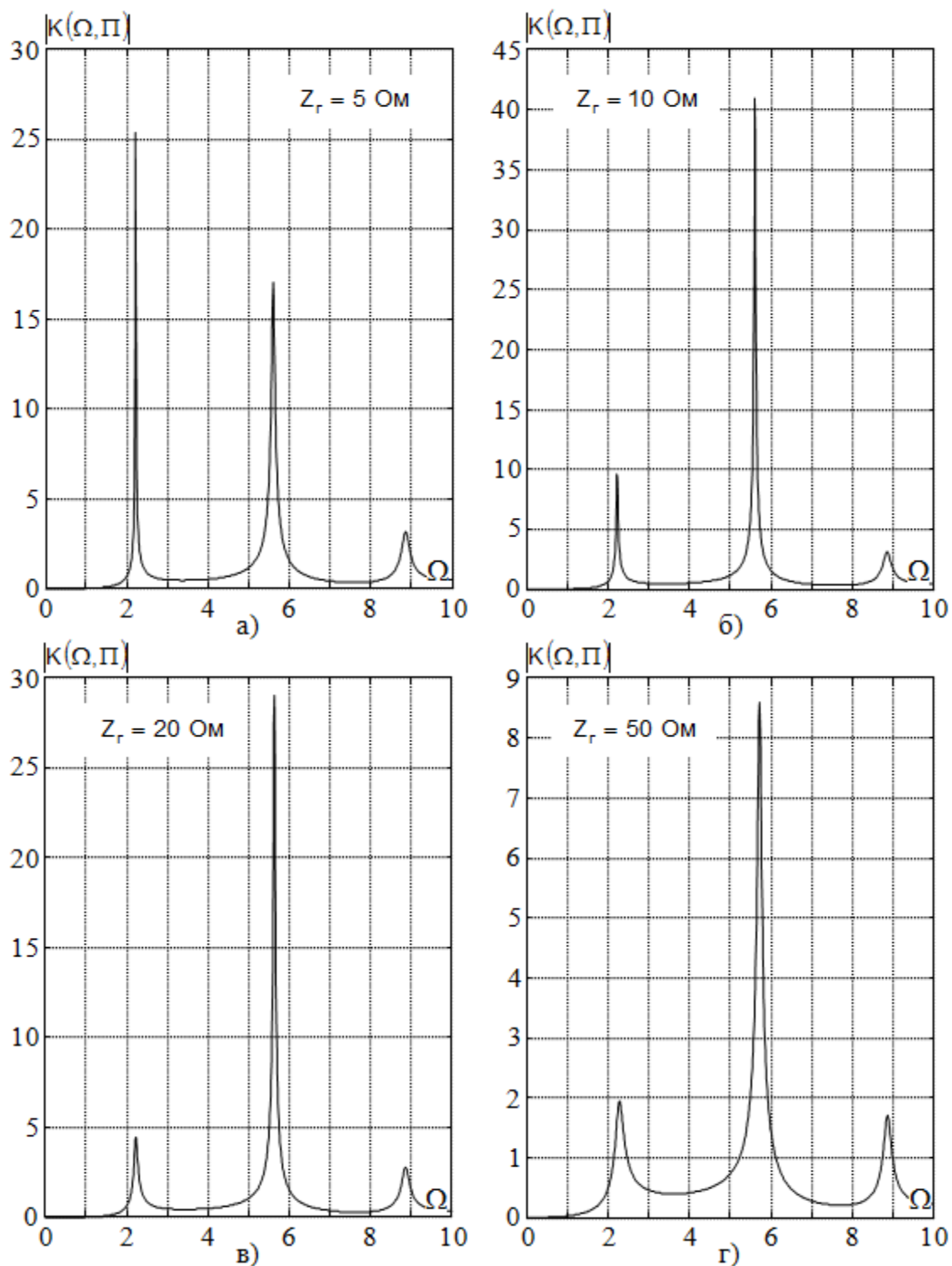
Фізичний зміст зворотного зв'язку, який існує в п'єзоелектричних перетворювачах, практично очевидний. На частоті електромеханічного резонансу радіальних коливань істотно зростають рівні зміщень матеріальних частинок п'єзоелектричного диска. Це супроводжується збільшенням деформацій і, як наслідок, рівнів поляризаційних зарядів на електродах первинного електричного кола. Через це збільшується амплітуда електричного струму в первинному електричному колі, що супроводжується збільшенням падіння напруги на опорі  $Z_r$  і, відповідно, зменшенням різниці потенціалів  $U_0$  (див. рис. 3.11).

З метою визначення впливу вихідного імпедансу джерела електричного сигналу на коефіцієнт трансформації п'єзоелектричного перетворювача була виконана серія розрахунків, результати яких показані на рис. 3.13– рис. 3.16.

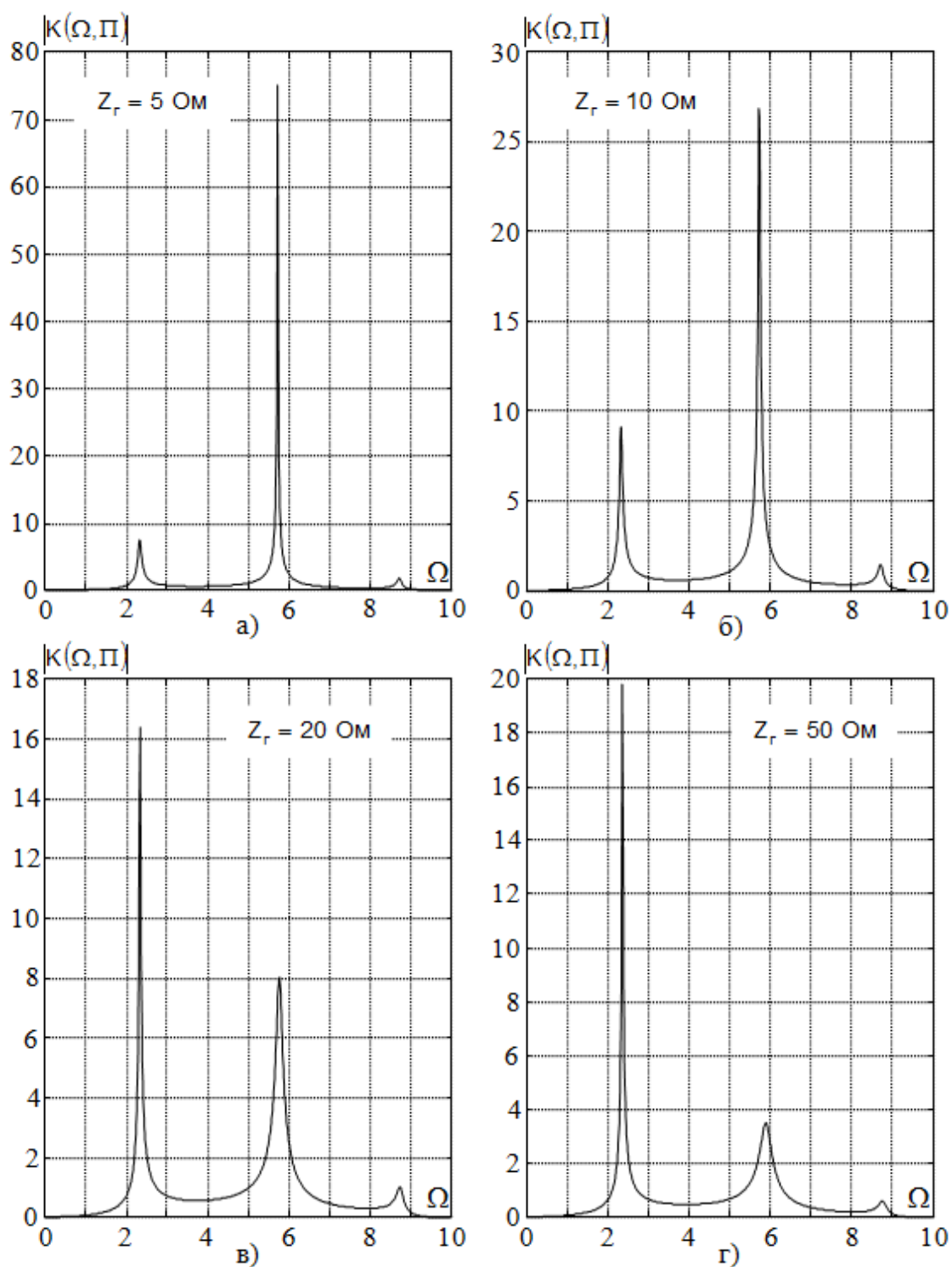
Всі розрахунки були виконані для вільного п'єзокерамічного диска радіусом  $R = 25 \cdot 10^{-3}$  м і товщиною  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-3}$  м. Матеріал диска – поляризована по товщині п'єзокераміка типу ЦТС з наступними параметрами:  $\rho_0 = 7400$  кг/м<sup>3</sup>;  $c_{11}^E = 112$  ГПа;  $c_{12}^E = 62$  ГПа;  $c_{33}^E = 100$  ГПа;  $e_{33} = 20$  Кл/м<sup>2</sup>;  $e_{31} = -9$  Кл/м<sup>2</sup>;  $\chi_{33}^e = 1800 \chi_0$ ;  $\chi_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – діелектрична постійна. У розрахунках, результати яких показані на рис. 3.13 – рис. 3.16, добротність п'єзокераміки  $Q_M = 100$ . При

побудові кривих, показаних на рис. 3.13 і рис. 3.14 було прийнято значення електричного навантаження  $Z_n = 1000 \text{ Ом}$ . Значення модуля електричного імпедансу джерела електричного сигналу показано в полі рисунків. По осях ординат на рис. 3.13 – рис. 3.16 відкладені числові значення модуля коефіцієнта трансформації. По осях абсцис – безрозмірна частота  $\Omega = \omega\tau_0$ , де  $\tau_0 = R/\sqrt{c_{11}/\rho_0}$  – постійна часу розглянутого п'єзокерамічного диска. Як випливає з результатів, представлених на рис. 3.13 і рис. 3.14, зміна параметра  $Z_r$  супроводжується суттєвими змінами частотної характеристики п'єзокерамічного дискового перетворювача. Ті ж тенденції спостерігаються і на рис. 3.15. На рис. 3.16 показано вплив механічної добротності  $Q_m$  матеріалу диска на зміну коефіцієнта трансформації у вузькій смузі частот в околиці частоти першого електромеханічного резонансу радіальних коливань вільного (не закріпленого по контуру  $\rho = R$ ) п'єзокерамічного диска. Числові значення добротностей вказані в полі рисунків цифрами біля відповідних кривих. Чітко видно, що збільшення вихідного опору джерела електричного сигналу супроводжується істотним зменшенням впливу механічної добротності матеріалу диска на коефіцієнт трансформації.

З результатів розрахунків, які показані на рис. 3.13 – рис. 3.16, можна зробити висновок, що кожному набору фізико-механічних параметрів п'єзоелектрика, кожній конфігурації електродів первинного і вторинного електричного кола та фіксованому електричному навантаженню п'єзоелектричного перетворювача відповідає своє фіксоване значення вихідного опору  $Z_r$  джерела електричного сигналу, при якому реалізується максимальний коефіцієнт трансформації в заданому діапазоні частот [2].

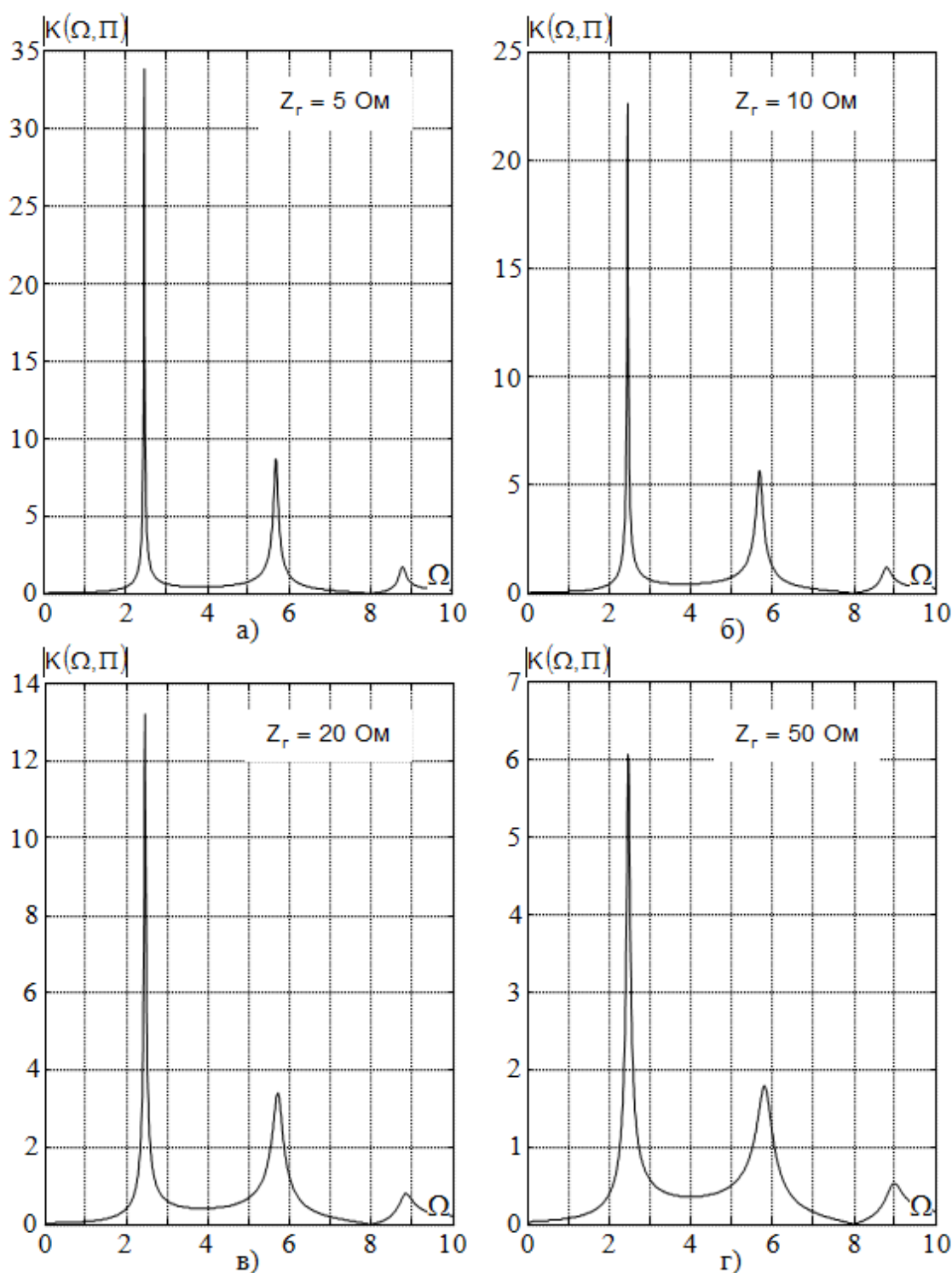


**Рис. 3.13.** Вплив вихідного опору джерела сигналу на частотно залежну зміну модуля коефіцієнта трансформації при відносних розмірах електродів  $R_1/R = 0,2$ ,  $R_2/R = 0,25$  і  $R_3/R = 0,999$

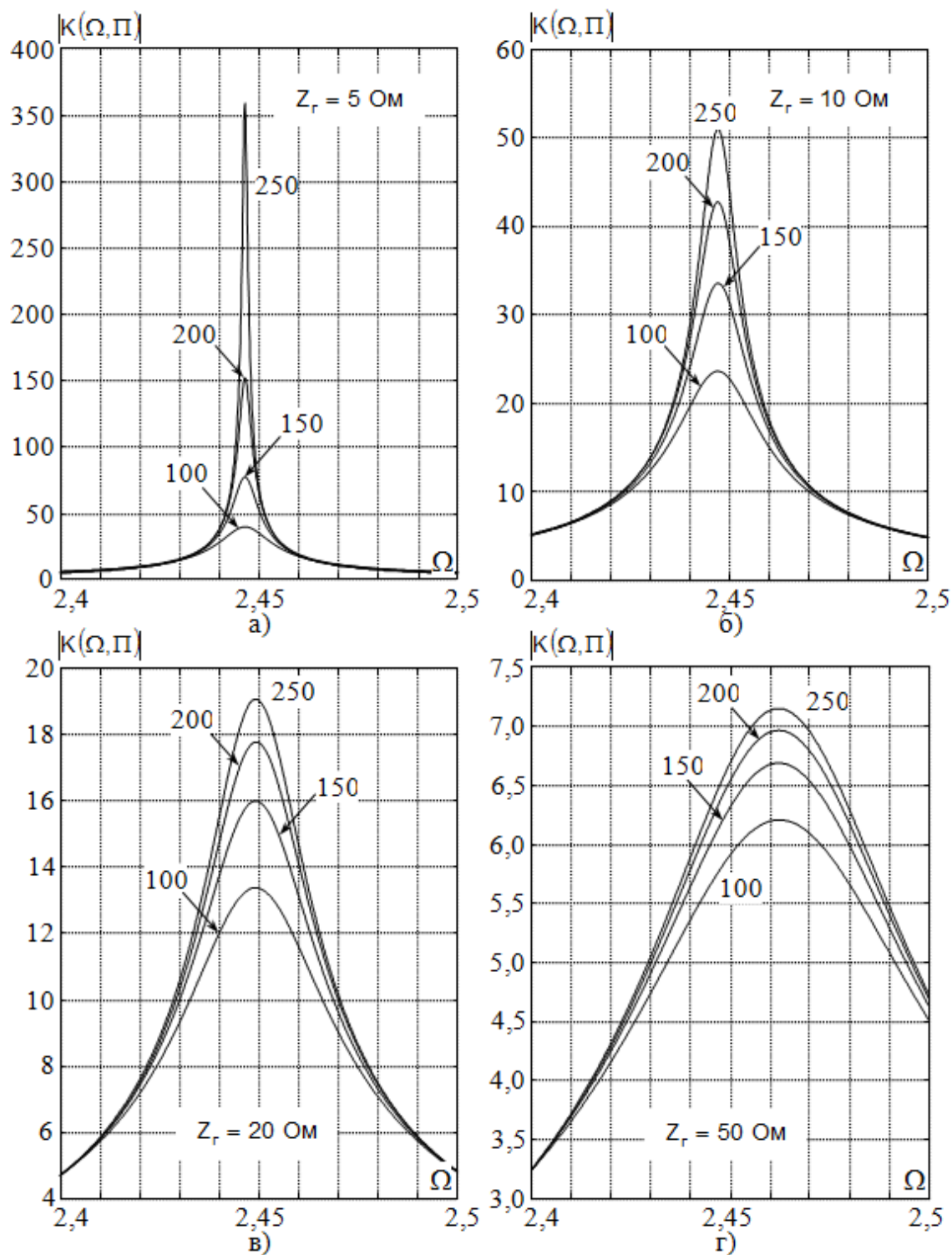


**Рис. 3.14.** Вплив вихідного опору джерела сигналу на частотно залежну зміну модуля коефіцієнта трансформації при відносних розмірах електродів  $R_1/R = 0,4$ ,  $R_2/R = 0,45$  і  $R_3/R = 0,999$





**Рис. 3.15.** Вплив вихідного опору джерела сигналу на частотно залежну зміну модуля коефіцієнта трансформації при відносних розмірах електродів  $R_1/R = 12/25$ ,  $R_2/R = 15/25$ ,  $R_3/R = 0,999$  і електричному навантаженні  $Z_H = 10$  кОм



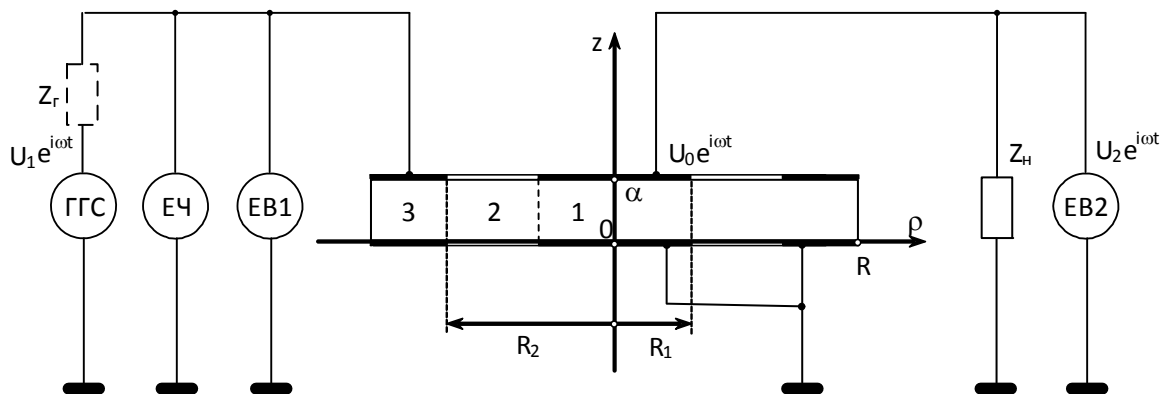
**Рис. 3.16.** Вплив вихідного опору джерела сигналу на частотно залежну зміну модуля коефіцієнта трансформації при відносних розмірах електродів  $R_1/R = 12/25$ ,  $R_2/R = 15/25$ ,  $R_3/R = 0,999$  і електричному навантаженні  $Z_{\mu} = 10 \text{ кОм}$

### 3.2.3. Дослідження коефіцієнта трансформації п'єзоелектричного перетворювача з кільцевим електродом в первинному електричному колі

На рис. 3.17 приведена схема експериментальних досліджень дискового п'єзокерамічного трансформаторного перетворювача типу кільце-диск.

На схемі аббревіатурою ГГС позначений генератор гармонійних сигналів ГЗ-19, ЕЧ – електронний частотомір ЧЗ-57, ЕВ1 і ЕВ2 – електронні вольтметри ВЗ-41.

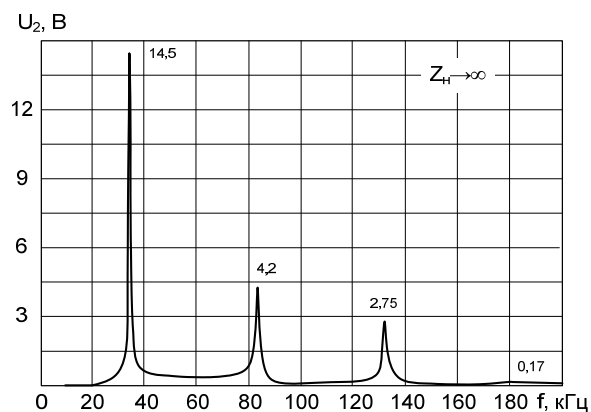
Для експериментальних досліджень був використаний дисковий п'єзоелектричний елемент  $\varnothing 66 \times 3$  мм ( $\alpha = 3 \times 10^{-3}$  м;  $R = 33 \times 10^{-3}$  м;  $R_1 = 19 \times 10^{-3}$  м;  $R_2 = 20 \times 10^{-3}$  м) з матеріалу типу ЦТС. Вхідна напруга  $U_1 = 1$  В.



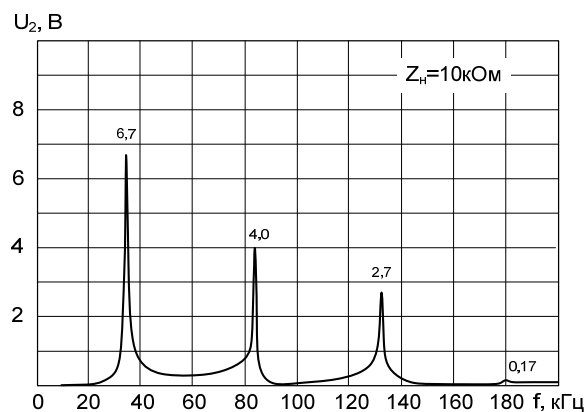
**Рис. 3.17. Електрична схема для вимірювання п'єзоелектричного трансформаторного перетворювача з кільцевим електродом в первинному електричному колі**

Результати вимірювання амплітудно-частотної характеристики дискового п'єзоелектричного трансформаторного перетворювача типу кільце-диск в залежності від величини навантаження представлені на рис. 3.18 [7].

$$f_1 = 34,49 \text{ кГц}; f_2 = 83,7 \text{ кГц}; f_3 = 132,3 \text{ кГц}; f_4 = 179,4 \text{ кГц} \quad f_1 = 34,49 \text{ кГц}; f_2 = 83,7 \text{ кГц}; f_3 = 132,2 \text{ кГц}; f_4 = 179,1 \text{ кГц}$$

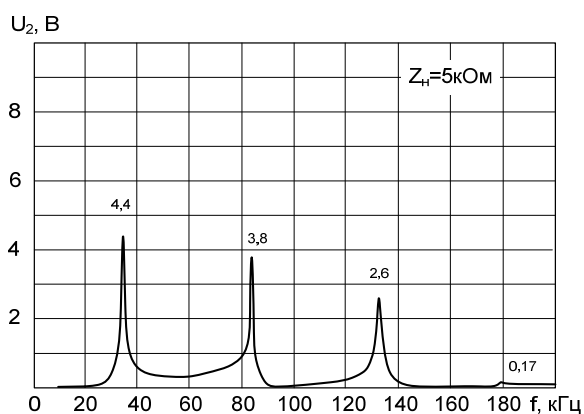


а)

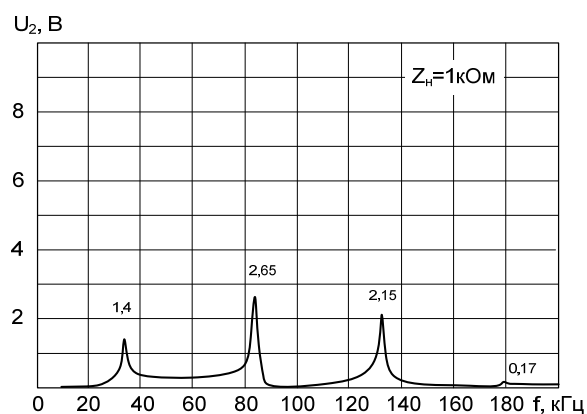


б)

$$f_1 = 34,16 \text{ кГц}; f_2 = 83,75 \text{ кГц}; f_3 = 132,5 \text{ кГц}; f_4 = 179,14 \text{ кГц} \quad f_1 = 33,5 \text{ кГц}; f_2 = 83,76 \text{ кГц}; f_3 = 132,2 \text{ кГц}; f_4 = 178,8 \text{ кГц}$$

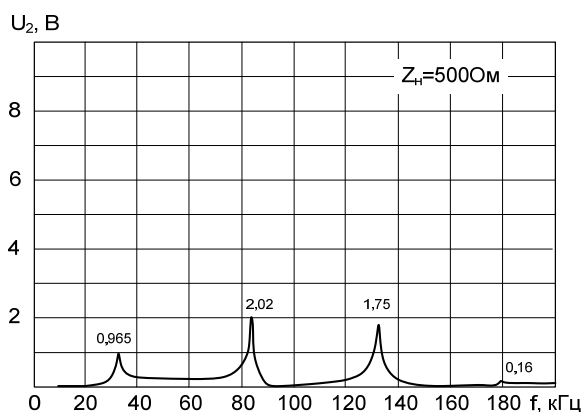


в)

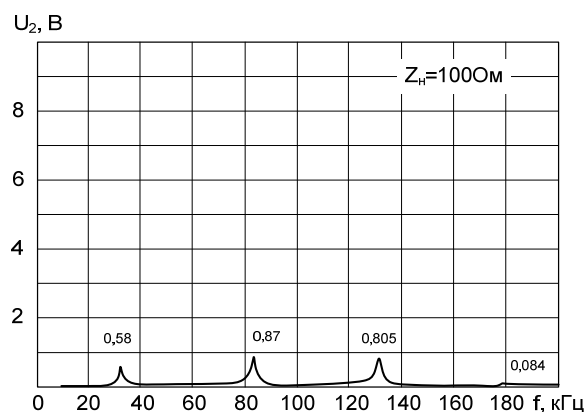


г)

$$f_1 = 32,8 \text{ кГц}; f_2 = 83,6 \text{ кГц}; f_3 = 132,2 \text{ кГц}; f_4 = 179,0 \text{ кГц} \quad f_1 = 32,0 \text{ кГц}; f_2 = 83,06 \text{ кГц}; f_3 = 131,2 \text{ кГц}; f_4 = 179,1 \text{ кГц}$$



д)



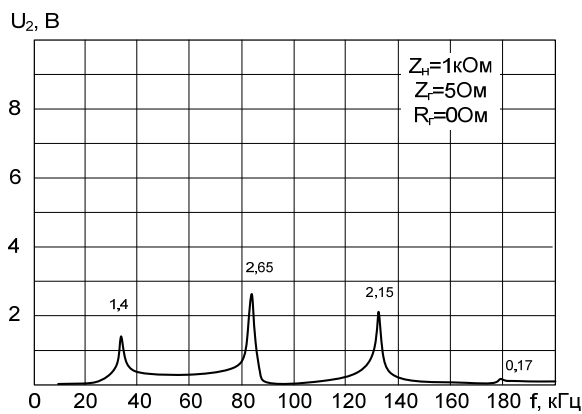
е)

**Рис. 3.18. Амплітудно-частотні характеристики п'єзоелектричного трансформаторного перетворювача з кільцевим електродом в первинному електричному колі в залежності від величини навантаження**

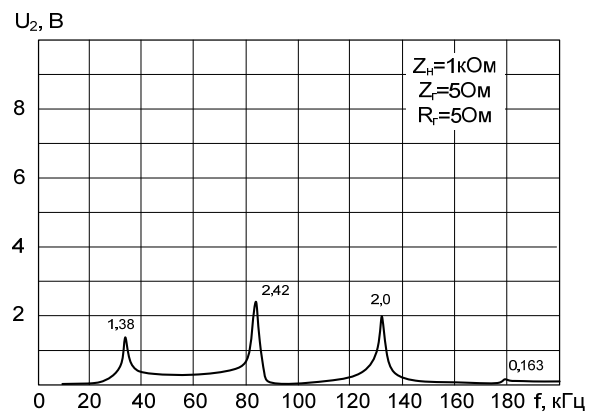
Як видно з рис. 3.18 при малому значенні  $Z_H$  перетворювач працює в режимі близькому до короткого замикання у вторинному колі. Коефіцієнт трансформації при цьому прямує до нуля. При збільшенні навантаження  $Z_H$  зменшується його вплив на коефіцієнт трансформації (збільшується коефіцієнт трансформації).

Результати вимірювання амплітудно-частотної характеристики дискового п'єзоелектричного трансформаторного перетворювача типу кільцевий диск в залежності від величини вихідного опору генератора при величині навантаження 1 кОм представлені на рис. 3.19.

$$f_1 = 33,5 \text{ кГц}; f_2 = 83,76 \text{ кГц}; f_3 = 132,2 \text{ кГц}; f_4 = 178,8 \text{ кГц} \quad f_1 = 33,69 \text{ кГц}; f_2 = 83,7 \text{ кГц}; f_3 = 132,15 \text{ кГц}; f_4 = 179,5 \text{ кГц}$$

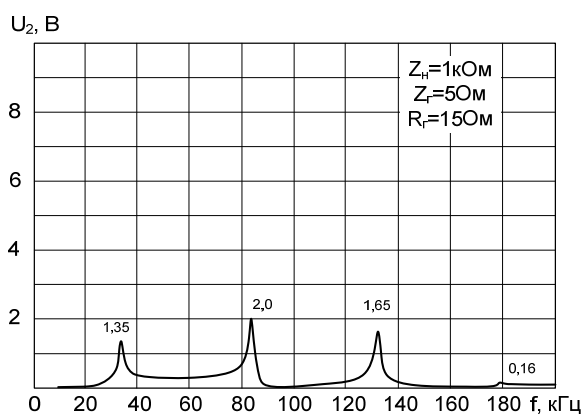


а)

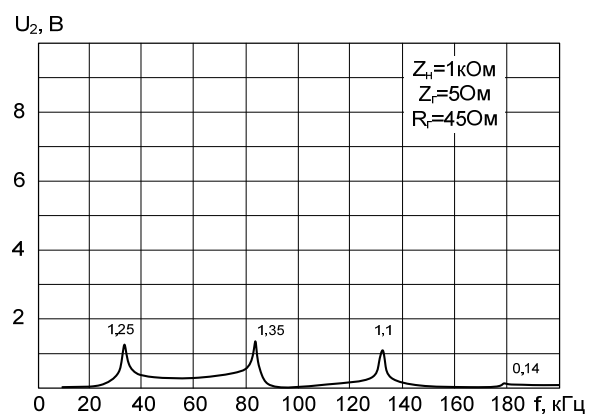


б)

$$f_1 = 33,7 \text{ кГц}; f_2 = 83,69 \text{ кГц}; f_3 = 132,2 \text{ кГц}; f_4 = 178,8 \text{ кГц} \quad f_1 = 33,49 \text{ кГц}; f_2 = 83,7 \text{ кГц}; f_3 = 132,52 \text{ кГц}; f_4 = 179,2 \text{ кГц}$$



в)

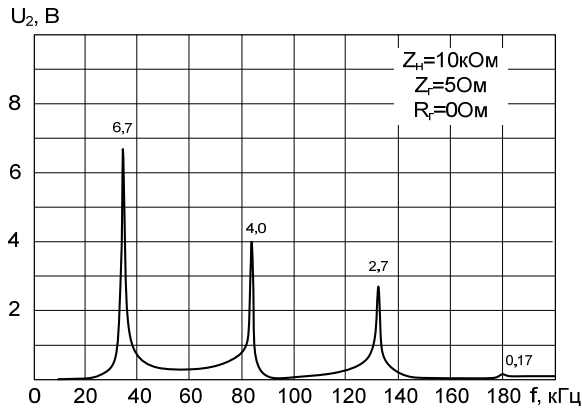


г)

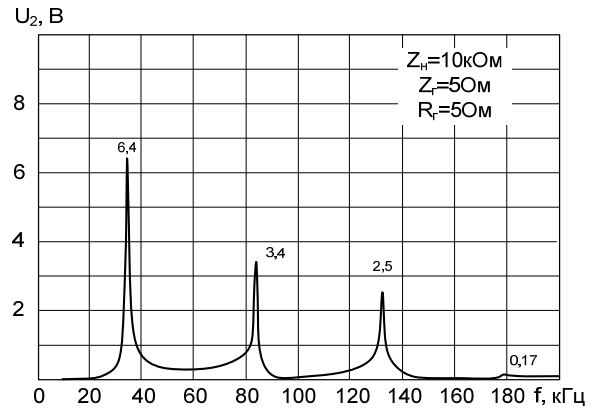
**Рис. 3.19.** АЧХ п'єзоелектричного трансформаторного перетворювача з кільцевим електродом в первинному електричному колі в залежності від величини вихідного опору генератора при величині навантаження 1 кОм

На рис. 3.20 представлені результати вимірювання амплітудно-частотної характеристики дискового п'єзоелектричного трансформаторного перетворювача типу кільце-диск в залежності від величини вихідного опору генератора при величині навантаження 10 кОм.

$$f_1 = 34,49 \text{ кГц}; f_2 = 83,7 \text{ кГц}; f_3 = 132,2 \text{ кГц}; f_4 = 179,1 \text{ кГц} \quad f_1 = 34,5 \text{ кГц}; f_2 = 83,74 \text{ кГц}; f_3 = 132,18 \text{ кГц}; f_4 = 179,1 \text{ кГц}$$

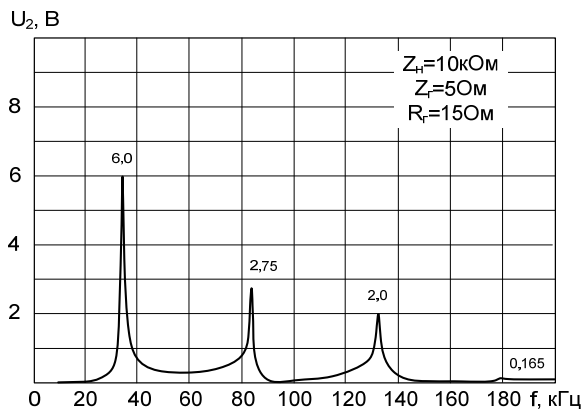


а)

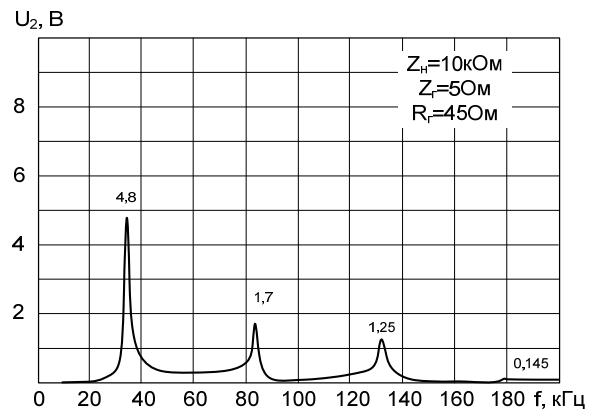


б)

$$f_1 = 34,5 \text{ кГц}; f_2 = 83,7 \text{ кГц}; f_3 = 132,34 \text{ кГц}; f_4 = 179,1 \text{ кГц} \quad f_1 = 34,6 \text{ кГц}; f_2 = 83,7 \text{ кГц}; f_3 = 132,35 \text{ кГц}; f_4 = 179,36 \text{ кГц}$$



в)



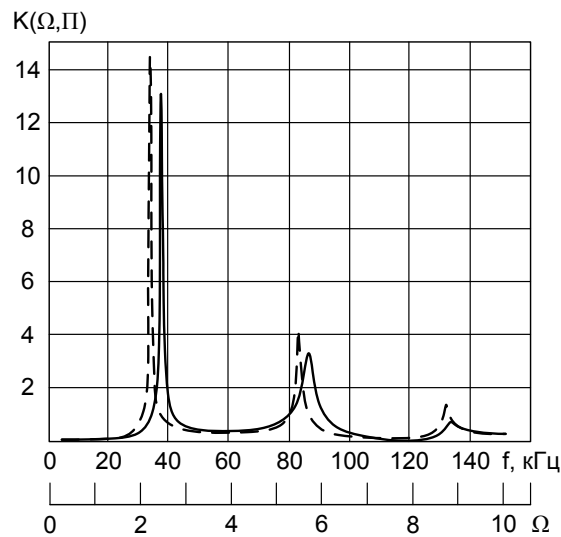
г)

**Рис. 3.20. Амплітудно-частотні характеристики п'єзоелектричного трансформаторного перетворювача з кільцевим електродом в первинному електричному колі в залежності від величини вихідного опору генератора при величині навантаження 10 кОм**

З рис. 3.19, 3.20 видно, що амплітудно-частотні характеристики п'єзоелектричного перетворювача є залежними від величини вихідного опору

генератора.

На рис. 3.21 наведені розрахункова (суцільна лінія) і експериментально отримана (штрихова лінія) криві частотної залежності модуля коефіцієнта трансформації п'єзокерамічного дискового трансформаторного перетворювача. Природно, що розміри дискового перетворювача в розрахунку і експерименті були обрані однаковими, тобто радіус  $R = 33 \cdot 10^{-3}$  м і товщина  $\alpha = 3 \cdot 10^{-3}$  м. По осі ординат відкладаються значення модуля коефіцієнта трансформації п'єзокерамічного дискового перетворювача, а по осі абсцис – частота  $f$  (безрозмірна величина  $\Omega = \omega\tau_0$ , де  $\tau_0 = R/\sqrt{c_{11}/\rho_0}$  – постійна часу п'єзокерамічного диску). Значенню  $\Omega = 1$  відповідає частота  $f = 15206$  Гц.



**Рис. 3.21. Розрахункова (суцільна лінія) і експериментально отримана (штрихова лінія) криві частотної залежності модуля коефіцієнта трансформації п'єзокерамічного дискового перетворювача**

Як і слід було очікувати, абсолютні значення частот резонансів в розрахунку і експерименті відрізняються один від одного. Так, слідуючи розрахунку, частоти першого, другого і третього електромеханічних

резонансів відповідно дорівнюють  $f_{r1} = 37193 \text{ Hz}$ ,  $f_{r2} = 88194 \text{ Hz}$  і  $f_{r3} = 135330 \text{ Hz}$ ; відношення частот  $\zeta = f_{r2}/f_{r1} = 2,371$ .

Експериментальні значення тих же величин дорівнюють відповідно  $f_{r1} = 34491 \text{ Hz}$ ,  $f_{r2} = 83728 \text{ Hz}$ ,  $f_{r3} = 132325 \text{ Hz}$  і  $\zeta = f_{r2}/f_{r1} = 2,428$ . Якщо експериментальні дані прийняти в якості істинних, то похибка визначення відношення частот складе  $\Delta\zeta = 2,3\%$ . Отримані результати пояснюються дуже просто. Числові значення частот резонансів визначаються розмірами і фізико-механічними параметрами матеріалу дискового елемента. Відношення частот резонансів одного і того ж диску визначаються практично тільки розмірами. З цієї причини спостерігається досить задовільний збіг теоретично і експериментально визначених відношень частот резонансів. Розбіжності абсолютних значень частот резонансів пояснюється невідповідністю фізико-механічних параметрів п'єзокераміки, які були закладені в розрахунок і які притаманні експериментально досліджуваному об'єкту. Зіставляючи криві можна зробити висновок, що добротність матеріалу експериментально досліджуваного зразка мінімум в 1,2 рази більше закладеної в розрахунок добротності.

Таким чином, можна стверджувати, що характер зміни обох кривих, наведених на рис. 3.21, в досить широкому діапазоні частот збігається з точністю до деталей. Це означає, що якісний зміст виразу (3.67) адекватний процесам, які відбуваються в реальному об'єкті. Говорячи іншими словами, вираз (3.67) – математична модель трансформаторного перетворювача з кільцевим електродом в первинному електричному колі – в достатній мірі адекватний реальному об'єкту і процесам, що відбувається в ньому. Останнє дозволяє припускати, що математичний опис напружено-деформованого стану дискового перетворювача також досить добре відповідає реальному стану речей [10].

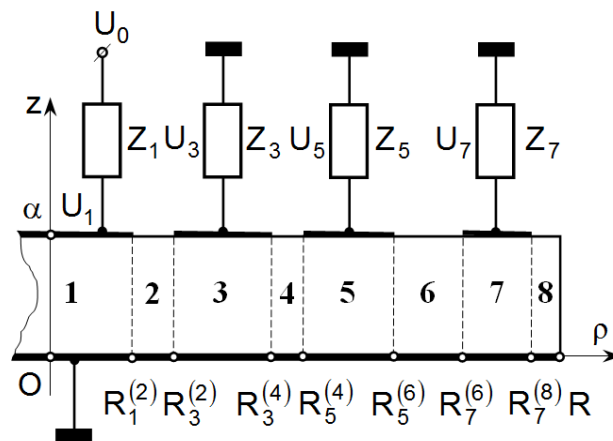


### 3.3. Математична модель багатосекційного п'єзоелектричного перетворювача з кільцевими електродами у вторинних електричних колах

#### 3.3.1. Визначення електричних потенціалів у вторинних електричних колах багатосекційного дискового п'єзоелектричного перетворювача

Розглянемо дисковий п'єзоелектричний перетворювач з розділеними електродами, який має два і більше вторинних електричних кола. Такі перетворювачі надалі будемо називати багатосекційними або поліелектродними.

На рис. 3.22 схематично зображено дисковий перетворювач з трьома кільцевими електродами у вторинних електричних колах. Електрод первинного електричного кола має форму кола радіуса  $R_1^{(2)}$ . До нього підключено джерело різниці електричних потенціалів  $U_0 e^{i\omega t}$  ( $U_0$  – амплітуда різниці електричних потенціалів;  $i = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця;  $\omega$  – кругова частота;  $t$  – час).



**Рис. 3.22. Розрахункова схема багатосекційного п'єзоелектричного перетворювача з трьома вторинними електричними колами**

Вихідний опір джерела електричних потенціалів позначено на рис. 3.22

символом  $Z_1$ . Символами  $Z_3, \dots, Z_7$  позначені електричні імпеданси навантажень у вторинних електричних колах перетворювача. Диск виконаний з поляризованої по товщині п'єзокераміки типу ЦТС. Нижня поверхня ( $z = 0$ ) диска повністю електродована і заземлена.

Будемо вважати, що амплітудне значення  $U_0$  вхідного електричного впливу невелике, тобто мінімум на три порядки менше різниці потенціалів, яка була використана в процесі електричної поляризації диска. При цьому п'єзоелектричний перетворювач можна розглядати як лінійну фізичну систему, тобто електричні потенціали у вторинних електричних колах змінюються в часі також за гармонійним законом  $e^{i\omega t}$ . Очевидно, що математичною моделлю показаного на рис. 3.22 п'єзокерамічного багатосекційного перетворювача буде набір з трьох функцій

$$K_{2n+1}(\omega) = \frac{U_{2n+1}(\omega)}{U_0}, \quad n = 1, 2, 3, \quad (3.68)$$

де  $K_{2n+1}(\omega)$  – коефіцієнт трансформації в  $n$ -ому вторинному електричному колі;  $U_{2n+1}(\omega)$  – падіння електричної напруги на електричному навантаженні  $Z_{2n+1}$  в  $n$ -ому вторинному електричному колі.

Побудуємо вирази для розрахунку електричних потенціалів  $U_{2n+1}(\omega)$ .

Будемо вважати, що кругова частота  $\omega$  належить частотному діапазону, в межах якого п'єзокерамічний диск можна вважати тонким, і стверджувати, що його напружено-деформований стан визначається в основному радіальними зміщеннями матеріальних частинок. В цьому випадку фізичний стан п'єзоелектрика в областях під електродами на поверхні  $z = \alpha$  визначається узагальненим законом Гука і законом електричної поляризації діелектрика з п'єзоелектричними властивостями, які записуються наступними співвідношеннями [3]

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(2n+1)}(\rho) &= c_{11}\varepsilon_{\rho\rho}^{(2n+1)}(\rho) + c_{12}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2n+1)}(\rho) - e_{31}^*E_z^{(2n+1)}, \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(2n+1)}(\rho) &= c_{12}\varepsilon_{\rho\rho}^{(2n+1)}(\rho) + c_{11}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2n+1)}(\rho) - e_{31}^*E_z^{(2n+1)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$D_z^{(2n+1)}(\rho) = e_{31}^*[\varepsilon_{\rho\rho}^{(2n+1)}(\rho) + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2n+1)}(\rho)] + \chi_{33}^*E_z^{(2n+1)}, \quad (3.70)$$

де  $\sigma_{\rho\rho}^{(2n+1)}(\rho)$  і  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(2n+1)}(\rho)$  – механічні напруження стискання-розтягування в області  $2n+1$  вздовж радіальної і окружної вісей циліндричної системи координат  $\rho, \varphi, z$  (рис. 3.22) відповідно;  $c_{11} = c_{11}^E - (c_{12}^E)^2 / c_{33}^E$  і  $c_{12} = c_{12}^E (1 - c_{12}^E / c_{33}^E)$  – модулі пружності для режиму планарних (радіальних) коливань тонкого п'єзокерамічного диска;  $\varepsilon_{\rho\rho}^{(2n+1)}(\rho) = \partial u_{\rho}^{(2n+1)}(\rho) / \partial \rho$  і  $\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2n+1)}(\rho) = u_{\rho}^{(2n+1)}(\rho) / \rho$  – деформації стискання-розтягування уздовж радіальної і окружної вісі;  $u_{\rho}^{(2n+1)}(\rho)$  – радіальне зміщення матеріальних частинок п'єзокерамічного диска. Символами  $e_{31}^* = e_{31} - e_{33} c_{12}^E / c_{33}^E$  і  $\chi_{33}^* = \chi_{33}^e + e_{33}^2 / c_{33}^E$  позначені п'єзоелектричний модуль і діелектрична проникність для режиму планарних коливань. Символом  $E_z^{(2n+1)}$  в співвідношеннях (3.69) і (3.70) позначена напруженість електричного поля під  $2n+1$ -им електродом;  $D_z^{(2n+1)}(\rho)$  – аксіальний компонент вектора електричної індукції. Матриці матеріальних констант  $c_{\beta\lambda}^E$ ,  $e_{k\beta}$  і  $\chi_{ij}^e$  поляризованої в напрямку координатної осі  $Oz$  п'єзокераміки наведені в додатку Б. Там же показано, що  $E_z^{(2n+1)} = -U_{2n+1}(\omega) / \alpha$ .

Для кільцевих областей з парними номерами  $m = 2, 4, 6, 8$ , поверхні  $z = \alpha$  не покриті шаром металу, електрична індукція  $D_z^{(m)}(\rho) = 0$ , а механічні напруження  $\sigma_{\rho\rho}^{(m)}(\rho)$  і  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(m)}(\rho)$  визначаються наступним чином:

$$\sigma_{\rho\rho}^{(m)}(\rho) = c_{11}^D \frac{\partial u_{\rho}^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{12}^D \frac{u_{\rho}^{(m)}(\rho)}{\rho}, \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{(m)}(\rho) = c_{12}^D \frac{\partial u_{\rho}^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{11}^D \frac{u_{\rho}^{(m)}(\rho)}{\rho}, \quad (3.71)$$

де  $c_{11}^D = c_{11} + (e_{31}^*)^2 / \chi_{33}^*$ ,  $c_{12}^D = c_{12} + (e_{31}^*)^2 / \chi_{33}^*$  – модулі пружності тонкого п'єзокерамічного диска в режимі сталості (рівності нулю) електричної індукції.

Амплітуди електричних струмів  $I_{2n+1}(\omega)$  у вторинних електричних колах багатосекційного п'єзоелектричного перетворювача визначаються швидкістю зміни електричного заряду  $Q_{2n+1}(\omega)$  на  $(2n+1)$ -ому кільцевому електроді, причому

$$I_{2n+1}(\omega) = -i\omega Q_{2n+1}(\omega), \quad n = 1, 2, 3. \quad (3.72)$$

Амплітудні значення електричних зарядів

$$Q_{2n+1}(\omega) = 2\pi \int_{R_{2n+1}^{(2n)}}^{R_{2n+1}^{(2n+2)}} \rho D_z^{(2n+1)}(\rho) d\rho, \quad n = 1, 2, 3,$$

де  $R_{2n+1}^{(2n)}$  і  $R_{2n+1}^{(2n+2)}$  – ліва і права межі кільцевої області під електродом номера  $2n + 1$  (рис. 3.22). оскільки

$$D_z^{(2n+1)}(\rho) = \epsilon_{31}^* \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u_\rho^{(2n+1)}(\rho)] - \chi_{33}^* \frac{U_{2n+1}(\omega)}{\alpha},$$

остільки

$$Q_{2n+1}(\omega) = 2\pi \epsilon_{31}^* \left[ R_{2n+1}^{(2n+2)} u_\rho^{(2n+1)}(R_{2n+1}^{(2n+2)}) - R_{2n+1}^{(2n)} u_\rho^{(2n+1)}(R_{2n+1}^{(2n)}) \right] - C_{2n+1}^* U_{2n+1}(\omega),$$

де  $C_{2n+1}^* = \pi \left[ (R_{2n+1}^{(2n+2)})^2 - (R_{2n+1}^{(2n)})^2 \right] \chi_{33}^* / \alpha$  – електрична ємність  $(2n + 1)$ -го кільцевого електрода.

Вираз для розрахунку електричного заряду на  $(2n + 1)$ -ому електроді можна записати в наступному вигляді

$$Q_{2n+1}(\omega) = \frac{2\pi \epsilon_{31}^* C_{2n+1}^*}{\chi_{33}^* \left[ (R_{2n+1}^{(2n+2)})^2 - (R_{2n+1}^{(2n)})^2 \right]} \left[ R_{2n+1}^{(2n+2)} u_\rho^{(2n+1)}(R_{2n+1}^{(2n+2)}) - R_{2n+1}^{(2n)} u_\rho^{(2n+1)}(R_{2n+1}^{(2n)}) \right] - C_{2n+1}^* U_{2n+1}(\omega). \quad (3.73)$$

Так як  $u_{2n+1}(\omega) = I_{2n+1} Z_{2n+1}$  ( $n = 1, 2, 3$ ), то, після підстановки виразу (3.73) в визначення (3.72) електричного струму  $I_{2n+1}$ , можна записати

$$U_{2n+1}(\omega) = \frac{2\pi \epsilon_{31}^* f_{2n+1}(\omega)}{\chi_{33}^* \left[ (R_{2n+1}^{(2n+2)})^2 - (R_{2n+1}^{(2n)})^2 \right]} \left[ R_{2n+1}^{(2n+2)} u_\rho^{(2n+1)}(R_{2n+1}^{(2n+2)}) - R_{2n+1}^{(2n)} u_\rho^{(2n+1)}(R_{2n+1}^{(2n)}) \right], \quad (3.74)$$

де  $f_{2n+1}(\omega) = -i\omega C_{2n+1}^* Z_{2n+1} / [1 - i\omega C_{2n+1}^* Z_{2n+1}]$  – функція включення  $(2n + 1)$ -го кільцевого електрода у вторинне електричне коло [11].

Для того, щоб наповнити співвідношення (3.74) конкретним змістом, необхідно коректно визначити радіальні зміщення в різних областях п'єзокерамічного диска.

### 3.3.2. Визначення радіальних зміщень матеріальних частинок диска та побудова математичної моделі багатосекційного п'єзоелектричного перетворювача

Радіальні зміщення  $u_p^{(k)}(\rho)$  ( $k = 1, 2, \dots, 8$ ) у всіх областях диска задовольняють одному і тому ж рівнянню усталених радіальних коливань тонкого п'єзокерамічного диска, яке можна записати в наступному вигляді

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}^{(k)}(\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} [\sigma_{\rho\rho}^{(k)}(\rho) - \sigma_{\phi\phi}^{(k)}(\rho)] + \rho_0 \omega^2 u_p^{(k)}(\rho) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 8, \quad (3.75)$$

де  $\rho_0$  – густина п'єзокераміки;  $\sigma_{\rho\rho}^{(k)}(\rho)$  і  $\sigma_{\phi\phi}^{(k)}(\rho)$  – нормальні механічні напруження в  $k$ -ій по номеру області п'єзокерамічного диска, визначені співвідношеннями (3.69) для областей непарних номерів (рис. 3.24) і формулами (3.71) для кільцевих областей з парними номерами.

Для однакового опису механічних напружень  $\sigma_{\rho\rho}^{(2n+1)}(\rho)$  і  $\sigma_{\phi\phi}^{(2n+1)}(\rho)$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) в областях під електродами, будемо вважати, що амплітудне значення потенціалу на електроді первинного електричного кола є відомою величиною  $U_1$ , яка визначається стандартним співвідношенням:

$$U_1 = \frac{U_0 Z_{ен}^{(1)}}{Z_1 + Z_{ен}^{(1)}}, \quad (3.76)$$

де  $Z_{ен}^{(1)}$  – електричний імпеданс першої області п'єзокерамічного диска.

Так як  $E_z^{(2n+1)} = -U_{2n+1}(\omega)/\alpha$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ), а деформації  $\varepsilon_{\rho\rho}^{(2n+1)}(\rho) = \partial u_p^{(2n+1)}(\rho)/\partial \rho$  і  $\varepsilon_{\phi\phi}^{(2n+1)}(\rho) = u_p^{(2n+1)}(\rho)/\rho$ , то вирази (3.69) можна записати в наступному вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(2n+1)}(\rho) &= c_{11} \left[ \frac{\partial u_p^{(2n+1)}(\rho)}{\partial \rho} + \xi \frac{u_p^{(2n+1)}(\rho)}{\rho} + \frac{e_{31}^*}{c_{11}\alpha} U_{2n+1}(\omega) \right], \\ \sigma_{\phi\phi}^{(2n+1)}(\rho) &= c_{11} \left[ \xi \frac{\partial u_p^{(2n+1)}(\rho)}{\partial \rho} + \frac{u_p^{(2n+1)}(\rho)}{\rho} + \frac{e_{31}^*}{c_{11}\alpha} U_{2n+1}(\omega) \right], \end{aligned} \quad (3.77)$$

де  $\xi = c_{12}/c_{11} < 1$  – безрозмірний параметр.

Підставляючи вирази (3.77) в рівняння (3.75), отримуємо наступну конструкцію

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u_\rho^{(2n+1)}}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial u_\rho^{(2n+1)}}{\partial \rho} + [(k\rho)^2 - 1] u_\rho^{(2n+1)} = 0, \quad (3.78)$$

де  $k = \omega / \sqrt{c_{11}/\rho_0}$  – хвильове число радіальних коливань в  $2n + 1$ -ій області під відповідним електродом. Розв'язки рівняння (3.78) для областей електричного диска під електродами мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} u_\rho^{(1)}(\rho) &= A_1 J_1(k\rho) \forall \rho \in [0, R_1^{(2)}], \\ u_\rho^{(3)}(\rho) &= A_4 J_1(k\rho) + A_5 N_1(k\rho) \forall \rho \in [R_3^{(2)}, R_3^{(4)}], \\ u_\rho^{(5)}(\rho) &= A_8 J_1(k\rho) + A_9 N_1(k\rho) \forall \rho \in [R_5^{(4)}, R_5^{(6)}], \\ u_\rho^{(7)}(\rho) &= A_{12} J_1(k\rho) + A_{13} N_1(k\rho) \forall \rho \in [R_7^{(6)}, R_7^{(8)}], \end{aligned} \quad (3.79)$$

де  $A_1, \dots, A_{13}$  – константи, що підлягають визначенню;  $J_1(k\rho)$  і  $N_1(k\rho)$  – функції Бесселя і Неймана першого порядку.

Підстановка виразів (3.71) в рівняння сталих радіальних коливань (3.75) дозволяє привести його до наступного вигляду

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u_\rho^{(m)}}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial u_\rho^{(m)}}{\partial \rho} + [(\gamma\rho)^2 - 1] u_\rho^{(m)} = 0, \quad m = 2, 4, 6, 8, \quad (3.80)$$

де  $\gamma = \omega / \sqrt{c_{11}^D/\rho_0}$  – хвильове число радіальних коливань в неелектродованих кільцевих областях диска. Розв'язки рівняння (3.80) для цих областей мають вигляд:

$$\begin{aligned} u_\rho^{(2)}(\rho) &= A_2 J_1(\gamma\rho) + A_3 N_1(\gamma\rho) \forall \rho \in [R_1^{(2)}, R_3^{(2)}], \\ u_\rho^{(4)}(\rho) &= A_6 J_1(\gamma\rho) + A_7 N_1(\gamma\rho) \forall \rho \in [R_3^{(4)}, R_5^{(4)}], \\ u_\rho^{(6)}(\rho) &= A_{10} J_1(\gamma\rho) + A_{11} N_1(\gamma\rho) \forall \rho \in [R_5^{(6)}, R_7^{(6)}], \\ u_\rho^{(8)}(\rho) &= A_{14} J_1(\gamma\rho) + A_{15} N_1(\gamma\rho) \forall \rho \in [R_7^{(8)}, R], \end{aligned} \quad (3.81)$$

де  $A_2, \dots, A_{15}$  – константи, що підлягають визначенню;  $J_1(\gamma\rho)$  і  $N_1(\gamma\rho)$  – як і раніше функції Бесселя і Неймана.

Єдиний (однозначний) опис зміщень  $u_\rho^{(2n+1)}(\rho)$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) і  $u_\rho^{(m)}(\rho)$  ( $m = 2, 4, 6, 8$ ) передбачає коректне визначення всіх п'ятнадцяти констант  $A_1, \dots, A_{15}$ .

На умовних границях поділу областей, тобто на колах  $R_{2n+1}^{(m)}$

( $n = 0, 1, 2, 3; m = 2, 4, 6, 8$ ) повинні виконуватися умови кінематичного і динамічного сполучення напружено-деформованого стану в області під електродом і в області без електродування верхньої поверхні  $z = \alpha$  п'єзоелектричного диска. Ці умови записуються наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} u_{\rho}^{(2n+1)}(\rho) - u_{\rho}^{(m)}(\rho) &= 0 \quad \forall \rho = R_{2n+1}^{(m)}, \\ \sigma_{\rho\rho}^{(2n+1)}(\rho) - \sigma_{\rho\rho}^{(m)}(\rho) &= 0 \quad \forall \rho = R_{2n+1}^{(m)}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Не важко підрахувати (рис. 3.22), що умовних границь розділу  $R_{2n+1}^{(m)}$  кільцевих областей диска всього сім. Отже, умови сполучення (3.82) утворюють всього чотирнадцять рівнянь, в яких міститься п'ятнадцять шуканих констант  $A_1, \dots, A_{15}$ . Відсутнє, п'ятнадцяте, рівняння доставляє умова на границі  $\rho = R$  п'єзокерамічного диска. Будемо вважати, що на контурі  $\rho = R$  реалізовано абсолютно м'яке закріплення диска. При цьому, відповідно до третього закону Ньютона, має виконуватися умова

$$\sigma_{\rho\rho}^{(8)}(R) = 0. \quad (3.83)$$

Підставляючи розв'язки (3.79) і (3.81) в співвідношення (3.69) і (3.71), одержуємо наступні вирази для розрахунку нормальних напружень  $\sigma_{\rho\rho}^{(k)}(\rho)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(1)}(\rho) &= c_{11}k \left\{ A_1 \left[ J_0(k\rho) - \frac{1-\xi}{k\rho} J_1(k\rho) \right] + \frac{e_{31}^* U_1}{c_{11}k\alpha} \right\}, \\ \sigma_{\rho\rho}^{(2n+1)}(\rho) &= c_{11}k \left\{ A_{4n} \left[ J_0(k\rho) - \frac{1-\xi}{k\rho} J_1(k\rho) \right] + \right. \\ &+ \left. A_{4n+1} \left[ N_0(k\rho) - \frac{1-\xi}{k\rho} N_1(k\rho) \right] + \frac{e_{31}^* U_{2n+1}}{c_{11}k\alpha} \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \\ \sigma_{\rho\rho}^{(2m)}(\rho) &= c_{11}^D \gamma \left\{ A_{4m-2} \left[ J_0(\gamma\rho) - \frac{1-\xi_1}{\gamma\rho} J_1(\gamma\rho) \right] + \right. \\ &+ \left. A_{4m-1} \left[ N_0(\gamma\rho) - \frac{1-\xi_1}{\gamma\rho} N_1(\gamma\rho) \right] \right\}, \quad m = 1, 2, 3, 4, \end{aligned} \quad (3.84)$$

де  $\xi = c_{12}/c_{11}$ ;  $\xi_1 = c_{12}^D/c_{11}^D$ .

Підставляючи розв'язки (3.79), (3.81) і визначення (3.84) в умови (3.82) і (3.83), отримуємо неоднорідну систему з п'ятнадцяти лінійних алгебраїчних

рівнянь, в яких міститься п'ятнадцять шуканих констант  $A_1, \dots, A_{15}$ . Очевидно, що ця система рівнянь вирішується щодо шуканих констант єдиним чином. У загальному вигляді ця система рівнянь може бути записана наступним чином:

$$m_j^{(k)} A_k = P_j, \quad j, k = 1, 2, \dots, 15, \quad (3.85)$$

де передбачається підсумовування по двічі повторюваному індексу  $k$ .

Визначник  $D_0$  системи рівнянь (3.85) є визначником стрічкової матриці  $M_0 = \|m_j^{(k)}\|$ , ненульові елементи  $m_j^{(k)}$  ( $j$  – номер рядка;  $k$  – номер стовпчика) якої зосереджені в околиці діагоналі, проведеної з лівого верхнього кута в правий нижній кут. Ненульові елементи матриці  $M_0$  визначаються наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} m_1^{(1)} &= J_1(kR_1^{(2)}); \quad m_1^{(2)} = -J_1(\gamma R_1^{(2)}); \quad m_1^{(3)} = -N_1(\gamma R_1^{(2)}); \\ m_2^{(1)} &= J_0(kR_1^{(2)}) - \frac{1-\xi}{kR_1^{(2)}} J_1(kR_1^{(2)}); \quad m_2^{(2)} = -\eta \left[ J_0(\gamma R_1^{(2)}) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R_1^{(2)}} J_1(\gamma R_1^{(2)}) \right]; \\ m_2^{(3)} &= -\eta \left[ N_0(\gamma R_1^{(2)}) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R_1^{(2)}} N_1(\gamma R_1^{(2)}) \right]; \quad \eta = \frac{c_{11}^D \gamma}{c_{11} k}; \quad m_3^{(2)} = J_1(\gamma R_3^{(2)}); \quad m_3^{(3)} = N_1(\gamma R_3^{(2)}); \quad m_3^{(4)} = -J_1(kR_3^{(2)}); \\ m_3^{(5)} &= -N_1(kR_3^{(2)}); \quad m_4^{(2)} = \eta \left[ J_0(\gamma R_3^{(2)}) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R_3^{(2)}} J_1(\gamma R_3^{(2)}) \right]; \quad m_4^{(3)} = \eta \left[ N_0(\gamma R_3^{(2)}) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R_3^{(2)}} N_1(\gamma R_3^{(2)}) \right]; \\ m_4^{(4)} &= -\left[ J_0(kR_3^{(2)}) - \frac{1-\xi}{kR_3^{(2)}} J_1(kR_3^{(2)}) \right]; \quad m_4^{(5)} = -\left[ N_0(kR_3^{(2)}) - \frac{1-\xi}{kR_3^{(2)}} N_1(kR_3^{(2)}) \right]; \quad m_5^{(4)} = J_1(kR_3^{(4)}); \\ m_5^{(5)} &= N_1(kR_3^{(4)}); \quad m_5^{(6)} = -J_1(\gamma R_3^{(4)}); \quad m_5^{(7)} = -N_1(\gamma R_3^{(4)}); \quad m_6^{(4)} = \left[ J_0(kR_3^{(4)}) - \frac{1-\xi}{kR_3^{(4)}} J_1(kR_3^{(4)}) \right]; \\ m_6^{(5)} &= \left[ N_0(kR_3^{(4)}) - \frac{1-\xi}{kR_3^{(4)}} N_1(kR_3^{(4)}) \right]; \quad m_6^{(6)} = -\eta \left[ J_0(\gamma R_3^{(4)}) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R_3^{(4)}} J_1(\gamma R_3^{(4)}) \right]; \\ m_6^{(7)} &= -\eta \left[ N_0(\gamma R_3^{(4)}) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R_3^{(4)}} N_1(\gamma R_3^{(4)}) \right]; \quad m_7^{(6)} = J_1(\gamma R_5^{(4)}); \quad m_7^{(7)} = N_1(\gamma R_5^{(4)}); \quad m_7^{(8)} = -J_1(kR_5^{(4)}); \\ m_7^{(9)} &= -N_1(kR_5^{(4)}); \quad m_8^{(6)} = \eta \left[ J_0(\gamma R_5^{(4)}) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R_5^{(4)}} J_1(\gamma R_5^{(4)}) \right]; \quad m_8^{(7)} = \eta \left[ N_0(\gamma R_5^{(4)}) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R_5^{(4)}} N_1(\gamma R_5^{(4)}) \right]; \\ m_8^{(8)} &= -\left[ J_0(kR_5^{(4)}) - \frac{1-\xi}{kR_5^{(4)}} J_1(kR_5^{(4)}) \right]; \quad m_8^{(9)} = -\left[ N_0(kR_5^{(4)}) - \frac{1-\xi}{kR_5^{(4)}} N_1(kR_5^{(4)}) \right]; \quad m_9^{(8)} = J_1(kR_5^{(6)}); \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
m_9^{(9)} &= N_1(kR_5^{(6)}); \quad m_9^{(10)} = -J_1(\gamma R_5^{(6)}); \quad m_9^{(11)} = -N_1(\gamma R_5^{(6)}); \quad m_{10}^{(8)} = \left[ J_0(kR_5^{(6)}) - \frac{1-\xi}{kR_5^{(6)}} J_1(kR_5^{(6)}) \right]; \\
m_{10}^{(9)} &= \left[ N_0(kR_5^{(6)}) - \frac{1-\xi}{kR_5^{(6)}} N_1(kR_5^{(6)}) \right]; \quad m_{10}^{(10)} = -\eta \left[ J_0(\gamma R_5^{(6)}) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R_5^{(6)}} J_1(\gamma R_5^{(6)}) \right]; \\
m_{10}^{(11)} &= -\eta \left[ N_0(\gamma R_5^{(6)}) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R_5^{(6)}} N_1(\gamma R_5^{(6)}) \right]; \quad m_{11}^{(10)} = J_1(\gamma R_7^{(6)}); \quad m_{11}^{(11)} = N_1(\gamma R_7^{(6)}); \quad m_{11}^{(12)} = -J_1(kR_7^{(6)}); \\
m_{11}^{(13)} &= -N_1(kR_7^{(6)}); \quad m_{12}^{(10)} = \eta \left[ J_0(\gamma R_7^{(6)}) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R_7^{(6)}} J_1(\gamma R_7^{(6)}) \right]; \quad m_{12}^{(11)} = \eta \left[ N_0(\gamma R_7^{(6)}) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R_7^{(6)}} N_1(\gamma R_7^{(6)}) \right]; \\
m_{12}^{(12)} &= -\left[ J_0(kR_7^{(6)}) - \frac{1-\xi}{kR_7^{(6)}} J_1(kR_7^{(6)}) \right]; \quad m_{12}^{(13)} = -\left[ N_0(kR_7^{(6)}) - \frac{1-\xi}{kR_7^{(6)}} N_1(kR_7^{(6)}) \right]; \quad m_{13}^{(12)} = J_1(kR_7^{(8)}); \\
m_{13}^{(13)} &= N_1(kR_7^{(8)}); \quad m_{13}^{(14)} = -J_1(\gamma R_7^{(8)}); \quad m_{13}^{(15)} = -N_1(\gamma R_7^{(8)}); \quad m_{14}^{(12)} = \left[ J_0(kR_7^{(8)}) - \frac{1-\xi}{kR_7^{(8)}} J_1(kR_7^{(8)}) \right]; \\
m_{14}^{(13)} &= \left[ N_0(kR_7^{(8)}) - \frac{1-\xi}{kR_7^{(8)}} N_1(kR_7^{(8)}) \right]; \quad m_{14}^{(14)} = -\eta \left[ J_0(\gamma R_7^{(8)}) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R_7^{(8)}} J_1(\gamma R_7^{(8)}) \right]; \\
m_{14}^{(15)} &= -\eta \left[ N_0(\gamma R_7^{(8)}) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R_7^{(8)}} N_1(\gamma R_7^{(8)}) \right]; \quad m_{15}^{(14)} = \left[ J_0(\gamma R) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R} J_1(\gamma R) \right]; \\
m_{15}^{(15)} &= \left[ N_0(\gamma R) - \frac{1-\xi_1}{\gamma R} N_1(\gamma R) \right].
\end{aligned}$$

Праві частини  $P_j$  системи рівнянь (3.85) визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned}
P_1 = P_3 = P_5 = P_7 = P_9 = P_{11} = P_{13} = P_{15} &= 0; \quad P_2 = -e_{31}^* U_1 / (c_{11} k \alpha); \quad P_4 = e_{31}^* U_3 / (c_{11} k \alpha); \\
P_6 = -e_{31}^* U_3 / (c_{11} k \alpha); \quad P_8 = e_{31}^* U_5 / (c_{11} k \alpha); \quad P_{10} = -e_{31}^* U_5 / (c_{11} k \alpha); \quad P_{12} = e_{31}^* U_7 / (c_{11} k \alpha); \\
P_{14} &= -e_{31}^* U_7 / (c_{11} k \alpha).
\end{aligned}$$

Розв'язки системи рівнянь (3.85) для коефіцієнтів  $A_1$ ,  $A_{4n}$  і  $A_{4n+1}$  ( $n=1,2,3$ ), які визначають радіальні зміщення матеріальних частинок п'єзокерамічного диска в областях номера  $2n+1$  записуються в наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{e_{31}^*}{c_{11} k \alpha D_0} \left[ U_1 M_1^{(2)} + U_3 N_1^{(4,6)} + U_5 N_1^{(8,10)} + U_7 N_1^{(12,14)} \right], \\
A_{4n} &= \frac{e_{31}^*}{c_{11} k \alpha D_0} \left[ -U_1 M_{4n}^{(2)} + U_3 N_{4n}^{(4,6)} + U_5 N_{4n}^{(8,10)} + U_7 N_{4n}^{(12,14)} \right],
\end{aligned}$$

$$A_{4n+1} = \frac{e_{31}^*}{c_{11}k\alpha D_0} [U_1 M_{4n+1}^{(2)} + U_3 N_{4n+1}^{(4,6)} + U_5 N_{4n+1}^{(8,10)} + U_7 N_{4n+1}^{(12,14)}], \quad (3.86)$$

де  $M_j^{(k)}$  – алгебраїчне доповнення, яке отримується з матриці  $M_0$  шляхом викреслювання  $j$ -ого рядка і  $k$ -го стовпчика;  $N_1^{(4,6)} = -M_1^{(4)} + M_1^{(6)}$ ;  
 $N_1^{(8,10)} = -M_1^{(8)} + M_1^{(10)}$ ;  $N_1^{(12,14)} = -M_1^{(12)} + M_1^{(14)}$ ;  $N_{4n}^{(4,6)} = M_{4n}^{(4)} - M_{4n}^{(6)}$ ;  $N_{4n}^{(4,6)} = M_{4n}^{(4)} - M_{4n}^{(6)}$ ;  
 $N_{4n}^{(8,10)} = M_{4n}^{(8)} - M_{4n}^{(10)}$ ;  $N_{4n}^{(12,14)} = M_{4n}^{(12)} - M_{4n}^{(14)}$ ;  $N_{4n+1}^{(4,6)} = -M_{4n+1}^{(4)} + M_{4n+1}^{(6)}$ ;  $N_{4n+1}^{(8,10)} = -M_{4n+1}^{(8)} + M_{4n+1}^{(10)}$ ;  
 $N_{4n+1}^{(12,14)} = -M_{4n+1}^{(12)} + M_{4n+1}^{(14)}$ .

Із запису співвідношень (3.86) чітко видно, що всі коефіцієнти  $A_1$ ,  $A_{4n}$  і  $A_{4n+1}$  залежать від всіх електричних потенціалів  $U_{2n+1}$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ). З цього факту випливає, що всі потенціали  $U_{2n+1}$  пов'язані між собою лінійною залежністю. Це цілком очікувано і закономірно, оскільки потенціали  $U_{2n+1}$  визначаються радіальними коливаннями різних областей, які в сукупності своїй становлять єдине ціле – п'єзокерамічний диск. Для того, щоб записати лінійні залежності між потенціалами  $U_{2n+1}$  в явному вигляді, звернемося до раніше отриманих співвідношень (3.74).

Підставляючи в співвідношення (3.74) розв'язки (3.79), в яких коефіцієнти  $A_1$ ,  $A_{4n}$  і  $A_{4n+1}$  визначені виразами (3.86), отримуємо наступні лінійні рівняння:

$$U_{2n+1} = U_1 F_1^{(2n+1)}(k, R) + U_3 F_3^{(2n+1)}(k, R) + U_5 F_5^{(2n+1)}(k, R) + U_7 F_7^{(2n+1)}(k, R), \quad (3.87)$$

де

$$F_1^{(2n+1)}(k, R) = F_0^{(2n+1)} \left[ -J_1(k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)}) M_{4n}^{(2)} + N_1(k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)}) M_{4n+1}^{(2)} \right];$$

$$F_0^{(2n+1)} = \frac{2K_{31}^2 f_{2n+1}(\omega)}{\left\{ 1 - \left[ R_{2n+1}^{(2n)} / R_{2n+1}^{(2n+2)} \right]^2 \right\} k R_{2n+1}^{(2n+2)} D_0}; \quad K_{31}^2 = \frac{(e_{31}^*)^2}{\chi_{33}^* c_{11}} \quad \text{квадрат коефіцієнта}$$

електромеханічного зв'язку для режиму радіальних коливань в тонкому п'єзокерамічному диску;  $J_1(k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)}) = J_1(k R_{2n+1}^{(2n+2)}) - R_{2n+1}^{(2n)} J_1(k R_{2n+1}^{(2n)}) / R_{2n+1}^{(2n+2)}$ ;

$$N_1(k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)}) = N_1(k R_{2n+1}^{(2n+2)}) - R_{2n+1}^{(2n)} N_1(k R_{2n+1}^{(2n)}) / R_{2n+1}^{(2n+2)};$$

$$F_3^{(2n+1)}(k, R) = F_0^{(2n+1)} \left[ J_1(k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)}) N_{4n}^{(4,6)} + N_1(k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)}) N_{4n+1}^{(4,6)} \right];$$

$$F_5^{(2n+1)}(k, R) = F_0^{(2n+1)} \left[ J_1(k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)}) N_{4n}^{(8,10)} + N_1(k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)}) N_{4n+1}^{(8,10)} \right];$$

$$F_7^{(2n+1)}(k, R) = F_0^{(2n+1)} \left[ J_1(k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)}) N_{4n}^{(12,14)} + N_1(k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)}) N_{4n+1}^{(12,14)} \right].$$

Систему з трьох співвідношень (3.87) можна записати в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} U_3 [F_3^{(3)}(k, R) - 1] + U_5 F_5^{(3)}(k, R) + U_7 F_7^{(3)}(k, R) &= -U_1 F_1^{(3)}(k, R), \\ U_3 F_3^{(5)}(k, R) + U_5 [F_5^{(5)}(k, R) - 1] + U_7 F_7^{(5)}(k, R) &= -U_1 F_1^{(5)}(k, R), \\ U_3 F_3^{(7)}(k, R) + U_5 F_5^{(7)}(k, R) + U_7 [F_7^{(7)}(k, R) - 1] &= -U_1 F_1^{(7)}(k, R). \end{aligned} \quad (3.88)$$

Абсолютно ясно, що система рівнянь (3.88) дозволяє єдиним чином визначити потенціали  $U_3$ ,  $U_5$  і  $U_7$  через потенціал  $U_1$ . Розв'язки системи рівнянь (3.88) можна записати в наступному вигляді:

$$U_{2n+1} = -U_1 \Psi_{2n+1}(k, R), \quad n = 1, 2, 3, \quad (3.89)$$

де безрозмірна частотно залежна функція  $\Psi_{2n+1}(k, R) = \Xi_{2n+1}(k, R) / \Xi_0(k, R)$ ; функції  $\Xi_0(k, R)$  і  $\Xi_{2n+1}(k, R)$  визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} \Xi_0(k, R) &= \det \begin{vmatrix} F_3^{(3)}(k, R) - 1 & F_5^{(3)}(k, R) & F_7^{(3)}(k, R) \\ F_3^{(5)}(k, R) & F_5^{(5)}(k, R) - 1 & F_7^{(5)}(k, R) \\ F_3^{(7)}(k, R) & F_5^{(7)}(k, R) & F_7^{(7)}(k, R) - 1 \end{vmatrix}; \\ \Xi_3(k, R) &= \det \begin{vmatrix} F_1^{(3)}(k, R) & F_5^{(3)}(k, R) & F_7^{(3)}(k, R) \\ F_1^{(5)}(k, R) & F_5^{(5)}(k, R) - 1 & F_7^{(5)}(k, R) \\ F_1^{(7)}(k, R) & F_5^{(7)}(k, R) & F_7^{(7)}(k, R) - 1 \end{vmatrix}; \\ \Xi_5(k, R) &= \det \begin{vmatrix} F_3^{(3)}(k, R) - 1 & F_1^{(3)}(k, R) & F_7^{(3)}(k, R) \\ F_3^{(5)}(k, R) & F_1^{(5)}(k, R) & F_7^{(5)}(k, R) \\ F_3^{(7)}(k, R) & F_1^{(7)}(k, R) & F_7^{(7)}(k, R) - 1 \end{vmatrix}; \\ \Xi_7(k, R) &= \det \begin{vmatrix} F_3^{(3)}(k, R) - 1 & F_5^{(3)}(k, R) & F_1^{(3)}(k, R) \\ F_3^{(5)}(k, R) & F_5^{(5)}(k, R) - 1 & F_1^{(5)}(k, R) \\ F_3^{(7)}(k, R) & F_5^{(7)}(k, R) & F_1^{(7)}(k, R) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Для того, щоб визначити потенціал  $U_1$ , необхідно розрахувати електричний імпеданс  $z_{en}^{(1)}$  області 1, тобто дискової області п'єзокерамічного диска під електродом первинного електричного кола.

Очевидно, що  $z_{en}^{(1)} = U_1 / I_1$ , де  $I_1$  – амплітуда електричного струму в первинному електричному колі. Раніше було показано, що  $I_1 = -i\omega Q_1(\omega)$ , де

$Q_1(\omega)$  – амплітудне значення електричного заряду на електроді первинного електричного кола. Так як

$$Q_1(\omega) = 2\pi \int_0^{R_1^{(2)}} \rho D_z^{(1)}(\rho) d\rho = 2\pi \int_0^{R_1^{(2)}} \rho \left\{ \frac{\epsilon_{31}^*}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u_p^{(1)}(\rho)] - \chi_{33}^* \frac{U_1}{\alpha} \right\} d\rho,$$

то, беручи до уваги, що  $u_p^{(1)}(\rho) = A_1 J_1(k\rho)$ , можна записати

$$Q_1(\omega) = C_1^* \left[ \frac{2\epsilon_{31}^* \alpha}{\chi_{33}^* R_1^{(2)}} A_1 J_1(kR_1^{(2)}) - U_1 \right] = C_1^* U_1 [\Psi_1(k, R) - 1], \quad (3.90)$$

де  $C_1^* = \pi (R_1^{(2)})^2 \chi_{33}^* / \alpha$  – динамічна електрична ємність області під дисковим електродом первинного електричного кола;  $\Psi_1(k, R)$  – безрозмірна функція, числові значення якої розраховуються за формулою

$$\Psi_1(k, R) = \frac{2K_{31}^2 J_1(kR_1^{(2)})}{kR_1^{(2)} D_0} [M_1^{(2)} - \Psi_3(k, R) N_1^{(4,6)} - \Psi_5(k, R) N_1^{(8,10)} - \Psi_7(k, R) N_1^{(12,14)}].$$

Підставляючи вираз (3.90) у визначення амплітудного значення струму  $I_1$ , а отриманий результат – в формулу для розрахунку електричного імпедансу  $Z_{ен}^{(1)}$ , отримуємо

$$Z_{ен}^{(1)} = \frac{1}{-i\omega C_1^* [\Psi_1(k, R) - 1]}. \quad (3.91)$$

Підставляючи вираз (3.91) у визначення (3.76) потенціалу  $U_1$ , отримуємо наступну розрахункову формулу

$$U_1 = \frac{U_0}{1 - i\omega C_1^* Z_1 [\Psi_1(k, R) - 1]}.$$

Підставляючи останній вираз в формулу (3.89), отримуємо

$$U_{2n+1}(\omega) = - \frac{U_0 \Psi_{2n+1}(k, R)}{1 - i\omega C_1^* Z_1 [\Psi_1(k, R) - 1]}, \quad n = 1, 2, 3.$$

З останніх рівностей слідує визначення компонентів  $K_{2n+1}(\omega)$  математичної моделі багатосекційного дискового п'єзокерамічного перетворювача:

$$K_{2n+1}(\omega) = - \frac{\Psi_{2n+1}(k, R)}{1 - i\omega C_1^* Z_1 [\Psi_1(k, R) - 1]}, \quad n = 1, 2, 3. \quad (3.92)$$

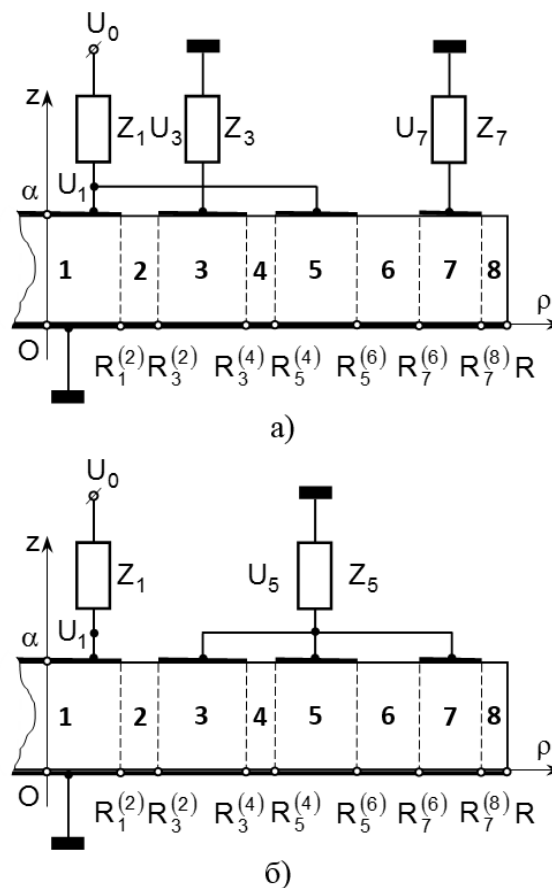
Вираз (3.92) відрізняється від всіх відомих, отриманих іншими авторами результатів, тим, що він побудований з урахуванням акустичного

зворотного зв'язку, який існує між областю під електродом первинного електричного кола і всіма без винятку областями, розташованими під електродами вторинних електричних кіл [12].

### 3.3.3. Математичне моделювання багатосекційного дискового п'єзоелектричного перетворювача при груповому включенні секцій

У деяких випадках виявляється доцільним групове включення секцій багатосекційного дискового п'єзоелектричного перетворювача.

Розглянемо особливості розрахунку коефіцієнтів трансформації, що виникають в цих ситуаціях (рис. 3.23).



**Рис. 3.23. Розрахункові схеми багатосекційних п'єзоелектричних перетворювачів з груповими включеннями секцій**

На рис. 3.23,а показана розрахункова схема чотирьохсекційного

п'єзоелектричного перетворювача, у якого в первинне електричне коло включені два електроди. Подібне включення дозволяє, в принципі, збільшити потужність сигналів у вторинних електричних колах. Два інших кільцевих електрода включені в дві різні вторинні електричні кола.

Розрахунок коефіцієнтів трансформації  $\kappa_{2n+1}(\omega)$  ( $n = 1;3$ ) перетворювача, показаного на рис. 3.23,*a*, виконується за схемою, яка фактично була уже розглянута (див. параграф 3.3.2).

Перш за все, вводимо потенціал  $U_1$  (рис. 3.23,*a*), який, очевидно, визначається наступним чином

$$U_1 = \frac{U_0 Z_{\text{ел}}^{(1,5)}}{Z_1 + Z_{\text{ел}}^{(1,5)}}, \quad (3.93)$$

де  $Z_{\text{ел}}^{(1,5)}$  – електричний імпеданс, утворений паралельним включенням електричних імпедансів  $Z_{\text{ел}}^{(1)}$  і  $Z_{\text{ел}}^{(5)}$  областей 1 і 5 дискового перетворювача. Очевидно, що  $Z_{\text{ел}}^{(1,5)} = Z_{\text{ел}}^{(1)} Z_{\text{ел}}^{(5)} / (Z_{\text{ел}}^{(1)} + Z_{\text{ел}}^{(5)})$ .

Потім визначаються коефіцієнти  $A_1$ ,  $A_{4n}$  і  $A_{4n+1}$  ( $n = 1,2,3$ ), які формують загальні розв'язки (3.79), тобто радіальні зміщення  $u_{\rho}^{(2n+1)}(\rho)$  ( $n = 0,1,2,3$ ) матеріальних частинок в областях диска під електродами. Коефіцієнти  $A_1$ ,  $A_{4n}$  і  $A_{4n+1}$  ( $n = 1,2,3$ ) задаються наступними виразами

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{e_{31}^*}{c_{11} k \alpha D_0} \left[ U_1 (M_1^{(2)} + N_1^{(8,10)}) + U_3 N_1^{(4,6)} + U_7 N_1^{(12,14)} \right], \\ A_{4n} &= \frac{e_{31}^*}{c_{11} k \alpha D_0} \left[ U_1 (-M_{4n}^{(2)} + N_{4n}^{(8,10)}) + U_3 N_{4n}^{(4,6)} + U_7 N_{4n}^{(12,14)} \right], \\ A_{4n+1} &= \frac{e_{31}^*}{c_{11} k \alpha D_0} \left[ U_1 (M_{4n+1}^{(2)} + N_{4n+1}^{(8,10)}) + U_3 N_{4n+1}^{(4,6)} + U_7 N_{4n+1}^{(12,14)} \right], \end{aligned} \quad (3.94)$$

де величини  $D_0$ ,  $M_k^{(2)}$ ,  $N_k^{(4,6)}$ ,  $N_k^{(8,10)}$  і  $N_k^{(12,14)}$  ( $k = 1; 4n; 4n + 1$ ;  $n = 1,2,3$ ) визначені в коментарях до виразів.

Підстановка коефіцієнтів  $A_1$ ,  $A_{4n}$  і  $A_{4n+1}$  в співвідношення (3.74) для розрахунку потенціалів  $U_{2n+1}$  ( $n = 1;3$ ) дає наступні результати:

$$U_{2n+1} = U_1 F_1^{(2n+1)}(k, R) + U_3 F_3^{(2n+1)}(k, R) + U_7 F_7^{(2n+1)}(k, R), \quad (3.95)$$

де

$$F_1^{(2n+1)}(k, R) = F_0^{(2n+1)} \left[ -J_1(k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)}) (M_{4n}^{(2)} + N_{4n}^{(8,10)}) + N_1(k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)}) (M_{4n+1}^{(2)} + N_{4n+1}^{(8,10)}) \right];$$

функції  $F_3^{(2n+1)}(k, R)$  і  $F_7^{(2n+1)}(k, R)$  описані в коментарях до формули (3.87).

Із загального визначення (3.95) випливає, що

$$\begin{aligned} U_3 [F_3^{(3)}(k, R) - 1] + U_7 F_7^{(3)}(k, R) &= -U_1 F_1^{(3)}(k, R), \\ U_3 F_3^{(7)}(k, R) + U_7 [F_7^{(7)}(k, R) - 1] &= -U_1 F_1^{(7)}(k, R). \end{aligned} \quad (3.96)$$

Розв'язки системи рівнянь (3.96) можна представити в наступному вигляді:

$$U_3 = -U_1 \Psi_3(k, R), \quad U_7 = -U_1 \Psi_7(k, R), \quad (3.97)$$

де

$$\begin{aligned} \Psi_3(k, R) &= \frac{1}{D_2} \left\{ F_1^{(3)}(k, R) [F_7^{(7)}(k, R) - 1] - F_1^{(7)}(k, R) F_7^{(3)}(k, R) \right\}; \\ \Psi_7(k, R) &= \frac{1}{D_2} \left\{ F_1^{(7)}(k, R) [F_3^{(3)}(k, R) - 1] - F_3^{(7)}(k, R) F_1^{(3)}(k, R) \right\}; \\ D_2 &= [F_3^{(3)}(k, R) - 1] [F_7^{(7)}(k, R) - 1] - F_7^{(3)}(k, R) F_3^{(7)}(k, R). \end{aligned}$$

Електричні імпеданси  $z_{ен}^{(1)}$  і  $z_{ен}^{(5)}$  визначаються стандартним чином:  $z_{ен}^{(k)} = U_1 / I_k$  ( $k = 1, 5$ ), де амплітудні значення струмів  $I_k = -i\omega Q_k$ . При цьому електричні заряди  $Q_1$  і  $Q_5$  на електродах первинного електричного кола задаються наступними виразами:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 2\pi \int_0^{R_1^{(2)}} \rho D_z^{(1)}(\rho) d\rho = 2\pi \int_0^{R_1^{(2)}} \rho \left\{ \frac{e_{31}^*}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u_\rho^{(1)}(\rho)] - \chi_{33}^* \frac{U_1}{\alpha} \right\} d\rho = C_1^* U_1 [\Psi_1(k, R) - 1]; \\ Q_5 &= 2\pi \int_{R_5^{(4)}}^{R_5^{(6)}} \rho D_z^{(5)}(\rho) d\rho = 2\pi e_{31}^* [R_5^{(6)} u_\rho^{(5)}(R_5^{(6)}) - R_5^{(4)} u_\rho^{(5)}(R_5^{(4)})] - \\ &\quad - \pi \left[ (R_5^{(6)})^2 - (R_5^{(4)})^2 \right] \chi_{33}^* \frac{U_1}{\alpha} = C_5^* U_1 [\Psi_5(k, R) - 1], \end{aligned} \quad (3.98)$$

де  $C_1^* = \pi (R_1^{(2)})^2 \chi_{33}^* / \alpha$  і  $C_5^* = \pi \left[ (R_5^{(6)})^2 - (R_5^{(4)})^2 \right] \chi_{33}^* / \alpha$  – електричні ємності областей диска під електродами 1 і 5; частотно залежні безрозмірні функції  $\Psi_1(k, R)$  і  $\Psi_5(k, R)$  розраховуються за формулами:

$$\Psi_1(k, R) = \frac{2K_{31}^2}{kR_1^{(2)} D_0} J_1(kR_1^{(2)}) \left[ M_1^{(2)} + N_1^{(8,10)} - \Psi_3(k, R) N_1^{(4,6)} - \Psi_7(k, R) N_1^{(12,14)} \right];$$

$$\begin{aligned} \Psi_5(k, R) = & \frac{2K_{31}^2}{kR_5^{(6)}D_0 \left[ 1 - \left( R_5^{(4)}/R_5^{(6)} \right)^2 \right]} \left\{ J_1(k, R_5^{(4)}, R_5^{(6)}) \left[ -M_8^{(2)} + N_8^{(8,10)} - \right. \right. \\ & - \Psi_3(k, R)N_8^{(4,6)} - \Psi_7(k, R)N_8^{(12,14)} \left. \right] + N_1(k, R_5^{(4)}, R_5^{(6)}) \times \\ & \left. \times \left[ M_9^{(2)} + N_9^{(8,10)} - \Psi_3(k, R)N_9^{(4,6)} - \Psi_7(k, R)N_9^{(12,14)} \right] \right\}; \end{aligned}$$

$D_0$  – визначник системи рівнянь (3.85); інші величини визначені в коментарях до виразів (3.86) і (3.87).

Так як

$$Z_{en}^{(1)} = \frac{1}{-i\omega C_1^* [\Psi_1(k, R) - 1]}, \quad Z_{en}^{(5)} = \frac{1}{-i\omega C_5^* [\Psi_5(k, R) - 1]},$$

то

$$Z_{en}^{(1,5)} = \frac{1}{-i\omega C_1^* \left\{ \Psi_1(k, R) - 1 + \left( C_5^*/C_1^* \right) [\Psi_5(k, R) - 1] \right\}},$$

і потенціал

$$U_1 = \frac{U_0}{1 - i\omega C_1^* Z_1 \left\{ \Psi_1(k, R) - 1 + \left( C_5^*/C_1^* \right) [\Psi_5(k, R) - 1] \right\}}. \quad (3.99)$$

Підстановка виразу (3.99) в співвідношення (3.97), дозволяє записати їх в наступному вигляді

$$U_{2n+1} = - \frac{U_0 \Psi_{2n+1}(k, R)}{1 - i\omega C_1^* Z_1 \left\{ \Psi_1(k, R) - 1 + \left( C_5^*/C_1^* \right) [\Psi_5(k, R) - 1] \right\}}, \quad (n = 1; 3).$$

З останнього запису випливає, що

$$K_{2n+1}(\omega) = - \frac{\Psi_{2n+1}(k, R)}{1 - i\omega C_1^* Z_1 \left\{ \Psi_1(k, R) - 1 + \left( C_5^*/C_1^* \right) [\Psi_5(k, R) - 1] \right\}}, \quad (n = 1; 3),$$

що і є математичною моделлю показаного на рис. 3.25,а п'єзоелектричного перетворювача [13].

Математична модель конструкції, розрахункова схема якої показана на рис. 3.23,б, визначається, очевидно, таким чином

$$K_5(\omega) = U_5/U_0, \quad (3.100)$$

де  $U_5 = Z_5 I$  – потенціал на електричному навантаженні у вторинному електричному колі, в яке включені три кільцевих електрода. При цьому амплітуда струму  $I$  у вторинному електричному колі визначається наступним

$$I = -i\omega(Q_3 + Q_5 + Q_7), \quad (3.101)$$



де  $Q_{2n+1}$  ( $n=1,2,3$ ) – електричні заряди на кільцевих електродах, величини яких визначаються радіальними зміщеннями  $u_{\rho}^{(2n+1)}(\rho)$  матеріальних частинок п'єзоелектрика.

Радіальні зміщення  $u_{\rho}^{(2n+1)}(\rho)$ , в свою чергу, визначаються в такий спосіб

$$u_{\rho}^{(2n+1)}(\rho) = A_{4n} J_1(k\rho) + A_{4n+1} N_1(k\rho), \quad (n=1,2,3), \quad (3.102)$$

де коефіцієнти  $A_{4n}$  і  $A_{4n+1}$  задаються виразами:

$$A_{4n} = \frac{e_{31}^*}{c_{11} k \alpha D_0} \left\{ -U_1 M_{4n}^{(2)} + U_5 \left[ N_{4n}^{(4,6)} + N_{4n}^{(8,10)} + N_{4n}^{(12,14)} \right] \right\},$$

$$A_{4n+1} = \frac{e_{31}^*}{c_{11} k \alpha D_0} \left\{ U_1 M_{4n+1}^{(2)} + U_5 \left[ N_{4n+1}^{(4,6)} + N_{4n+1}^{(8,10)} + N_{4n+1}^{(12,14)} \right] \right\}. \quad (3.103)$$

Слідуючи формулі (3.73), можна записати, що

$$Q_{2n+1} = \frac{2\alpha e_{31}^* C_{2n+1}^*}{\chi_{33}^* \left[ \left( R_{2n+1}^{(2n+2)} \right)^2 - \left( R_{2n+1}^{(2n)} \right)^2 \right]} \left[ R_{2n+1}^{(2n+2)} u_{\rho}^{(2n+1)} \left( R_{2n+1}^{(2n+2)} \right) - \right. \\ \left. - R_{2n+1}^{(2n)} u_{\rho}^{(2n+1)} \left( R_{2n+1}^{(2n)} \right) \right] - C_{2n+1}^* U_5, \quad n=1,2,3, \quad (3.104)$$

де  $C_{2n+1}^* = (\pi \chi_{33}^* / \alpha) \left[ \left( R_{2n+1}^{(2n+2)} \right)^2 - \left( R_{2n+1}^{(2n)} \right)^2 \right]$  – електрична ємність  $(2n+1)$ -ої кільцевої області диска.

Після підстановки в співвідношення (3.104) коефіцієнтів  $A_{4n}$  і  $A_{4n+1}$ , заданих виразами (3.103), можна записати, що

$$Q_{2n+1} = C_{2n+1}^* \left[ \beta_{2n+1} U_1 + (\lambda_{2n+1} - 1) U_5 \right], \quad n=1,2,3, \quad (3.105)$$

де

$$\beta_{2n+1} = \frac{2K_{31}^2}{k R_{2n+1}^{(2n+2)} \left[ 1 - \left( R_{2n+1}^{(2n)} / R_{2n+1}^{(2n+2)} \right)^2 \right] D_0} \left[ -M_{4n}^{(2)} J_1 \left( k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)} \right) + \right. \\ \left. + M_{4n+1}^{(2)} N_1 \left( k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)} \right) \right]; \quad \lambda_{2n+1} = \frac{2K_{31}^2}{k R_{2n+1}^{(2n+2)} \left[ 1 - \left( R_{2n+1}^{(2n)} / R_{2n+1}^{(2n+2)} \right)^2 \right] D_0} \left[ S_{4n} J_1 \left( k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)} \right) + \right. \\ \left. + S_{4n+1} N_1 \left( k, R_{2n+1}^{(2n)}, R_{2n+1}^{(2n+2)} \right) \right]; \quad S_{4n} = N_{4n}^{(4,6)} + N_{4n}^{(8,10)} + N_{4n}^{(12,14)}; \\ S_{4n+1} = N_{4n+1}^{(4,6)} + N_{4n+1}^{(8,10)} + N_{4n+1}^{(12,14)}.$$

Підставляючи амплітудні значення електричних зарядів  $Q_{2n+1}$ , задані співвідношеннями (3.105), в визначення (3.101) електричного струму у

вторинному електричному колі, можна записати, що

$$U_5 = Z_5 I = -i\omega Z_5 C_5^* q(\omega) U_1 - i\omega Z_5 C_5^* p(\omega) U_5,$$

$$\text{де } q(\omega) = \frac{C_3^*}{C_5^*} \beta_3 + \beta_5 + \frac{C_7^*}{C_5^*} \beta_7; \quad p(\omega) = \frac{C_3^*}{C_5^*} (\lambda_3 - 1) + \lambda_5 - 1 + \frac{C_7^*}{C_5^*} (\lambda_7 - 1).$$

З останнього рівняння можна записати, що

$$U_5 = -\Psi_5(k, R) U_1, \quad (3.106)$$

де

$$\Psi_5(k, R) = \frac{i\omega Z_5 C_5^* q(\omega)}{1 + i\omega Z_5 C_5^* p(\omega)}.$$

Для завершення обчислень, як завжди, необхідно визначити потенціал  $U_1$  в явному вигляді.

Очевидно, що

$$U_1 = \frac{U_0 Z_{\text{еп}}^{(1)}}{Z_1 + Z_{\text{еп}}^{(1)}}, \quad (3.107)$$

де  $Z_{\text{еп}}^{(1)} = U_1 / I_1$  – електричний імпеданс дискової області 1. Амплітуда електричного струму  $I_1$  в первинному електричному колі визначається стандартним способом:

$$I_1 = -i\omega Q_1 = -i\omega 2\pi \int_0^{R_1^{(2)}} \rho D_z^{(1)}(\rho) d\rho = -i\omega C_1^* \left\{ \frac{2e_{31}^* \alpha}{\chi_{33}^* R_1^{(2)}} A_1 J_1(k R_1^{(2)}) - U_1 \right\},$$

де  $C_1^* = \pi (R_1^{(2)})^2 \chi_{33}^* / \alpha$  – електрична ємність дискового електрода первинного електричного кола. Константа  $A_1$  розраховується за формулою

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{e_{31}^*}{c_{11} k \alpha D_0} \left\{ U_1 M_1^{(2)} + U_5 \left[ N_1^{(4,6)} + N_1^{(8,10)} + N_1^{(12,14)} \right] \right\} = \\ &= \frac{e_{31}^* U_1}{c_{11} k \alpha D_0} \left\{ M_1^{(2)} - \Psi_5(k, R) \left[ N_1^{(4,6)} + N_1^{(8,10)} + N_1^{(12,14)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Підставляючи визначення константи  $A_1$  в формулу для розрахунку струму  $I_1$ , отримуємо

$$I_1 = -i\omega C_1^* U_1 [\Psi_1(k, R) - 1], \quad (3.108)$$

$$\text{де } \Psi_1(k, R) = \frac{2K_{31}^2}{k R_1^{(2)} D_0} \left\{ M_1^{(2)} - \Psi_5(k, R) \left[ N_1^{(4,6)} + N_1^{(8,10)} + N_1^{(12,14)} \right] \right\}.$$

З визначення (3.108) випливає, що

$$Z_{en}^{(1)} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{1}{-i\omega C_1^* U_1 [\Psi_1(k, R) - 1]},$$

а потенціал на електроді первинної електричного кола

$$U_1 = \frac{U_0}{1 - i\omega C_1^* U_1 [\Psi_1(k, R) - 1]}. \quad (3.109)$$

З урахуванням виразу (3.109), співвідношення (3.106) можна записати в наступному вигляді

$$U_5 = -\frac{U_0 \Psi_5(k, R)}{1 - i\omega C_1^* U_1 [\Psi_1(k, R) - 1]}.$$

З останнього запису слідує визначення математичної моделі перетворювача, розрахункова схема якого показана на рис. 3.23б:

$$K_5(\omega) = -\frac{\Psi_5(k, R)}{1 - i\omega C_1^* U_1 [\Psi_1(k, R) - 1]}.$$

Розглянутих в цьому розділі двох прикладів цілком достатньо для того, щоб зрозуміти особливості математичного моделювання багатосекційних дискових п'єзоелектричних перетворювачів, які виникають при груповому включенні секцій [12].

### 3.4. Висновки до розділу

Підводячи підсумок всьому вищесказаному, можна сформулювати наступні висновки. В ході побудови і подальшого дослідження математичних моделей п'єзоелектричних перетворювачів були встановлені наступні факти:

– п'єзоелектричний дисковий перетворювач з розділеними електродами є функціональним елементом п'єзоелектроніки з негативним зворотним електроакустичним зв'язком;

– для первинної оцінки частот максимальних значень коефіцієнта трансформації можна використовувати результати розрахунку частот електромеханічних резонансів радіально коливального п'єзокерамічного диска;

– абсолютні значення коефіцієнта трансформації істотно залежать від

значень імпедансу електричного навантаження;

- побудовано математичні моделі п'єзоелектричного перетворювача з кільцевим та дисковим електродами в первинному електричному колі;

- показана висока чутливість частотної характеристики п'єзоелектричного перетворювача до значень вихідного опору джерела електричного сигналу в первинному електричному колі;

- сформульовано припущення про можливість управління параметрами частотної характеристики п'єзоелектричного перетворювача шляхом зміни числового значення модуля вихідного імпедансу джерела електричного сигналу в первинному електричному колі;

- проведено експериментальні дослідження п'єзоелектричного перетворювача з дисковим електродом в первинному електричному колі, визначені амплітудно-частотні характеристики перетворювача в околиці частот першого радіального електромеханічного резонансу в залежності від величини навантаження та розмірів електродів;

- проведено експериментальні дослідження дискового п'єзоелектричного перетворювача з кільцевим електродом в первинному електричному колі, визначені амплітудно-частотні характеристики перетворювача в залежності від величини вихідного опору генератора;

- проведено порівняння результатів математичного моделювання частотної залежності модуля коефіцієнта трансформації п'єзокерамічних перетворювачів з дисковим та кільцевим електродами в первинному електричному колі та результатів експериментального вимірювання (похибка визначення відношення частот не перевищує  $\Delta\zeta = 2,3\%$ ), тобто спостерігається узгодження між теоретично і експериментально визначеними відношеннями частот резонансів;

- вперше побудовано математичну модель багатосекційного дискового п'єзоелектричного перетворювача;

- запропонована схема побудови зберігає свою логічну конструкцію в широкому діапазоні значень числа секцій. Якщо позначити число секцій

символом  $M$ , то можна стверджувати, що запропонована схема працюватиме на нескінченному інтервалі  $M \geq 2$ ;

– розглянуто особливості побудови математичних моделей багатосекційних перетворювачів, які виникають при груповому включенні секцій.

### Список використаних джерел:

- [1] О.Н. Петрищев и К.В. Базило, *Принципы и методы математического моделирования колеблющихся пьезоэлектрических элементов*, ЧП Гордиенко Е.И. Черкассы, 2019, 408 с.
- [2] С. Bazilo, "Principles and methods of the calculation of transfer characteristics of disk piezoelectric transformers", *Радіоелектроніка, інформатика, управління*, № 4, pp. 7–22, 2018.
- [3] О.Н. Петрищев, *Гармонические колебания пьезокерамических элементов. Часть 1. Гармонические колебания пьезокерамических элементов в вакууме и метод резонанса – антирезонанса*. Киев: Аверс, 2012, 300 с.
- [4] М. Абрамовиц и И. Стиган, Ред., *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*. М.: Наука, 1979, 832 с.
- [5] В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, и Н.А. Шульга, *Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость*. Киев: Наук. думка, 1989, 280 с.
- [6] В.М. Шарапов, И.Г. Минаев, Ж.В. Сотула, К.В. Базило, и В.В. Самойленко, "Об эффекте возникновения изгибных колебаний в мономорфных пьезоэлементах", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 3, с. 60–62, 2011.
- [7] К.В. Базіло, "Дослідження впливу навантаження та розмірів електродів п'єзоелектричного диска на його амплітудно-частотні характеристики",

- Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 3, с. 15–20, 2018.
- [8] С. V. Bazilo, "Mathematical modelling of disk piezoelectric transformer with ring electrode in primary electrical circuit", in *Інформатика, математика, автоматика «ІМА –2017»: Матеріали та програма наук.-техн. конф.*, Суми, 2017, pp. 233–234.
- [9] А. Н. Тихонов, "Математическая модель", *Математическая энциклопедия, Коо – Од*, т. 3. Советская энциклопедия, М., с. 574–575, 1982.
- [10] О. М. Петрищев і К. В. Базіло, "Побудова моделі п'єзоелектричного дискового трансформатора з кільцевим електродом в первинному електричному колі", *Вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут»*. Серія: Приладобудування, № 56(2), с. 45–49, 2018.
- [11] О. М. Петрищев і К. В. Базіло, "Визначення електричних потенціалів у вторинних електричних колах багатосекційного дискового п'єзоелектричного трансформатора", в *Датчики, прилади та системи – 2017: тези VI Міжнародної науково-технічної конференції*, Черкаси – Миколаїв – Херсон – Лазурне, 2017, с. 20–23.
- [12] О. Н. Петрищев и К. В. Базило, "Математическая модель многосекционного пьезоэлектрического трансформатора с кольцевыми электродами во вторичных электрических цепях", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 1, с. 11–24, 2017.
- [13] О. Петрищев і К. Базіло, *Основи розрахунку та проектування дискових п'єзотрансформаторів*, LAP LAMBERT Academic Publishing. 2019, 170 с.

## РОЗДІЛ 4

### ПРИНЦИПИ ТА МЕТОДИ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДИСКОВИХ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ З СЕКТОРНИМИ ЕЛЕКТРОДАМИ

Дискові п'єзоелементи з частковим електродуванням однієї або двох поверхонь досить часто використовуються для побудови різних функціональних пристроїв п'єзоелектроніки [1]. П'єзоелектричні диски з секторним електродуванням поверхні є практично основним елементом багатьох мікроелектромеханічних систем [2]. Множинність і різноманіття практичного застосування дисків з секторним електродуванням природним чином стимулює теоретичні дослідження, метою яких є прогнозування характеристик і технічних параметрів пристроїв п'єзоелектроніки, які створюються на їх основі.

#### 4.1. Схема побудови математичної моделі дискового п'єзоелектричного перетворювача з секторними електродами

У процесі математичного моделювання дискового п'єзоелектричного перетворювача з розділеними електродами (рис. 4.1) цілком закономірним є відмова від вісесиметричної моделі напружено-деформованого стану диска. Очевидно, що електроди 1 і 2 (рис. 4.1) несуть на собі різні електричні потенціали і, що неминуче тягне за собою представлення амплітудного значення потенціалу на поверхні, де виконано розріз електрода, у вигляді ряду Фур'є такого вигляду

$$U(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi^{(m)} \cos m\varphi, \quad (4.1)$$

де  $U(\varphi)$  – залежне від значень окружної координати (азимутального кута)  $\varphi$  амплітудне значення електричного потенціалу на електродованій поверхні з розрізом (рис. 4.1);  $\Phi^{(m)}$  – ваговий коефіцієнт в розкладанні в ряд Фур'є. Для

показаного на рис. 4.1 включення електродів в зовнішні електричні кола

$$\Phi^{(0)} = U_0 \vartheta_0 / \pi + U_2 (\pi - \vartheta_0) / \pi; \quad \Phi^{(m)} = 2(U_0 - U_2) \sin m \vartheta_0 / (m\pi) \forall m \geq 1.$$

Символом  $m$  в розкладанні (4.1) позначений елемент ряду натуральних чисел.

Через те, що різниця електричних потенціалів, яка є першопричиною виникнення і існування механічних збурень в п'єзоелектричних матеріалах, залежить від окружної координати  $\varphi$ , в тонких п'єзоелектричних дисках з секторними електродами виникають невісесиметричні пружні коливання.

Розглянемо диск з поляризованої по товщині п'єзокераміки типу ЦТС. Матеріал диска має густину  $\rho_0$ , модулі пружності  $c_{\beta\lambda}^E$  ( $\beta$  і  $\lambda$  – індекси Фойгта [3]), п'єзоелектричні модулі  $e_{k\beta}$  ( $k=1,2,3$ ) і діелектричні проникності  $\chi_{ij}^\varepsilon$  ( $i,j=1,2,3$ ). Матриці матеріальних констант п'єзокераміки записуються в наступному вигляді:

$$\|c_{\beta\lambda}^E\| = \begin{pmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22}^E & c_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44}^E & 0 & 0 \\ & & & & c_{55}^E & 0 \\ & & & & & c_{66}^E \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

$$\|e_{k\beta}\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

$$\|\chi_{ij}^\varepsilon\| = \begin{pmatrix} \chi_{11}^\varepsilon & 0 & 0 \\ & \chi_{22}^\varepsilon & 0 \\ & & \chi_{33}^\varepsilon \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

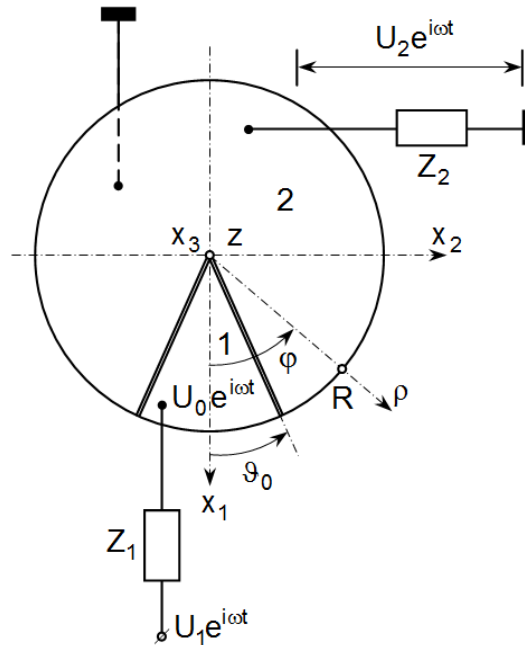
Елементи матриці (4.2) співвідносяться між собою в такий спосіб:  $c_{11}^E = c_{22}^E \neq c_{33}^E$ ;  $c_{12}^E = c_{13}^E = c_{23}^E$ ;  $c_{44}^E = c_{55}^E$ ;  $c_{66}^E = (c_{11}^E - c_{12}^E)/2$ . Між елементами матриці п'єзоелектричних модулів є наступні кількісні співвідношення:  $e_{15} = e_{24}$ ;  $e_{31} = e_{32} \neq e_{33}$ , Причому, як показано в монографії [3],  $e_{15} = (e_{33} - e_{31})/2$ . Для поляризованої по товщині диска п'єзокераміки діелектричні проникності  $\chi_{ij}^\varepsilon$  співвідносяться між собою в такий спосіб:  $\chi_{11}^\varepsilon = \chi_{22}^\varepsilon \neq \chi_{33}^\varepsilon$ .

Будемо вважати, що п'єзоелектричний диск не має механічних



контактів з іншими матеріальними об'єктами, тобто утримується в просторі гнучкими і невагомими нитками. Це дозволяє говорити, що диск не відчуває реакції з боку навколишнього середовища, тобто фактично знаходиться у вакуумі.

Нижня поверхня диску  $z=0$  ( $z$  – координатна лінія циліндричної системи координат  $(\rho, \varphi, z)$ ), сполучена з віссю  $x_3$  правої декартової системи координат  $(x_1, x_2, x_3)$  (рис. 4.1)) покрита тонким шаром металу і заземлена, тобто в будь-який момент часу її електричний потенціал дорівнює нулю. Верхня поверхня  $z=\alpha$  диску покривається двома секторними електродами (позиції 1 і 2 на рис. 4.1). Секторні електроди 1 і 2 розділяє неелектродований зазор, ширина якого істотно менше товщини  $\alpha$  п'єзокерамічного диску.



**Рис. 4.1. Конструкція п'єзоелектричного перетворювача з розділеними секторними електродами**

На секторний електрод 1 подається гармонійно змінна в часі різниця електричних потенціалів  $U_0 e^{i\omega t}$  ( $U_0$  – амплітуда різниці електричних потенціалів на електроді 1;  $i = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця;  $\omega$  – кругова частота зміни знаку електричного потенціалу;  $t$  – час). Символом  $Z_1$  позначено

комплексний вихідний опір джерела електричного сигналу. Очевидно, що  $U_0 = U_1 Z_{en}^{(1)}(\omega) / [Z_1 + Z_{en}^{(1)}(\omega)]$ , де  $U_1$  – амплітудне значення різниці потенціалів на виході джерела електричних сигналів;  $Z_{en}^{(1)}(\omega)$  – електричний імпеданс елемента п'єзокерамічного диску під секторним електродом 1. Електричний потенціал формує під електродом 1 змінне електричне поле, яке породжує в об'ємі п'єзокерамічного диску гармонійно змінні в часі пружні деформації. Внаслідок прямого п'єзоелектричного ефекту гармонійні коливання матеріальних частинок диска генерують на секторному електроді 2 поляризаційний заряд  $q_2(t) = Q_2 e^{i\omega t}$ , де  $Q_2$  – амплітудне значення поляризаційного заряду. Поляризаційний заряд  $q_2(t)$  своїм електричним полем переміщує вільні носії електрики (електрони) в провіднику електричного струму, який з'єднує електричне навантаження  $Z_2$  з секторним електродом 2. При протіканні електричного струму через комплексний опір  $Z_2$  на ньому виділяється різниця потенціалів  $U_2 e^{i\omega t}$ , де  $U_2$  – амплітудне значення різниці потенціалів у вторинному електричному колі п'єзоелектричного перетворювача.

Математичною моделлю п'єзоелектричного перетворювача будемо називати аналітичну конструкцію  $K(\omega, \Pi)$  (символ  $\Pi$  позначає набір геометричних, фізико-механічних та електричних параметрів перетворювача), яка визначається наступним чином:

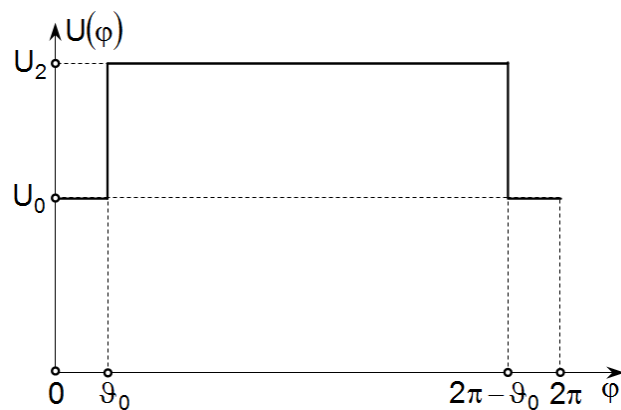
$$K(\omega, \Pi) = \frac{U_2 e^{i\omega t}}{U_1 e^{i\omega t}} = \frac{U_2}{U_1}. \quad (4.5)$$

Функція  $K(\omega, \Pi)$  за своїм фізичним змістом має сенс коефіцієнта трансформації дискового п'єзоелектричного перетворювача з розділеними електродами.

Розглянемо обчислювальні процедури, послідовна реалізація яких дозволить побудувати фізично змістовну математичну модель п'єзоелектричного перетворювача.

З показаної на рис. 4.1 розрахункової схеми слідує, що електричний

потенціал на поверхні диска  $z = \alpha$  залежить від окружної координати  $\varphi$  так, як це показано на рис. 4.2. По осі ординат на рис. 4.2 відкладено амплітудне значення  $U(\varphi)$  електричного потенціалу. Амплітудне значення потенціалу  $U_2$  може бути більше, як це показано на рис. 4.2, потенціалу  $U_0$ , А може бути і менше амплітудного значення  $U_0$ . Це не принципово. Принциповим є те, що величини  $U_0$  і  $U_2$  є постійними в своїх кутових секторах. Показану на рис. 4.2 функцію  $U(\varphi)$  можна представити рядом (4.1) з оговореними вище коефіцієнтами.



**Рис. 4.2. Кутовий розподіл електричного потенціалу на поверхні  $z = \alpha$**

Присутність в розкладанні (4.1) нульової, тобто вісесиметричної складової  $\Phi^{(0)}$  дозволяє припустити, що компоненти вектора  $\vec{u}(\rho, \varphi, z, t)$  зміщення матеріальних частинок коливального п'єзокерамічного диска, тобто величини  $u_\rho(\rho, \varphi, z, t)$ ,  $u_\varphi(\rho, \varphi, z, t)$  і  $u_z(\rho, \varphi, z, t)$ , можна записати в наступному вигляді

$$u_{\begin{pmatrix} \rho \\ z \end{pmatrix}}(\rho, \varphi, z, t) = e^{i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} U_{\begin{pmatrix} \rho \\ z \end{pmatrix}}^{(m)}(\rho, z) \cos m\varphi, \quad u_\varphi(\rho, \varphi, z, t) = -e^{i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} U_\varphi^{(m)}(\rho, z) \sin m\varphi, \quad (4.6)$$

де  $U_\beta^{(m)}(\rho, z)$  ( $\beta = \rho, \varphi, z$ ) – амплітудне значення  $m$ -ої окружної гармоніки  $\beta$ -го компонента вектора зміщення матеріальних частинок п'єзокерамічного диска. При цьому, очевидно,  $U_\varphi^{(0)}(\rho, z) \equiv 0$ . Слід підкреслити, що внаслідок малості зазору між секторними електродами 1 і 2, вирази (4.6) визначають

єдине поле зміщень матеріальних частинок диска, яке існує в колі  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

Зміщення матеріальних частинок п'єзокерамічного диска обмежуються пружними напруженнями  $\sigma_{ij}(\rho, \varphi, z, t) = \sigma_{ij}(\rho, \varphi, z)e^{i\omega t}$ , амплітудні значення  $\sigma_{ij}(\rho, \varphi, z)$  яких визначаються узагальненим законом Гука для пружних середовищ з п'єзоелектричними ефектами [3]

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k, \quad i, j, k, \ell = 1, 2, 3, \quad (4.7)$$

де  $\sigma_{ij} \equiv \sigma_{ij}(\rho, \varphi, z)$ ; у всіх подальших записах список аргументів  $(\rho, \varphi, z)$  в описі амплітудних значень фізичних величин для стислості записів буде опущений;  $\varepsilon_{kl}$  – компонент тензора нескінченно малих деформацій;  $E_k$  – k-ий компонент амплітудного значення вектора напруженості електричного поля в об'ємі деформованого п'єзоелектрика.

Беручи до уваги відповідність між індексами 1,2,3 координатних осей правої декартової системи координат і символами  $\rho, \varphi, z$  координатних ліній циліндричної системи координат ( $1 \Leftrightarrow \rho$ ;  $2 \Leftrightarrow \varphi$ ;  $3 \Leftrightarrow z$ ), і з огляду на структуру матриць (4.2) і (4.3) матеріальних констант, із загальної формулювання (4.7) можна отримати наступні вирази для розрахунку амплітудних значень пружних напружень:

$$\sigma_{\rho\rho} = c_{11}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{12}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{12}^E \varepsilon_{zz} - e_{31} E_z, \quad (4.8)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = c_{12}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{11}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{12}^E \varepsilon_{zz} - e_{31} E_z, \quad (4.9)$$

$$\sigma_{zz} = c_{12}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{12}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{33}^E \varepsilon_{zz} - e_{33} E_z, \quad (4.10)$$

$$\sigma_{\varphi z} = 2c_{44}^E \varepsilon_{\varphi z} - e_{24} E_\varphi, \quad (4.11)$$

$$\sigma_{\rho z} = 2c_{44}^E \varepsilon_{\rho z} - e_{15} E_\rho, \quad (4.12)$$

$$\sigma_{\rho\varphi} = 2c_{66}^E \varepsilon_{\rho\varphi}, \quad (4.13)$$

де  $\varepsilon_{\rho\rho}$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$  і  $\varepsilon_{zz}$  – деформації стискання-розтягування уздовж координатних ліній  $\rho$ ,  $\varphi$  і  $z$  циліндричної системи координат;  $\varepsilon_{\varphi z}$ ,  $\varepsilon_{\rho z}$  і  $\varepsilon_{\rho\varphi}$  – зсувні деформації в площинах, побудованих на одиничних векторах (ортах) відповідних координатних ліній. При записі виразів (4.8)–(4.13) було використано загальноприйняте в механіці правило – однакові за величиною

матеріальні константи позначаються однаковими символами. Формули для розрахунку деформацій стискання-розтягування і деформацій зсуву мають вигляд [3]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\rho\rho} &= \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\rho}{\rho}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad \varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right); \\ \varepsilon_{\rho z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \right); \quad \varepsilon_{\rho\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho} \right).\end{aligned}\quad (4.14)$$

Амплітудні значення компонентів тензора пружних напружень задовольняють рівнянням сталих коливань (другому закону Ньютона в диференціальній формі), які в циліндричній системі координат записуються в наступному вигляді:

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} (\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \rho_0 \omega^2 u_\rho = 0, \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\varphi\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{\rho} \sigma_{\varphi\rho} + \rho_0 \omega^2 u_\varphi = 0, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial \sigma_{z\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \sigma_{z\rho} + \rho_0 \omega^2 u_z = 0. \quad (4.17)$$

На поверхнях коливального в вакуумі п'єзокерамічного диску повинні, як того вимагає третій закон Ньютона, виконуватися наступні умови:

$$\sigma_{zz}(\rho, \varphi, 0) = 0, \quad \sigma_{zz}(\rho, \varphi, \alpha) = 0, \quad (4.18)$$

$$\sigma_{z\rho}(\rho, \varphi, 0) = 0, \quad \sigma_{z\rho}(\rho, \varphi, \alpha) = 0, \quad (4.19)$$

$$\sigma_{z\varphi}(\rho, \varphi, 0) = 0, \quad \sigma_{z\varphi}(\rho, \varphi, \alpha) = 0, \quad (4.20)$$

$$\sigma_{\rho\rho}(R, \varphi, z) = 0, \quad (4.21)$$

$$\sigma_{\rho\varphi}(R, \varphi, z) = 0. \quad (4.22)$$

Електрична складова фізичного стану коливального п'єзокерамічного диска визначається вектором електричної індукції  $\vec{D}(\rho, \varphi, z, t) = \vec{D}(\rho, \varphi, z) e^{i\omega t}$ , амплітудні значення компонентів якого в загальному випадку визначаються наступним чином [3]

$$D_k = e_{knm} \varepsilon_{nm} + \chi_{k\ell}^e E_\ell. \quad (4.23)$$

Стосовно аналізованої ситуації із загального визначення(4.23) випливає, що

$$D_{\rho} = 2e_{15}\varepsilon_{\rho z} + \chi_{11}^{\varepsilon}E_{\rho}, \quad D_{\varphi} = 2e_{24}\varepsilon_{\varphi z} + \chi_{11}^{\varepsilon}E_{\varphi}, \quad (4.24)$$

$$D_z = e_{31}(\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) + e_{33}\varepsilon_{zz} + \chi_{33}^{\varepsilon}E_z. \quad (4.25)$$

З першого рівняння Максвелла  $\text{rot}\vec{H} = \vec{J} + \partial\vec{D}/\partial t$  ( $\vec{H}$  – вектор напруженості магнітного поля;  $\vec{J}$  – вектор густини струму електричної провідності) в разі ідеального діелектрика ( $\vec{J} = 0$ ) впливає, що

$$\text{div}\vec{D} = 0. \quad (4.26)$$

Умова (4.26) має сенс умови відсутності вільних носіїв електрики і з високим ступенем точності реальної електричної провідності (менше  $10^{-4}$  См/м) п'єзоелектричної кераміки.

В роботі [4] показано, що в області частот до 10 МГц магнітна складова електромагнітного поля в деформованій п'єзокераміці настільки мала, що друге рівняння Максвелла  $\text{rot}\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$  можна записати у вигляді  $\text{rot}\vec{E} \cong 0$ . З останнього запису впливає, що вектор напруженості змінного електричного поля в об'ємі деформованої п'єзокераміки є безвихровим. З цієї причини він може бути визначений через скалярний електричний потенціал  $\Phi(\rho, \varphi, z, t) = \Phi(\rho, \varphi, z)e^{i\omega t}$  стандартним чином, тобто

$$\vec{E} = -\text{grad}\Phi. \quad (4.27)$$

Підставляючи компоненти вектора напруженості електричного поля, визначені векторним співвідношенням (4.27), в формули (4.24) і (4.25), а отримані результати – в умову (4.26), отримуємо диференціальне рівняння в часткових похідних другого порядку щодо шуканого амплітудного значення  $\Phi(\rho, \varphi, z)$  скалярного електричного потенціалу. Загальний розв'язок цього рівняння має відповідати таким вимогам:

$$\Phi(\rho, \varphi, 0) = 0, \quad \Phi(\rho, \varphi, \alpha) = U(\varphi), \quad (4.28)$$

$$\left. \frac{\partial\Phi(\rho, \varphi, z)}{\partial\rho} \right|_{\rho=R} \cong 0. \quad (4.29)$$

Наближена гранична умова (4.29) виконується тим точніше, чим більше значення діелектричної проникності  $\chi_{11}^{\varepsilon}$  перевищує діелектричну постійну  $\chi_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м [4].

Спільний розв'язок диференціальних рівнянь (4.15)–(4.17) і (4.26) з подальшим задоволенням граничних умов (4.18)–(4.22) і (4.28), (4.29) пов'язаний з практично нездоланими математичними проблемами. Ситуація істотно полегшується і спрощується в тому випадку, коли розміри диска (товщина  $\alpha$  і радіус  $R$ ) задовольняють сильній нерівності  $\alpha/R \ll 1$ , тобто коли розглядається тонкий п'єзокерамічний диск.

В діапазоні частот, в якому довжина хвилі пружних коливань тонкого п'єзокерамічного диска співрозмірна з його радіусом, можна стверджувати, що напружено-деформований стан практично не змінюється по товщині диска. При цьому з граничних умов (4.18)–(4.20) випливає, що нормальне напруження  $\sigma_{zz}$  і дотичні напруження  $\sigma_{z\rho}$  і  $\sigma_{z\varphi}$  дорівнюють нулю в будь-якій точці на поверхні і в об'ємі коливального п'єзокерамічного диска. При цьому необхідно розуміти, що деформація стискання-розтягування  $\varepsilon_{zz} \neq 0$ , оскільки існують деформації стискання-розтягування  $\varepsilon_{\rho\rho}$  і  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ . Прирівнюючи нулю праву частину виразу (4.10), отримуємо визначення деформації стискання-розтягування  $\varepsilon_{zz}$  через деформації  $\varepsilon_{\rho\rho}$  і  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ :

$$\varepsilon_{zz}(\rho, \varphi) = -\frac{c_{12}^E}{c_{33}^E} [\varepsilon_{\rho\rho}(\rho, \varphi) + \varepsilon_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi)] + \frac{e_{33}}{c_{33}^E} E_z(\rho, \varphi). \quad (4.30)$$

Список аргументів, в якому вказані тільки змінні  $\rho$  і  $\varphi$ , підкреслює ту обставину, що напружено-деформований стан коливального тонкого п'єзокерамічного диску не залежить від аксіальної координати  $z$ .

Так як на поверхнях  $z=0$  і  $z=\alpha$ , де існує електродне покриття, компоненти вектора електричної індукції  $D_\rho = D_\varphi = 0$ , то в області низьких частот, коли довжина хвилі пружних коливань співрозмірна з радіусом тонкого диска, остання рівність повинна виконуватися в будь-якій точці об'єму тонкого диска. З цього факту випливає, що

$$E_\rho = -2 \frac{e_{15}}{\chi_{11}^\varepsilon} \varepsilon_{\rho z}, \quad E_\varphi = -2 \frac{e_{24}}{\chi_{11}^\varepsilon} \varepsilon_{\varphi z}.$$

Підставляючи останні рівності в визначення (4.11) і (4.12), отримуємо

$$\sigma_{\varphi z} = 2c_{44}^D \varepsilon_{\varphi z}, \quad \sigma_{\rho z} = 2c_{44}^D \varepsilon_{\rho z}, \quad (4.31)$$

де  $c_{44}^D = c_{44}^E + e_{15}^2/\chi_{11}^E = c_{44}^E + e_{24}^2/\chi_{11}^E$  – модулі пружності для режиму сталості (рівності нулю) радіального і окружного компонентів вектора електричної індукції.

У ситуації, коли  $D_\rho = D_\varphi = 0$ , умова (4.26) приймає простий вигляд, а саме

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = 0, \quad (4.32)$$

звідки випливає, що аксіальний компонент вектора електричної індукції не залежить від значень аксіальної координати  $z$ . З огляду на все сказане вище, вираз (4.25) можна записати в наступному вигляді

$$D_z(\rho, \varphi) = e_{31}^*[\varepsilon_{\rho\rho}(\rho, \varphi) + \varepsilon_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi)] + \chi_{33}^* E_z(\rho, \varphi), \quad (4.33)$$

де  $e_{31}^* = e_{31} - e_{33}c_{12}^E/c_{33}^E$  і  $\chi_{33}^* = \chi_{33}^E + e_{33}^2/c_{33}^E$  – п'єзоелектричний модуль і діелектрична проникність тонкого п'єзокерамічного диска, в якому реалізований режим планарних коливань.

Так як  $E_z = -\partial\Phi/\partial z$ , то інтегруючи ліву і праву частини виразу (4.33) по змінній  $z$  в межах від нуля до  $\alpha$ , і враховуючи при цьому умову (4.32), приходимо до наступного результату

$$\alpha D_z(\rho, \varphi) = \alpha e_{31}^*[\varepsilon_{\rho\rho}(\rho, \varphi) + \varepsilon_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi)] - \chi_{33}^* [\Phi(\rho, \varphi, \alpha) - \Phi(\rho, \varphi, 0)].$$

Беручи до уваги граничну умову (4.28), останній вираз можна переписати таким чином

$$D_z(\rho, \varphi) = e_{31}^*[\varepsilon_{\rho\rho}(\rho, \varphi) + \varepsilon_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi)] - \chi_{33}^* \frac{U(\varphi)}{\alpha}. \quad (4.34)$$

Порівнюючи між собою два фізично еквівалентних визначення (4.33) і (4.34) аксіального компонента  $D_z(\rho, \varphi)$ , приходимо до висновку, що

$$E_z(\rho, \varphi) = E_z(\varphi) = -U(\varphi)/\alpha. \quad (4.35)$$

Підставляючи вирази (4.30) і (4.35) в визначення (4.8) і (4.9) нормальних напружень  $\sigma_{\rho\rho}$  і  $\sigma_{\varphi\varphi}$ , отримуємо наступні результати:

$$\sigma_{\rho\rho}(\rho, \varphi) = c_{11}^* \varepsilon_{\rho\rho}(\rho, \varphi) + c_{12}^* \varepsilon_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi) + e_{31}^* U(\varphi)/\alpha, \quad (4.36)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi) = c_{12}^* \varepsilon_{\rho\rho}(\rho, \varphi) + c_{11}^* \varepsilon_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi) + e_{31}^* U(\varphi)/\alpha, \quad (4.37)$$

де  $c_{11}^* = c_{11}^E - (c_{12}^E)^2/c_{33}^E$  і  $c_{12}^* = c_{12}^E(1 - c_{12}^E/c_{33}^E)$  – модулі пружності тонкого п'єзокерамічного диска для режиму планарних коливань.



Рівняння (4.15) і (4.16) сталих гармонійних коливань приймають такий вигляд

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}(\rho, \varphi)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\rho\varphi}(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} [\sigma_{\rho\rho}(\rho, \varphi) - \sigma_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi)] + \rho_0 \omega^2 u_\rho(\rho, \varphi) = 0, \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\varphi\rho}(\rho, \varphi)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{2}{\rho} \sigma_{\varphi\rho}(\rho, \varphi) + \rho_0 \omega^2 u_\varphi(\rho, \varphi) = 0, \quad (4.39)$$

де напруження  $\sigma_{\rho\rho}(\rho, \varphi)$ ,  $\sigma_{\rho\varphi}(\rho, \varphi) = \sigma_{\varphi\rho}(\rho, \varphi)$  і  $\sigma_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi)$  визначені виразами (4.36), (4.13) і (4.37) відповідно. Рівняння (4.17) з точністю до нескінченно малих другого порядку перетворюється в тотожність  $0 = 0$ . Розв'язок системи рівнянь (4.38), (4.39), тобто амплітудні значення компонентів вектора зміщення матеріальних частинок  $u_\rho(\rho, \varphi)$  і  $u_\varphi(\rho, \varphi)$  повинні забезпечувати виконання граничних умов (4.21) і (4.22). Крім того, функції  $u_\rho(\rho, \varphi)$  і  $u_\varphi(\rho, \varphi)$  повинні забезпечувати нульові значення зсувних напружень  $\sigma_{\varphi z}$  і  $\sigma_{\rho z}$  в будь-якій точці об'єму тонкого п'єзокерамічного диска. З визначень (4.31) випливає, що  $\sigma_{\varphi z} = \sigma_{\rho z} = 0$  тоді, коли виконуються умови

$$\varepsilon_{\varphi z} = \varepsilon_{\rho z} = 0. \quad (4.40)$$

Умови (4.40) фактично забороняють поперечний вигин, і можуть бути названі умовами планарності напружено-деформованого стану тонкого п'єзокерамічного диска [5].

## 4.2. Розрахунок електричного імпедансу дискового п'єзокерамічного перетворювача з закороченим секторним електродом у вторинному електричному колі

Компоненти вектора зміщення матеріальних частинок диска  $u_\rho(\rho, \varphi)$  і  $u_\varphi(\rho, \varphi)$  будемо шукати в наступному вигляді

$$u_\rho(\rho, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} U_\rho^{(m)}(\rho) \cos m\varphi, \quad (4.41)$$

$$u_\varphi(\rho, \varphi) = - \sum_{m=0}^{\infty} U_\varphi^{(m)}(\rho) \sin m\varphi, \quad (4.42)$$

де  $U_{\varphi}^{(0)}(\rho) \equiv 0$ .

Підставляючи визначення (4.41) і (4.42) в формули для розрахунку деформацій  $\varepsilon_{\rho\rho}(\rho, \varphi)$ ,  $\varepsilon_{\rho\varphi}(\rho, \varphi)$  і  $\varepsilon_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi)$ , а отримані результати в співвідношення (4.36)–(4.37), приходимо до наступних розрахункових формул:

$$\sigma_{\rho\rho}(\rho, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ c_{11}^* \frac{\partial U_{\rho}^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{12}^* \left[ \frac{U_{\rho}^{(m)}(\rho)}{\rho} - \frac{m U_{\varphi}^{(m)}(\rho)}{\rho} \right] + \frac{e_{31}^*}{\alpha} \Phi^{(m)} \right\} \cos m\varphi, \quad (4.43)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ c_{12}^* \frac{\partial U_{\rho}^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{11}^* \left[ \frac{U_{\rho}^{(m)}(\rho)}{\rho} - \frac{m U_{\varphi}^{(m)}(\rho)}{\rho} \right] + \frac{e_{31}^*}{\alpha} \Phi^{(m)} \right\} \cos m\varphi, \quad (4.44)$$

$$\sigma_{\rho\varphi}(\rho, \varphi) = c_{66}^E \sum_{m=0}^{\infty} \left[ -\frac{m U_{\rho}^{(m)}(\rho)}{\rho} - \frac{\partial U_{\varphi}^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} + \frac{U_{\varphi}^{(m)}(\rho)}{\rho} \right] \sin m\varphi. \quad (4.45)$$

При обчисленні похідних позмінним  $\rho$  і  $\varphi$  від нормальних напружень  $\sigma_{\rho\rho}(\rho, \varphi)$  і  $\sigma_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi)$ , необхідно пам'ятати, що розкладання (4.1) забезпечує сталість потенціалів  $U_0$  і  $U_2$  на електродованих поверхнях. З цієї причини похідні потенціалу  $U(\varphi)$ , визначеного розкладанням (4.1), по змінним  $\rho$  і  $\varphi$  дорівнюють нулю. Підставляючи співвідношення (4.43)–(4.45) в рівняння (4.38) і (4.39), отримуємо формули для розрахунку сум рядів зі знакозмінними членами  $\cos m\varphi$  і  $\sin m\varphi$ . Суми таких рядів дорівнюють нулю тільки в тому випадку, коли коефіцієнти при знакозмінних функціях  $\cos m\varphi$  і  $\sin m\varphi$  дорівнюють нулю. Останнє призводить до звичайних диференціальних рівнянь такого вигляду:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 U_{\rho}^{(m)}(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial U_{\rho}^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} + [(\gamma\rho)^2 - \nu_m^2] U_{\rho}^{(m)}(\rho) = -Q_{\rho}^{(m)}(\rho), \quad (4.46)$$

$$\rho^2 \frac{\partial^2 U_{\varphi}^{(m)}(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial U_{\varphi}^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} + [(\lambda\rho)^2 - \mu_m^2] U_{\varphi}^{(m)}(\rho) = -Q_{\varphi}^{(m)}(\rho), \quad (4.47)$$

де  $\gamma = \omega\sqrt{\rho_0/c_{11}^*}$  і  $\lambda = \omega\sqrt{\rho_0/c_{66}^E}$  – хвильові числа радіальних і окружних коливань матеріальних частинок п'єзоелектричного диска;  $\nu_m^2 = 1 + (1-k)m^2/2$ ;  $k = c_{12}^*/c_{11}^*$  – параметр п'єзоелектрика, причому, на відміну від коефіцієнта Пуассона, параметр  $k < 1$  і обмеження  $k \leq 0,5$  не існує;  $\mu_m^2 = 1 + c_{11}^*m^2/c_{66}^E = 1 + 2m^2/(1-k)$ , оскільки  $c_{66}^E = (c_{11}^E - c_{12}^E)/2 = (c_{11}^* - c_{12}^*)/2$ . Праві частини рівнянь (4.46) і (4.47)

визначаються наступними виразами:

$$\begin{aligned} Q_{\phi}^{(m)}(\rho) &= \frac{(3k-1)m}{2} \left[ U_{\phi}^{(m)}(\rho) - \frac{k+1}{3k-1} \rho \frac{\partial U_{\phi}^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} \right], \\ Q_{\rho}^{(m)}(\rho) &= \frac{(3-k)m}{1-k} \left[ U_{\rho}^{(m)}(\rho) + \frac{k+1}{3-k} \rho \frac{\partial U_{\rho}^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} \right]. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Чітко видно, що при  $m=0$  рівняння (4.46) приймає вид добре відомого [6] рівняння усталених вісесиметричних радіальних коливань тонкого п'єзоелектричного диска.

Отримати точний розв'язок системи рівнянь (4.46), (4.47) при довільному значенні  $m \geq 1$  не уявляється можливим. Разом з тим, застосовуючи метод послідовних наближень, можна як завгодно близько підійти до точного розв'язання цієї системи рівнянь.

Представимо точні розв'язки системи рівнянь (4.46), (4.47), тобто функції  $U_{\rho}^{(m)}(\rho)$  і  $U_{\phi}^{(m)}(\rho)$ , у вигляді наступних розкладів:

$$U_{\rho}^{(m)}(\rho) = U_{\rho}^{(m,0)}(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta U_{\rho}^{(m,n)}(\rho), \quad U_{\phi}^{(m)}(\rho) = U_{\phi}^{(m,0)}(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta U_{\phi}^{(m,n)}(\rho), \quad m \geq 1, \quad (4.49)$$

де  $U_{\rho}^{(m,0)}(\rho)$  і  $U_{\phi}^{(m,0)}(\rho)$  – нульові, тобто найгрубіші, наближення до точних рішень  $U_{\rho}^{(m)}(\rho)$  і  $U_{\phi}^{(m)}(\rho)$ ;  $\Delta U_{\rho}^{(m,n)}(\rho)$  і  $\Delta U_{\phi}^{(m,n)}(\rho)$  – поправки  $n$ -го порядку до  $n-1$  наближення до точного розв'язку  $U_{\rho}^{(m)}(\rho)$  і  $U_{\phi}^{(m)}(\rho)$ , тобто  $U_{\rho}^{(m,1)}(\rho) = U_{\rho}^{(m,0)}(\rho) + \Delta U_{\rho}^{(m,1)}(\rho)$ ;  $U_{\rho}^{(m,2)}(\rho) = U_{\rho}^{(m,1)}(\rho) + \Delta U_{\rho}^{(m,2)}(\rho) = U_{\rho}^{(m,0)}(\rho) + \Delta U_{\rho}^{(m,1)}(\rho) + \Delta U_{\rho}^{(m,2)}(\rho)$  тощо. Вважаючи, що має місце нерівність  $|Q_{\phi}^{(m)}(\rho)| < |Q_{\rho}^{(m)}(\rho)|$ , нульові наближення до точного розв'язання системи рівнянь (4.46), (4.47) будемо шукати як розв'язок наступної системи рівнянь:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 U_{\rho}^{(m,0)}(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial U_{\rho}^{(m,0)}(\rho)}{\partial \rho} + [(\gamma\rho)^2 - v_m^2] U_{\rho}^{(m,0)}(\rho) = 0, \quad (4.50)$$

$$\rho^2 \frac{\partial^2 U_{\phi}^{(m,0)}(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial U_{\phi}^{(m,0)}(\rho)}{\partial \rho} + [(\lambda\rho)^2 - \mu_m^2] U_{\phi}^{(m,0)}(\rho) = -Q_{\rho}^{(m,0)}(\rho), \quad (4.51)$$

де

$$Q_{\rho}^{(m,0)}(\rho) = \frac{(3-k)m}{1-k} \left[ U_{\rho}^{(m,0)}(\rho) + \frac{k+1}{3-k} \rho \frac{\partial U_{\rho}^{(m,0)}(\rho)}{\partial \rho} \right]. \quad (4.52)$$

Розв'язок рівняння (4.50) очевидний:

$$U_p^{(m,0)}(\rho) = A_0^{(m)} J_{\nu_m}(\gamma\rho), \quad (4.53)$$

де  $A_0^{(m)}$  – константа, що підлягає визначенню;  $\nu_m = \sqrt{1 + (1-k)m^2/2}$  – дробовий порядок функції Бесселя. Підставляючи розв'язок (4.53) у визначення (4.52), можемо записати, що

$$Q_p^{(m,0)}(\rho) = A_0^{(m)} F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma\rho), \quad (4.54)$$

$$\text{де } F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma\rho) = \frac{(3-k)m}{1-k} \left\{ J_{\nu_m}(\gamma\rho) + \left( \frac{k+1}{3-k} \right) \gamma\rho \left[ J_{\nu_m-1}(\gamma\rho) - \frac{\nu_m}{\gamma\rho} J_{\nu_m}(\gamma\rho) \right] \right\}.$$

Розв'язок рівняння (4.51), слідуючи загальновідомій технології розв'язування неоднорідних звичайних диференціальних рівнянь [7], будемо шукати у вигляді

$$U_\phi^{(m,0)}(\rho) = [C_0^{(m)} + C_0^{(m)}(\rho)] J_{\mu_m}(\lambda\rho) + D_0^{(m)}(\rho) N_{\mu_m}(\lambda\rho), \quad (4.55)$$

де  $C_0^{(m)}$  – константа, що підлягає визначенню;  $C_0^{(m)}(\rho)$  і  $D_0^{(m)}(\rho)$  – варійовані константи;  $\mu_m = \sqrt{1 + 2m^2/(1-k)}$  – дробовий порядок функції Бесселя  $J_{\mu_m}(\lambda\rho)$  і функції Неймана  $N_{\mu_m}(\lambda\rho)$ .

Вимагатимемо, щоб варійовані константи  $C_0^{(m)}(\rho)$  і  $D_0^{(m)}(\rho)$  забезпечували мінімальну кількість обчислень, тобто задовольняли умові

$$\frac{\partial C_0^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} J_{\mu_m}(\lambda\rho) + \frac{\partial D_0^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} N_{\mu_m}(\lambda\rho) = 0. \quad (4.56)$$

Обчисливши (з урахуванням умови (4.56)) першу і другу похідну від передбачуваного розв'язку (4.55), і підставивши результати обчислень разом з виразом (4.55) у рівняння (4.51), отримуємо наступну рівність

$$\rho^2 \lambda \frac{\partial C_0^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} \left[ J_{\mu_m-1}(\lambda\rho) - \frac{\mu_m}{\lambda\rho} J_{\mu_m}(\lambda\rho) \right] + \rho^2 \lambda \frac{\partial D_0^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} \left[ N_{\mu_m-1}(\lambda\rho) - \frac{\mu_m}{\lambda\rho} N_{\mu_m}(\lambda\rho) \right] = -Q_p^{(m,0)}(\rho). \quad (4.57)$$

Розв'язок системи рівнянь (4.56), (4.57) дозволяє визначити перші похідні варійованих констант  $C_0^{(m)}(\rho)$  і  $D_0^{(m)}(\rho)$  в наступному вигляді

$$\frac{\partial C_0^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} = \frac{\pi}{2\rho} Q_p^{(m,0)}(\rho) N_{\mu_m}(\lambda\rho), \quad \frac{\partial D_0^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} = -\frac{\pi}{2\rho} Q_p^{(m,0)}(\rho) J_{\mu_m}(\lambda\rho). \quad (4.58)$$

Виконавши інтегрування в лівих і правих частинах співвідношень (4.58), отримуємо

$$C_0^{(m)}(\rho) = \frac{\pi}{2} \int_0^\rho \frac{1}{x} Q_\rho^{(m,0)}(x) N_{\mu_m}(\lambda x) dx, \quad (4.59)$$

$$D_0^{(m)}(\rho) = -\frac{\pi}{2} \int_0^\rho \frac{1}{x} Q_\rho^{(m,0)}(x) J_{\mu_m}(\lambda x) dx. \quad (4.60)$$

Оскільки функція Неймана необмежено зростає при  $x \rightarrow 0$  [8], остільки вираз (4.59) має особливість типу  $1/0$ . Для того, щоб позбутися від цієї нескінченності, доповнимо варійовану константу  $C_0^{(m)}(\rho)$  постійної  $\Pi_0^{(m)}$ , яку визначимо наступним чином

$$\Pi_0^{(m)} = \frac{\pi}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^R \frac{1}{x} Q_\rho^{(m,0)}(x) N_{\mu_m}(\lambda x) dx.$$

При цьому очевидно,

$$\frac{\partial}{\partial \rho} [C_0^{(m)}(\rho) + \Pi_0^{(m)}] = \frac{\pi}{2\rho} Q_\rho^{(m,0)}(\rho) N_{\mu_m}(\lambda \rho),$$

звідки

$$\begin{aligned} C_0^{(m)}(\rho) &= \frac{\pi}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_\varepsilon^\rho \frac{1}{x} Q_\rho^{(m,0)}(x) N_{\mu_m}(\lambda x) dx - \int_\varepsilon^R \frac{1}{x} Q_\rho^{(m,0)}(x) N_{\mu_m}(\lambda x) dx \right\} = \\ &= -\frac{\pi}{2} \int_\rho^R \frac{1}{x} Q_\rho^{(m,0)}(x) N_{\mu_m}(\lambda x) dx. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Беручи до уваги співвідношення (4.60) і (4.61), загальний розв'язок (4.55) можна записати в наступному вигляді

$$U_\phi^{(m,0)}(\rho) = C_0^{(m)} J_{\mu_m}(\lambda \rho) - \frac{\pi}{2} A_0^{(m)} \left[ J_{\mu_m}(\lambda \rho) \int_\rho^R \frac{1}{x} F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma x) N_{\mu_m}(\lambda x) dx + N_{\mu_m}(\lambda \rho) \int_0^\rho \frac{1}{x} F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma x) J_{\mu_m}(\lambda x) dx \right]. \quad (4.62)$$

На бічній поверхні  $\rho = R$  п'єзоелектричного диска, який здійснює невісесиметричні планарні коливання і знаходиться в порожнечі, повинні виконуватися, як того вимагає третій закон Ньютона, такі граничні умови:

$$\sigma_{\rho\phi}^{(m,0)}(\rho) \Big|_{\rho=R} = 0, \quad (4.63)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(m,0)}(\rho) \Big|_{\rho=R} = 0, \quad (4.64)$$

де

$$\sigma_{\rho\phi}^{(m,0)}(\rho) = c_{66}^E \left[ -\frac{m}{\rho} U_{\rho}^{(m,0)}(\rho) - \frac{\partial U_{\phi}^{(m,0)}(\rho)}{\partial \rho} + \frac{U_{\phi}^{(m,0)}(\rho)}{\rho} \right],$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(m,0)}(\rho) = c_{11}^* \left\{ \frac{\partial U_{\rho}^{(m,0)}(\rho)}{\partial \rho} + \frac{k}{\rho} [U_{\rho}^{(m,0)}(\rho) - m U_{\phi}^{(m,0)}(\rho)] + \frac{e_{31}^*}{\alpha c_{11}^*} \Phi^{(m)} \right\}.$$

Підставляючи нульові наближення  $U_{\rho}^{(m,0)}(\rho)$  і  $U_{\phi}^{(m,0)}(\rho)$ , визначені виразами (4.53) і (4.62) відповідно, в формулу для розрахунку складової дотичного напруження  $\sigma_{\rho\phi}^{(m,0)}(\rho)$ , а отриманий результат в граничну умову (4.63), приходимо до висновку, що

$$-A_0^{(m)} F_A^{(m,0)}(\gamma, \lambda, R) - C_0^{(m)} F_C^{(m,0)}(\lambda, R) = 0, \quad (4.65)$$

де

$$F_A^{(m,0)}(\gamma, \lambda, R) = m J_{\nu_m}(\gamma R) + \frac{\pi}{2} [\lambda R N_{\mu_m-1}(\lambda R) - (\mu_m - 1) N_{\mu_m}(\lambda R)] \int_0^R \frac{1}{x} F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma x) J_{\mu_m}(\lambda x) dx;$$

$$F_C^{(m,0)}(\lambda, R) = \lambda R J_{\mu_m-1}(\lambda R) - (\mu_m + 1) J_{\mu_m}(\lambda R).$$

З рівності (4.65) випливає, що

$$C_0^{(m)} = -A_0^{(m)} \frac{F_A^{(m,0)}(\gamma, \lambda, R)}{F_C^{(m,0)}(\lambda, R)},$$

після чого вираз (4.62) приймає наступний вигляд

$$U_{\phi}^{(m,0)}(\rho) = -A_0^{(m)} \left\{ J_{\mu_m}(\lambda \rho) \left[ \frac{F_A^{(m,0)}(\gamma, \lambda, R)}{F_C^{(m,0)}(\lambda, R)} + \frac{\pi}{2} \int_{\rho}^R \frac{1}{x} F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma x) N_{\mu_m}(\lambda x) dx \right] + \frac{\pi}{2} N_{\mu_m}(\lambda \rho) \int_0^{\rho} \frac{1}{x} F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma x) J_{\mu_m}(\lambda x) dx \right\}. \quad (4.66)$$

Випереджаючи подальші обчислення, зробимо одне, істотно спрощуюче весь подальший розрахунок, уточнення. Будемо вважати, що  $U_2 = 0$ . Це рівносильне твердженню, що  $Z_2 = 0$ , тобто електрод вторинного електричного кола п'єзоелектричного перетворювача накоротко з'єднаний із загальною шиною. У припущенні, що  $U_2 = 0$ , підставляємо вирази (4.53) і (4.66) в формулу для розрахунку числових значень складової нормального напруження  $\sigma_{\rho\rho}^{(m,0)}(\rho)$ . В результаті цього отримуємо наступне рівняння

$$\sigma_{\rho\rho}^{(m,0)}(\rho)\Big|_{\rho=R} = \frac{c_{11}^*}{R} \left[ A_0^{(m)} \frac{\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)}{F_C^{(m,0)}(\lambda, R)} + \frac{2e_{31}^* R \sin m\vartheta_0}{\alpha c_{11}^* m\pi} U_0 \right] = 0, \quad (4.67)$$

де

$$\begin{aligned} \Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R) = F_C^{(m,0)}(\lambda, R) & \left[ \gamma R J_{\nu_m-1}(\gamma R) - (\nu_m - k) J_{\nu_m}(\gamma R) \right] + km \left[ F_A^{(m,0)}(\gamma, \lambda, R) J_{\mu_m}(\lambda R) + \right. \\ & \left. + \frac{\pi}{2} N_{\mu_m}(\lambda R) F_C^{(m,0)}(\lambda, R) \int_0^R \frac{1}{x} F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma x) J_{\mu_m}(\lambda x) dx \right]. \end{aligned} \quad (4.68)$$

З умови (4.67) знаходимо константу  $A_0^{(m)}$ :

$$A_0^{(m)} = - \frac{U_0 \beta_m}{\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)} F_C^{(m,0)}(\lambda, R), \quad (4.69)$$

де  $\beta_m = 2e_{31}^* R \sin m\vartheta_0 / (\alpha c_{11}^* m\pi)$  – розмірний (метр/вольт) ваговий множник.

Таким чином, нульове наближення до точних рішень рівнянь (4.46) і (4.47) записується в наступному вигляді

$$U_\rho^{(m,0)}(\rho) = - \frac{U_0 \beta_m F_C^{(m,0)}(\lambda, R)}{\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)} J_{\nu_m}(\gamma \rho), \quad (4.70)$$

$$U_\varphi^{(m,0)}(\rho) = \frac{U_0 \beta_m}{\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)} F_{\mu_m}^{(0)}(\lambda \rho), \quad (4.71)$$

де

$$\begin{aligned} F_{\mu_m}^{(0)}(\lambda \rho) = J_{\mu_m}(\lambda \rho) & \left[ F_A^{(m,0)}(\gamma, \lambda, R) + \frac{\pi}{2} F_C^{(m,0)}(\lambda, R) \int_\rho^R \frac{1}{x} F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma x) N_{\mu_m}(\lambda x) dx \right] + \\ & + \frac{\pi}{2} N_{\mu_m}(\lambda \rho) F_C^{(m,0)}(\lambda, R) \int_0^\rho \frac{1}{x} F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma x) J_{\mu_m}(\lambda x) dx. \end{aligned}$$

Перше наближення до точного розв'язку  $U_\rho^{(m)}(\rho)$ , тобто функція  $U_\rho^{(m,1)}(\rho)$ , визначається як розв'язок наступного рівняння

$$\rho^2 \frac{\partial^2 U_\rho^{(m,1)}(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial U_\rho^{(m,1)}(\rho)}{\partial \rho} + [(\gamma \rho)^2 - \nu_m^2] U_\rho^{(m,1)}(\rho) = - Q_\varphi^{(m,1)}(\rho), \quad (4.72)$$

де

$$\begin{aligned} Q_\varphi^{(m,1)}(\rho) = \frac{U_0 \beta_m}{\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)} \Phi_{\mu_m}^{(0)}(\lambda \rho); \\ \Phi_{\mu_m}^{(0)}(\lambda \rho) = \frac{(3k-1)m}{2} \left[ F_{\mu_m}^{(0)}(\lambda \rho) - \frac{k+1}{3k-1} \rho \frac{\partial F_{\mu_m}^{(0)}(\lambda \rho)}{\partial \rho} \right]. \end{aligned}$$

Після підстановки в рівняння (4.72) визначення першого наближення, тобто представлення  $U_\rho^{(m,1)}(\rho) = U_\rho^{(m,0)}(\rho) + \Delta U_\rho^{(m,1)}(\rho)$ , отримуємо наступне рівняння

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \Delta U_\rho^{(m,1)}(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial \Delta U_\rho^{(m,1)}(\rho)}{\partial \rho} + [(\gamma\rho)^2 - v_m^2] \Delta U_\rho^{(m,1)}(\rho) = -\frac{U_0 \beta_m}{\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)} \Phi_{\mu_m}^{(0)}(\lambda\rho). \quad (4.73)$$

Не складно показати, що розв'язок рівняння (4.73) має такий вигляд

$$\Delta U_\rho^{(m,1)}(\rho) = A_1^{(m)} J_{\nu_m}(\gamma\rho) - \frac{U_0 \beta_m}{\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)} W_\rho^{(m,1)}(\gamma\rho), \quad (4.74)$$

де

$$W_\rho^{(m,1)}(\gamma\rho) = \frac{\pi}{2} \left[ J_{\nu_m}(\gamma\rho) \int_\rho^R \frac{1}{x} \Phi_{\mu_m}^{(0)}(\lambda x) N_{\nu_m}(\gamma x) dx + N_{\nu_m}(\gamma\rho) \int_0^\rho \frac{1}{x} \Phi_{\mu_m}^{(0)}(\lambda x) J_{\nu_m}(\gamma x) dx \right].$$

Поправка  $\Delta U_\rho^{(m,1)}(\rho)$  до нульового наближення  $U_\rho^{(m,1)}(\rho)$  визначається з рівняння

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \Delta U_\rho^{(m,1)}(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial \Delta U_\rho^{(m,1)}(\rho)}{\partial \rho} + [(\lambda\rho)^2 - \mu_m^2] \Delta U_\rho^{(m,1)}(\rho) = -\Delta Q_\rho^{(m,1)}(\rho), \quad (4.75)$$

де

$$\Delta Q_\rho^{(m,1)}(\rho) = A_1^{(m)} F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma\rho) - \frac{U_0 \beta_m}{\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)} \Xi_\rho^{(m,1)}(\gamma\rho);$$

$$\Xi_\rho^{(m,1)}(\gamma\rho) = \frac{(3-k)m}{1-k} \left[ W_\rho^{(m,1)}(\gamma\rho) + \frac{k+1}{3-k} \rho \frac{\partial W_\rho^{(m,1)}(\gamma\rho)}{\partial \rho} \right].$$

Розв'язок рівняння (4.75) записується в наступному вигляді

$$\Delta U_\rho^{(m,1)}(\rho) = C_1^{(m)} J_{\mu_m}(\lambda\rho) - \frac{\pi}{2} A_1^{(m)} \left[ J_{\mu_m}(\lambda\rho) \int_\rho^R \frac{1}{x} F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma x) N_{\mu_m}(\lambda\rho) dx + \right.$$

$$\left. + N_{\mu_m}(\lambda\rho) \int_0^\rho \frac{1}{x} F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma x) J_{\mu_m}(\lambda\rho) dx \right] + \frac{\pi U_0 \beta_m}{2 \Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)} \left[ J_{\mu_m}(\gamma\rho) \int_\rho^R \frac{1}{x} \Xi_\rho^{(m,1)}(\gamma x) N_{\mu_m}(\lambda\rho) dx + \right.$$

$$\left. + N_{\mu_m}(\gamma\rho) \int_0^\rho \frac{1}{x} \Xi_\rho^{(m,1)}(\gamma x) J_{\mu_m}(\lambda\rho) dx \right]. \quad (4.76)$$

Гранична умова (4.63) приймає вигляд

$$\Delta \sigma_{\rho\phi}^{(m,1)}(\rho) \Big|_{\rho=R} = 0, \quad (4.77)$$

де



$$\Delta\sigma_{\rho\phi}^{(m,1)}(\rho) = c_{66}^E \left[ -\frac{m}{\rho} \Delta U_{\rho}^{(m,1)}(\rho) - \frac{\partial \Delta U_{\phi}^{(m,1)}(\rho)}{\partial \rho} + \frac{\Delta U_{\phi}^{(m,1)}(\rho)}{\rho} \right].$$

Підставляючи в визначення поправки  $\Delta\sigma_{\rho\phi}^{(m,1)}(\rho)$  вирази (4.74) і (4.76), а отриманий результат – в умову (4.77), отримуємо наступне рівняння

$$-A_1^{(m)} F_A^{(m,0)}(\gamma, \lambda, R) - C_1^{(m)} F_C^{(m,0)}(\lambda, R) + \frac{U_0 \beta_m}{\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)} W_{\rho\phi}^{(m,1)}(\gamma, \lambda, R) = 0, \quad (4.78)$$

де

$$W_{\rho\phi}^{(m,1)}(\gamma, \lambda, R) = \frac{\pi}{2} \left\{ m N_{\nu_m}(\gamma R) \int_0^R \frac{1}{x} \Phi_{\mu_m}(\lambda x) J_{\nu_m}(\gamma x) dx - \right. \\ \left. - [\lambda R N_{\mu_m-1}(\gamma R) - (\mu_m - 1) N_{\mu_m}(\gamma R)] \int_0^R \frac{1}{x} \Xi_{\rho}^{(m,1)}(\gamma x) J_{\mu_m}(\lambda x) dx \right\}.$$

З рівняння (4.78) випливає, що

$$C_1^{(m)} = -A_1^{(m)} \frac{F_A^{(m,0)}(\gamma, \lambda, R)}{F_C^{(m,0)}(\lambda, R)} + \frac{U_0 \beta_m}{\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)} \frac{W_{\rho\phi}^{(m,1)}(\gamma, \lambda, R)}{F_C^{(m,0)}(\lambda, R)}. \quad (4.79)$$

Гранична умова (4.64) після підстановки в неї визначень перших наближень  $U_{\rho}^{(m,1)}(\rho) = U_{\rho}^{(m,0)}(\rho) + \Delta U_{\rho}^{(m,1)}(\rho)$  і  $U_{\phi}^{(m,1)}(\rho) = U_{\phi}^{(m,0)}(\rho) + \Delta U_{\phi}^{(m,1)}(\rho)$  до точних рішень рівнянь (4.46) і (4.47) приймає наступний вигляд

$$\Delta\sigma_{\rho\rho}^{(m,1)}(\rho) \Big|_{\rho=R} = 0, \quad (4.80)$$

де

$$\Delta\sigma_{\rho\rho}^{(m,1)}(\rho) = c_{11}^* \left\{ \frac{\partial \Delta U_{\rho}^{(m,1)}(\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} [\Delta U_{\rho}^{(m,1)}(\rho) - m \Delta U_{\phi}^{(m,1)}(\rho)] \right\}; \quad (4.81)$$

доданок  $e_{31}^* \Phi^{(m)} / (\alpha c_{11}^*)$  у формулі (4.81) відсутній, тому що він сформував амплітудний множник  $A_0^{(m)}$  в нульовому наближенні.

Підставляючи вирази (4.74) і (4.76) в визначення (4.81), а отриманий результат – в граничну умову (4.80), отримуємо, з урахуванням співвідношення (4.79), наступний результат

$$A_1^{(m)} \frac{\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)}{F_C^{(m,0)}(\lambda, R)} - \frac{U_0 \beta_m F_A^{(m,1)}(\gamma, \lambda, R)}{\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R) F_C^{(m,0)}(\lambda, R)} = 0, \quad (4.82)$$

де

$$F_A^{(m,1)}(\gamma, \lambda, R) = km J_{\mu_m}(\lambda R) W_{\rho\phi}^{(m,1)}(\gamma, \lambda, R) + F_C^{(m,0)}(\lambda, R) \times$$

$$\times \left\{ \mathbf{R} \left[ \frac{\partial W_{\rho}^{(m,1)}(\gamma\rho)}{\partial \rho} - \frac{k}{\rho} W_{\rho}^{(m,1)}(\gamma\rho) \right] \Big|_{\rho=R} + \frac{\pi}{2} k m N_{\mu_m}(\lambda R) \int_0^R \frac{1}{x} \Xi_{\rho}^{(m,1)}(\gamma x) J_{\mu_m}(\lambda x) dx \right\}.$$

З рівняння (4.82) визначається константа  $A_1^{(m)}$ :

$$A_1^{(m)} = \frac{U_0 \beta_m}{[\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)]^2} F_A^{(m,1)}(\gamma, \lambda, R). \quad (4.83)$$

Вираз (4.83) завершує процедуру побудови перших наближень  $U_{\rho}^{(m,1)}(\rho)$  і  $U_{\phi}^{(m,1)}(\rho)$  до точних рішень рівнянь (4.46) і (4.47). Всі наступні наближення будуються за схемою, яка була реалізована при побудові першого наближення. Беручи це до уваги, можна записати загальні вирази для амплітудних множників  $A_n^{(m)}$  і  $C_n^{(m)}$   $n$ -го наближення в наступному вигляді

$$A_n^{(m)} = \frac{U_0 \beta_m}{[\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)]^{n+1}} F_A^{(m,n)}(\gamma, \lambda, R),$$

$$C_n^{(m)} = -A_n^{(m)} \frac{F_A^{(m,0)}(\gamma, \lambda, R)}{F_C^{(m,0)}(\lambda, R)} + \frac{U_0 \beta_m}{[\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)]^n} \frac{W_{\rho\phi}^{(m,n)}(\gamma, \lambda, R)}{F_C^{(m,0)}(\lambda, R)}.$$

Як випливає з співвідношень (4.79) і (4.83), перші наближення до визначають амплітуди радіальних і окружних зміщень. Частотні властивості планарних коливань, тобто набір резонансних частот, визначається відразу, на першому кроці, при обчисленні нульового наближення, і залишається незмінним при будь-якому наступному наближенні до точних значень компонентів вектора зміщення матеріальних частинок тонкого п'єзокерамічного диска.

Цілком очевидно, що корені рівняння

$$\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R) = 0 \quad (4.84)$$

доставляють числові значення резонансних частот  $\Omega_{\rho}^{(m)}$  ( $\rho = 1, 2, 3, \dots$ ;  $m = 1, 2, 3, \dots$ ;  $\Omega = \gamma R$  – безрозмірна частота) планарних невісесиметричних коливань тонкого п'єзокерамічного диска. При  $m = 0$  вираз (4.68) для розрахунку числових значень функції  $\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)$  приймає наступний вигляд

$$\Psi_0^{(0)}(\gamma, \lambda, R) = F_C^{(0,0)}(\lambda, R) F_A^{(0,0)}(\gamma, R),$$

де  $F_C^{(0,0)}(\lambda, R) = \lambda R J_0(\lambda R) - 2J_1(\lambda R)$ ;  $F_A^{(0,0)}(\gamma, R) = \gamma R J_0(\gamma R) - (1 - k) J_1(\gamma R)$ .

Рівняння  $\Psi_0^{(0)}(\gamma, \lambda, R) = 0$  допускає дві реалізації, а саме  $F_C^{(0,0)}(\lambda, R) = 0$  (при цьому  $F_A^{(0,0)}(\lambda, R) \neq 0$ ) або  $F_A^{(0,0)}(\lambda, R) = 0$  (при цьому  $F_C^{(0,0)}(\lambda, R) \neq 0$ ). Перша ситуація відповідає вісесиметричним крутильним коливанням тонкого п'єзокерамічного диска. Друга ситуація відповідає добре вивченим [9] вісесиметричним радіальним коливанням. Одночасне виконання умов  $F_C^{(0,0)}(\lambda, R) = 0$  і  $F_A^{(0,0)}(\lambda, R) = 0$  неможливо за фізичними міркуваннями.

Розглянемо ситуацію, коли виконується умова  $F_A^{(0,0)}(\lambda, R) = 0$ . При цьому  $F_C^{(0,0)}(\lambda, R) \neq 0$  і окружний компонент  $U_\phi^{(0)}(\rho) = 0$ , тобто в тонкому п'єзокерамічному диску існують вісесиметричні радіальні коливання матеріальних частинок. Числові значення перших шести резонансних частот, тобто перших шести коренів рівняння  $F_A^{(0,0)}(\lambda, R) = 0$ , представлені в таблиці 4.1.

**Таблиця 4.1. Числові значення резонансних частот вісесиметричних радіальних коливань тонкого п'єзокерамічного диска ( $m = 0$ )**

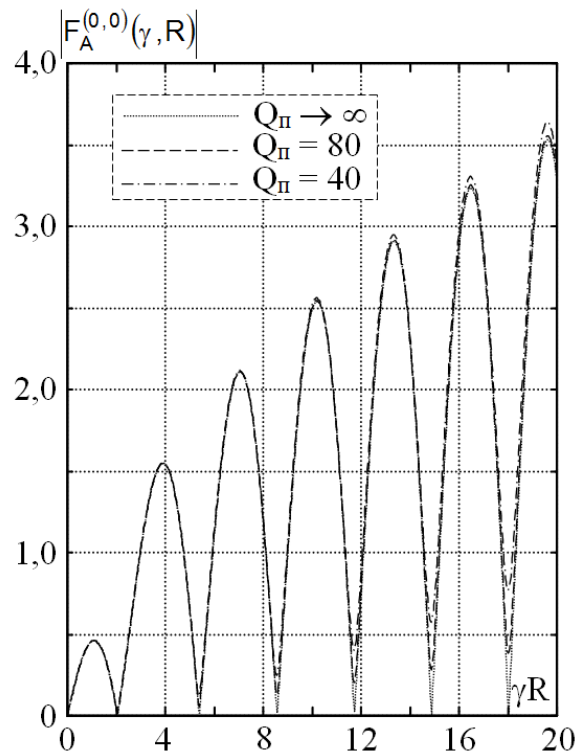
k	x1	x2	x3	x4	x5	x6
0,30	2,048850	5,389364	8,571859	11,731787	14,883847	18,032222
0,35	2,079508	5,398928	8,577761	11,736076	14,887220	18,035003
0,40	2,109198	5,408461	8,583657	11,740362	14,890591	18,037782
0,45	2,137971	5,417963	8,589546	11,744646	14,893961	18,040561
0,50	2,165871	5,427433	8,595426	11,748926	14,897330	18,043339
0,55	2,192942	5,436869	8,601299	11,753203	14,900696	18,046116
0,60	2,219221	5,446270	8,607163	11,757477	14,904062	18,048892

*Примітка:*  $x_n = \gamma_n R = 2\pi f_n R / \sqrt{c_{11}^* / \rho_0}$ ;  $n = 1, 2, \dots, 6$ .

Слід особливо підкреслити, що числові значення коренів рівняння  $F_A^{(0,0)}(\lambda, R) = 0$  визначалися в припущенні, що втрати на в'язке тертя в об'ємі п'єзокераміки дорівнюють нулю. Разом з тим, з результатів експериментальних досліджень [9] випливає, що втрати енергії пружних коливань в п'єзокераміка типу ЦТС досить великі. Усереднене в діапазоні частот  $0 \leq \Omega \leq 20$  значення добротності п'єзокераміки  $Q_n \leq 80$ . При кінцевому значенні добротності  $Q_n$  хвильові числа  $\gamma$  і  $\lambda$  стають комплекснозначними

величинами, причому  $\gamma = \gamma_0(1 - i/(2Q_n))$  і  $\lambda = \lambda_0(1 - i/(2Q_n))$ , де  $\gamma_0 = \omega/\sqrt{c_{11}^*/\rho_0}$  і  $\lambda_0 = \omega/\sqrt{c_{66}^E/\rho_0}$  – визначені без урахування втрат енергії в матеріалі п'єзокераміки хвильові числа радіальних і окружних коливань матеріальних частинок тонкого диска.

На рис. 4.3 наведені графіки модуля функції  $F_A^{(0,0)}(\gamma, R)$  розраховані без урахування втрат енергії, тобто при  $Q_n \rightarrow \infty$  (пунктирна крива), і для добротностей  $Q_n = 40; 80$ . З показаних на рис. 4.3 побудов слідує, що в реальному експерименті можливо надійно зареєструвати перші дві резонансні частоти.



**Рис. 4.3. Частотно залежна зміна модуля функції  $F_A^{(0,0)}(\gamma, R)$  при різних значеннях втрат енергії в об'ємі п'єзокераміки**

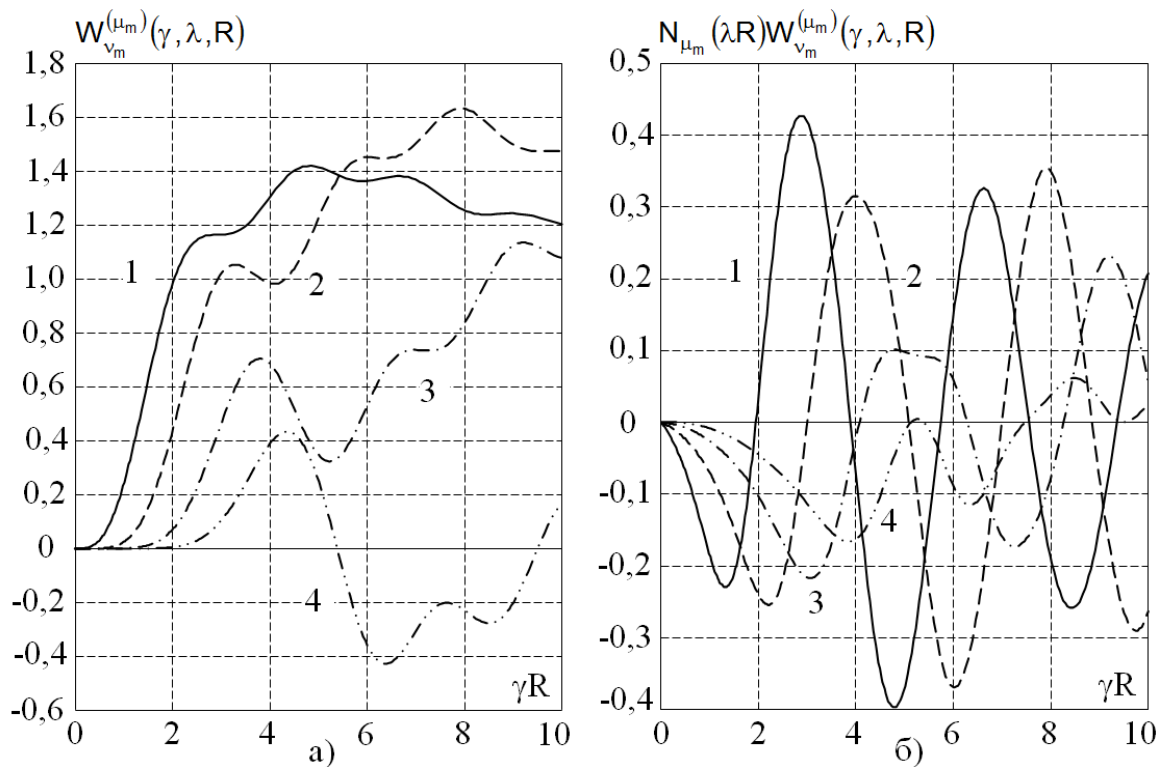
Третій резонанс визначається насилу, але, все-таки, визначається. Четвертий і наступні за ним резонанси в реальному експерименті на великих п'єзокерамічних дисках практично не видно. Таким чином, подальше визначення коренів рівняння (4.84) здійснюватимемо в діапазоні безрозмірних частот  $0 \leq \Omega \leq 10$ . Для диска з п'єзокераміки типу ЦТС з модулем

пружності  $c_{11}^* = 76,1 \text{ ГПа}$  і густиною  $\rho_0 = 7430 \text{ кг/м}^3$  значення безрозмірної частоти  $\Omega = 10$  при радіусі  $R = 33 \cdot 10^{-3} \text{ м}$  відповідає циклічній частоті  $f = 154 \text{ кГц}$ .

На рис. 4.4, а показано частотно залежна зміна інтегрального доданка

$$W_{\nu_m}^{(\mu_m)}(\gamma, \lambda, R) = \int_0^R \frac{1}{x} F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma x) J_{\mu_m}(\lambda x) dx$$

у формулі (4.68) для розрахунку числових значень функції  $\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)$ . На рис. 4.4, б показані графіки добутку інтеграла на функцію Неймана  $N_{\mu_m}(\lambda R)$ , яка, як відомо, обертається в нескінченність при наближенні свого аргументу до нуля. Значення інтеграла  $W_{\nu_m}^{(\mu_m)}(\gamma, \lambda, R)$  визначалися, звичайно, чисельно.



**Рис. 4.4. Частотно залежна зміна інтегрального доданка у формулі для розрахунку числових значень функції  $\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)$**

Цифрами в полі рисунків позначені значення параметра  $m$ . Параметр  $k = 0,35$ . При побудові графіків, показаних на рис. 4.4, втрати енергії в об'ємі п'єзокераміки не враховувалися. При обчисленнях, які були виконані для реального матеріалу з добротністю  $Q_p = 80$ , було встановлено, що уявна

частина інтеграла менше дійсної більш ніж на два порядки. Це дозволяє стверджувати, що результати розрахунків, при виконанні яких враховуються втрати в п'єзокераміці, відрізняються від результатів, які отримані без урахування втрат, на частки відсотка. Основна мета розрахунків, результати яких графічно представлені на рис. 4.4, полягає в тому, щоб показати, що функція  $\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)$  зберігає кінцеві значення, тобто не втрачає аналітичності, у всіх точках частотного діапазону  $0 \leq \Omega \leq 10$ .

У таблиці 4.2 представлені результати обчислення коренів рівняння (4.84) для п'єзокераміки з нескінченною добротністю для параметра  $m=1$ . Прочерки в сьомій і восьмій колонках означають, що  $(x_7, x_8) > 10$ . Прочерки в першій і другій колонках означають, що дійсні значення коренів рівняння  $\Psi_0^{(1)}(\gamma, \lambda, R) = 0$  відсутні. Числові значення коренів рівняння  $\Psi_0^{(1)}(\gamma, \lambda, R) = 0$  розміщені по колонках таблиці 4.2 відповідно до принципу: монотонній зміні числових значень параметра  $k$  відповідає монотонна зміна дійсних значень коренів рівняння.

**Таблиця 4.2. Корені рівняння  $\Psi_0^{(1)}(\gamma, \lambda, R) = 0$**

k	x1	x2	x3	x4
0,30	-	-	3,911623	5,539152
0,35	-	-	3,829236	5,437504
0,40	-	-	3,744709	5,306088
0,45	-	-	3,657736	5,151679
0,50	2,227320	2,641923	3,567747	4,979361
0,55	2,119035	2,710795	3,473761	4,791539
0,60	2,038388	2,717757	3,374220	4,588571

k	x5	x6	x7	x8
0,30	5,948812	7,676985	8,756947	9,563390
0,35	5,850308	7,438342	8,768293	9,224752
0,40	5,759540	7,189047	-	-
0,45	5,669546	6,926937	-	-
0,50	5,576048	6,648404	8,469996	8,777221
0,55	5,479674	6,346246	8,039970	8,856692
0,60	5,392088	6,000142	7,645511	9,127612

У таблиці 4.3 наведені дійсні значення коренів рівняння  $\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R) = 0$

для фіксованих значень параметра  $m = 2; 3; 4$ . Можна відзначити, що з ростом значень параметра  $m$  зростають початкові числові значення першого дійсного кореня частотного рівняння  $\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R) = 0$ . Крім цього, зменшується кількість дійсних коренів в частотному діапазоні  $0 \leq \Omega \leq 10$ . Якщо для  $m = 1$  при  $k < 0,40$  в діапазоні безрозмірних частот  $0 \leq \Omega \leq 10$  існує шість дійсних коренів, то при  $m = 2$  їх уже п'ять, при  $m = 3$  – два і для  $m = 4$  залишається всього один дійсний корінь. Говорячи іншими словами, спектр власних чисел граничної задачі (4.46), (4.47), (4.63), (4.64) монотонно переміщається в область більш високих безрозмірних частот  $\Omega = \gamma R$  при збільшенні номера  $m$  окружної гармоніки планарних коливань тонкого п'єзокерамічного диска.

**Таблиця 4.3.** Числові значення коренів рівняння  $\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R) = 0$

m = 2						
k	x1	x2	x3	x4	x5	x6
0,30	5,224122	6,316289	7,181977	8,888322	9,426647	-
0,35	5,147395	6,283961	7,042483	8,669918	9,308233	-
0,40	5,063123	6,224496	6,899122	8,436622	9,188273	-
0,45	4,971017	6,137198	6,750816	8,189068	9,078037	9,872740
0,50	4,870746	6,023171	6,595927	7,926521	9,032471	9,425329
0,55	4,761809	5,884059	6,432273	7,647168	-	-
0,60	4,643407	5,721184	6,257216	7,348024	-	-
m = 3						
k	x1	x2	x3	x4	x5	x6
0,30	-	-	8,437364	-	-	-
0,35	-	-	8,278501	9,842421	-	-
0,40	-	-	8,110490	9,658245	-	-
0,45	6,358329	6,612469	7,932131	9,449698	9,932386	-
0,50	6,155154	6,619131	7,741788	9,219171	9,751691	-
0,55	5,960942	6,571897	7,537102	8,968205	9,588124	-
0,60	5,752409	6,489583	7,314335	8,697224	9,481170	-
m = 4						
k	x1	x2	x3	x4	x5	x6
0,30	-	-	-	-	9,638074	-
0,35	-	-	-	-	9,450503	-
0,40	-	-	7,155191	7,426474	9,248442	-
0,45	-	-	6,969645	7,410500	9,031968	-
0,50	-	-	6,809497	7,354129	8,799033	-
0,55	-	-	6,659742	7,269690	8,554081	-
0,60	4,559561	5,131281	6,514170	7,160959	8,299302	-

На завершення обговорення результатів розв'язку рівняння (4.84) необхідно підкреслити, що дані таблиці 4.2 і таблиці 4.3 справедливі для вельми специфічної ситуації, коли на одному з двох секторних електродах постійно підтримується нульовий електричний потенціал.

Визначимо електричний імпеданс  $Z_{ен}^{(1)}$  для випадку, коли секторний електрод вторинного електричного кола п'єзоелектричного перетворювача накоротко замкнутий на загальну шину [10].

***Розрахунок електричного імпедансу п'єзокерамічного диска під секторним електродом***

Оскільки нульове наближення до точних значень компонентів вектора зміщення матеріальних частинок диска відразу забезпечує точне визначення резонансних частот, розрахунок електричного імпедансу  $Z_{ен}^{(1)}$  виконуватимемо в припущенні, що напружено-деформований стан диска визначається нульовим наближенням, тобто

$$u_{\rho}(\rho, \varphi) = -U_0 \frac{e_{31}^*}{\alpha c_{11}^*} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin m \vartheta_0}{m\pi} \frac{F_C^{(m,0)}(\lambda, R)}{\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)} J_{\nu_m}(\gamma \rho) \cos m \varphi,$$

$$u_{\varphi}(\rho, \varphi) = -U_0 \frac{e_{31}^*}{\alpha c_{11}^*} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin m \vartheta_0}{m\pi} \frac{F_{\mu_m}^{(0)}(\lambda \rho)}{\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)} \sin m \varphi. \quad (4.85)$$

Дотримуючись методики, яка викладена в параграфі 4.1, визначаємо аксіальний компонент  $D_z^{(1)}(\rho, \varphi)$  вектора електричної індукції під секторним електродом 1

$$D_z^{(1)}(\rho, \varphi) = e_{31}^* [\varepsilon_{\rho\rho}(\rho, \varphi) + \varepsilon_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi)] - \frac{\chi_{33}^*}{\alpha} U_0 =$$

$$= e_{31}^* \left\{ \frac{\partial u_{\rho}(\rho, \varphi)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial u_{\varphi}(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} + u_{\rho}(\rho, \varphi) \right] \right\} - \frac{\chi_{33}^*}{\alpha} U_0 =$$

$$= -\frac{\chi_{33}^*}{\alpha} U_0 \left[ 2K_{31}^2 \gamma R \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin m \vartheta_0}{m\pi} W_z^{(m,0)}(\gamma, \lambda, \rho) \cos m \varphi + 1 \right], \quad (4.86)$$

де  $\chi_{33}^* = \chi_{33}^{\varepsilon} + e_{33}^2 / c_{33}^E$  – діелектрична проникність п'єзокераміки в режимі планарних коливань тонкого диска;  $\chi_{33}^{\varepsilon}$  – довідкове значення діелектричної проникності, яке визначається для режиму сталості (рівності нулю) пружних



деформацій;  $\kappa_{31}^2 = (e_{31}^*)^2 / (\chi_{33}^* c_{11}^*)$  – квадрат коефіцієнта електромеханічного зв'язку для режиму планарних коливань диска з поляризованої по товщині п'єзокераміки;  $W_z^{(m,0)}(\gamma, \lambda, \rho)$  – нульове наближення до точного значення лінійного інваріанта тензора деформацій (об'ємна деформація) в режимі планарних коливань. Числові значення функції  $W_z^{(m,0)}(\gamma, \lambda, \rho)$  розраховуються за формулою

$$W_z^{(m,0)}(\gamma, \lambda, \rho) = F_C^{(m,0)}(\lambda, R) \left[ J_{\nu_{m-1}}(\gamma\rho) - \frac{\nu_{m-1}}{\gamma\rho} J_{\nu_m}(\gamma\rho) \right] + \frac{m}{\gamma\rho} F_{\mu_m}^{(0)}(\lambda\rho). \quad (4.87)$$

Амплітудне значення повного електричного заряду  $Q^{(1)}$  на секторному електроді 1 визначається наступним чином

$$Q^{(1)} = \int_{2\pi-\vartheta_0}^{\vartheta_0} \int_0^R \rho D_z^{(1)}(\rho, \phi) d\rho d\phi = -C_1^* U_0 \left[ \frac{4\kappa_{31}^2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin^2 m\vartheta_0}{m^2\vartheta_0} \frac{\Psi_z^{(m,0)}(\gamma, \lambda, R)}{\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)} + 1 \right], \quad (4.88)$$

де  $C_1^* = \chi_{33}^* R^2 \vartheta_0 / \alpha$  – динамічна електрична ємність секторного електрода 1; символом  $\Psi_z^{(m,0)}(\gamma, \lambda, R)$  позначена наступна безрозмірна аналітична конструкція

$$\Psi_z^{(m,0)}(\gamma, \lambda, R) = \frac{1}{\gamma R} \int_0^{\gamma R} \gamma \rho W_z^{(m,0)}(\gamma, \lambda, \rho) d(\gamma\rho). \quad (4.89)$$

Амплітуда електричного струму  $I^{(1)}$ , який протікає в провіднику, що сполучає джерело електричних сигналів і секторний електрод 1 (рис. 4.1), визначається наступним чином:  $I^{(1)} = -i\omega Q^{(1)}$ . Оскільки  $Z_{ен}^{(1)} = U_0 / I^{(1)}$ , остільки, після очевидних дій, отримуємо вираз для розрахунку вхідного електричного імпедансу

$$Z_{ен}^{(1)} = \frac{1}{i\omega C_1^* \Psi^{(0)}(\gamma, \lambda, R)}, \quad (4.90)$$

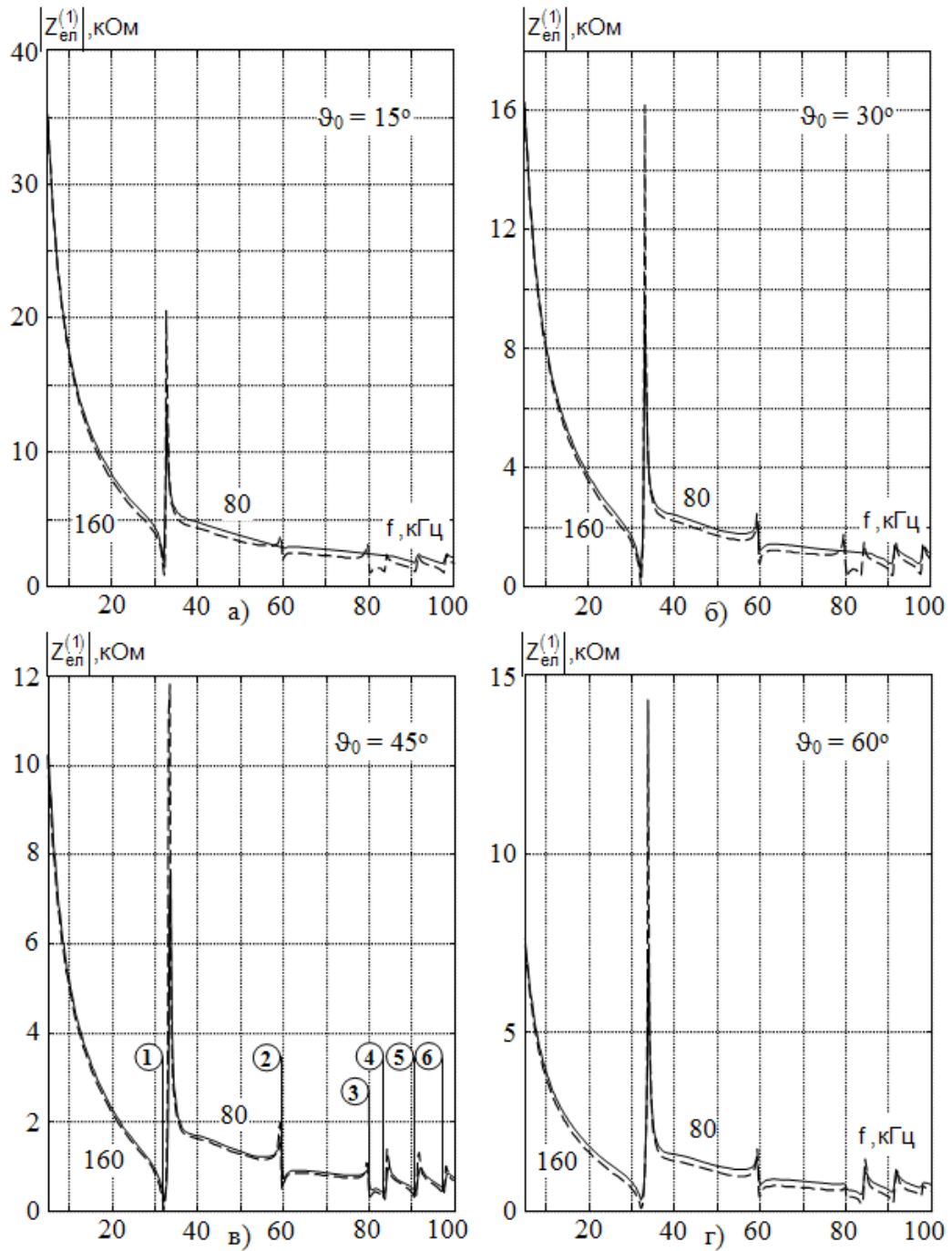
де

$$\Psi^{(0)}(\gamma, \lambda, R) = \frac{4\kappa_{31}^2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin^2 m\vartheta_0}{m^2\vartheta_0} \frac{\Psi_z^{(m,0)}(\gamma, \lambda, R)}{\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)} + 1.$$

Функція  $\Psi^{(0)}(\gamma, \lambda, R)$  є нульовим наближенням до точного значення функції  $\Psi(\gamma, \lambda, R)$ , яка визначає частотно залежну зміну вхідного електричного імпедансу  $Z_{ен}^{(1)}$  виродженого п'єзоелектричного трансформаторного перетворювача. Коли  $\Psi^{(0)}(\gamma, \lambda, R) \rightarrow \infty$ , а це спостерігається тоді, коли

$\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R) = 0$ , електричний імпеданс  $Z_{\text{еп}}^{(1)} \rightarrow 0$ , що відповідає фізичному стану електромеханічної системи, який називається електромеханічним резонансом. У найближчій околиці частоти електромеханічного резонансу функція  $\Psi_0^{(0)}(\gamma, \lambda, R) = 0$  і  $Z_{\text{еп}}^{(1)} \rightarrow \infty$ , що відповідає електромеханічному антирезонансу.

На рис. 4.5, а-г показані результати розрахунків за формулою (4.90) модуля електричного імпедансу  $Z_{\text{еп}}^{(1)}$  для різних значень кутового розміру  $\vartheta_0$  секторного електрода. Числові значення  $\vartheta_0$  в дугових градусах вказані в полі рисунків. Розрахунки були виконані для п'єзокераміки типу ЦТС з наступними значеннями фізико-механічних параметрів:  $c_{33}^E = 108,6$  ГПа;  $c_{11}^E = 94,8$  ГПа;  $c_{12}^E = 44$  ГПа;  $\chi_{33}^e = 7,0227 \cdot 10^{-9}$  Ф/м;  $e_{33} = 13,17$  Кл/м<sup>2</sup>;  $e_{31} = -5,89$  Кл/м<sup>2</sup>;  $\rho_0 = 7428$  кг/м<sup>3</sup>. Розміри п'єзокерамічного диска: радіус  $R = 33 \cdot 10^{-3}$  м, товщина  $\alpha = 3 \cdot 10^{-3}$  м. Розрахунок виконувався для двох значень добротності  $Q_p$  п'єзокераміки – 80 одиниць (суцільні криві) і 160 одиниць (штрихові криві). Параметр п'єзокераміки  $k = c_{12}^*/c_{11}^* = 0,34$ . По осях ординат відкладаються значення модуля  $Z_{\text{еп}}^{(1)}$  в кілоомах, по осях абсцис – значення частоти  $f$  в кілогерцах. Рахунок електричного імпедансу починався з частоти  $f = 5$  кГц. При виконанні обчислень підсумовувалися перші три окружні гармоніки, тобто вирази зі значеннями індексу  $m = 0, 1$  і  $2$ . Чітко видно, що зі збільшенням кутового розміру  $\vartheta_0$  секторного електрода в діапазоні частот  $(5 \div 100)$  кГц проявляються електромеханічні резонанси, які обумовлені нульовою окружною гармонікою (резонанси 1 і 4 на рис. 4.5, в), першою окружною гармонікою (резонанси 2 і 5) і другою гармонікою (резонанси 3 і 6). Це дозволяє виконати експериментальну перевірку теоретичних результатів, які були викладені вище [10].



**Рис. 4.5. Модуль електричного імпедансу  $Z_{ен}^{(1)}$  частини п'єзокерамічного диска під секторним електродом 1**

### **4.3. Розрахунок коефіцієнта трансформації та побудова математичної моделі дискового п'єзокерамічного перетворювача з секторними електродами**

У попередньому параграфі фактично виконана постановка задачі про

розрахунок коефіцієнта трансформації п'єзоелектричного перетворювача з розділеними секторними електродами (рис. 4.1). Там же методом послідовних наближень виконано розв'язування системи диференціальних рівнянь сталих планарних невісесиметричних коливань тонкого п'єзокерамічного диска з розділеними електродами. Визначено розрахункові формули для компонентів вектора зміщення матеріальних частинок коливального диска і виконана оцінка електричного імпедансу первинного електричного кола п'єзоелектричного перетворювача для режиму короткого замикання у вторинному електричному колі. Основним результатом попереднього параграфу є побудова альтернативної пропонуваній в монографії [11] теорії невісесиметричних планарних коливань тонких п'єзокерамічних дисків.

В даному параграфі, який є логічним продовженням і завершенням параграфу 4.2, пропонується методика побудови математичної моделі п'єзокерамічного перетворювача, розрахункова схема якого показана на рис. 4.1.

#### ***Методика побудови математичної моделі дискового п'єзоелектричного перетворювача з секторними електродами***

Як і раніше, математичною моделлю п'єзоелектричного перетворювача з розділеними електродами будемо називати аналітичний вираз  $K(\omega, \Pi)$  ( $\omega$  – кругова частота; символ  $\Pi$  позначає набір геометричних, фізико-механічних та електричних параметрів перетворювача (рис. 4.1)), який визначається наступним чином

$$K(\omega, \Pi) = \frac{U_2 e^{i\omega t}}{U_1 e^{i\omega t}} = \frac{U_2}{U_1}, \quad (4.91)$$

де  $U_1$  і  $U_2$  – амплітудні значення електричних потенціалів на електродах первинного і вторинного електричного кола п'єзокерамічного трансформаторного перетворювача;  $i = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця;  $t$  – час. Функція  $K(\omega, \Pi)$  за своїм фізичним змістом має сенс коефіцієнта трансформації дискового п'єзоелектричного перетворювача.

Оскільки джерело електричного потенціалу в первинному електричному колі перетворювача має відмінний від нуля комплексний вихідний опір  $Z_1$ , остільки амплітудне значення  $U_0$  електричного потенціалу на секторному електроді 1 відрізнятиметься (природно, в меншу сторону) від амплітудного значення  $U_1$ . В параграфі 4.1 показано, що електричний потенціал  $U(\varphi)$  на сегментованій поверхні п'єзокерамічного диску можна представити таким розкладанням

$$U(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi^{(m)} \cos m\varphi, \quad (4.92)$$

де коефіцієнти розкладання  $\Phi^{(m)}$  розраховуються за формулами

$$\Phi^{(0)} = U_0 \frac{\vartheta_0}{\pi} + U_2 \frac{\pi - \vartheta_0}{\pi}; \quad \Phi^{(m)} = \frac{2 \sin m \vartheta_0}{m\pi} (U_0 - U_2) \forall m \geq 1.$$

Для того, щоб визначити потенціали  $U_0$  і  $U_2$  через потенціал  $U_1$ , що, власне кажучи, і є основною метою процесу математичного моделювання п'єзокерамічного перетворювача, необхідно мати в своєму розпорядженні співвідношення для розрахунку компонентів вектора зміщення матеріальних частинок коливального диску. Ці співвідношення визначаються в результаті розв'язування системи диференціальних рівнянь сталих планарних коливань тонкого п'єзокерамічного диску. Ця система рівнянь не може бути вирішена точно в замкнутому вигляді. В параграфі 4.2 запропоновано метод послідовних наближень, за допомогою якого можна отримати результати, які як завгодно близько наближаються до точних рішень згаданої вище системи диференціальних рівнянь.

В параграфі 4.2 показано, що нульове (саме грубе) наближення до точних рішень, тобто до функцій  $u_\rho(\rho, \varphi)$  і  $u_\varphi(\rho, \varphi)$ , які визначають амплітудні значення радіального і окружного компонентів вектора зміщення матеріальних частинок коливального диску, можна записати наступним чином

$$u_\rho^{(0)}(\rho, \varphi) = - \frac{e_{31}^* R}{\alpha c_{11}^*} \left[ U_0 \frac{\vartheta_0}{\pi} + U_2 \frac{\pi - \vartheta_0}{\pi} \right] \frac{J_1(\gamma \rho)}{[\gamma R J_0(\gamma R) - (1 - k) J_1(\gamma R)]}$$

$$-\frac{2e_{31}^*R}{\alpha c_{11}^*}(U_0 - U_2) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m \vartheta_0}{m\pi} \frac{F_B^{(0,m)}(\lambda)}{\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)} J_{\nu_m}(\gamma\rho) \cos m\varphi, \quad (4.93)$$

$$u_{\varphi}^{(0)}(\rho, \varphi) = \frac{2e_{31}^*R}{\alpha c_{11}^*}(U_0 - U_2) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m \vartheta_0}{m\pi} \Psi_{\varphi}^{(0,m)}(\rho) \sin m\varphi, \quad (4.94)$$

де  $e_{31}^*$  і  $c_{11}^*$  – п'єзомодуль і модуль пружності тонкого п'єзокерамічного диску для режиму планарних коливань, причому;  $e_{31}^* = e_{31} - e_{33}c_{12}^E/c_{33}^E$ ;  $c_{11}^* = c_{11}^E - (c_{12}^E)^2/c_{33}^E$ ;  $e_{31}$ ,  $e_{33}$ ,  $c_{11}^E$ ,  $c_{12}^E$  і  $c_{33}^E$  – довідникові значення п'єзомодулів і модулів пружності для поляризованої по товщині диска п'єзокераміки;  $\alpha$  і  $R$  – товщина і радіус диска, причому  $\alpha/R \ll 1$ ;  $\vartheta_0$  – половинний кут розкриття секторного електрода в первинному електричному колі п'єзокерамічного перетворювача;  $\gamma = \omega/\sqrt{c_{11}^*/\rho_0}$  – хвильове число радіальних коливань тонкого диска;  $\rho_0$  – густина п'єзокераміки. Символами  $J_q(\gamma\rho)$  ( $q = 0, 1, \nu_m$ ) позначені функції Бесселя відповідних порядків; дробовий порядок  $\nu_m = \sqrt{1 + (1-k)m^2/2}$ , де  $k = c_{12}^*/c_{11}^*$ ;  $c_{12}^* = c_{12}^E(1 - c_{12}^E/c_{33}^E)$ . Частотно залежна функція  $F_B^{(0,m)}(\lambda) = (1 + \mu_m)J_{\mu_m}(\lambda R) - \lambda R J_{\mu_m-1}(\lambda R)$ , де  $\lambda = \omega/\sqrt{(c_{11}^* - c_{12}^*)/(2\rho_0)}$  – хвильове число окружних планарних коливань матеріальних частинок тонкого п'єзокерамічного диску;  $\mu_m = \sqrt{1 + 2m^2/(1-k)}$  – дробовий порядок функцій Бесселя  $J_{\mu_m}(\lambda R)$  і Неймана  $N_{\mu_m}(\lambda R)$ , які присутні в математичному описі окружної складової планарних коливань тонкого диска. Символом  $\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)$  позначено нульове наближення до точного значення частотного рівняння невісесиметричної, номера  $m$ , моди планарних коливань тонкого п'єзокерамічного диску. Числові значення функції  $\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)$  задаються наступним виразом

$$\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R) = F_B^{(0,m)}(\lambda) \left[ \gamma R J_{\nu_m-1}(\gamma R) - (\nu_m - k) J_{\nu_m}(\gamma R) \right] - km \left[ F_A^{(0,m)}(\gamma, \lambda) J_{\mu_m}(\lambda R) - \frac{\pi}{2} F_B^{(0,m)}(\lambda) N_{\mu_m}(\lambda R) \int_0^R \frac{1}{x} F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma x) J_{\mu_m}(\lambda x) dx \right], \quad (4.95)$$

де функції  $F_A^{(0,m)}(\gamma, \lambda)$  і  $F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma x)$  визначаються наступним чином:

$$F_A^{(0,m)}(\gamma, \lambda) = mJ_{\nu_m}(\gamma R) + \frac{\pi}{2} \left[ (1 + \mu_m) N_{\mu_m}(\lambda R) - \lambda R N_{\mu_m-1}(\lambda R) \right] \int_0^R \frac{1}{x} F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma x) J_{\mu_m}(\lambda x) dx ;$$

$$F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma x) = \frac{(3-k)m}{1-k} \left\{ J_{\nu_m}(\gamma x) + \frac{k+1}{3-k} [\gamma x J_{\nu_m-1}(\gamma x) - \nu_m J_{\nu_m}(\gamma x)] \right\}.$$

Функція  $\Psi_\varphi^{(0,m)}(\rho)$  розраховується за формулою

$$\Psi_\varphi^{(0,m)}(\rho) = \frac{1}{\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)} \left\{ \left[ F_A^{(0,m)}(\gamma, \lambda) - \frac{\pi}{2} F_B^{(0,m)}(\lambda) \int_\rho^R \frac{1}{x} F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma x) N_{\mu_m}(\lambda x) dx \right] J_{\mu_m}(\lambda \rho) - \right. \\ \left. - \frac{\pi}{2} F_B^{(0,m)}(\lambda) N_{\mu_m}(\lambda \rho) \int_0^\rho \frac{1}{x} F_{\nu_m}^{(0)}(\gamma x) J_{\mu_m}(\lambda x) dx \right\}.$$

Числові значення коренів  $\chi_n^{(m)} = \gamma_n^{(m)} R$  ( $n=1,2,3,\dots$ ) рівняння  $\Psi_0^{(m)}(\gamma_n, \lambda_n, R) = 0$  для окружних гармонік з номерами  $m \geq 1$  в діапазоні значень безрозмірних хвильових чисел (частот)  $\gamma R \leq 10$  для параметра пружних властивостей п'єзокераміки  $k = c_{12}^*/c_{11}^* = 0,34$  показані в таблиці 4.4.

**Таблиця 4.4. Числові значення коренів рівняння  $\Psi_0^{(m)}(\gamma_n, \lambda_n, R) = 0$**

$m \setminus \chi_n^{(m)}$	$\chi_1^{(m)}$	$\chi_2^{(m)}$	$\chi_3^{(m)}$	$\chi_4^{(m)}$	$\chi_5^{(m)}$	$\chi_6^{(m)}$
1	1,085045	2,464587	3,674256	7,571771	8,735141	9,413737
2	2,057536	3,134450	4,846928	6,378587	6,729860	-
3	2,966933	3,690970	6,101373	6,889025	8,130622	-
4	3,819653	4,700591	9,486512	-	-	-
5	4,618638	5,552675	-	-	-	-
6	5,374142	6,435415	-	-	-	-
7	6,098880	7,336232	-	-	-	-
8	6,802725	8,245702	-	-	-	-
9	7,492040	9,157764	-	-	-	-
10	8,170770	-	-	-	-	-
11	8,841415	-	-	-	-	-
12	9,505634	-	-	-	-	-

Примітка: прочерк в комірці означає, що числове значення кореня більше 10.

Слід звернути увагу на те, що перший корінь  $\chi_1^{(1)}$  або, що те ж саме, частота першого електромеханічного резонансу для першої ( $m=1$ ) окружної моди, має менше значення в порівнянні з частотою першого

електромеханічного резонансу вісесиметричних радіальних коливань. З ростом номера  $m$  окружної моди числові значення безрозмірної частоти  $\gamma_1^{(m)}R$  монотонно зростають, і тому загальне число коренів рівняння  $\Psi_0^{(m)}(\gamma_n, \lambda_n, R) = 0$  в будь-якому фіксованому діапазоні числових значень безрозмірних хвильових чисел (частот) має фіксоване (обмежене) значення.

Розглядаючи конструкцію виразів (4.93) і (4.94), можна зробити висновок, що потенціали  $U_0$  і  $U_2$  лінійно пов'язані між собою. Для того, щоб визначити цей зв'язок, виконаємо розрахунок амплітудного значення  $U_2$  електричного потенціалу на секторному електроді 2 у вторинному електричному колі перетворювача з розділеними електродами.

Очевидно, що

$$U_2 = I_2 Z_2, \quad (4.96)$$

де  $I_2$  – амплітудне значення електричного струму в провіднику, який з'єднує електричне навантаження  $Z_2$  з секторним електродом 2. У монографії [3] показано, що амплітуда електричного струму  $I_2 = -i\omega Q_2$ , де  $Q_2$  – амплітудне значення змінного в часі за законом  $e^{i\omega t}$  електричного заряду на секторному електроді 2. Електричний заряд

$$Q_2 = \int_{\vartheta_0}^{2\pi-\vartheta_0} \int_0^R \rho D_z^{(2)}(\rho, \varphi) d\rho d\varphi, \quad (4.97)$$

де  $D_z^{(2)}(\rho, \varphi)$  – аксіальний компонент вектора електричної індукції під секторним електродом 2. Числове значення  $D_z^{(2)}(\rho, \varphi)$  в тонкому п'єзоелектричному диску, що планарно коливається, визначається наступним чином

$$D_z^{(2)}(\rho, \varphi) = e_{31}^* [\varepsilon_{\rho\rho}(\rho, \varphi) + \varepsilon_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi)] + \chi_{33}^* E_z^{(2)}, \quad (4.98)$$

де  $\varepsilon_{\rho\rho}(\rho, \varphi) = \partial u_\rho(\rho, \varphi) / \partial \rho$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi) = \partial u_\varphi(\rho, \varphi) / (\rho \partial \varphi) + u_\rho(\rho, \varphi) / \rho$  – деформації стиснення-розтягування уздовж радіальної і окружної криволінійної вісі відповідно; алгебраїчна сума  $\varepsilon_{\rho\rho}(\rho, \varphi) + \varepsilon_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi)$  є лінійним інваріантом тензора деформації в циліндричній системі координат і має сенс об'ємної деформації тонкого



п'єзоелектричного диску;  $\chi_{33}^* = \chi_{33}^E + e_{33}^2/c_{33}^E$  – діелектрична проникність для режиму сталості (рівності нулю) нормального напруження  $\sigma_{zz}$ ;  $E_z^{(2)} = -U_2/\alpha$  – аксіальний компонент вектора напруженості електричного поля під секторним електродом 2.

Підставляючи в визначення компонентів тензора деформації вирази (4.93) і (4.94), а отримані результати – послідовно в співвідношення (4.98) і (4.97), після виконання тривіально операції інтегрування можемо записати наступний вираз

$$Q_2 = -K_{31}^2 U_0 C_2^* \Xi_0(\gamma, \lambda) - U_2 C_2^* \Xi_2(\gamma, \lambda), \quad (4.99)$$

де  $K_{31}^2 = (e_{31}^*)^2 / (\chi_{33}^* c_{11}^*)$  – квадрат коефіцієнта електромеханічного зв'язку в режимі планарних коливань тонкого п'єзокерамічного диску. Числове значення  $K_{31}^2$  характеризує ефективність подвійного перетворення енергії в п'єзокераміці і є енергетичною характеристикою матеріалу. Символом  $C_2^*$  позначена динамічна електрична ємність секторного електрода 2, причому  $C_2^* = (\pi - \vartheta_0) R^2 \chi_{33}^* / \alpha$ . Символами  $\Xi_0(\gamma, \lambda)$  і  $\Xi_2(\gamma, \lambda)$  позначені наступні аналітичні конструкції:

$$\begin{aligned} \Xi_0(\gamma, \lambda) &= \frac{2\vartheta_0 J_1(\gamma R)}{\pi[\gamma R J_0(\gamma R) - (1-k)J_1(\gamma R)]} - \frac{4}{\pi - \vartheta_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 m\vartheta_0}{m^2 \pi} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{F_B^{(0,m)}(\lambda)}{\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)} J_{\nu_m}(\gamma R) - \frac{m}{R} \int_0^R \Psi_\phi^{(0,m)}(\rho) d\rho \right\}; \\ \Xi_2(\gamma, \lambda) &= 1 + \frac{2K_{31}^2(\pi - \vartheta_0) J_1(\gamma R)}{\pi[\gamma R J_0(\gamma R) - (1-k)J_1(\gamma R)]} - \frac{4K_{31}^2}{\pi - \vartheta_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 m\vartheta_0}{m^2 \pi} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{F_B^{(0,m)}(\lambda)}{\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)} J_{\nu_m}(\gamma R) - \frac{m}{R} \int_0^R \Psi_\phi^{(0,m)}(\rho) d\rho \right\}. \end{aligned}$$

Так як  $U_2 = -i\omega Q_2 Z_2$ , то після підстановки виразу (4.99) в це визначення, яке з очевидністю впливає з співвідношення (4.96), отримуємо наступне рівняння

$$U_2 [1 + i\omega C_2^* Z_2 \Xi_2(\gamma, \lambda)] = i\omega C_2^* Z_2 \Xi_0(\gamma, \lambda) K_{31}^2 U_0,$$

звідки випливає, що

$$U_2 = \Psi_2(\gamma, \lambda) U_0, \quad (4.100)$$

де  $\Psi_2(\gamma, \lambda)$  – частотно залежний коефіцієнт пропорційності або, що є більш точним і фізично змістовним визначенням – коефіцієнт електроакустичного зв'язку. Числові значення функції  $\Psi_2(\gamma, \lambda)$  розраховуються за формулою

$$\Psi_2(\gamma, \lambda) = \frac{i\omega C_2^* Z_2 K_{31}^2 \Xi_0(\gamma, \lambda)}{1 + i\omega C_2^* Z_2 \Xi_2(\gamma, \lambda)}.$$

Тепер визначимо потенціал  $U_0$  через потенціал  $U_1$  джерела електричної енергії в первинному електричному колі п'єзоелектричного перетворювача.

З показаної на рис. 4.1 розрахункової схеми випливає, що

$$U_0 = \frac{U_1 Z_{ен}^{(1)}}{Z_1 + Z_{ен}^{(1)}}, \quad (4.101)$$

де  $Z_{ен}^{(1)}$  – електричний імпеданс частини п'єзокерамічного диску, яка покрита секторним електродом 1. Слідуючи закону Ома для ділянки електричного кола, визначимо  $Z_{ен}^{(1)}$  наступним співвідношенням

$$Z_{ен}^{(1)} = \frac{U_0}{I_1}, \quad (4.102)$$

де  $I_1 = -i\omega Q_1$  – амплітудне значення електричного струму в провіднику, який з'єднує джерело електричної енергії і секторний електрод 1 первинного електричного кола п'єзоелектричного перетворювача. Електричний заряд  $Q_1$  на секторному електроді 1 визначається стандартним чином:

$$Q_1 = 2 \int_0^{\vartheta_0} \int_0^R \rho D_z^{(1)}(\rho, \varphi) d\rho d\varphi, \quad (4.103)$$

де  $D_z^{(1)}(\rho, \varphi) = e_{31}^* [\varepsilon_{\rho\rho}(\rho, \varphi) + \varepsilon_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi)] - \chi_{33}^* U_0 / \alpha$  – аксіальний компонент вектора електричної індукції в деформованому п'єзокерамічному диску під секторним електродом 1.

Підставляючи в визначення компонентів тензора деформації вирази (4.93) і (4.94), в яких потенціал  $U_2$  замінюється правою частиною виразу (4.100), після обчислення інтеграла (4.103) отримуємо наступний результат

$$Q_1 = -C_1^* U_0 \Xi_1(\gamma, \lambda), \quad (4.104)$$

де  $C_1^* = \vartheta_0 R^2 \chi_{33}^* / \alpha$  – динамічна електрична ємність частини п'єзокерамічного

диску під секторним електродом 1. Частотно залежна функція  $\Xi_1(\gamma, \lambda)$  визначається наступним виразом

$$\begin{aligned} \Xi_1(\gamma, \lambda) = & 1 + 4K_{31}^2 \frac{[\vartheta_0 + \Psi_2(\gamma, \lambda)(\pi - \vartheta_0)]J_1(\gamma R)}{\pi[\gamma R J_0(\gamma R) - (1 - k)J_1(\gamma R)]} - 4K_{31}^2 \frac{\vartheta_0}{\pi} [1 - \Psi_2(\gamma, \lambda)] \times \\ & \times \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\sin m \vartheta_0}{m \vartheta_0} \right)^2 \left\{ \frac{F_B^{(0,m)}(\lambda)}{\Psi_0^{(m)}(\gamma, \lambda, R)} J_{\nu_m}(\gamma R) - \frac{m}{R} \int_0^R \Psi_\varphi^{(0,m)}(\rho) d\rho \right\}. \end{aligned}$$

Після розрахунку електричного заряду  $Q_1$  за формулою (4.104) визначається електричний струм  $I_1 = i\omega C_1^* U_0 \Xi_1(\gamma, \lambda)$  і електричний імпеданс

$$Z_{\text{эл}}^{(1)} = \frac{1}{i\omega C_1^* \Xi_1(\gamma, \lambda)}. \quad (4.105)$$

Підставляючи співвідношення (4.105) в визначення потенціалу  $U_0$ , отримуємо наступну розрахункову формулу

$$U_0 = \frac{U_1}{1 + i\omega C_1^* Z_1 \Xi_1(\gamma, \lambda)}.$$

Після підстановки останнього співвідношення в визначення (4.100) потенціалу  $U_2$ , отримуємо можливість для запису виразу для розрахунку коефіцієнта трансформації  $K(\omega, \Pi)$  [12]:

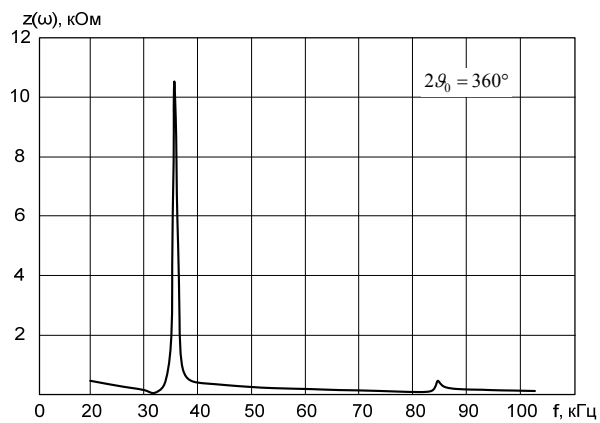
$$K(\omega, \Pi) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\Psi_2(\gamma, \lambda)}{1 + i\omega C_1^* Z_1 \Xi_1(\gamma, \lambda)}. \quad (4.106)$$

Співвідношення (4.106) має сенс математичної моделі п'єзоелектричного перетворювача з секторним електродуванням робочої поверхні диска [13].

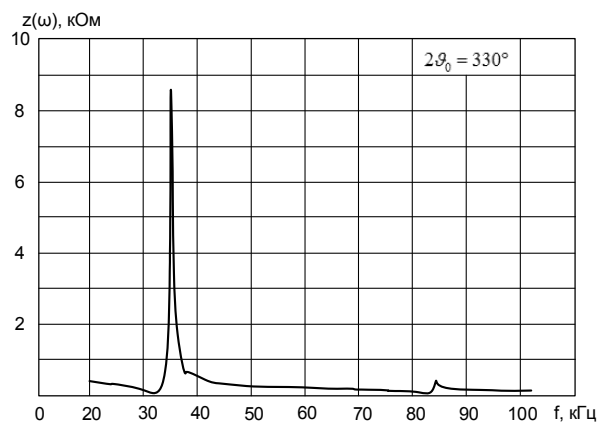
#### 4.4. Дослідження електричного імпедансу п'єзоелектричного диска з секторними електродами

Для експериментальних досліджень був використаний дисковий п'єзоелектричний елемент  $\varnothing 66 \times 3$  мм з матеріалу типу ЦТС.

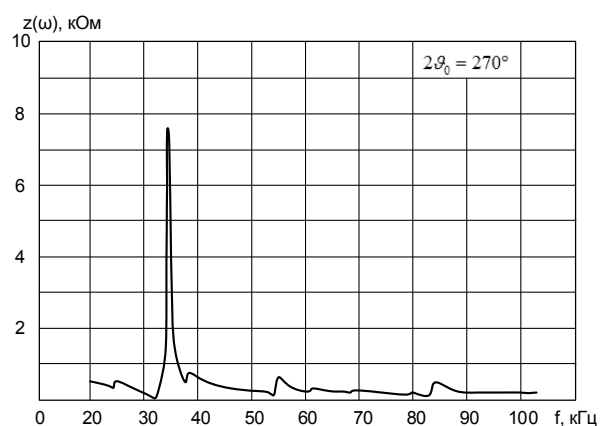
Результати вимірювання електричного імпедансу п'єзоелектричного диска при різних значеннях кута розкриття секторного електрода (рис. 4.1) в первинному електричному колі представлені на рис. 4.6.



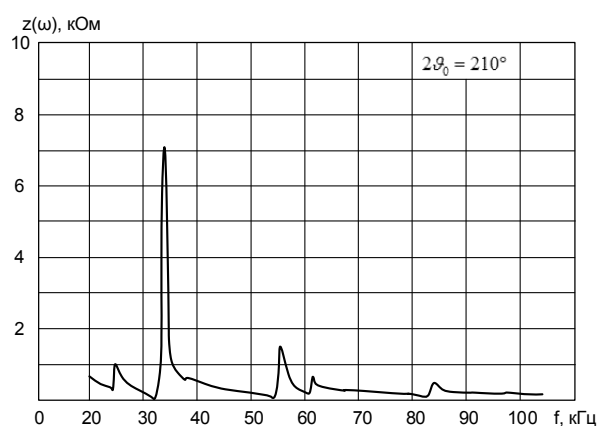
a)



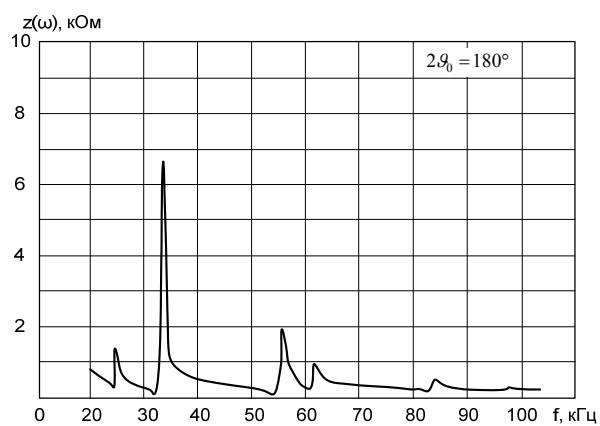
б)



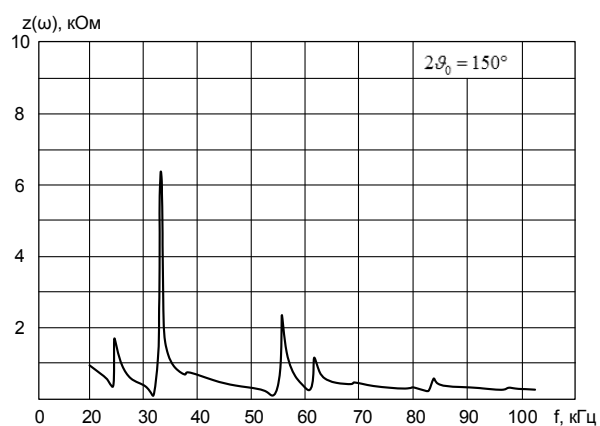
в)



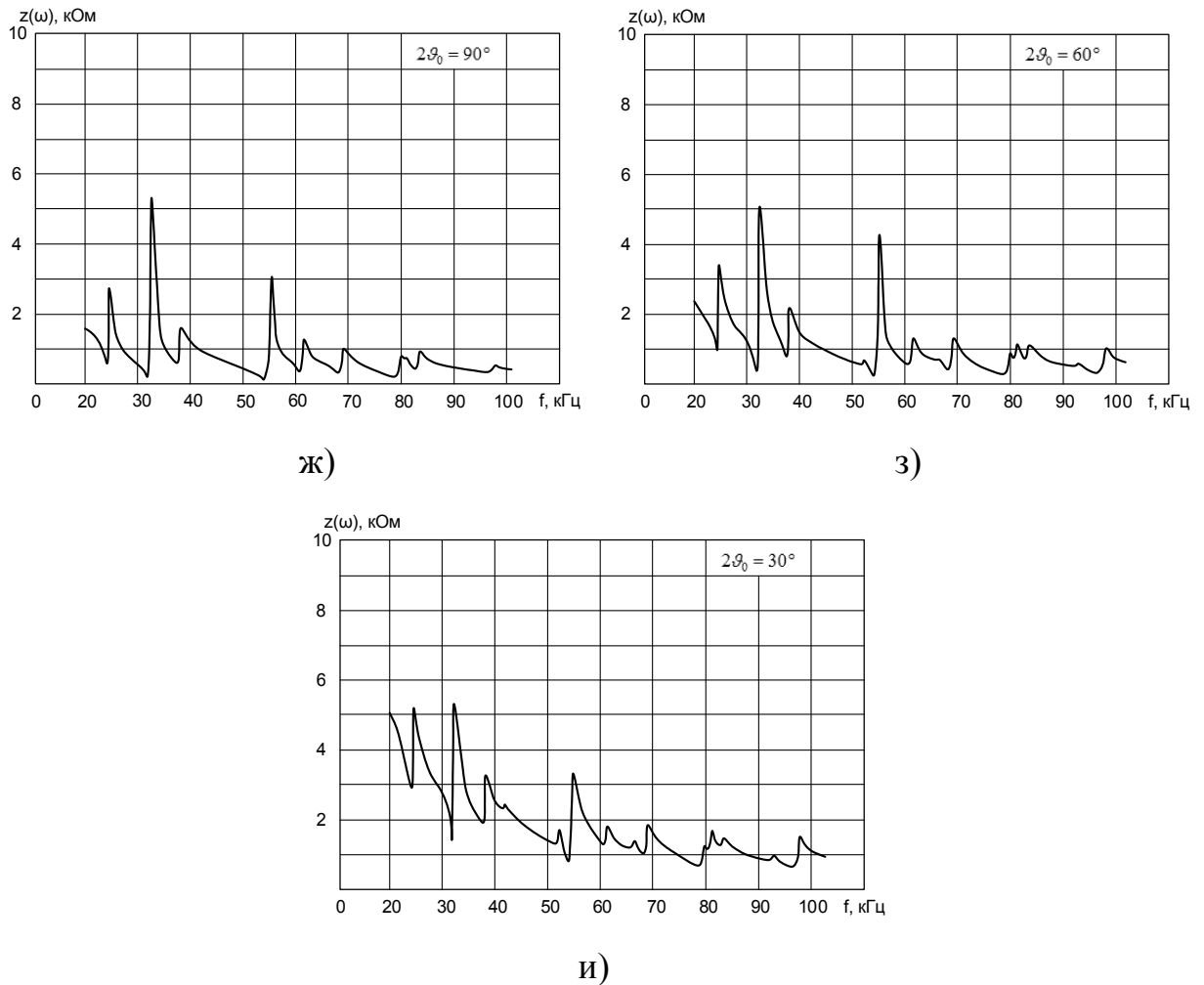
г)



д)



е)



**Рис. 4.6. Електричний імпеданс п'єзоелектричного диску при різних значеннях кута розкриття секторного електрода:**

- а)  $2\vartheta_0 = 360^\circ$ ; б)  $2\vartheta_0 = 330^\circ$ ; в)  $2\vartheta_0 = 270^\circ$ ; г)  $2\vartheta_0 = 210^\circ$ ; д)  $2\vartheta_0 = 180^\circ$ ; е)  $2\vartheta_0 = 150^\circ$ ;  
 ж)  $2\vartheta_0 = 90^\circ$ ; з)  $2\vartheta_0 = 60^\circ$ ; и)  $2\vartheta_0 = 30^\circ$

З експерименту випливає, що в міру зменшення кута розкриття сектора у формуванні напружено-деформованого стану диска починають приймати все більше число невісесиметричних мод, і число резонансів після першого вісесиметричного радіального резонансу зростає [14].

#### 4.5. Висновки до розділу

Підводячи підсумок, можна сказати, що основний результат даного розділу полягає в наступному:

– вперше побудована і обговорюється теорія невісесиметричних планарних коливань тонкого п'єзокерамічного диска, яка основана на адекватному описі фізичного стану коливального п'єзоелектрика;

– вперше запропонована схема побудови математичної моделі, яка дозволяє природним чином врахувати весь набір геометричних, фізико-механічних та електричних параметрів реальної конструкції п'єзоелектричного перетворювача з розділеними електродами;

– запропонована сукупність обчислювальних процедур, що спираються на фундаментальні принципи механіки та електродинаміки, послідовне виконання яких дозволяє побудувати математичну модель дискового п'єзоелектричного перетворювача з секторними електродами;

– запропонована раціональна методика побудови математичної моделі п'єзокерамічного перетворювача з секторним електродуванням робочої поверхні диска;

– експериментальні дослідження п'єзокерамічного перетворювача з секторним електродуванням робочої поверхні диска показали, що в міру зменшення кута розкриття сектора у формуванні напружено-деформованого стану диска починають приймати все більше число невісесиметричних мод, і число резонансів після першого вісесиметричного радіального резонансу зростає.

#### **Список використаних джерел:**

[1] Р.Г. Джагупов и А.А. Ерофеев, *Пьезоэлектронные устройства вычислительной техники, систем контроля и управления: Справочник*. СПб.: Политехника, 1994, 608 с.

[2] В. Варадан, К. Виной, и К. Джозе, *ВЧ МЭМС и их применение*. Москва: Техносфера, 2004, 528 с.

- [3] О.Н. Петрищев, *Гармонические колебания пьезокерамических элементов. Часть 1. Гармонические колебания пьезокерамических элементов в вакууме и метод резонанса – антирезонанса*. Киев: Аверс, 2012, 300 с.
- [4] В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, и Н.А. Шульга, *Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость*. Киев: Наук. думка, 1989, 280 с.
- [5] О.Н. Петрищев и К.В. Базило, "Принципы и методы построения математических моделей дисковых пьезоэлектрических трансформаторов с секторными электродами", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 2, с. 33–44, 2017.
- [6] В.М. Шарапов, И.Г. Минаев, Ж.В. Сотула, К.В. Базило, и В.В. Самойленко, "Об эффекте возникновения изгибных колебаний в мономорфных пьезоэлементах", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 3, с. 60–62, 2011.
- [7] В.И. Смирнов, *Курс высшей математики*, т. 2. СПб.: БХВ-Петербург, 2008, 848 с.
- [8] М. Абрамовиц и И. Стиган, Ред., *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*. М.: Наука, 1979, 832 с.
- [9] О.Н. Петрищев и К.В. Базило, "Определение электрического импеданса пьезокерамического диска и его расчет в области средних и высоких частот", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 3, с. 36–49, 2016.
- [10] О.Н. Петрищев и К.В. Базило, "Расчет электрического импеданса дискового пьезокерамического трансформатора с закороченным секторным электродом во вторичной электрической цепи", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 4, с. 47–62, 2017.
- [11] М.О. Шульга і В.Л. Карлаш, *Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин*. К.: Наукова думка, 2008, 272 с.

- [12] К.В. Базіло, "Математичне моделювання п'єзокерамічного трансформатора з секторними електродами", в *Інформатика, математика, автоматика «ІМА –2018»: Матеріали та програма наук.-техн. конф.*, Суми, 2018, с. 213–214.
- [13] К.В. Базіло, "Розрахунок коефіцієнта трансформації п'єзокерамічного трансформатора з секторними електродами", *Вісник Житомирського державного технологічного університету*, № 2, с. 179–184, 2018.
- [14] К.В. Базіло, "Дослідження електричного імпедансу п'єзоелектричного диска з секторними електродами", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 1, с. 41–45, 2018.



## РОЗДІЛ 5

### ДИСКОВІ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЮВАЧІ, ЩО ПРАЦЮЮТЬ НА ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ КОЛИВАННЯХ ПОПЕРЕЧНОГО ВИГИНУ

#### 5.1. Математичне моделювання дискового п'єзоелектричного перетворювача, що працює на вісесиметричних коливаннях поперечного вигину

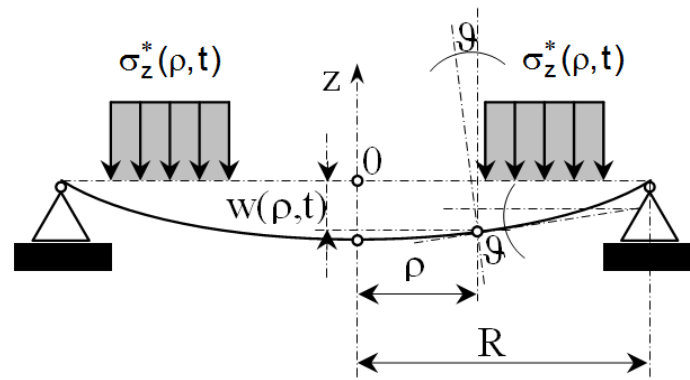
Перш ніж обговорювати конструкцію і особливості побудови математичної моделі дискового п'єзокерамічного перетворювача, принцип дії якого заснований на використанні вісесиметричних коливань поперечного вигину, розглянемо основні факти з теорії поперечного вигину круглих пластин.

У цьому викладі будуть розглядатися тонкі круглі пластини, товщина яких на порядок менше їх діаметра. Крім того, будемо розглядати такі частоти зміни знака напружено-деформованого стану пластини, на яких довжина хвилі пружних збурень (масштаб просторової неоднорідності напружено-деформованого стану) порівнянна з радіусом круглої пластинки і, відповідно набагато перевищує її товщину. Це дозволяє стверджувати, що нормальні напруження  $\sigma_{zz}$  практично не залежать від значень аксіальної координати  $z$ .

В основі теорії поперечного вигину тонких пластин лежить так звана гіпотеза плоских поперечних перерізів (гіпотеза Кірхгофа [1]), суть якої полягає в наступному: *матеріальні точки пластини, які до деформації розташовувалися на прямій, перпендикулярній серединній поверхні пластини, після деформації знову утворюють пряму, нормальну деформованій серединній поверхні*. Таке припущення про характер деформування, так само як і гіпотеза плоских поперечних перерізів для вигнутого стрижня, виражає той факт, що кутовими деформаціями поперечних перерізів пластин і

оболонки можна знехтувати в порівнянні з їх кутовими переміщеннями. Це прийнятно в тій мірі, в якій товщина пластини мала в порівнянні з двома іншими її розмірами або, відповідно до розглянутого випадку, в порівнянні з радіусом зовнішнього контуру пластини.

Розглянемо круглу пластину постійної товщини  $2h$ , яка навантажена зовнішніми силами, розташованими по поверхні  $z = +h$  симетрично щодо вісі  $oz$ . Позначимо поверхневу густину цих сил символом  $\sigma_z^*(\rho, t)$  (рис. 5.1). Прогин пластини в точці з поточною координатою  $\rho$  будемо позначати символом  $w$ , розуміючи при цьому, що в загальному випадку це функція змінних  $\rho$  і  $t$ . Кут повороту нормалі до серединної поверхні на рис. 5.1 позначений символом  $\vartheta$ . Функції  $w$  і  $\vartheta$  пов'язані між собою очевидним співвідношенням  $\operatorname{tg}\vartheta = -dw/d\rho$ , як у випадку статичних прогинів, так і в загальному випадку змінного в часі напружено-деформованого стану. При побудові лінійної теорії пластин будемо розглядати тільки лише малі прогини. При цьому, природно,  $\vartheta \ll 1$  і  $\operatorname{tg}\vartheta \cong \vartheta$ . З цієї причини справедливим є твердження, що  $\vartheta = -dw/d\rho$ . Знак мінус проставляється відповідно до поданої на рис. 5.1 схеми деформування пластини. Зменшення прогину, тобто зростання від'ємних значень  $w$  супроводжується збільшенням кута повороту нормалі  $\vartheta$  в додатному напрямку. Сукупність рівновіддалених від центру пластини нормалей утворює циліндричну поверхню ( $\rho = \text{const}, -h \leq z \leq h$ ), яка і є обертальним поперечним перерізом круглої пластини. Залишається додати, що знак, про який йшла вище мова, не є принциповим і визначається договірною угодою про направлення відліку прогину  $w$ .

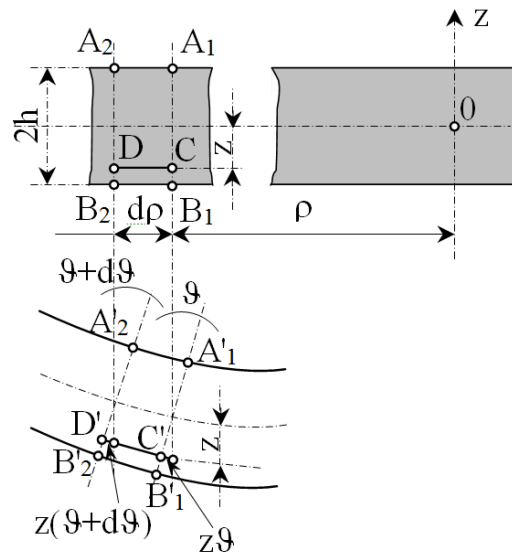


**Рис. 5.1. Схема деформування круглої пластини при вісесиметричному навантаженні зовнішніми силами**

Визначимо деформації, що виникають при вісесиметричних прогинах круглих пластин.

Точки, розташовані на нормалі  $A_1B_1$  (рис. 5.2), після вигину пластини утворюють нормаль  $A_2B_2$ , повернену на кут  $\vartheta$ . Нормаль  $A_2B_2$  повертається на кут  $\vartheta + d\vartheta$ . Спрямований вздовж радіуса малий відрізок  $CD$ , що має до деформування пластини довжину  $d\rho$  і розташований на відстані  $z$  від серединної поверхні пластини, отримає подовження  $\delta_\rho = z(\vartheta + d\vartheta) - z\vartheta = zd\vartheta$ . Відносне подовження цього відрізка в радіальному напрямку, тобто деформація, позначається символом  $\varepsilon_{\rho\rho}$ . Її числові значення розраховуються за формулою  $\varepsilon_{\rho\rho} = \delta_\rho/d\rho = zd\vartheta/d\rho$ . Так як  $\vartheta = -dw/d\rho$ , то  $\varepsilon_{\rho\rho} = -zd^2\vartheta/d\rho^2$ .

Відносне подовження в окружному напрямку (символ  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ ) може бути знайдено з порівняння довжини кола до і після деформації пластини. До деформації довжина кола, що проходить, наприклад, через точку  $C$  (рис. 5.2) дорівнювала, очевидно,  $2\pi\rho$ . Після деформації пластини це коло повинно містити в собі точку  $C'$  і його довжина стає рівною  $2\pi(\rho + z\vartheta)$ . Зміна довжини в окружному напрямку  $\delta_\varphi = 2\pi(\rho + z\vartheta) - 2\pi\rho = 2\pi z\vartheta$ . Відносна зміна довжини або деформація  $\varepsilon_{\varphi\varphi} = \delta_\varphi/2\pi\rho = z\vartheta/\rho = -(z/\rho)(dw/d\rho)$  [2].



**Рис. 5.2.** До розрахунку деформації в радіальному напрямку

Гіпотеза плоских поперечних перерізів, або, що те ж саме, гіпотеза Кірхгофа [1], може бути застосована лише у випадку тонких пластин. При динамічному, що змінюється в часі за гармонійним законом  $e^{i\omega t}$ , напружено-деформованому стані пластина вважається тонкою в тому випадку, коли довжина пружних збурень у матеріалі пластики мінімум на порядок перевершує її товщину. При цьому можна стверджувати, що аксіальні, тобто орієнтовані уздовж координатної вісі  $0z$  напруження і деформації практично не змінюють своїх значень по товщині пластики. Якщо поверхневу густину рівнодіючих зовнішніх сил, які прикладаються до нижньої і верхньої поверхні круглої пластики, позначити символом  $\sigma_z^*(\rho, t)$ , то у випадку тонкої пластики справедливим є твердження, що  $\sigma_{zz}(\rho, z, t) = \sigma_z^*(\rho, t) \forall z \in [-h, h]$ , де  $\sigma_{zz}(\rho, z, t)$  – поверхнева густина сил пружності, які діють всередині деформованої пластики на ділянках, перпендикулярні координатній вісі і орієнтовані вздовж напрямку тієї ж вісі. Таким чином, в об’ємі тонкої пластики реалізується напружений стан, при якому нормальні напруження  $\sigma_{\rho\rho}$  і  $\sigma_{\varphi\varphi}$ , що діють на ділянках перпендикулярних координатним лініях  $\rho$  і  $\varphi$  відповідно, не рівні нулю, а напруження  $\sigma_{zz} = \sigma_z^*$  є постійним у всьому об’ємі деформованої круглої пластики.

Запишемо узагальнений закон Гука для ізотропного твердого тіла стосовно ситуації, що розглядається:

$$\sigma_{\rho\rho} = (\lambda + 2G)\varepsilon_{\rho\rho} + \lambda\varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda\varepsilon_{zz}, \quad (5.1)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\varepsilon_{\rho\rho} + (\lambda + 2G)\varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda\varepsilon_{zz}, \quad (5.2)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\varepsilon_{\rho\rho} + \lambda\varepsilon_{\varphi\varphi} + (\lambda + 2G)\varepsilon_{zz} = \sigma_z^*, \quad (5.3)$$

де  $\lambda$  і  $G$  – константи Ламе або модулі пружності ізотропного твердого тіла;  $\varepsilon_{zz}$  – відносна зміна довжини подумки виділеного в об'ємі пластини малого відрізка, який до деформації був паралельний координатній вісі  $oz$ . Слід додати, що деформування пружного тіла силами, які орієнтовані вздовж будь-якого напрямку, неминуче супроводжується зміною його розмірів в інших напрямках, зокрема – в напрямках, які розташовуються в площині, перпендикулярній напрямку дії сил, прикладених до твердого тіла. Говорячи іншими словами – деформації  $\varepsilon_{\rho\rho}$  і  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$  в обов'язковому порядку породжують деформації  $\varepsilon_{zz}$  і навпаки.

Зі співвідношення (5.3) знаходимо, що

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2G}(\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) + \frac{\sigma_z^*}{\lambda + 2G}. \quad (5.4)$$

Виключаючи за допомогою визначення (5.4) аксіальний компонент тензора деформації  $\varepsilon_{zz}$  із співвідношень (5.1) і (5.2), отримуємо наступний результат

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{4G(\lambda + G)}{\lambda + 2G}\varepsilon_{\rho\rho} + \frac{2G\lambda}{\lambda + 2G}\varepsilon_{\varphi\varphi} + \frac{\lambda}{\lambda + 2G}\sigma_z^*, \quad (5.5)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2G\lambda}{\lambda + 2G}\varepsilon_{\rho\rho} + \frac{4G(\lambda + G)}{\lambda + 2G}\varepsilon_{\varphi\varphi} + \frac{\lambda}{\lambda + 2G}\sigma_z^*. \quad (5.6)$$

Здатність ізотропного твердого тіла деформуватися в напрямках, які розташовуються в площині, перпендикулярній напрямку дії зовнішніх сил, кількісно характеризується за допомогою коефіцієнта Пуассона  $\nu$ . Можна довести, що експериментально визначений коефіцієнт Пуассона в точності дорівнює відношенню модулів пружності, тобто

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)}. \quad (5.7)$$

Зі співвідношення (5.7) випливає, зокрема, що коефіцієнт Пуассона приймає чисельні значення, які не виходять за рамки замкнутого інтервалу чисел  $[0, 0,5]$ . Слід ще раз підкреслити, що термін «коефіцієнт Пуассона» застосовний виключно до ізотропних твердих тіл. Застосування коефіцієнта Пуассона для опису пружних властивостей анізотропних твердих тіл, до яких, зокрема, відноситься поляризована п'єзоелектрична кераміка, є грубою помилкою.

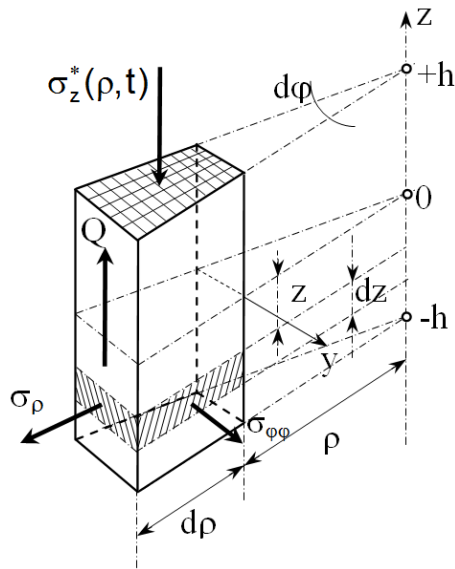
Використовуючи визначення (5.7) і рівність  $E = 2G(1 + \nu)$ , де  $E$  – модуль Юнга ізотропного твердого тіла, співвідношення (5.5) і (5.6) можна переписати в наступному вигляді:

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{\rho} + \nu\varepsilon_{\varphi}) + \frac{\nu\sigma_z^*}{1-\nu} = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{d^2w}{d\rho^2} + \frac{\nu}{\rho}\frac{dw}{d\rho}\right) + \frac{\nu\sigma_z^*}{1-\nu}, \quad (5.8)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{\varphi} + \nu\varepsilon_{\rho}) + \frac{\nu\sigma_z^*}{1-\nu} = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{\rho}\frac{dw}{d\rho} + \nu\frac{d^2w}{d\rho^2}\right) + \frac{\nu\sigma_z^*}{1-\nu}. \quad (5.9)$$

Виділимо подумки з об'єму деформованої пластини призматичний елемент (рис. 5.3) висотою  $2h$ . Діючі на гранях цього елемента нормальні напруження створюють нормальні сили  $N_{\rho}$  і  $N_{\varphi}$ , які збуджують в круглій пластині вісесиметричні радіальні коливання, і згинальні моменти, які забезпечують існування вісесиметричних коливань поперечного вигину. Позначимо лінійну густину моментів, які існують на гранях виділеного елемента, символами  $M_{\rho}$  і  $M_{\varphi}$ . За відомими напруженнями  $\sigma_{\rho\rho}$  і  $\sigma_{\varphi\varphi}$  згинальні моменти на гранях виділеного елемента визначаються наступним чином

$$M_{\rho}\rho d\varphi = \rho d\varphi \int_{-h}^{+h} z\sigma_{\rho} dz = -\rho d\varphi \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{\nu}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \rho}\right).$$



**Рис. 5.3.** До визначення інтегральних характеристик напруженого стану круглої пластини при вісесиметричному поперечному вигині

При записі останнього виразу враховано, що

$$\frac{\nu \sigma_z^*}{1 - \nu} \int_{-h}^h z dz = 0.$$

Лінійна густина  $m_\rho$  визначається наступним виразом

$$M_\rho = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} \right), \quad (5.10)$$

де  $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$  – згинальна жорсткість пластини.

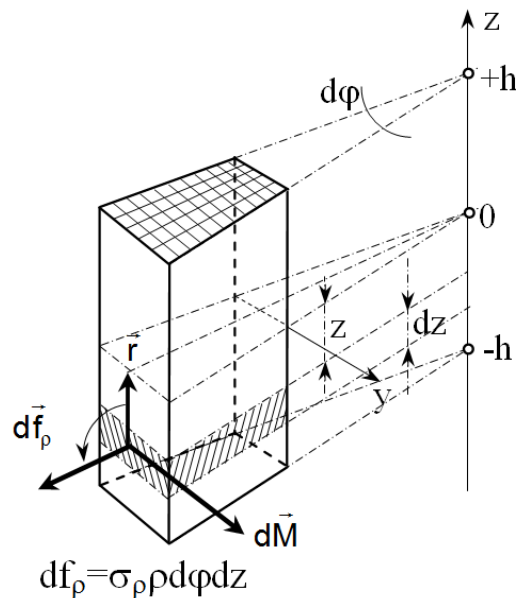
Міркуючи аналогічним чином, можна показати, що

$$M_\phi = -D \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \right). \quad (5.11)$$

Крім нормальних напружень, на ділянках, перпендикулярних вісі  $\rho$ , діють дотичні напруження. Інтегральною характеристикою цих напружень є поперечна сила, лінійна густина якої позначена на рис. 5.3 символом  $Q$ .

Для обчислення інтегральної характеристики дотичних напружень розглянемо суму моментів сил, які діють на подумки виділений елемент пластини. Цю суму позначимо символом  $M_\Sigma$  і будемо визначати її щодо вісі  $y$  (рис. 5.3), яка є дотичною до дуги радіуса  $\rho$  в серединній площині пластини.

Не зайве нагадати, що момент сил є вектором, модуль якого дорівнює добутку сили на плече її прикладання відносно обраної вісі. Напрямок вектора моменту сили визначається нормаллю  $\vec{n}$  до площини, яку утворюють вектори  $\vec{r}$  (плече прикладання сили відносно обраної вісі) і  $\vec{f}$  (вектор сили). При цьому вектори  $\vec{n}$ ,  $\vec{r}$  і  $\vec{f}$  утворюють правосторонню трійку, тобто найближчий поворот вектора  $\vec{r}$  до вектору  $\vec{f}$  відбувається проти годинникової стрілки, якщо за ним спостерігати з вістря вектора  $\vec{n}$  або, що те ж саме, з вістря вектора  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{f}$ . Сказане ілюструється рис. 5.4, де показана орієнтація вектора  $d\vec{M} = \vec{r} \times d\vec{f}_\rho$ , де  $|\vec{r}| = z$ , а величина модуля вектора сили вказана на рисунку.

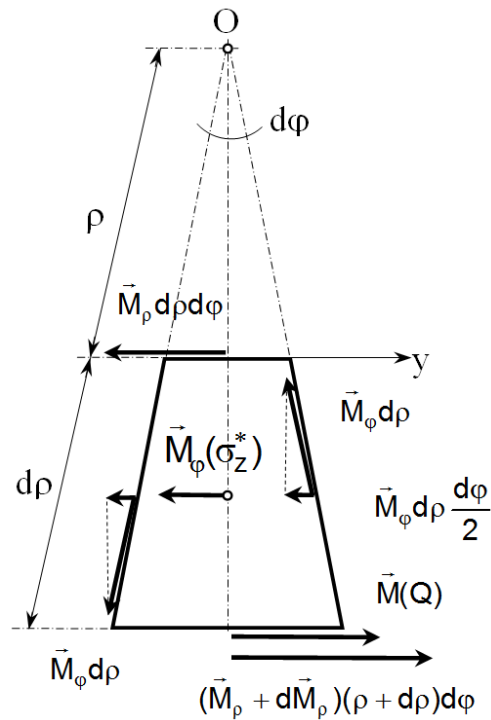


**Рис. 5.4.** До визначення вектора моменту сили

Беручи до уваги сказане вище, можна побудувати векторну діаграму моментів сил, яка показана на рис. 5.5. Очевидно, що шукана величина  $M_\Sigma$  буде дорівнювати алгебраїчній сумі проєкцій векторів моментів сил на вісь  $y$ . Проектуючи показані на рис. 5.5 вектори на вісь  $y$ , отримуємо

$$M_\Sigma = (M_\rho + dM_\rho)(\rho + d\rho)d\phi + M(Q) - M_\phi d\rho d\phi - M(\sigma_z^*) - M_\rho \rho d\phi. \quad (5.12)$$





**Рис. 5.5. Векторна діаграма моментів сил**

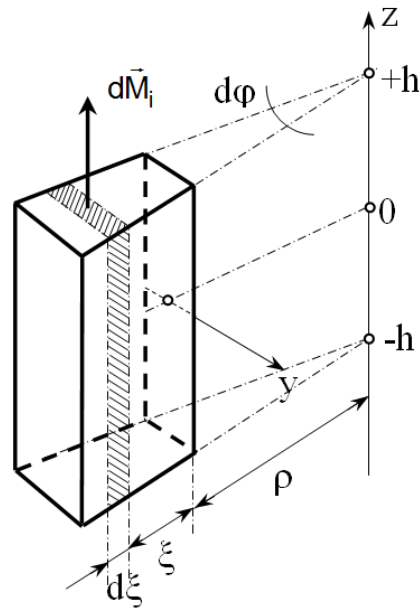
Так як момент поперечних сил  $M(Q) = (Q + dQ)(\rho + d\rho)d\rho d\varphi$ , а момент зовнішніх навантажень  $M(\sigma_z^*) = \sigma_z^* \rho d\varphi d\rho d\rho / 2$ , то вираз (5.12) можна представити в наступному вигляді

$$M_\Sigma = \left[ \frac{\partial(M_p \rho)}{\partial \rho} - M_\varphi + Q\rho \right] d\rho d\varphi + O^{(-2)} d\varphi, \quad (5.13)$$

де  $O^{(-2)} = dM_p d\rho - \sigma_z^* \rho d\rho (d\rho/2) + dQ d\rho \cdot \rho + Q(d\rho)^2 + dQ(d\rho)^2$  – величина другого порядку малості в порівнянні з першою складовою у формулі (5.13). Нехтуючи величинами порядку малості  $(d\rho)^2$ , запишемо вираз (5.13) в наступному вигляді

$$M_\Sigma \approx \left[ \frac{\partial(M_p \rho)}{\partial \rho} - M_\varphi + Q\rho \right] d\rho d\varphi. \quad (5.14)$$

Відповідно до принципу Даламбера, рівнодіюча моментів зовнішніх і внутрішніх сил  $M_\Sigma$  повинна в будь-який момент часу врівноважуватися моментом сили інерції  $M_i$  маси виділеної призми. Цей момент легко підрахувати, якщо скористатися діаграмою сил, показаною на рис. 5.6.



**Рис. 5.6.** До визначення вектора моменту сили інерції

Дійсно, елементарний момент сили  $\delta M_i$  відносно вісі  $y$  визначається наступним чином

$$\delta M_i = \delta F_{ix} \xi = -\delta m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \xi = -2h\rho_0(\rho + \xi)d\phi d\xi \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \xi.$$

Повний момент сил інерції мислено виділеної з об'єму пластини призми дорівнює алгебраїчній сумі елементарних моментів  $\delta M_i$  і визначається формулою

$$dM_i = \int_0^{d\rho} \delta M_i = -2h\rho_0 d\phi \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \int_0^{d\rho} (\rho\xi + \xi^2) d\xi = -2h\rho_0 d\phi \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \left[ \frac{1}{2} \rho(d\rho)^2 + \frac{1}{3} (d\rho)^3 \right].$$

Як видно з останнього запису, момент сил інерції має порядок малості  $(d\rho)^2$ , і з точністю, що дорівнює точності попередніх обчислень, можна вважати, що  $\delta M_i \approx 0$ . Звідси слідує що  $M_z = 0$ , звідки і визначається лінійна густина поперечних сил

$$Q = \frac{1}{\rho} \left[ M_\phi - \frac{\partial(M_\rho \rho)}{\partial \rho} \right]. \quad (5.15)$$

Визначений виразом (5.15) параметр  $Q$  є інтегральною характеристикою дотичних напружень  $\sigma_{\rho z}$ .

Розглянемо рівновагу уявного виділеного елемента круглої пластини (рис. 5.3). Вимагатимемо, щоб осьова проекція рівнодіючої всіх сил в будь-

який момент часу врівноважувалася силами інерції маси виділеного елемента пластини. На гранях, перпендикулярних радіальній вісі діють поперечні сили, рівнодіюча яких  $R_Q = (Q + dQ)(\rho + d\rho)d\varphi - Q\rho d\varphi = d(Q\rho)d\varphi + dQd\rho d\varphi$ . З точністю до нескінченно малих величин другого порядку малості  $R_Q \equiv d(Q\rho)d\varphi$ . Рівнодіюча зовнішніх сил  $R_\sigma = \sigma_z^* \rho d\rho d\varphi$ . Алгебраїчна сума внутрішніх і зовнішніх сил в будь-який момент часу врівноважується силами інерції  $F_i = -2h\rho_0\rho(\partial^2 w/\partial t^2)d\rho d\varphi$ . Таким чином

$$d(Q\rho) - \sigma_z^* \rho d\rho = -2h\rho_0\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} d\rho,$$

звідки випливає, що

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(Q\rho)}{\partial \rho} - \sigma_z^* = -2h\rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (5.16)$$

Підставляючи замість добутку  $Q\rho$  праву частину співвідношення (5.16) і розписуючи лінійні густини згинальних моментів через прогини  $w$ , після нескладних алгебраїчних перетворень отримуємо наступний результат

$$\nabla^4 w + \frac{2h\rho_0}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\sigma_z^*}{D}, \quad (5.17)$$

$$\text{де } \nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial \rho^4} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial^3 w}{\partial \rho^3} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial w}{\partial \rho}.$$

У тому випадку, коли зовнішнє навантаження  $\sigma_z^*$  не залежить від часу, в пластині реалізується статичний напружено-деформований стан. Так як при цьому  $\partial w/\partial t = 0$ , то рівняння руху елемента круглої пластини (5.17) набуває сенсу рівняння статичної рівноваги і записується в наступному вигляді

$$\nabla^4 w = \frac{\sigma_z^*}{D}$$

або

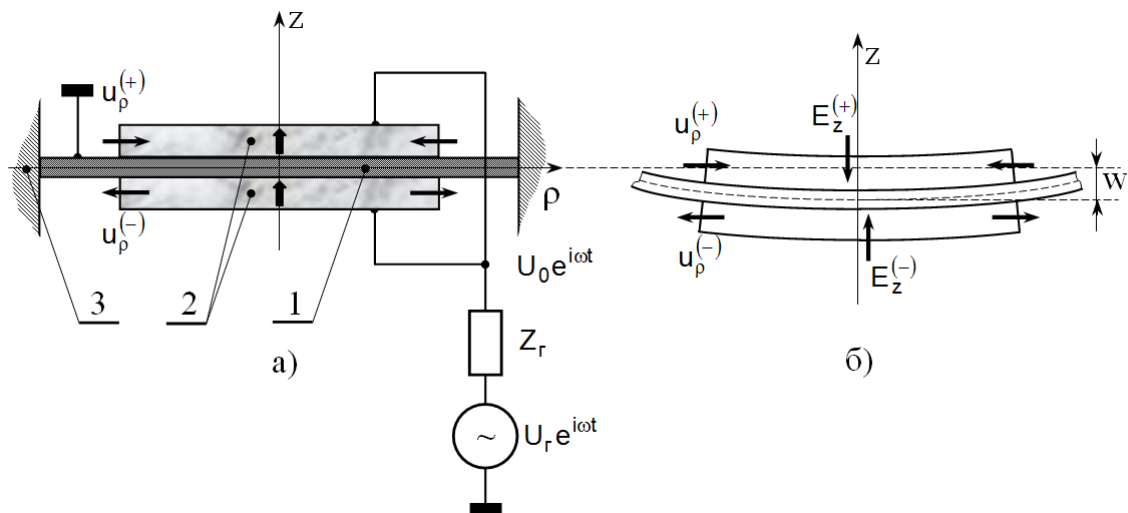
$$\frac{d}{d\rho} \left\{ \rho \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dw}{d\rho} \right) \right] \right\} = \frac{\sigma_z^* \rho}{D}. \quad (5.18)$$

Рівняння (5.18) є звичайним диференціальним рівнянням четвертого порядку і вирішується послідовним інтегруванням лівої і правої частини.

Рівняння руху (5.17) і рівняння рівноваги (5.18) об'єднує з рівняннями

поперечного вигину балки те, що в складі цих рівнянь міститься похідна четвертого порядку по координаті. Це ускладнює дослідження напружено-деформованого стану, яке виникає при поперечному вигині стержнів і пластин і є своєрідною платою за спрощене тлумачення (гіпотеза плоских поперечних перерізів) процесу деформування згинальних стержнів і пластин [3].

Тепер розглянемо конструкцію, яка показана на рис. 5.7, а.



**Рис. 5.7. Основні компоненти біморфного п'єзоелектричного елемента (а) і схема утворення поперечного вигину (б)**

Позицією 1 на рис. 5.7, а позначений металевий диск, товщина якого  $2h$  істотно менше його діаметра  $2R$ , тобто виконується сильна нерівність  $h/R \ll 1$ . По контуру  $\rho=R$  металевий диск жорстко закріплений на абсолютно нерухомій опорі (позиція 3). При цьому елементи циліндричної поверхні ( $\rho=R$ ;  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ;  $-h \leq z \leq h$ ) ( $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $z$  – координатні вісі циліндричної системи координат) не мають можливості переміщатися уздовж координатних вісей  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $z$ . До поверхонь  $z = \pm h$  металевого диска прикріплені струмопровідним клеєм два однакових електродованих п'єзокерамічних диска (позиція 2 на рис. 5.7, а). Електродовані поверхні п'єзокерамічних дисків, які через тонкий шар струмопровідного клею знаходяться в електричному контакті з

металевою пластинкою, завжди мають однаковий, нульовий (рис. 5.7, а), електричний потенціал. П'єзокерамічні диски приклеюються до металевої пластини не довільним чином, а так, щоб напрямок електричної поляризації цих дисків, який показаний на рис. 5.7, а жирними стрілками, був однаковим. Будемо вважати, що ці напрямки збігаються з додатнім напрямком координатної вісі  $z$  (рис. 5.7, а). В цьому випадку матриці матеріальних констант верхнього і нижнього диска мають однакову конструкцію і, що особливо важливо, елементи матриці п'єзоелектричних модулів верхнього і нижнього дисків мають однаковий знак.

Якщо на верхню і нижню електродовані поверхні п'єзокерамічних дисків подати різницю електричних потенціалів так, як це показано на рис. 5.7, а, то фізичний стан кожного з дисків буде визначатися наступними співвідношеннями

$$\sigma_{ij}^{(\pm)} = c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl}^{(\pm)} - e_{kij} E_k^{(\pm)}, \quad (5.19)$$

$$D_m^{(\pm)} = e_{mij} \varepsilon_{ij}^{(\pm)} + \chi_{mn}^e E_n^{(\pm)}, \quad (5.20)$$

де знак плюс визначає фізичний стан верхнього п'єзокерамічного диска, а знак мінус – нижнього;  $c_{ijkl}^E$ ,  $e_{kij}$ ,  $\chi_{mn}^e$  – матеріальні константи – елементи матриць модулів пружності, п'єзоелектричних модулів і діелектричної проникності;  $\sigma_{ij}^{(\pm)}$ ,  $\varepsilon_{kl}^{(\pm)}$ ,  $E_k^{(\pm)}$  і  $D_m^{(\pm)}$  – амплітудні значення змінних в часі за законом  $e^{i\omega t}$  компонентів тензорів пружних напружень і деформацій і векторів напруженості електричного поля і електричної індукції відповідно.

Припустимо, що в довільно зафіксований момент часу на електродованих поверхнях  $z = \pm(\alpha + h)$ , де  $\alpha$  – товщина однакових за розмірами п'єзокерамічних елементів, дисків є позитивний електричний потенціал  $U_0$ . Цілком очевидно, що аксіальні компоненти  $E_z^{(\pm)}$  вектора напруженості електричного поля в верхньому і нижньому дисках мають протилежні напрямки, тобто  $E_z^{(\pm)} = \mp E_z$  (рис. 5.7, б). Звідси випливає, що напружено-деформовані стани верхнього і нижнього диска в будь-який момент часу мають протилежні знаки. Якщо диски приклеєні до металевої

пластини строго співвісно, то напружено-деформований стан п'єзокерамічних дисків і, як наслідок, всієї, показаної на рис. 5.7, а, конструкції має осьову симетрію. Це означає, що зсувні напруження  $\sigma_{\phi\beta}^{(\pm)}$  ( $\beta = \rho, z$ ) і деформації  $\varepsilon_{\phi\beta}^{(\pm)}$  дорівнюють нулю.

В області низьких частот, коли масштаб просторової неоднорідності напружено-деформованого стану набагато перевищує товщину  $\alpha$  п'єзокерамічних дисків, в цих дисках реалізується режим вісесиметричних планарних коливань. При цьому радіальні зміщення  $u_{\rho}^{(\pm)}$  матеріальних частинок п'єзокерамічних дисків матимуть протилежні напрямки (рис. 5.7). Це призводить до появи згинальних моментів  $M_{\rho}$ , які змушують всю конструкцію здійснювати вісесиметричні коливання поперечного вигину. Джерелом цих коливань є генератор різниці електричних потенціалів. Природно, що клейове з'єднання привносить деякі прослизання компонентів конструкції один щодо одного. Разом з тим можна стверджувати, що при якісному склеюванні тонким шаром високомолекулярного клею цими прослизаннями можна нехтувати в досить широкому діапазоні частот, аж до частоти третього електромеханічного резонансу.

Показану на рис. 5.7, а конструкцію прийнято називати біморфним п'єзоелектричним елементом [4].

Біморфний п'єзокерамічний елемент цілком природно можна розділити на дві частини – активну зону ( $0 \leq \rho \leq R_0$ ), де  $R_0$  – радіус п'єзокерамічного диска, і пасивну зону – металеве кільце  $R_0 \leq \rho \leq R$ .

Рух матеріальних частинок пасивної зони визначається диференціальним рівнянням (5.17). Прогини, що фігурують в цьому рівнянні, позначимо символом  $w_1$ .

Для того, щоб побудувати рівняння гармонійних коливань матеріальних частинок активної зони біморфного елемента, розглянемо інтегральні характеристики напруженого стану цієї області.

Перш за все, запишемо вираз для розрахунку деформацій в активній

зоні. Так як в ній реалізується вісесиметричний поперечний вигин, то вісесиметричні деформації  $\varepsilon_{\rho\rho}^{(\pm)}$  і  $\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(\pm)}$  повинні визначатися в такий спосіб

$$\varepsilon_{\rho\rho}^{(\pm)} = \varepsilon_{\rho\rho}(z) = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial \rho^2}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(\pm)} = \varepsilon_{\varphi\varphi}(z) = -\frac{z}{\rho} \frac{\partial w_0}{\partial \rho}, \quad (5.21)$$

де  $w_0$  – залежний від значень радіальної координати  $\rho$  прогин активної зони біморфного п'єзоелектричного елемента.

У відсутності зсувних напружень  $\sigma_{\alpha\beta}^{(\pm)}$  узагальнений закон Гука (5.19) представляється наступними співвідношеннями

$$\sigma_{\rho\rho}^{(\pm)} = -z \left( c_{11}^E \frac{\partial^2 w_0}{\partial \rho^2} + \frac{c_{12}^E}{\rho} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right) + c_{12}^E \varepsilon_{zz}^{(\pm)} - e_{31}^E E_z^{(\pm)}, \quad (5.22)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(\pm)} = -z \left( c_{12}^E \frac{\partial^2 w_0}{\partial \rho^2} + \frac{c_{11}^E}{\rho} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right) + c_{12}^E \varepsilon_{zz}^{(\pm)} - e_{31}^E E_z^{(\pm)}, \quad (5.23)$$

$$\sigma_{zz}^{(\pm)} = -z c_{12}^E \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right) + c_{33}^E \varepsilon_{zz}^{(\pm)} - e_{33}^E E_z^{(\pm)}, \quad (5.24)$$

$$\sigma_{\rho z}^{(\pm)} = \sigma_{z\rho}^{(\pm)} = 2c_{55}^E \varepsilon_{\rho z}^{(\pm)} - e_{15}^E E_\rho^{(\pm)}, \quad (5.25)$$

де  $E_\rho^{(\pm)}$  – радіальний компонент вектора напруженості електричного поля в верхньому (знак плюс) або нижньому (знак мінус) п'єзокерамічному диску.

Електричний стан п'єзокерамічних дисків визначається вектором електричної індукції  $\vec{D}^{(\pm)}$ , який задається двома компонентами  $D_\rho^{(\pm)}$  і  $D_z^{(\pm)}$ . Окружний компонент  $D_\varphi^{(\pm)} \equiv 0$  через осьову симетрію фізичного стану п'єзокерамічних дисків. Відповідно до загального формулювання (5.20) закону електричної поляризації діелектрика з п'єзоелектричними властивостями можемо записати наступні співвідношення:

$$D_\rho^{(\pm)} = 2e_{15}^E \varepsilon_{\rho z}^{(\pm)} + \chi_{11}^E E_\rho^{(\pm)}, \quad (5.26)$$

$$D_z^{(\pm)} = -e_{31}^E z \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right) + e_{33}^E \varepsilon_{zz}^{(\pm)} + \chi_{33}^E E_z^{(\pm)}. \quad (5.27)$$

При записі співвідношень (5.22)–(5.24) і (5.27) однакові за величиною матеріальні константи були позначені, як це прийнято в механіці деформованого твердого тіла, однаковими символами.

Як показано раніше, для тонких п'єзокерамічних дисків в області

низьких частот справедливі наближені оцінки  $(D_\rho^{(\pm)}, E_\rho^{(\pm)}) \cong 0 \forall (\rho z) \in V$  і  $(\sigma_{\rho z}^{(\pm)}, \varepsilon_{\rho z}^{(\pm)}) \cong 0 \forall (\rho z) \in V$ , де  $V$  – об'єм диска.

Якщо біморфний п'єзоелектричний елемент коливається в вакуумі або, що практично те ж саме, в повітрі, то реакція навколишнього середовища  $\sigma_{zz}^* = 0$ , і співвідношення (5.24) в області низьких частот може бути записано в наступному вигляді

$$-z c_{12}^E \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right) + c_{33}^E \varepsilon_{zz}^{(\pm)} - e_{33}^E E_z^{(\pm)} = 0,$$

звідки випливає, що

$$\varepsilon_{zz}^{(\pm)} = \frac{e_{33}^E}{c_{33}^E} E_z^{(\pm)} + z \frac{c_{12}^E}{c_{33}^E} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right). \quad (5.28)$$

Виключаючи за допомогою співвідношення (5.28) аксіальну деформацію  $\varepsilon_{zz}^{(\pm)}$  з виразів (5.22), (5.23) і (5.27), отримуємо такі розрахункові формули:

$$\sigma_{\rho\rho}^{(\pm)} = -z \left( c_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \rho^2} + \frac{c_{12}}{\rho} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right) - e_{31}^* E_z^{(\pm)}, \quad (5.29)$$

$$\sigma_{\phi\phi}^{(\pm)} = -z \left( c_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \rho^2} + \frac{c_{11}}{\rho} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right) - e_{31}^* E_z^{(\pm)}, \quad (5.30)$$

$$D_z^{(\pm)} = -e_{31}^* z \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right) + \chi_{33}^\sigma E_z^{(\pm)}, \quad (5.31)$$

де  $c_{11} = c_{11}^E - (c_{12}^E)^2 / c_{33}^E$ ,  $c_{12} = c_{12}^E - (c_{12}^E)^2 / c_{33}^E$ ,  $e_{31}^* = e_{31} - e_{33} c_{12}^E / c_{33}^E$ ,  $\chi_{33}^\sigma = \chi_{33}^e + e_{33}^2 / c_{33}^E$  – модулі пружності, п'єзоелектричний модуль і діелектрична проникність для режиму сталості (рівності нулю) аксіального напруження  $\sigma_{zz}^{(\pm)}$ , тобто для режиму планарних гармонійних коливань поляризованого по товщині тонкого п'єзокерамічного диска.

З умови  $\text{div} \vec{D}^{(\pm)} = 0$  (умова відсутності електричної провідності) слідує, що в ситуації, яка розглядається повинні виконуватися умови  $\partial D_z^{(\pm)} / \partial z = 0$ . Це означає, що визначені виразами (5.31) аксіальні компоненти  $D_z^{(+)}$  і  $D_z^{(-)}$  вектора електричної індукції не залежать від значень координати  $z$ . Цим фактом можна скористатися при визначенні напруженості електричного поля  $E_z^{(\pm)}$ .



Оскільки можливе представлення  $E_z^{(\pm)} = -\partial\Phi^{(\pm)}/\partial z$  [5], де  $\Phi^{(\pm)}$  – скалярний електричний потенціал в об'ємі верхнього і нижнього п'єзоелектричного диска, остільки будуть справедливі такі записи

$$D_z^{(-)} = -e_{31}^* z \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right) - \chi_{33}^\sigma \frac{\partial \Phi^{(-)}}{\partial z}, \quad (5.32)$$

$$D_z^{(+)} = -e_{31}^* z \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right) - \chi_{33}^\sigma \frac{\partial \Phi^{(+)}}{\partial z}. \quad (5.33)$$

Співвідношення (5.32) проінтегруємо по координаті  $z$  в межах від  $-(\alpha + h)$  до  $-h$ , а співвідношення (5.33) – в межах від  $h$  до  $\alpha + h$ . Приймаючи до уваги, що  $\partial D_z^{(\pm)}/\partial z = 0$ , результати інтегрування можна записати в наступному вигляді

$$\alpha D_z^{(-)} = \alpha(h + \alpha/2) e_{31}^* \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right) + \chi_{33}^\sigma U_0,$$

$$\alpha D_z^{(+)} = -\alpha(h + \alpha/2) e_{31}^* \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right) - \chi_{33}^\sigma U_0,$$

де  $U_0$  – амплітудне значення електричного потенціалу на електродованих поверхнях п'єзокерамічних дисків. З останніх записів випливає, що

$$D_z^{(\pm)} = \mp (h + \alpha/2) e_{31}^* \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right) \mp \chi_{33}^\sigma \frac{U_0}{\alpha}. \quad (5.34)$$

Вирази (5.31) і (5.34) є фізично еквівалентними визначеннями однієї і тієї ж величини – аксіального компонента  $D_z^{(\pm)}$  вектора електричної індукції. Прирівнюючи праві частини визначень (5.31) і (5.34), отримуємо формулу для розрахунку напруженості  $E_z^{(\pm)}$ :

$$E_z^{(\pm)} = z \frac{e_{31}^*}{\chi_{33}^\sigma} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right) \mp (h + \alpha/2) \frac{e_{31}^*}{\chi_{33}^\sigma} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right) \mp \frac{U_0}{\alpha}. \quad (5.35)$$

Підставляючи вираз (5.35) в визначення (5.29) і (5.30) нормальних напружень, отримуємо наступні розрахункові формули:

$$\sigma_{\rho\rho}^{(\pm)} = -z c_{11}^D \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \rho^2} + \frac{k_D}{\rho} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right) \pm (h + \alpha/2) \frac{(e_{31}^*)^2}{\chi_{33}^\sigma} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right) \pm e_{31}^* \frac{U_0}{\alpha}, \quad (5.36)$$

$$\sigma_{\phi\phi}^{(\pm)} = -z c_{11}^D \left( k_D \frac{\partial^2 w_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right) \pm (h + \alpha/2) \frac{(e_{31}^*)^2}{\chi_{33}^\sigma} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right) \pm e_{31}^* \frac{U_0}{\alpha}, \quad (5.37)$$

де  $c_{11}^D = c_{11} + (e_{31}^*)^2 / \chi_{33}^\sigma$ ,  $c_{12}^D = c_{12} + (e_{31}^*)^2 / \chi_{33}^\sigma$  – модулі пружності, які враховують зв'язність (узгоджена дія) сил пружності і сил Кулона в об'ємі деформованої п'єзокераміки;  $k_D = c_{12}^D / c_{11}^D$ .

В металевому шарі  $-h \leq z \leq h$  (рис. 5.7, а) активної зони біморфного п'єзоелектричного елемента нормальні напруги  $\sigma_{\rho\rho}^{(M)}$  і  $\sigma_{\phi\phi}^{(M)}$  розраховуються за такими формулами:

$$\sigma_{\rho\rho}^{(M)} = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right), \quad (5.38)$$

$$\sigma_{\phi\phi}^{(M)} = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right), \quad (5.39)$$

де  $E$  і  $\nu$  – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу металевого диска.

Слідуючи викладеній вище технології обчислення згинальних моментів (див. вирази (5.10) і (5.11)), можемо записати, що лінійна густина  $M_\rho$  згинальних моментів, які створюються нормальними напруженнями  $\sigma_{\rho\rho}^{(\pm)}$  і  $\sigma_{\rho\rho}^{(M)}$ , визначається наступною формулою

$$\begin{aligned} M_\rho &= \int_{-(\alpha+h)}^{(\alpha+h)} z \sigma_{\rho\rho}^{(j)} dz = \int_{-(\alpha+h)}^{-h} z \sigma_{\rho\rho}^{(-)} dz + \int_{-h}^h z \sigma_{\rho\rho}^{(M)} dz + \int_h^{(\alpha+h)} z \sigma_{\rho\rho}^{(+)} dz = \\ &= -D_1 \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial \rho^2} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right) + M_0, \end{aligned} \quad (5.40)$$

де  $D_1 = D_{пе} - D_0 + D_M$ ;  $D_2 = k_D D_{пе} - D_0 + \nu D_M$ ;  $\eta = D_2 / D_1$ ;  $D_{пе} = 2c_{11}^D [(\alpha+h)^3 - h^3] / 3$  – згинальна жорсткість п'єзокерамічного диска в складі активної зони біморфного елемента;  $D_0 = 2\alpha(h + \alpha/2)(e_{31}^*) / \chi_{33}^\sigma$  – складова згинальної жорсткості, обумовлена зв'язністю пружних і електричних полів в об'ємі п'єзокерамічного диска;  $D_M = 2Eh^3 / [3(1-\nu^2)]$  – згинальна жорсткість металевого диска;  $M_0 = 2(h + \alpha/2)e_{31}^* U_0$  – згинальний момент, який створюється джерелом згинальних коливань, тобто генератором різниці електричних потенціалів.

Лінійна густина згинальних моментів  $M_\rho$  визначається аналогічним чином

$$\begin{aligned}
M_\varphi &= \int_{-(\alpha+h)}^{(\alpha+h)} z \sigma_{\varphi\varphi}^{(j)} dz = \int_{-(\alpha+h)}^{-h} z \sigma_{\varphi\varphi}^{(-)} dz + \int_{-h}^h z \sigma_{\varphi\varphi}^{(M)} dz + \int_h^{(\alpha+h)} z \sigma_{\varphi\varphi}^{(+)} dz = \\
&= -D_1 \left( \eta \frac{\partial^2 w_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right) + M_0.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Лінійна густина  $Q$  поперечних сил в активній зоні біморфного п'єзоелектричного елемента знаходиться за формулою (5.15). Підставляючи в неї вирази (5.40) і (5.41), отримуємо наступну розрахункову формулу

$$Q = D_1 \left( \frac{\partial^3 w_0}{\partial \rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right). \tag{5.42}$$

З умов динамічної рівноваги елемента об'єму активної зони біморфного п'єзоелектричного елемента (див. виведення формули (5.17)) слідує рівняння гармонійних коливань матеріальних частинок активної зони

$$\nabla^4 w_0 - \lambda_0^4 w_0 = 0, \tag{5.43}$$

де  $\lambda_0 = \sqrt[4]{(2h\rho_m + 2\alpha\rho_{пз})\omega^2/D_1}$  – хвильове число гармонійних коливань поперечного вигину активної зони біморфного п'єзоелектричного елемента;  $\rho_m$  і  $\rho_{пз}$  – густина металевої пластини і п'єзокераміки. При виведенні рівняння (5.43) було враховано, що  $\sigma_z^* = 0$ .

Прогини або аксіальні переміщення  $w_1$  матеріальних частинок пасивної зони, тобто металевого кільця  $R_0 \leq \rho \leq R$ , біморфного п'єзоелектричного елемента є розв'язками наступного рівняння

$$\nabla^4 w_1 - \lambda_1^4 w_1 = 0, \tag{5.44}$$

де  $\lambda_1 = \sqrt[4]{2h\rho_m \omega^2/D_m}$  – хвильове число гармонійних коливань матеріальних частинок металевого кільця.

Розглянемо особливості спільного розв'язку диференціальних рівнянь (5.43) і (5.44).

Оскільки активна зона біморфного п'єзоелектричного елемента містить точку  $\rho = 0$ , остільки спільним розв'язком рівняння (5.43) є функція  $w_0(\rho)$ , яка визначається наступним чином

$$w_0(\rho) = A_1 J_0(\lambda_0 \rho) + A_2 I_0(\lambda_0 \rho), \tag{5.45}$$

де  $A_1$  і  $A_2$  – константи, що підлягають визначенню;  $J_0(\lambda_0\rho)$  і  $I_0(\lambda_0\rho)$  – функція Бесселя і модифікована функція Бесселя нульового порядку [6].

Загальний розв'язок рівняння (5.44) має вигляд

$$w_1(\rho) = A_3 J_0(\lambda_1\rho) + A_4 N_0(\lambda_1\rho) + A_5 I_0(\lambda_1\rho) + A_6 K_0(\lambda_1\rho), \quad (5.46)$$

де  $A_3, \dots, A_6$  – константи, підлягають визначенню;  $N_0(\lambda_0\rho)$  і  $K_0(\lambda_0\rho)$  – функція Неймана і функція Макдональда нульового порядку [6].

На умовній межі  $\rho = R_0$  розділу активної і пасивної зони біморфного п'єзоелектричного елемента спільні розв'язки  $w_0(\rho)$  і  $w_1(\rho)$  повинні забезпечувати безперервність напружено-деформованого стану біморфного елемента. Це досягається шляхом зшивання на цьому кордоні кінематичних і динамічних характеристик напружено-деформованого стану активної і пасивної зони. Умови зшивання записуються наступним чином:

$$w_0(\rho)|_{\rho=R_0} = w_1(\rho)|_{\rho=R_0}, \quad (5.47)$$

$$\left. \frac{\partial w_0(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R_0} = \left. \frac{\partial w_1(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R_0}, \quad (5.48)$$

$$M_\rho(\rho)|_{\rho=R_0} = M_\rho^{(M)}(\rho)|_{\rho=R_0}, \quad (5.49)$$

$$Q(\rho)|_{\rho=R_0} = Q^{(M)}(\rho)|_{\rho=R_0}, \quad (5.50)$$

де  $M_\rho^{(M)}(\rho)$  і  $Q^{(M)}(\rho)$  – лінійні густини згинальних моментів і поперечних сил в металевому кільці пасивної зони біморфного п'єзокерамічного елемента.

Числові значення цих величин розраховуються за формулами

$$M_\rho^{(M)}(\rho) = -D_M \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial \rho^2} + \frac{v}{\rho} \frac{\partial w_1}{\partial \rho} \right), \quad Q^{(M)}(\rho) = D_M \left( \frac{\partial^3 w_1}{\partial \rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial w_1}{\partial \rho} \right). \quad (5.51)$$

Після підстановки виразів (5.45) і (5.46) в умови зшивання рішень (5.47)–(5.50), отримуємо неоднорідну систему з чотирьох алгебраїчних рівнянь, в якій міститься шість невідомих констант  $A_1, \dots, A_6$ . Відсутні два рівняння доставляють умови закріплення контуру  $\rho = R$ . На практиці найбільш просто реалізуються три способи закріплення, а саме – жорстке (цей спосіб описаний в коментарях до рис. 5.7, а), шарнірне і вільне закріплення.

При жорсткому закріпленні положення матеріальних частинок, які в своїй сукупності утворюють циліндричну поверхню  $\rho = R$ , є строго зафіксованим, що формально можна описати наступними співвідношеннями

$$w_1(\rho)|_{\rho=R} = 0, \quad (5.52)$$

$$\left. \frac{\partial w_1(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} = 0. \quad (5.53)$$

При шарнірному закріпленні матеріальні частинки циліндричної поверхні  $\rho = R$  не можуть переміщатися вгору або вниз, але сам переріз в цілому може безперешкодно повертатися щодо осі, яка проходить через нейтральну площину  $z = 0$  металевієї пластини. Сказане вище формалізується наступним чином

$$w_1(\rho)|_{\rho=R} = 0, \quad (5.54)$$

$$M_\rho^{(M)}(\rho)|_{\rho=R} = 0. \quad (5.55)$$

При вільному закріпленні контур  $\rho = R$  прикріплюється до практично невагомих еластичних опор або ниток, які не чинять опору руху елементів циліндричної поверхні  $\rho = R$ . Поверхня  $\rho = R$  може вільно переміщатися вгору або вниз і повертатися. Так як з боку еластичних опор відсутня будь-яка силова реакція, то, очевидно, повинні виконуватися наступні умови

$$M_\rho^{(M)}(\rho)|_{\rho=R} = 0, \quad (5.56)$$

$$Q^{(M)}(\rho)|_{\rho=R} = 0. \quad (5.57)$$

Умови (5.47)–(5.50) і умови закріплення контуру  $\rho = R$  формують неоднорідну систему з шести алгебраїчних рівнянь, в якій міститься рівно шість констант  $A_1, \dots, A_6$ . Очевидно, що така система рівнянь вирішується щодо шуканих констант єдиним способом. Ця система рівнянь має наступний вигляд

$$m_{jk} A_k = \delta_{j3} \frac{M_0}{D_1 \lambda_0^2}, \quad j, k = 1, \dots, 6, \quad (5.58)$$

де  $m_{11} = J_0(\Omega_0)$ ;  $\Omega_0 = \Omega \xi_0 / z_{10}$ ;  $\Omega = \lambda_1 R$  – безрозмірна частота;  $\xi_0 = R_0 / R$ ;

$$\begin{aligned}
z_{10} &= \lambda_1/\lambda_0 ; m_{12} = I_0(\Omega_0) ; m_{13} = -J_0(\Omega_1) ; \Omega_1 = \Omega_2 \xi_0 ; m_{14} = -N_0(\Omega_1) ; m_{15} = -I_0(\Omega_1) ; \\
m_{16} &= -K_0(\Omega_1) ; m_{21} = -J_1(\Omega_0) ; m_{22} = I_1(\Omega_0) ; m_{23} = z_{10} J_1(\Omega_1) ; m_{24} = z_{10} N_1(\Omega_1) ; m_{25} = -z_{10} I_1(\Omega_1) ; \\
m_{26} &= z_{10} K_1(\Omega_1) ; m_{31} = -[J_0(\Omega_0) - (1 - \eta) J_1(\Omega_0)/\Omega_0] ; m_{32} = [I_0(\Omega_0) - (1 - \eta) I_1(\Omega_0)/\Omega_0] ; \\
m_{33} &= \zeta_1 z_{10} [J_0(\Omega_1) - (1 - \nu) J_1(\Omega_1)/\Omega_1] ; \zeta_1 = D_m/D_1 ; m_{34} = \zeta_1 z_{10} [N_0(\Omega_1) - (1 - \nu) N_1(\Omega_1)/\Omega_1] ; \\
m_{35} &= -\zeta_1 z_{10} [I_0(\Omega_1) - (1 - \nu) I_1(\Omega_1)/\Omega_1] ; m_{36} = -\zeta_1 z_{10} [K_0(\Omega_1) - (1 - \nu) K_1(\Omega_1)/\Omega_1] ; \\
m_{41} &= J_1(\Omega_0) ; m_{42} = I_1(\Omega_0) ; m_{43} = -\zeta_1 z_{10}^2 J_1(\Omega_1) ; m_{44} = -\zeta_1 z_{10}^2 N_1(\Omega_1) ; m_{45} = -\zeta_1 z_{10}^2 I_1(\Omega_1) ; \\
m_{46} &= \zeta_1 z_{10}^2 K_1(\Omega_1) ; m_{51} = m_{52} = 0 ;
\end{aligned}$$

– жорстке закріплення

$$\begin{aligned}
m_{53} &= J_0(\Omega) ; m_{54} = N_0(\Omega) ; m_{55} = I_0(\Omega) ; m_{56} = K_0(\Omega) ; m_{61} = m_{62} = 0 ; m_{63} = -J_1(\Omega) ; \\
m_{64} &= -N_1(\Omega) ; m_{65} = I_1(\Omega) ; m_{66} = -K_1(\Omega) ;
\end{aligned}$$

– шарнірне закріплення

елементи п'ятого рядка  $m_{5k}$  мають ті ж значення, що і при жорсткому закріпленні;  $m_{61} = m_{62} = 0$  ;  $m_{63} = -[J_0(\Omega) - (1 - \nu) J_1(\Omega)/\Omega]$  ;  $m_{64} = -[N_0(\Omega) - (1 - \nu) N_1(\Omega)/\Omega]$  ;  $m_{65} = I_0(\Omega) - (1 - \nu) I_1(\Omega)/\Omega$  ;  $m_{66} = K_0(\Omega) + (1 - \nu) K_1(\Omega)/\Omega$  ;

– вільне закріплення

$m_{51} = m_{52} = 0$  ;  $m_{53} = J_1(\Omega)$  ;  $m_{54} = N_1(\Omega)$  ;  $m_{55} = I_1(\Omega)$  ;  $m_{56} = -K_1(\Omega)$  ; елементи шостого рядка  $m_{6k}$  мають ті ж значення, що і при шарнірному закріпленні;  $\delta_{j3}$  – символ Кронекера, що дорівнює одиниці при  $j = 3$  і рівний нулю для всіх  $j \neq 3$ . Праву частину третього рівняння в системі рівнянь (5.58) можна представити в наступному вигляді:  $M_0/(D_1 \lambda_0^2) = W_0 U_0$  , де  $W_0 = 2(h + \alpha/2)/(D_1 \lambda_0^2)$  – абсолютна чутливість активної зони біморфного п'єзоелектричного елемента (розмірність метр, поділений на вольт).

Розв'язок системи рівнянь (5.58) можна представити в наступному вигляді

$$A_k = (-1)^{k+3} W_0 U_0 \frac{\Delta_{3k}}{\Delta_0}, \quad k = 1, \dots, 6, \quad (5.59)$$

де  $\Delta_{3k}$  – алгебраїчне доповнення при невідомому коефіцієнті;  $A_k$  – визначник матриці розміром  $5 \times 5$ , яка утворюється з матриці коефіцієнтів  $m_{jk}$  системи рівнянь (5.58) шляхом викреслювання третього рядка і  $k$ -го стовпця;  $\Delta_0$  –

визначник матриці  $6 \times 6$  складеної з коефіцієнтів  $m_{jk}$  системи рівнянь (5.58).

Якщо тимчасово припустити, що втрати енергії в матеріалах елементів біморфного п'єзоелектричного елемента відсутні, то частотно залежна зміна визначників  $\Delta_0$ , які відповідають жорсткому ( $\Delta_0^{(h)}$ ), шарнірному ( $\Delta_0^{(sh)}$ ) і вільному ( $\Delta_0^{(f)}$ ) закріпленню контуру  $\rho=R$  металевому диску, визначається знакозмінними функціями, графіки яких показані на рис. 5.8. У процесі обчислення числових значень визначників були використані наступні матеріальні константи: металева (сталева) пластина: модуль Юнга  $E = 200$  ГПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,28$ , густина  $\rho_m = 7800$  кг/м<sup>3</sup>, напівтовщина пластинки  $h = 5 \cdot 10^{-4}$  м, радіус  $R = 5 \cdot 10^{-2}$  м; п'єзокерамічні (п'єзокераміка типу ЦТС) диски: модулі пружності  $c_{11}^E = 110$  ГПа,  $c_{12}^E = 62$  ГПа,  $c_{33}^E = 100$  ГПа, п'єзоелектричні модулі  $e_{31} = -9$  Кл/м<sup>2</sup>,  $e_{33} = 18$  Кл/м<sup>2</sup>, діелектрична проникність  $\chi_{33}^E = 1300\chi_0$ , діелектрична постійна  $\chi_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м, густина  $\rho_{пз} = 7400$  кг/м<sup>3</sup>, товщина диска  $\alpha = 10^{-3}$  м, радіус диска  $R_0 = 1,5 \cdot 10^{-2}$  м. Очевидно, що маніпулюючи розмірами п'єзокерамічних дисків (товщиною і радіусом), можна управляти числовими значеннями резонансних частот біморфного п'єзоелектричного елемента. У таблицях 5.1 – 5.3 наведені числові значення безрозмірних частот  $\Omega = \lambda_1 R$  перших трьох резонансів для різних типів закріплення контуру  $\rho=R$  металевому диску. Символами  $r_0$  і  $\alpha_0$  в цих таблицях позначені безрозмірні радіус і товщина п'єзокерамічних дисків, причому  $r_0 = R_0/R$  і  $\alpha_0 = \alpha/h$ . В процесі обчислень були використані матеріальні константи складових біморфного п'єзоелектричного елемента, які вказані вище в коментарі до рис. 5.8. При цьому безрозмірній частоті  $\Omega = 10$  відповідає циклічна частота  $f = 9694$  Гц.

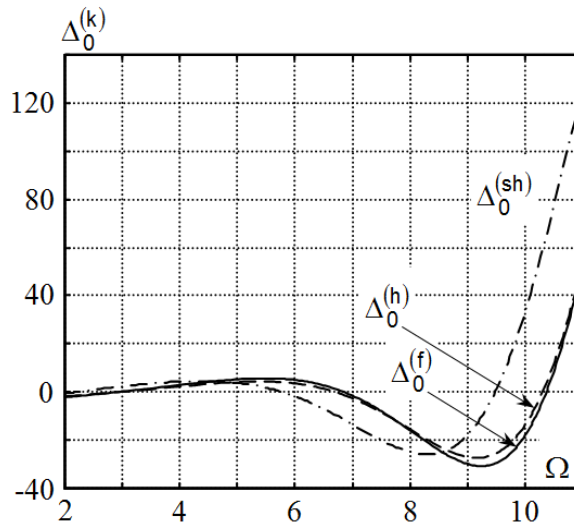


Рис. 5.8. Частотно залежна зміна визначника системи рівнянь (5.58)

Таблиця 5.1. Числові значення безрозмірних частот  $\Omega_n$  перших трьох резонансів біморфного п'єзоелектричного елемента при жорсткому закріпленні контуру  $\rho = R$  металевого диска

$\gamma_0$	$\alpha_0 = 2$			$\alpha_0 = 4$		
	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
0,001	3,196215	6,306421	9,439463	3,196207	6,306394	9,439400
0,05	3,184003	6,277701	9,391830	3,165913	6,226088	9,303039
0,10	3,155050	6,255022	9,427965	3,095783	6,145829	9,320048
0,15	3,122535	6,299843	9,616115	3,019651	6,192974	9,590613
0,20	3,096476	6,418144	9,893565	2,958674	6,360702	10,010234
0,25	3,082320	6,593766	10,182627	2,920972	6,621322	10,522085
0,30	3,082214	6,804526	10,380713	2,908267	6,956763	11,083026
0,35	3,096416	7,020831	10,395259	2,920249	7,355625	11,591054
0,40	3,124117	7,199459	10,305584	2,956444	7,802976	11,747382
0,45	3,163734	7,290985	10,318486	3,016849	8,256770	11,437040
0,50	3,212845	7,279736	10,551852	3,102027	8,592539	11,200488
0,55	3,267952	7,208348	10,979425	3,212863	8,627168	11,477386
0,60	3,324275	7,140299	11,444410	3,349863	8,416477	12,296739
0,65	3,375984	7,125115	11,672058	3,511535	8,162529	13,432917
0,70	3,417348	7,192587	11,569838	3,691132	7,989285	14,237378
0,75	3,444991	7,349094	11,431646	3,871704	7,982991	14,050247
0,80	3,460677	7,560465	11,412258	4,023990	8,235035	13,627732
0,85	3,474202	7,741617	11,652274	4,119103	8,804403	13,455407
0,90	3,509730	7,812019	11,995156	4,156992	9,481495	14,067823
0,95	3,638117	7,819491	12,090464	4,201292	9,744665	15,143423
0,999	4,300487	8,487432	12,707134	5,353449	10,609455	15,938021



## Продовження таблиці 5.1

$\Gamma_0$	$\alpha_0 = 6$			$\alpha_0 = 8$		
	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
0,001	3,196620	6,306364	9,439335	3,196191	6,306335	9,439269
0,05	3,147434	6,174173	9,217573	3,129241	6,124989	9,141407
0,10	3,038204	6,046055	9,220967	2,984619	5,962977	9,144678
0,15	2,925082	6,093373	9,527741	2,842072	6,017138	9,476802
0,20	2,836825	6,283279	9,993416	2,734400	6,222598	9,965663
0,25	2,780380	6,574036	10,566761	2,665379	6,530250	10,563489
0,30	2,754896	6,947830	11,231306	2,631203	6,921645	11,262175
0,35	2,758243	7,399978	11,968689	2,627964	7,394677	12,064192
0,40	2,789070	7,932083	12,680634	2,653374	7,956220	12,958484
0,45	2,847357	8,543498	12,870337	2,707015	8,618100	13,781723
0,50	2,934577	9,203921	12,339762	2,790386	9,389283	13,664390
0,55	3,053803	9,732651	11,991394	2,907102	10,232045	12,945050
0,60	3,209808	9,733452	12,499464	3,063346	10,785582	12,787036
0,65	3,408903	9,372844	13,804314	3,268617	10,534940	13,902849
0,70	3,657642	8,993967	15,560560	3,536575	10,040944	15,871975
0,75	3,957666	8,735401	16,415353	3,884658	9,609401	18,103000
0,80	4,290397	8,722205	15,872751	4,326009	9,363111	17,934522
0,85	4,590926	9,173691	15,317197	4,830413	9,526457	17,167262
0,90	4,765891	10,317424	15,365873	5,241861	10,629874	16,758907
0,95	4,814252	11,349015	17,333306	5,390378	12,588570	18,663375
0,999	6,031783	12,155620	18,441988	6,467793	13,431056	20,618358

**Таблиця 5.2. Числові значення безрозмірних частот  $\Omega_n$  перших трьох резонансів біморфного п'єзоелектричного елемента при шарнірному закріпленні контуру  $\rho = R$  металевого диска**

$\Gamma_0$	$\alpha_0 = 2$			$\alpha_0 = 4$		
	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
0,001	2,214820	5,449477	8,610093	2,214816	5,449456	8,610041
0,05	2,210765	5,425611	8,566268	2,202696	5,383670	8,485826
0,10	2,200993	5,396206	8,580123	2,172891	5,294624	8,465140
0,15	2,190085	5,410380	8,727195	2,137584	5,290885	8,673487
0,20	2,182346	5,482482	8,967366	2,106837	5,387234	9,030488
0,25	2,181023	5,607511	9,242890	2,086734	5,569358	9,484354
0,30	2,188314	5,773709	9,480346	2,080419	5,824197	10,002894
0,35	2,205664	5,965299	9,587031	2,089558	6,143811	10,533115
0,40	2,234067	6,158825	9,539750	2,115363	6,522125	10,909400
0,45	2,274255	6,320354	9,465294	2,159210	6,946889	10,846192
0,50	2,326769	6,412789	9,518145	2,223017	7,478686	10,518769
0,55	2,391881	6,422981	9,770863	2,309536	7,706464	10,380335
0,60	2,469337	6,378194	10,191795	2,422590	7,778475	10,732553
0,65	2,557860	6,325803	10,627492	2,567201	7,629833	11,602175
0,70	2,654375	6,311404	10,829371	2,749246	7,419674	12,761741
0,75	2,753188	6,375197	10,762664	2,973462	7,259978	13,414962
0,80	2,845851	6,550967	10,635236	3,236672	7,246537	13,189365
0,85	2,923016	6,844382	10,659116	3,511958	7,526926	12,831093
0,90	2,978466	7,171252	11,032349	3,737023	8,304146	12,832199
0,95	3,012738	7,365918	11,561329	3,858308	9,270239	14,180218
0,999	3,032881	7,404109	11,689884	3,897707	9,494783	14,987606

## Продовження таблиці 5.2

$\Gamma_0$	$\alpha_0 = 6$			$\alpha_0 = 8$		
	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
0,001	2,214813	5,449434	8,609986	2,214809	5,449412	8,609931
0,05	2,194255	5,341126	8,407404	2,185872	5,300272	8,336263
0,10	2,144501	5,200102	8,361431	2,117445	5,118817	8,280424
0,15	2,086774	5,183267	8,598797	2,040650	5,097821	8,540410
0,20	2,036390	5,290712	8,996491	1,975113	5,216058	8,960294
0,25	2,000704	5,495177	9,502024	1,928252	5,435095	9,488039
0,30	1,982369	5,779907	10,098807	1,901583	5,735535	10,112746
0,35	1,982200	6,139056	10,778012	1,894852	6,112222	10,837503
0,40	2,000726	6,574006	11,504042	1,907821	6,569178	11,662025
0,45	2,038936	7,089728	12,061587	1,940981	7,117008	12,553467
0,50	2,098728	7,687505	11,900529	1,995938	7,770760	13,089035
0,55	2,183314	8,336457	11,379589	2,075803	8,541956	12,608035
0,60	2,297760	8,857401	11,181717	2,185794	9,387569	12,000175
0,65	2,449813	8,902795	11,820973	2,334307	9,926996	12,059512
0,70	2,651130	8,616784	13,260640	2,534812	9,732546	13,381875
0,75	2,918750	8,290419	15,090587	2,809273	9,312788	15,624000
0,80	3,274714	8,055703	15,512342	3,193743	8,932847	17,457305
0,85	3,731840	8,064755	14,973364	3,741854	8,725971	16,937692
0,90	4,225021	8,715184	14,559865	4,474494	9,058293	16,284293
0,95	4,542805	10,532793	15,606243	5,098202	11,207464	16,661055
0,999	4,621534	11,247292	17,752315	5,250574	12,771249	20,156595

**Таблиця 5.3. Числові значення безрозмірних частот  $\Omega_n$  перших трьох резонансів біморфного п'єзоелектричного елемента при вільному закріпленні контуру  $\rho = R$  металевого диска**

$\Gamma_0$	$\alpha_0 = 2$			$\alpha_0 = 4$		
	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
0,001	2,993056	6,196782	9,365237	2,993051	6,196754	9,365175
0,05	2,988733	6,167121	9,317679	2,976938	6,115162	9,229041
0,10	2,981904	6,139688	9,352183	2,944779	6,026548	9,242902
0,15	2,983096	6,176035	9,538385	2,922762	6,060133	9,510253
0,20	3,000622	6,284376	9,815210	2,927838	6,213979	9,928218
0,25	3,039595	6,450298	10,106183	2,967487	6,462245	10,439622
0,30	3,102865	6,652805	10,310332	3,044668	6,787003	11,002136
0,35	3,192064	6,863876	10,332516	3,161345	7,176707	11,517711
0,40	3,308172	7,043098	10,241468	3,320273	7,617053	11,694906
0,45	3,451509	7,143723	10,238961	3,525860	8,069971	11,394916
0,50	3,620998	7,148718	10,448803	3,784583	8,424099	11,134381
0,55	3,812328	7,099941	10,855589	4,104902	8,500540	11,357593
0,60	4,014500	7,072326	11,315060	4,495383	8,325081	12,131807
0,65	4,205682	7,144243	11,562856	4,955809	8,110715	13,248733
0,70	4,354579	7,388883	11,508157	5,443401	8,058090	14,108153
0,75	4,435829	7,845263	11,398100	5,807275	8,446553	13,985322
0,80	4,446949	8,420318	11,579871	5,904234	9,560105	13,619942
0,85	4,403162	8,795776	12,397936	5,815027	11,113209	14,014727
0,90	4,321767	8,826183	13,117292	5,650466	11,501006	16,670927
0,95	4,215342	8,668357	13,061361	5,458511	11,208480	16,886601
0,999	4,094998	8,429381	12,727045	5,261089	10,812609	16,320896

## Продовження таблиці 5.3

$r_0$	$\alpha_0 = 6$			$\alpha_0 = 8$		
	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
0,001	2,993045	6,196726	9,365110	2,993040	6,196697	9,365044
0,05	2,964476	6,062883	9,143623	2,952163	6,013232	9,067378
0,10	2,907238	5,923001	9,142744	2,872267	5,836196	9,065532
0,15	2,864402	5,953925	9,446114	2,813523	5,871231	9,394254
0,20	2,858562	6,127970	9,909946	2,801268	6,060877	9,881382
0,25	2,896057	6,406101	10,482431	2,838903	6,356248	10,478337
0,30	2,977532	6,769386	11,146965	2,924270	6,737693	11,176709
0,35	3,103407	7,212369	11,885972	3,056161	7,202077	11,979067
0,40	3,275994	7,736171	12,606641	3,236204	7,755560	12,875608
0,45	3,500454	8,340513	12,828889	3,469594	8,409603	13,713992
0,50	3,785617	8,999590	12,310459	3,765888	9,173829	13,639627
0,55	4,145066	9,558016	11,924332	4,140417	10,018500	12,918773
0,60	4,598481	9,630092	12,347013	4,616738	10,637199	12,683558
0,65	5,171826	9,307760	13,600368	5,230419	10,467155	13,702006
0,70	5,885973	8,970905	15,343062	6,032018	10,000378	15,631803
0,75	6,663476	8,923246	16,325032	7,058858	9,645588	17,916291
0,80	7,068052	9,844205	15,835110	7,965587	10,049262	17,893943
0,85	6,986555	12,178297	15,439940	7,993750	12,487663	17,175329
0,90	6,755842	13,702420	18,493336	7,712666	15,545572	19,071053
0,95	6,495017	13,328896	20,079824	7,393977	15,168629	22,848189
0,999	6,237254	12,809940	19,333402	7,085655	14,546647	21,953021

Чітко видно, що перші три безрозмірні частоти резонансів біморфного елемента з жорстким закріпленням контуру  $\rho = R$  мають найбільші значення в порівнянні з частотами резонансів, які спостерігаються при вільному і шарнірному закріпленні краю металеві пластинки. Це можна пояснити тим, що інтегральна жорсткість конструкції біморфного елемента з жорстким закріпленням контуру  $\rho = R$  металеві пластинки є найбільшою в порівнянні із загальною (інтегральною) жорсткістю всієї конструкції при інших способах закріплення. Частота першого резонансу при жорсткому і шарнірному закріпленні в міру збільшення параметра  $r_0$  спочатку зменшується, а потім починає зростати. Це відбувається тому, що при малих значеннях  $r_0$  жорсткість біморфного елемента збільшується меншими темпами в порівнянні зі збільшенням маси коливального елемента. По досягненню певного значення параметра  $r_0$  подальше його збільшення супроводжується випереджаючим зростанням жорсткості біморфного п'єзоелектричного елемента. У міру збільшення товщини п'єзокерамічного диска (параметр  $\alpha_0$ )

ці залежності проявляються все більш виразно. Для другого і третього резонансів спостерігаються по два (другий резонанс) і три (третій резонанс) інтервали числових значень параметра  $r_0$ , на яких відбувається зменшення і збільшення числових значень безрозмірних частот резонансів. Це, швидше за все, можна пояснити інерційними ефектами на ділянках поверхні біморфного елемента з протифазними рухами матеріальних частинок.

Для завершення математичного опису біморфного п'єзоелектричного елемента необхідно визначити потенціал  $U_0$  на електродованих поверхнях п'єзокерамічних дисків (рис. 5.7), тобто пов'язати прогини  $w$  нейтральної площини з різницею електричних потенціалів  $U_r$  на виході генератора електричних сигналів. Для цього необхідно визначити електричний імпеданс електромеханічної коливальної системи, розрахункова схема якої показана на рис. 5.7.

З визначення (5.34) аксіального компонента  $D_z^{(\pm)}$  вектора електричної індукції, слідує, що електричні заряди  $Q^{(\pm)}$  на електродованих поверхнях верхнього і нижнього п'єзокерамічного диска рівні за абсолютною величиною, але мають протилежні знаки. Величини цих зарядів розраховуються за такою формулою

$$Q^{(\pm)} = 2\pi \int_0^{R_0} \rho D_z^{(\pm)} d\rho = \mp 2\pi(h + \alpha/2)e_{31}^* R_0 \left. \frac{\partial w_0(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R_0} \mp C_0^\sigma U_0, \quad (5.60)$$

де  $C_0^\sigma = \pi R_0^2 \chi_{33}^\sigma / \alpha$  – динамічна електрична ємність п'єзокерамічного диска в складі біморфного п'єзоелектричного елемента.

Беручи до уваги визначення (5.45) прогину  $w_0(\rho)$  нейтрального шару в активній зоні біморфного елемента і загальний розв'язок (5.59) системи алгебраїчних рівнянь (5.58), можна записати наступний вираз

$$\left. \frac{\partial w_0(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R_0} = -\lambda_0 W_0 U_0 \left[ \frac{\Delta_{31}}{\Delta_0} J_1(\lambda_0 R_0) + \frac{\Delta_{32}}{\Delta_0} I_1(\lambda_0 R_0) \right],$$

де  $\lambda_0$  – хвильове число згинальних коливань в активній зоні біморфного елемента;  $W_0 = 2(h + \alpha/2)e_{31}^* / (\lambda_0^2 D_1)$  – абсолютна чутливість активної зони.

Підставляючи останній вираз в формулу (5.60), отримуємо наступний результат

$$Q^{(\pm)} = \pm C_0^\sigma U_0 [\Psi_0(\omega, \Pi) - 1], \quad (5.61)$$

де  $\Psi_0(\omega, \Pi)$  – функція, яка залежить від частоти і набору параметрів (символ  $\Pi$ ) компонентів активної зони біморфного п'єзоелектричного елемента. Числові значення функції  $\Psi_0(\omega, \Pi)$  розраховуються за формулою

$$\Psi_0(\omega, \Pi) = 2K_{31}^2 \frac{c_{11}^E (h + \alpha/2)^2 \alpha}{\Delta_0 D_1} \left[ \Delta_{31} \frac{2J_1(\lambda_0 R_0)}{\lambda_0 R_0} + \Delta_{32} \frac{2I_1(\lambda_0 R_0)}{\lambda_0 R_0} \right],$$

де  $K_{31}^2 = (e_{31}^*)^2 / (c_{11}^E \chi_{33}^\sigma)$  – квадрат коефіцієнта електромеханічного зв'язку п'єзокераміки в режимі планарних коливань поляризованого по товщині тонкого диска.

Перепишемо вираз (5.61) в наступному вигляді

$$Q^{(\pm)} = C_0^\sigma U^{(\pm)} [\Psi_0(\omega, \Pi) - 1],$$

де  $U^{(\pm)} = \pm U_0$ .

З останнього виразу випливає, що амплітуди електричних струмів, які підтікають по провідникам до верхнього і нижнього п'єзокерамічного диску, мають таке значення

$$I^{(\pm)} = -i\omega C_0^\sigma U^{(\pm)} [\Psi_0(\omega, \Pi) - 1].$$

Електричний імпеданс  $Z_{пе}^{(\pm)}$  верхнього і нижнього дисків в складі біморфного п'єзоелектричного елемента визначається із закону Ома для ділянки електричного кола в такий спосіб

$$Z_{пе}^{(\pm)} = \frac{U^{(\pm)}}{I^{(\pm)}} = -\frac{1}{i\omega C_0^\sigma [\Psi_0(\omega, \Pi) - 1]} = Z_{пз}. \quad (5.62)$$

Цілком очевидно, що рівні за величиною електричні імпеданси  $Z_{пз}^{(\pm)}$  включені паралельно. З цієї причини електричний імпеданс біморфного елемента  $Z_{БЕ} = Z_{пз}^{(\pm)} / 2 = Z_{пе} / 2$ .

Електричний потенціал  $U_0$  при наявності кінцевого вихідного опору  $Z_r$  в джерелі різниці електричних потенціалів визначається як зазвичай

$$U_0 = \frac{U_r Z_{БЕ}}{Z_{БЕ} + Z_r} = \frac{U_r Z_{пе}}{Z_{пе} + 2Z_r}.$$

Підставляючи в останній вираз співвідношення (5.62), отримуємо наступну розрахункову формулу

$$U_0 = \frac{U_r}{1 - 2i\omega C_0^g Z_r [\Psi_0(\omega, \Pi) - 1]}. \quad (5.63)$$

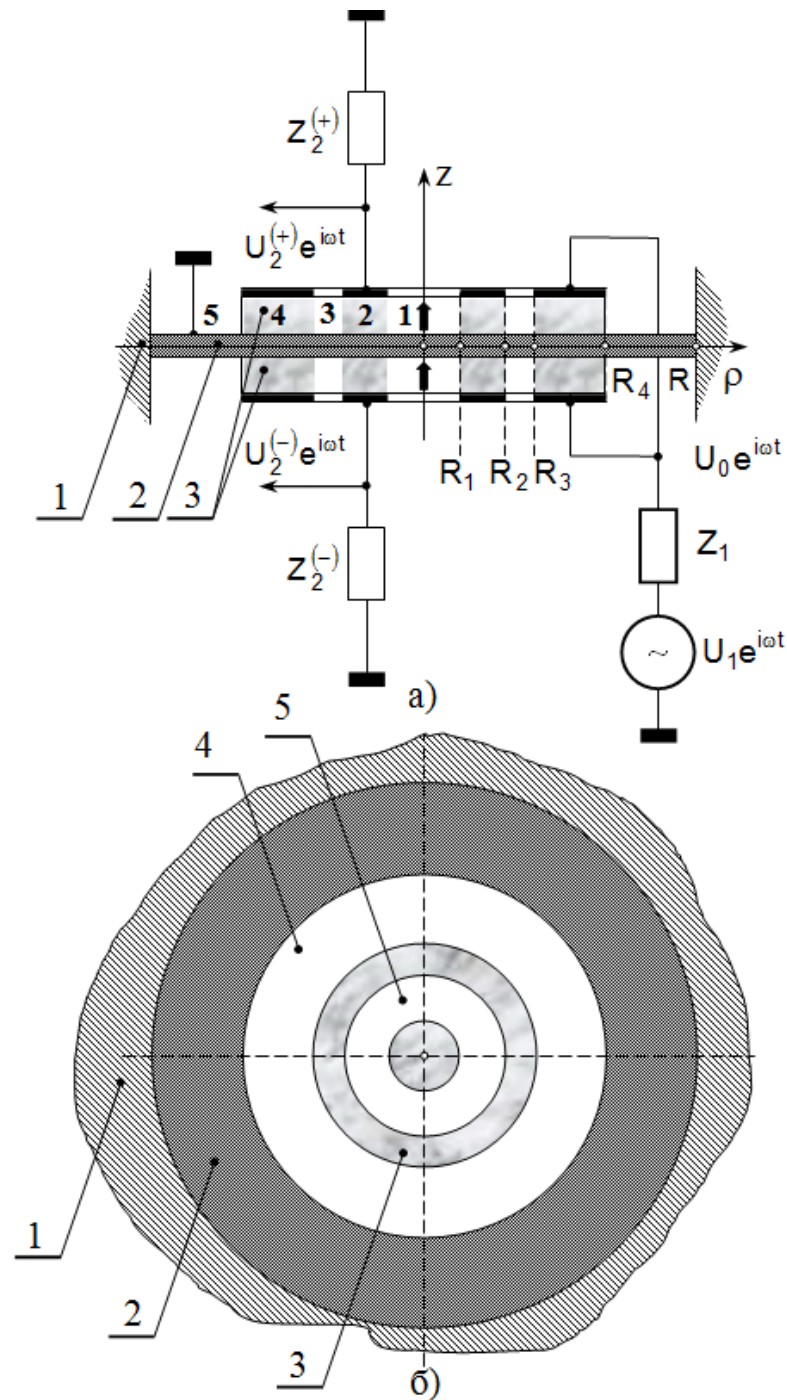
Підставляючи вираз (5.63) в загальний розв'язок (5.59), отримуємо остаточний вигляд виразу для розрахунку числових значень коефіцієнтів  $A_k$ :

$$A_k = \frac{(-1)^{k+3} W_0 U_r \Delta_{3k}}{\{1 - 2i\omega C_0^g Z_r [\Psi_0(\omega, \Pi) - 1]\} \Delta_0}. \quad (5.64)$$

Вираз (5.64) завершує розв'язування задачі про збудження коливань поперечного вигину в біморфному п'єзоелектричному елементі різницею електричних потенціалів, яку виробляє реальний генератор з вихідним електричним опором  $Z_r$  [7].

Тепер розглянемо конструкцію дискового п'єзоелектричного перетворювача, розрахункова схема якого показана на рис. 5.9.

На рис. 5.9 позицією 1 вказана нерухома опора, позицією 2 – металевий диск, позицією 3 – два однакових п'єзокерамічних диска. Поверхні дисків, які знаходяться в механічному контакті з металевим диском, повністю електродовані і приклеєні високомолекулярних струмопровідних клеєм до металевої круглої пластині. Металева пластина заземлена. На зовнішніх поверхнях п'єзокерамічних дисків розташовуються два кільцевих електрода. На рис. 5.9, б показаний вид зверху на дисковий біморфний п'єзоелектричний перетворювач. Позицією 4 на рис. 5.9, б показаний кільцевий електрод первинного електричного кола. Точно такий же електрод є на зовнішній поверхні нижнього п'єзокерамічного диска. На цю пару кільцевих електродів подається різниця електричних потенціалів від джерела електричних сигналів з вихідним електричним опором  $Z_1$ .



**Рис. 5.9. Розрахункова схема біморфного дискового п'єзоелектричного перетворювача**

Напрямки електричної поляризації п'єзокерамічних дисків показані на рис. 5.9, а жирними стрілками. При такому механічному поєднанні п'єзокерамічних дисків електричний потенціал  $U_0 e^{i\omega t}$  на парі кільцевих електродів первинного електричного кола створює, завдяки зворотному п'єзоелектричному ефекту, що змінюються в часі за законом  $e^{i\omega t}$  згинальні

моменти в області номер 4 (рис. 5.9, а), тобто в кільці  $R_3 \leq \rho \leq R_4$ . Під дією цих згинальних моментів вся конструкція починає здійснювати вісесиметричні коливання поперечного вигину. Виникаючі при цьому деформації формують в об'ємі п'єзокерамічних дисків змінну в часі за законом  $e^{i\omega t}$  електричну поляризацію. На кільцевих електродах вторинного електричного кола дискового п'єзоелектричного перетворювача (позиція 5 на рис. 5.9, б) виникають електричні заряди, які своїм електричним полем змушують рухатися вільні носії електрики в провідниках, які з'єднують електричні навантаження (символи  $Z_2^{(\pm)}$  на рис. 5.9, а) з електродами вторинного електричного кола. В результаті протікання електричного струму на електричних навантаженнях  $Z_2^{(\pm)}$  формуються електричні потенціали  $U_2^{(\pm)}e^{i\omega t}$ , які є вихідними електричними сигналами розглянутого функціонального елемента п'єзоелектроніки.

У загальному випадку можлива ситуація, коли  $Z_2^{(+)} \neq Z_2^{(-)}$ . Внаслідок цього амплітудні значення вихідних потенціалів  $U_2^{(+)} \neq U_2^{(-)}$ . Це змушує визначити математичну модель дискового біморфного п'єзоелектричного перетворювача в такий спосіб

$$\kappa^{(\pm)} = \frac{U_2^{(\pm)}}{U_1}. \quad (5.65)$$

Вже неодноразово було показано, що обчислення коефіцієнта трансформації, тобто побудова математичної моделі п'єзоелектричного перетворювача, неминуче стикається з проблемою визначення коефіцієнта електроакустичного зв'язку між потенціалами на електродах вторинного та первинного електричного кола. Ця проблема ефективно вирішується після визначення в явному вигляді співвідношень для розрахунку компонентів вектора зміщення матеріальних частинок п'єзоелектрика в різних областях (під вільними від електродів і з електродами на поверхні) п'єзоелектричного перетворювача.

Визначимо зміщення матеріальних частинок в різних областях п'єзокерамічних дисків перетворювача.



На рис. 5.9, а цифрами 1, 2, 3 і 4 пронумеровані різні за своїми фізичними властивостями області п'єзокерамічних дисків.

В областях непарних номерів відсутнє електродне покриття на зовнішніх поверхнях дисків. З цієї причини в об'ємі областей №1 і №3 аксіальний компонент  $D_z^{(\pm)}$  вектора електричної індукції дорівнює нулю, і фізичний стан цих областей повністю визначається узагальненим законом Гука, який в разі тонких дисків, що коливаються в вакуумі, записується в наступному вигляді

$$\begin{aligned} {}^{(n)}\sigma_{\rho\rho}^{(\pm)} &= -zc_{11}^D \left( \frac{\partial^2 w_n}{\partial \rho^2} + \frac{k_D}{\rho} \frac{\partial w_n}{\partial \rho} \right), \quad n=1;3, \\ {}^{(n)}\sigma_{\varphi\varphi}^{(\pm)} &= -zc_{11}^D \left( k_D \frac{\partial^2 w_n}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_n}{\partial \rho} \right), \quad {}^{(n)}D_z^{(\pm)} = 0, \end{aligned} \quad (5.66)$$

де  $w_n$  – прогин в області номера  $n$ ; модуль пружності  $c_{11}^D$  і параметр  $k_D$  визначені в коментарях до формул (5.36) і (5.37).

В областях з парними номерами  $m=2;4$  фізичний стан деформованої п'єзокераміки визначається наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} {}^{(m)}\sigma_{\rho\rho}^{(\pm)} &= -zc_{11}^D \left( \frac{\partial^2 w_m}{\partial \rho^2} + \frac{k_D}{\rho} \frac{\partial w_m}{\partial \rho} \right) \pm (h + \alpha/2) \frac{(e_{31}^*)^2}{\chi_{33}^\sigma} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial w_m}{\partial \rho} \right) \pm e_{31}^* \frac{U_m^{(\pm)}}{\alpha}, \\ {}^{(m)}\sigma_{\varphi\varphi}^{(\pm)} &= -zc_{11}^D \left( k_D \frac{\partial^2 w_m}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_m}{\partial \rho} \right) \pm (h + \alpha/2) \frac{(e_{31}^*)^2}{\chi_{33}^\sigma} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial w_m}{\partial \rho} \right) \pm e_{31}^* \frac{U_m^{(\pm)}}{\alpha}, \end{aligned} \quad (5.67)$$

$${}^{(m)}D_z^{(\pm)} = \mp (h + \alpha/2) \frac{(e_{31}^*)^2}{\chi_{33}^\sigma} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial w_m}{\partial \rho} \right) \mp \chi_{33}^\sigma \frac{U_m^{(\pm)}}{\alpha}, \quad m=2;4, \quad (5.68)$$

де  $U_4^{(\pm)} = U_0$ .

У металевій пластині напружено-деформований стан визначається стандартним чином

$$\begin{aligned} {}^{(k)}\sigma_{\rho\rho}^{(\pm)} &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w_k}{\partial \rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial w_k}{\partial \rho} \right), \quad k=1,2,3,4,5, \\ {}^{(k)}\sigma_{\varphi\varphi}^{(\pm)} &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{\partial^2 w_k}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_k}{\partial \rho} \right), \end{aligned} \quad (5.69)$$

де область №5 – це кільце  $R_4 \leq R$  (рис. 5.9, а).

Лінійна густина згинальних моментів  $M_\rho^{(k)}$  ( $k=1,\dots,5$ ) розраховується за

формулою (5.10) і задається наступними співвідношеннями:

– області п'єзокерамічних дисків з непарними номерами  $n = 1; 3$  :

$$M_p^{(n)} = -D_1^{(n)} \left( \frac{\partial^2 w_n}{\partial \rho^2} + \frac{\eta_n}{\rho} \frac{\partial w_n}{\partial \rho} \right), \quad (5.70)$$

де згинальна жорсткість  $D_1^{(n)} = \frac{2}{3} c_{11}^D [(\alpha + h)^3 - h^3] + \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$ ;  $\eta_n = \frac{D_2^{(n)}}{D_1^{(n)}}$ ;

$$D_2^{(n)} = \frac{2}{3} c_{12}^D [(\alpha + h)^3 - h^3] + \frac{2E\nu h^3}{3(1-\nu^2)};$$

– області дисків з парними номерами  $m = 2; 4$  :

$$M_p^{(m)} = -D_1^{(m)} \left( \frac{\partial^2 w_m}{\partial \rho^2} + \frac{\eta_m}{\rho} \frac{\partial w_m}{\partial \rho} \right) + M_0^{(m)}, \quad (5.71)$$

де  $D_1^{(m)} = D_{пе} - D_0 + D_m$ ;  $\eta_m = D_2^{(m)} / D_1^{(m)}$ ;  $D_2^{(m)} = k_d D_{пе} - D_0 + \nu D_m$ ;  $D_{пе} = \frac{2}{3} c_{11}^D [(\alpha + h)^3 - h^3]$ ;

$D_0 = 2\alpha(h + \alpha/2)^2 \frac{(e_{31}^*)^2}{\chi_{33}^\sigma}$ ;  $D_m = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$ ;  $M_0^{(m)}$  – додаткові згинальні моменти,

обумовлені зворотним п'єзоелектричним ефектом. При цьому

$M_0^{(2)} = e_{31}^*(h + \alpha/2)[U_2^{(-)} + U_2^{(+)}]$  і  $M_0^{(4)} = 2e_{31}^*(h + \alpha/2)U_0$ .

Лінійна густина згинального моменту в межах металевого кільця  $R_4 \leq \rho \leq R$  визначається стандартним чином

$$M_p^{(5)} = -D_m \left( \frac{\partial^2 w_5}{\partial \rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial w_5}{\partial \rho} \right). \quad (5.72)$$

Лінійна густина поперечних сил  $Q_k$  на  $k$ -ій ділянці біморфного п'єзоелектричного перетворювача розраховується за формулою

$$Q_k = D_1^{(k)} \left( \frac{\partial^3 w_k}{\partial \rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w_k}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial w_k}{\partial \rho} \right), \quad k = 1, \dots, 5, \quad (5.73)$$

де  $D_1^{(5)} \equiv D_m$ .

Загальний розв'язок рівняння (5.43) сталих гармонійних коливань поперечного вигину для різних областей біморфного дискового п'єзоелектричного перетворювача має наступний вигляд:

$$w_1(\rho) = A_1 J_0(\lambda_1 \rho) + A_2 I_0(\lambda_1 \rho),$$

$$w_2(\rho) = A_3 J_0(\lambda_2 \rho) + A_4 N_0(\lambda_2 \rho) + A_5 I_0(\lambda_2 \rho) + A_6 K_0(\lambda_2 \rho),$$

$$\begin{aligned}
w_3(\rho) &= A_7 J_0(\lambda_1 \rho) + A_8 N_0(\lambda_1 \rho) + A_9 I_0(\lambda_1 \rho) + A_{10} K_0(\lambda_1 \rho), \\
w_4(\rho) &= A_{11} J_0(\lambda_2 \rho) + A_{12} N_0(\lambda_2 \rho) + A_{13} I_0(\lambda_2 \rho) + A_{14} K_0(\lambda_2 \rho), \\
w_5(\rho) &= A_{15} J_0(\lambda \rho) + A_{16} N_0(\lambda \rho) + A_{17} I_0(\lambda \rho) + A_{18} K_0(\lambda \rho),
\end{aligned} \tag{5.74}$$

де  $A_1, \dots, A_{18}$  – константи, що підлягають визначенню;  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  – хвильові числа згинальних коливань в непарних і парних по номеру областях активної зони біморфного п'єзоелектричного елемента;  $\lambda$  – хвильове число згинальних коливань металевого кільця  $R_4 \leq \rho \leq R$ . Хвильові числа задаються формулами:  $\lambda_1 = \sqrt[4]{2(h\rho_m + \alpha\rho_{пе})\omega^2/D_1^{(1)}}$ ,  $\lambda_2 = \sqrt[4]{2(h\rho_m + \alpha\rho_{пе})\omega^2/D_1^{(2)}}$ ,  $\lambda = \sqrt[4]{2h\rho_m\omega^2/D_m}$ , де  $\rho_m$  і  $\rho_{пе}$  – густина металеві пластинки і п'єзокераміки.

Коефіцієнти  $A_1, \dots, A_{18}$ , що входять до складу загальних рішень (5.74), повинні забезпечувати безперервність (зшивання) характеристик напружено-деформованого стану різних областей п'єзоелектричного перетворювача на умовних межах  $\rho = R_1, \dots, R_4$ . Цей факт записується в такий спосіб

$$\begin{aligned}
w_j(R_j) &= w_{j+1}(R_j), \\
\left. \frac{\partial w_j(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R_j} &= \left. \frac{\partial w_{j+1}(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R_j}, \\
M_\rho^{(j)}(R_j) &= M_\rho^{(j+1)}(R_j), \\
Q_j(R_j) &= Q_{j+1}(R_j), \quad j = 1, 2, 3, 4.
\end{aligned} \tag{5.75}$$

Умови (5.75) доставляють 16 алгебраїчних рівнянь, до складу яких входять 18 коефіцієнтів  $A_1, \dots, A_{18}$ , що підлягають визначенню. Відсутні два рівняння доставляють умови закріплення контуру  $\rho = R$  металеві пластинки. Особливості математичного формулювання цих умов обговорювалися вище (див. співвідношення (5.52)–(5.57)). Будемо вважати, що контур  $\rho = R$  жорстко заземлений. Це означає, що повинні бути виконані такі умови

$$\begin{aligned}
w_5(R) &= 0, \\
\left. \frac{\partial w_5(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.76}$$

Умови зшивання рішень (5.75) і граничні умови (5.76) утворюють неоднорідну систему з 18 лінійних алгебраїчних рівнянь, до складу якої

входить рівно 18 шуканих констант  $A_1, \dots, A_{18}$ . Ця система рівнянь вирішується щодо шуканих констант єдиним чином. Символічний запис цієї системи рівнянь має наступний вигляд

$$m_{jk}A_k = P_j, \quad j, k = 1, \dots, 18. \quad (5.77)$$

При запису системи рівнянь (5.77) передбачається виконання підсумовування по двічі повторюваному індексу  $k$ . Коефіцієнти  $m_{jk}$  і праві частини  $P_j$  в системі рівнянь (5.77) визначаються наступними виразами:

$$\begin{aligned} m_{11} &= J_0(\Omega_{11}); \quad \Omega_{11} = \lambda_1 R_1; \quad m_{12} = I_0(\Omega_{11}); \quad m_{13} = -J_0(\Omega_{21}); \quad \Omega_{21} = \lambda_2 R_1; \\ m_{14} &= -N_0(\Omega_{21}); \quad m_{15} = -I_0(\Omega_{21}); \quad m_{16} = -K_0(\Omega_{21}); \quad m_{17} \div m_{1,18} = 0; \quad P_1 = 0; \quad m_{21} = -J_1(\Omega_{11}); \\ m_{22} &= I_1(\Omega_{11}); \quad m_{23} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} J_1(\Omega_{21}); \quad m_{24} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} N_1(\Omega_{21}); \quad m_{25} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} I_1(\Omega_{21}); \quad m_{26} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} K_1(\Omega_{21}); \\ m_{27} \div m_{2,18} &= 0; \quad P_2 = 0; \quad m_{31} = -\left[ J_0(\Omega_{11}) - \frac{1 - \eta_1}{\Omega_{11}} J_1(\Omega_{11}) \right]; \quad m_{32} = \left[ I_0(\Omega_{11}) - \frac{1 - \eta_1}{\Omega_{11}} I_1(\Omega_{11}) \right]; \\ m_{33} &= \frac{D_1^{(2)} \lambda_2^2}{D_1^{(1)} \lambda_1^2} \left[ J_0(\Omega_{21}) - \frac{1 - \eta_2}{\Omega_{21}} J_1(\Omega_{21}) \right]; \quad m_{34} = \frac{D_1^{(2)} \lambda_2^2}{D_1^{(1)} \lambda_1^2} \left[ N_0(\Omega_{21}) - \frac{1 - \eta_2}{\Omega_{21}} N_1(\Omega_{21}) \right]; \\ m_{35} &= -\frac{D_1^{(2)} \lambda_2^2}{D_1^{(1)} \lambda_1^2} \left[ I_0(\Omega_{21}) - \frac{1 - \eta_2}{\Omega_{21}} I_1(\Omega_{21}) \right]; \quad m_{36} = -\frac{D_1^{(2)} \lambda_2^2}{D_1^{(1)} \lambda_1^2} \left[ K_0(\Omega_{21}) + \frac{1 - \eta_2}{\Omega_{21}} K_1(\Omega_{21}) \right]; \\ m_{37} \div m_{3,18} &= 0; \quad P_3 = -\frac{M_0^{(2)}}{D_1^{(1)} \lambda_1^2}; \quad m_{41} = J_1(\Omega_{11}); \quad m_{42} = I_1(\Omega_{11}); \quad m_{43} = -\frac{D_1^{(2)} \lambda_2^3}{D_1^{(1)} \lambda_1^3} J_1(\Omega_{21}); \\ m_{44} &= -\frac{D_1^{(2)} \lambda_2^3}{D_1^{(1)} \lambda_1^3} N_1(\Omega_{21}); \quad m_{45} = -\frac{D_1^{(2)} \lambda_2^3}{D_1^{(1)} \lambda_1^3} I_1(\Omega_{21}); \quad m_{46} = \frac{D_1^{(2)} \lambda_2^3}{D_1^{(1)} \lambda_1^3} K_1(\Omega_{21}); \quad m_{47} \div m_{4,18} = 0; \\ P_4 &= 0; \quad m_{51} = m_{52} = 0; \quad m_{53} = J_0(\Omega_{22}); \quad \Omega_{22} = \lambda_2 R_2; \quad m_{54} = N_0(\Omega_{22}); \quad m_{55} = I_0(\Omega_{22}); \quad m_{56} = K_0(\Omega_{22}); \\ m_{57} &= -J_0(\Omega_{12}); \quad \Omega_{12} = \lambda_1 R_2; \quad m_{58} = -N_0(\Omega_{12}); \quad m_{59} = -I_0(\Omega_{12}); \quad m_{5,10} = -K_0(\Omega_{12}); \\ m_{5,11} \div m_{5,18} &= 0; \quad P_5 = 0; \quad m_{61} = m_{62} = 0; \quad m_{63} = -J_1(\Omega_{22}); \quad m_{64} = -N_1(\Omega_{22}); \quad m_{65} = I_1(\Omega_{22}); \\ m_{66} &= -K_1(\Omega_{22}); \quad m_{67} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} J_1(\Omega_{12}); \quad m_{68} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_1(\Omega_{12}); \quad m_{69} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} I_1(\Omega_{12}); \quad m_{6,10} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} K_1(\Omega_{12}); \\ m_{6,11} \div m_{6,18} &= 0; \quad P_6 = 0; \quad m_{71} = m_{72} = 0; \quad m_{73} = -\left[ J_0(\Omega_{22}) - \frac{1 - \eta_2}{\Omega_{22}} J_1(\Omega_{22}) \right]; \\ m_{74} &= -\left[ N_0(\Omega_{22}) - \frac{1 - \eta_2}{\Omega_{22}} N_1(\Omega_{22}) \right]; \quad m_{75} = \left[ I_0(\Omega_{22}) - \frac{1 - \eta_2}{\Omega_{22}} I_1(\Omega_{22}) \right]; \\ m_{76} &= \left[ K_0(\Omega_{22}) + \frac{1 - \eta_2}{\Omega_{22}} K_1(\Omega_{22}) \right]; \quad m_{77} = \frac{D_1^{(1)} \lambda_1^2}{D_1^{(2)} \lambda_2^2} \left[ J_0(\Omega_{12}) - \frac{1 - \eta_1}{\Omega_{12}} J_1(\Omega_{12}) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{78} &= \frac{D_1^{(1)}\lambda_1^2}{D_1^{(2)}\lambda_2^2} \left[ N_0(\Omega_{12}) - \frac{1-\eta_1}{\Omega_{12}} N_1(\Omega_{12}) \right]; \quad m_{79} = -\frac{D_1^{(1)}\lambda_1^2}{D_1^{(2)}\lambda_2^2} \left[ I_0(\Omega_{12}) - \frac{1-\eta_1}{\Omega_{12}} I_1(\Omega_{12}) \right]; \\
m_{7,10} &= -\frac{D_1^{(1)}\lambda_1^2}{D_1^{(2)}\lambda_2^2} \left[ K_0(\Omega_{12}) + \frac{1-\eta_1}{\Omega_{12}} K_1(\Omega_{12}) \right]; \quad m_{7,11} \div m_{7,18} = 0; \quad P_7 = \frac{M_0^{(2)}}{D_1^{(2)}\lambda_2^2}; \quad m_{81} \div m_{82} = 0; \\
m_{83} &= J_1(\Omega_{22}); \quad m_{84} = N_1(\Omega_{22}); \quad m_{85} = I_1(\Omega_{22}); \quad m_{86} = -K_1(\Omega_{22}); \quad m_{87} = -\frac{D_1^{(1)}\lambda_1^3}{D_1^{(2)}\lambda_2^3} J_1(\Omega_{12}); \\
m_{88} &= -\frac{D_1^{(1)}\lambda_1^3}{D_1^{(2)}\lambda_2^3} N_1(\Omega_{12}); \quad m_{89} = -\frac{D_1^{(1)}\lambda_1^3}{D_1^{(2)}\lambda_2^3} I_1(\Omega_{12}); \quad m_{8,10} = \frac{D_1^{(1)}\lambda_1^3}{D_1^{(2)}\lambda_2^3} K_1(\Omega_{12}); \quad m_{8,11} \div m_{8,18} = 0; \\
P_8 &= 0; \quad m_{91} \div m_{96} = 0; \quad m_{97} = J_0(\Omega_{13}); \quad \Omega_{13} = \lambda_1 R_3; \quad m_{98} = N_0(\Omega_{13}); \quad m_{99} = I_0(\Omega_{13}); \quad m_{9,10} = K_0(\Omega_{13}); \\
m_{9,11} &= -J_0(\Omega_{23}); \quad \Omega_{23} = \lambda_2 R_3; \quad m_{9,12} = -N_0(\Omega_{23}); \quad m_{9,13} = -I_0(\Omega_{23}); \quad m_{9,14} = -K_0(\Omega_{23}); \\
m_{9,15} \div m_{9,18} &= 0; \quad P_9 = 0; \quad m_{10,1} \div m_{10,6} = 0; \quad m_{10,7} = -J_1(\Omega_{13}); \quad m_{10,8} = -N_1(\Omega_{13}); \quad m_{10,9} = I_1(\Omega_{13}); \\
m_{10,10} &= -K_1(\Omega_{13}); \quad m_{10,11} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} J_1(\Omega_{23}); \quad m_{10,12} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} N_1(\Omega_{23}); \quad m_{10,13} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} I_1(\Omega_{23}); \\
m_{10,14} &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} K_1(\Omega_{23}); \quad m_{10,15} \div m_{10,18} = 0; \quad P_{10} = 0; \quad m_{11,1} \div m_{11,6} = 0; \\
m_{11,7} &= -\left[ J_0(\Omega_{13}) - \frac{1-\eta_1}{\Omega_{13}} J_1(\Omega_{13}) \right]; \quad m_{11,8} = -\left[ N_0(\Omega_{13}) - \frac{1-\eta_1}{\Omega_{13}} N_1(\Omega_{13}) \right]; \\
m_{11,9} &= \left[ I_0(\Omega_{13}) - \frac{1-\eta_1}{\Omega_{13}} I_1(\Omega_{13}) \right]; \quad m_{11,10} = \left[ K_0(\Omega_{13}) + \frac{1-\eta_1}{\Omega_{13}} K_1(\Omega_{13}) \right]; \\
m_{11,11} &= \frac{D_1^{(2)}\lambda_2^2}{D_1^{(1)}\lambda_1^2} \left[ J_0(\Omega_{23}) - \frac{1-\eta_2}{\Omega_{23}} J_1(\Omega_{23}) \right]; \quad m_{11,12} = \frac{D_1^{(2)}\lambda_2^2}{D_1^{(1)}\lambda_1^2} \left[ N_0(\Omega_{23}) - \frac{1-\eta_2}{\Omega_{23}} N_1(\Omega_{23}) \right]; \\
m_{11,13} &= -\frac{D_1^{(2)}\lambda_2^2}{D_1^{(1)}\lambda_1^2} \left[ I_0(\Omega_{23}) - \frac{1-\eta_2}{\Omega_{23}} I_1(\Omega_{23}) \right]; \quad m_{11,14} = -\frac{D_1^{(2)}\lambda_2^2}{D_1^{(1)}\lambda_1^2} \left[ K_0(\Omega_{23}) + \frac{1-\eta_2}{\Omega_{23}} K_1(\Omega_{23}) \right]; \\
m_{11,15} \div m_{11,18} &= 0; \quad P_{11} = -\frac{M_0^{(4)}}{D_1^{(1)}\lambda_1^2}; \quad m_{12,1} \div m_{12,6} = 0; \quad m_{12,7} = J_1(\Omega_{13}); \quad m_{12,8} = N_1(\Omega_{13}); \\
m_{12,9} &= I_1(\Omega_{13}); \quad m_{12,10} = -K_1(\Omega_{13}); \quad m_{12,11} = -\frac{D_1^{(2)}\lambda_2^3}{D_1^{(1)}\lambda_1^3} J_1(\Omega_{23}); \quad m_{12,12} = -\frac{D_1^{(2)}\lambda_2^3}{D_1^{(1)}\lambda_1^3} N_1(\Omega_{23}); \\
m_{12,13} &= -\frac{D_1^{(2)}\lambda_2^3}{D_1^{(1)}\lambda_1^3} I_1(\Omega_{23}); \quad m_{12,14} = \frac{D_1^{(2)}\lambda_2^3}{D_1^{(1)}\lambda_1^3} K_1(\Omega_{23}); \quad m_{12,15} \div m_{12,18} = 0; \quad P_{12} = 0; \\
m_{13,1} \div m_{13,10} &= 0; \quad m_{13,11} = J_0(\Omega_{24}); \quad \Omega_{24} = \lambda_2 R_4; \quad m_{13,12} = N_0(\Omega_{24}); \quad m_{13,13} = I_0(\Omega_{24}); \\
m_{13,14} &= K_0(\Omega_{24}); \quad m_{13,15} = -J_0(\Omega_4); \quad \Omega_4 = \lambda R_4; \quad m_{13,16} = -N_0(\Omega_4); \quad m_{13,17} = -I_0(\Omega_4); \\
m_{13,18} &= -K_0(\Omega_4); \quad P_{13} = 0; \quad m_{14,1} \div m_{14,10} = 0; \quad m_{14,11} = -J_1(\Omega_{24}); \quad m_{14,12} = -N_1(\Omega_{24});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{14,13} &= I_1(\Omega_{24}); \quad m_{14,14} = -K_1(\Omega_{24}); \quad m_{14,15} = \frac{\lambda}{\lambda_2} J_1(\Omega_4); \quad m_{14,16} = \frac{\lambda}{\lambda_2} N_1(\Omega_4); \quad m_{14,17} = -\frac{\lambda}{\lambda_2} I_1(\Omega_4); \\
m_{14,18} &= \frac{\lambda}{\lambda_2} K_1(\Omega_4); \quad P_{14} = 0; \quad m_{15,1} \div m_{15,10} = 0; \quad m_{15,11} = -\left[ J_0(\Omega_{24}) - \frac{1-\eta_2}{\Omega_{24}} J_1(\Omega_{24}) \right]; \\
m_{15,12} &= -\left[ N_0(\Omega_{24}) - \frac{1-\eta_2}{\Omega_{24}} N_1(\Omega_{24}) \right]; \quad m_{15,13} = \left[ I_0(\Omega_{24}) - \frac{1-\eta_2}{\Omega_{24}} I_1(\Omega_{24}) \right]; \\
m_{15,14} &= \left[ K_0(\Omega_{24}) + \frac{1-\eta_2}{\Omega_{24}} K_1(\Omega_{24}) \right]; \quad m_{15,15} = \frac{D_M \lambda^2}{D_1^{(2)} \lambda_2^2} \left[ J_0(\Omega_4) - \frac{1-\nu}{\Omega_4} J_1(\Omega_4) \right]; \\
m_{15,16} &= \frac{D_M \lambda^2}{D_1^{(2)} \lambda_2^2} \left[ N_0(\Omega_4) - \frac{1-\nu}{\Omega_4} N_1(\Omega_4) \right]; \quad m_{15,17} = -\frac{D_M \lambda^2}{D_1^{(2)} \lambda_2^2} \left[ I_0(\Omega_4) - \frac{1-\nu}{\Omega_4} I_1(\Omega_4) \right]; \\
m_{15,18} &= -\frac{D_M \lambda^2}{D_1^{(2)} \lambda_2^2} \left[ K_0(\Omega_4) + \frac{1-\nu}{\Omega_4} K_1(\Omega_4) \right]; \quad P_{15} = \frac{M_0^{(4)}}{D_1^{(2)} \lambda_2^2}; \quad m_{16,1} \div m_{16,10} = 0; \quad m_{16,11} = J_1(\Omega_{24}); \\
m_{16,12} &= N_1(\Omega_{24}); \quad m_{16,13} = I_1(\Omega_{24}); \quad m_{16,14} = -K_1(\Omega_{24}); \quad m_{16,15} = -\frac{D_M \lambda^3}{D_1^{(2)} \lambda_2^3} J_1(\Omega_4); \\
m_{16,16} &= -\frac{D_M \lambda^3}{D_1^{(2)} \lambda_2^3} N_1(\Omega_4); \quad m_{16,17} = -\frac{D_M \lambda^3}{D_1^{(2)} \lambda_2^3} I_1(\Omega_4); \quad m_{16,18} = \frac{D_M \lambda^3}{D_1^{(2)} \lambda_2^3} K_1(\Omega_4); \quad P_{16} = 0; \\
m_{17,1} \div m_{17,14} &= 0; \quad m_{17,15} = J_0(\Omega); \quad \Omega = \lambda R; \quad m_{17,16} = N_0(\Omega); \quad m_{17,17} = I_0(\Omega); \quad m_{17,18} = K_0(\Omega); \\
P_{17} &= 0; \quad m_{18,1} \div m_{18,14} = 0; \quad m_{18,15} = -J_1(\Omega); \quad m_{18,16} = -N_1(\Omega); \quad m_{18,17} = I_1(\Omega); \\
m_{18,18} &= -K_1(\Omega); \quad P_{18} = 0.
\end{aligned}$$

У випадку, коли  $U_2^{(-)} = U_2^{(+)} = U_2$ , загальний розв'язок системи рівнянь (5.77) записується в наступному вигляді

$$A_k = (-1)^k (\beta_{k2} U_2 + \beta_{k0} U_0), \quad (5.78)$$

де  $\beta_{k2}$  і  $\beta_{k0}$  – чутливості зміщень матеріальних частинок (розмірність метр, поділених на вольт) біморфного п'єзоелектричного перетворювача до потенціалів  $U_2$  і  $U_0$ . Числові значення чутливості  $\beta_{k2}$  і  $\beta_{k0}$  задаються наступними виразами:

$$\beta_{k2} = \frac{2e_{31}^*(h + \alpha/2)}{D_1^{(1)} \lambda_1^2 \Delta_0} \left[ \Delta_{k3} - \frac{D_1^{(1)} \lambda_1^2}{D_1^{(2)} \lambda_2^2} \Delta_{k7} \right], \quad \beta_{k0} = \frac{2e_{31}^*(h + \alpha/2)}{D_1^{(1)} \lambda_1^2 \Delta_0} \left[ \Delta_{k,11} - \frac{D_1^{(1)} \lambda_1^2}{D_1^{(2)} \lambda_2^2} \Delta_{k,15} \right],$$

де  $\Delta_0$  – головний визначник системи рівнянь (5.77), тобто визначник матриці розміром  $18 \times 18$ , складеної з коефіцієнтів при шуканих константах  $A_1, \dots, A_{18}$ ;  $\Delta_{kj}$  ( $j = 3; 7; 11; 15$ ) – визначники матриць розміром  $17 \times 17$ , які виходять з вихідної

матриці викреслюванням  $k$ -го стовпця і  $j$ -го рядка.

Для того, щоб знайти коефіцієнт електроакустичного зв'язку між потенціалами  $U_2$  і  $U_0$ , визначимо потенціал  $U_2$ .

Так як  $U_2^{(-)} = U_2^{(+)} = U_2$ , то досить визначити один з струмів  $I_2^{(\pm)}$  в провіднику, який з'єднує один з електродів вторинного електричного кола п'єзоелектричного перетворювача з відповідним електричним навантаженням. Амплітудне значення  $I_2^{(+)}$  струму в навантаженні  $Z_2^{(+)}$  визначається стандартним чином

$$I_2^{(+)} = -i\omega Q_2^{(+)} = -2\pi i\omega \int_{R_1}^{R_2} \rho^{(2)} D_z^{(+)}(\rho) d\rho. \quad (5.79)$$

Підставляючи в формулу (5.79) визначення  ${}^{(2)}D_z^{(+)}(\rho)$ , задане виразом (5.68), отримуємо наступний результат

$$I_2^{(+)} = 2\pi i\omega e_{31}^*(h + \alpha/2) \left[ R_2 \frac{\partial w_2(\rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_2} - R_1 \frac{\partial w_2(\rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_1} \right] + i\omega C_2^\sigma U_2^{(+)}, \quad (5.80)$$

де  $C_2^\sigma = \pi(R_2^2 - R_1^2)\chi_{33}^\sigma/\alpha$  – динамічна електрична ємність кільцевої області верхнього п'єзокерамічного диска під електродом вторинного електричного кола п'єзоелектричного перетворювача.

Першу похідну функції  $w_2(\rho)$ , яка пропорційна кутам поворотів циліндричних перерізів кільцевої області  $R_1 \leq \rho \leq R_2$  всього п'єзоелектричного перетворювача, з урахуванням виразу (5.78) можна записати в наступному вигляді

$$\rho \frac{\partial w_2(\rho)}{\partial \rho} = \lambda_2 \rho \left[ \Xi_{22}(\lambda_2 \rho) U_2^{(+)} + \Xi_{20}(\lambda_2 \rho) U_0 \right], \quad (5.81)$$

де  $\Xi_{2j}(\lambda_2 \rho) = \beta_{3j} J_1(\lambda_2 \rho) - \beta_{4j} N_1(\lambda_2 \rho) + \beta_{5j} I_1(\lambda_2 \rho) - \beta_{6j} K_1(\lambda_2 \rho)$  ( $j = 0; 2$ ); частотно залежні коефіцієнти  $\beta_{kj}$  визначені в коментарях до формули (5.78).

Використовуючи розрахункове співвідношення (5.81) у формулі (5.80), приходимо до висновку, що

$$I_2^{(+)} = 2\pi i\omega e_{31}^*(h + \alpha/2) \left[ \Psi_{22}(\lambda_2, \Gamma_2) U_2^{(+)} + \Psi_{20}(\lambda_2, \Gamma_2) U_0 \right] + i\omega C_2^\sigma U_2^{(+)}, \quad (5.82)$$

де  $\Psi_{2j}(\lambda_2, \Gamma_2) = \lambda_2 R_2 \Xi_{2j}(\lambda_2 R_2) - \lambda_2 R_1 \Xi_{2j}(\lambda_2 R_1)$ , ( $j = 0; 2$ ); символ  $\Gamma_2$  означає набір

геометричних параметрів області №2.

Так як  $U_2^{(+)} = Z_2^{(+)} I_2^{(+)}$ , то з визначення (5.82) випливає, що

$$\begin{aligned} U_2^{(+)} [1 - i\omega C_2^\sigma Z_2^{(+)} - 2\pi i\omega Z_2^{(+)} e_{31}^* (h + \alpha/2) \Psi_{22}(\lambda_2, \Gamma_2)] = \\ = 2\pi i\omega Z_2^{(+)} e_{31}^* (h + \alpha/2) \Psi_{20}(\lambda_2, \Gamma_2) U_0. \end{aligned}$$

З останньої рівності визначається коефіцієнт електроакустичного зв'язку  $K_0^{(2)}(\omega, \Pi_2)$ :

$$K_0^{(2)}(\omega, \Pi_2) = \frac{U_2^{(+)}}{U_0} = \frac{2\pi i\omega Z_2^{(+)} e_{31}^* (h + \alpha/2) \Psi_{20}(\lambda_2, \Gamma_2)}{1 - i\omega C_2^\sigma Z_2^{(+)} - 2\pi i\omega Z_2^{(+)} e_{31}^* (h + \alpha/2) \Psi_{22}(\lambda_2, \Gamma_2)}, \quad (5.83)$$

де символом  $\Pi_2$  позначений набір геометричних, фізико-механічних та електричних параметрів області №2 біморфного п'єзоелектричного перетворювача.

Для завершення побудови математичної моделі дискового біморфного п'єзоелектричного перетворювача необхідно визначити потенціал  $U_0$  на кільцевих електродах первинного електричного кола.

Слідуючи тому, що було отримано раніше, можна записати, що

$$U_0 = \frac{U_1 Z_B^{(4)}}{Z_B^{(4)} + Z_1} = \frac{U_1 Z_4^{(+)}}{Z_4^{(+)} + 2Z_1}, \quad (5.84)$$

де  $Z_B^{(4)} = Z_4^{(+)}/2$  – електричний імпеданс області №4 біморфного п'єзоелектричного перетворювача;  $Z_4^{(+)}$  – електричний імпеданс кільцевої області №4 верхнього п'єзокерамічного диска. Електричний імпеданс  $Z_4^{(+)}$  визначається законом Ома для ділянки електричного кола, який записується в такий спосіб

$$Z_4^{(+)} = \frac{U_0}{I_4^{(+)}} = \frac{U_0}{-i\omega Q_4^{(+)}} \quad (5.85)$$

де  $I_4^{(+)}$  і  $Q_4^{(+)}$  – амплітудне значення струму в провіднику і електричний заряд на кільцевому електроді первинного електричного кола.

З визначення (5.68) слідує

$$Q_4^{(+)} = -2\pi e_{31}^* (h + \alpha/2) \left[ R_4 \frac{\partial w_4(\rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_4} - R_3 \frac{\partial w_4(\rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_3} \right] - C_4^\sigma U_0, \quad (5.86)$$

де  $C_4^\sigma = \pi(R_4^2 - R_3^2) \chi_{33}^\sigma / \alpha$  – динамічна електрична ємність кільцевого об'єму



верхнього п'єзокерамічного диска п'єзоелектричного перетворювача.

Так як

$$\rho \frac{\partial W_4(\rho)}{\partial \rho} = U_0 \Xi_{40}(\lambda_2 \rho),$$

$$\begin{aligned} \text{де} \quad \Xi_{40}(\lambda_2 \rho) = \lambda_2 \rho \{ & [\beta_{11,2} K_0^{(2)}(\omega, \Pi_2) + \beta_{11,0}] J_1(\lambda_2 \rho) - [\beta_{12,2} K_0^{(2)}(\omega, \Pi_2) + \beta_{12,0}] N_1(\lambda_2 \rho) - \\ & - [\beta_{13,2} K_0^{(2)}(\omega, \Pi_2) + \beta_{13,0}] I_1(\lambda_2 \rho) - [\beta_{14,2} K_0^{(2)}(\omega, \Pi_2) + \beta_{14,0}] K_1(\lambda_2 \rho) \}, \end{aligned}$$

то вираз (5.86) можна записати в наступному вигляді

$$Q_4^{(+)} = -C_4^\sigma U_0 [\Psi_{40}(\lambda_2, \Gamma_4) + 1], \quad (5.87)$$

де

$$\Psi_{40}(\lambda_2, \Gamma_4) = \frac{2e_{31}^*(h + \alpha/2)\alpha}{(R_4^2 - R_3^2)\chi_{33}^\sigma} [\Xi_{40}(\lambda_2 R_4) - \Xi_{40}(\lambda_2 R_3)];$$

символ  $\Gamma_4$  означає набір геометричних параметрів області №4.

Підставляючи вираз (5.87) у визначення (5.85) електричного імпедансу  $Z_4^{(+)}$ , отримуємо наступний результат

$$Z_4^{(+)} = \frac{1}{i\omega C_4^\sigma [\Psi_{40}(\lambda_2, \Gamma_4) + 1]}.$$

Після цього з виразу (5.84) визначається потенціал  $U_0$ :

$$U_0 = \frac{U_1}{1 + 2i\omega C_4^\sigma Z_1 [\Psi_{40}(\lambda_2, \Gamma_4) + 1]}.$$

Підставляючи знайдене значення  $U_0$  в формулу (5.83), знаходимо, що

$$\frac{U_2^{(+)}}{U_0} = \frac{U_2^{(+)}}{U_1} \{ 1 + 2i\omega C_4^\sigma Z_1 [\Psi_{40}(\lambda_2, \Gamma_4) + 1] \} = K_0^{(2)}(\omega, \Pi_2).$$

З останнього запису випливає, що

$$K^{(+)}(\omega, \Pi) = \frac{K_0^{(2)}(\omega, \Pi_2)}{1 + 2i\omega C_4^\sigma Z_1 [\Psi_{40}(\lambda_2, \Gamma_4) + 1]}. \quad (5.88)$$

Вираз (5.88) має сенс математичної моделі дискового біморфного п'єзоелектричного перетворювача з симетричним електричним навантаженням у вторинному електричному колі [8], [9].

## **5.2. Дослідження дискових біморфних п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами**

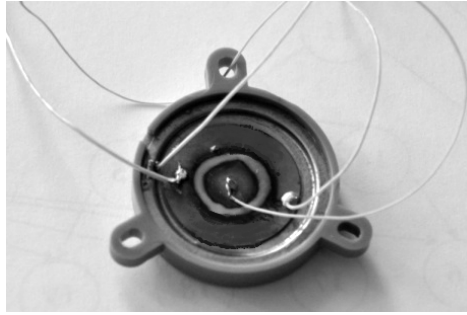
Біморфні п'єзокерамічні елементи, в яких збуджуються пружні коливання поперечного вигину, застосовуються для вирішування досить широкого кола наукових і технічних задач [10], [11], [12].

В роботі [13] описані методи синтезу п'єзоелектричних перетворювачів. Ці методи дозволяють не тільки розширити можливості технології проектування, але і створювати перетворювачі з необхідними характеристиками.

Серед описаних методів особливий інтерес представляє технологія додаткових елементів, так як в цьому випадку не потрібна будь-яка доробка п'єзоелемента, а зміна характеристик перетворювача здійснюється за рахунок зовнішніх для п'єзоелемента кіл.

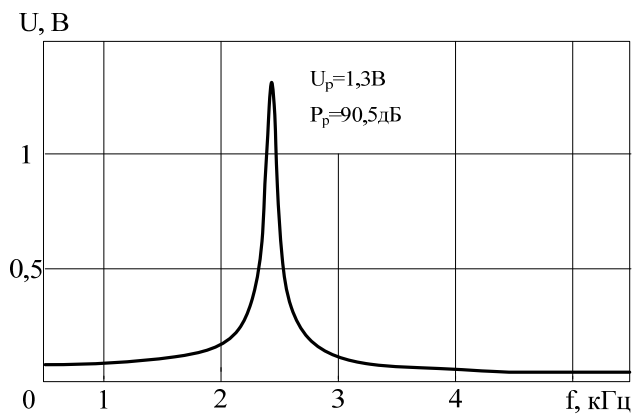
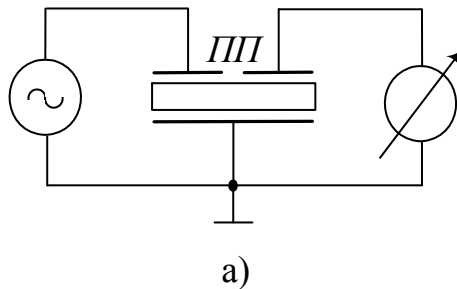
Суть цієї технології полягає в тому, що до п'єзоелемента приєднують додаткові елементи, які змінюють характеристики перетворювача. До п'єзоелемента механічно приєднують другий п'єзоелемент, металеву пластину або ультразвукової концентратор, або електричними зв'язками приєднують ємність, індуктивність або опір [13].

Для експериментальних досліджень був використаний електроакустичний перетворювач ЗП-19. Перетворювач складається з пластини зі сталі 40Х діаметром 32 і товщиною 0,15 мм. До пластині приклеєний епоксидним компаундом п'єзоелемент Ø23 і товщиною 0,2 мм. Біморфний елемент закріплений в корпусі з ударостійкого полістиролу (рис. 5.10).



**Рис. 5.10. Електроакустичний перетворювач ЗП-19**

На вхід п'єзоелектричного трансформаторного перетворювача (ПП) подавалася напруга від генератора ГЗ-109. Напруга на виході вимірювалася за допомогою мілівольтметра ВЗ-38 (рис. 5.11, а). Вимірювалася амплітудно-частотна характеристика п'єзоелектричного перетворювача (рис. 5.11, б).



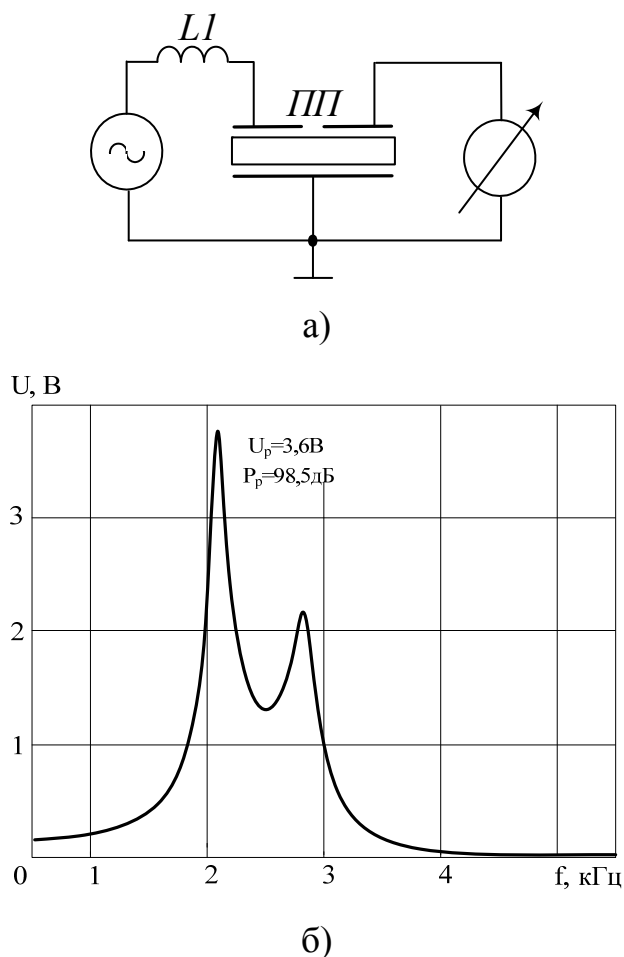
**Рис. 5.11. Схема підключення п'єзоелектричного перетворювача (а) і його амплітудно-частотна характеристика (б)**

Якщо на вхід п'єзоелемента підключити додаткову індуктивність  $L_{дод}$  таким чином, щоб ця індуктивність і міжелектродна ємність  $C_{ел}$  утворили

послідовний коливальний контур, характеристики п'єзоелемента зміняться [14], [15].

На рис. 5.12, а представлений п'єзоелектричний перетворювач у вигляді п'єзотрансформатора з додатковою індуктивністю, причому індуктивність  $LI$  разом із вхідною міжелектродною ємністю п'єзоелектричного перетворювача утворюють коливальний контур. Крім того індуктивність підбирається таким чином, щоб резонансна частота утвореного коливального контуру збігалася з резонансною частотою механічних коливань п'єзотрансформатора [15].

Результати вимірювань показані на рис. 5.12, б.



**Рис. 5.12. П'єзоелектричний перетворювач з додатковою індуктивністю (а) і його амплітудно-частотна характеристика (б)**

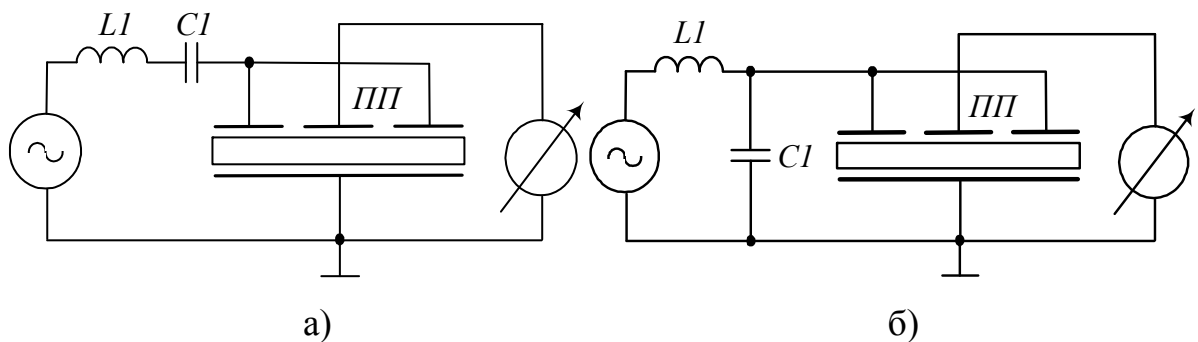
З рис. 5.12 видно, що для перетворювача з додатковою індуктивністю вдалося підвищити вихідну напругу з 1,3 до 3,6 В, а також збільшити рівень

звукового тиску з 90,5 до 98,5 дБ відносно перетворювача без додаткових елементів (рис. 5.11) [16].

Міжелектродні ємності п'єзоелемента вимірювалися за допомогою цифрового мультиметра Voice kraft M890G. На вхід п'єзоелемента подавався синусоїдальний сигнал амплітудою 1 В. Для вимірювань амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) використовувався генератор ГЗ-109 і мілівольтметр ВЗ-41.

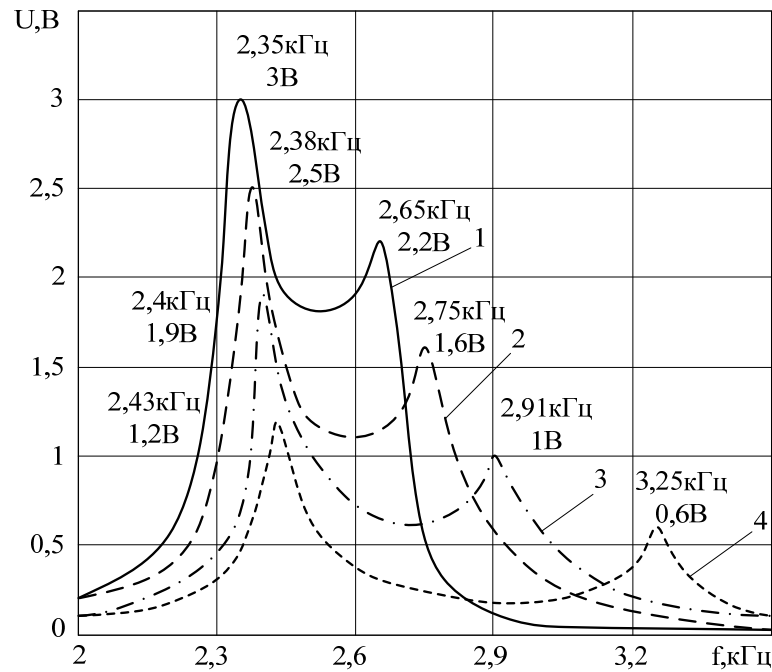
Цікавим є вивчення впливу додаткової ємності, яка підключається до п'єзоелемента одночасно з додатковою індуктивністю.

Для випадку, коли додаткова індуктивність підключається на вхід п'єзоелемента, варіанти підключення додаткової ємності представлені на рис. 5.13.



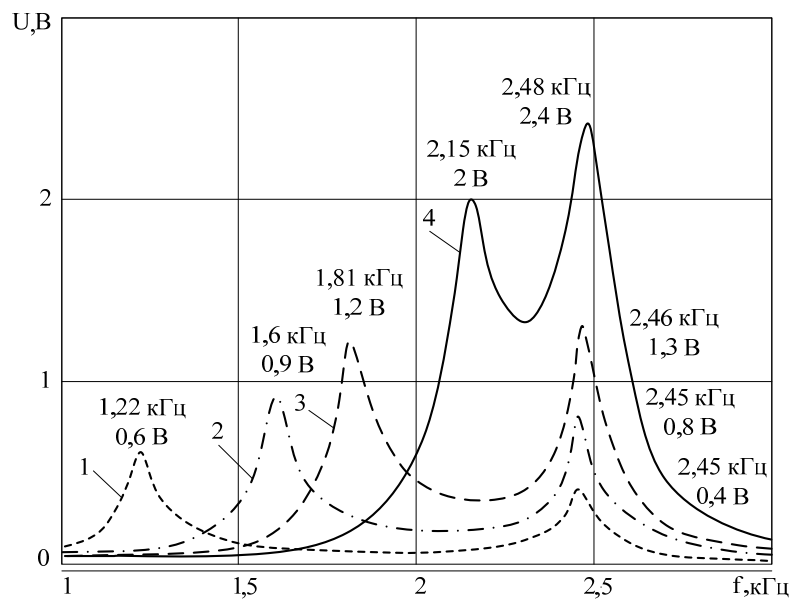
**Рис. 5.13. П'єзоелектричний перетворювач з додатковими індуктивністю і ємністю**

У першому варіанті (рис. 5.13, а) додаткова ємність  $C1$  підключається послідовно  $L1$ . При послідовному з'єднанні  $C1$  і вхідної міжелектродної ємності п'єзоелемента  $C_{ex}$  сумарна ємність зменшується, тому слід очікувати зсуву резонансних частот в область високих частот. Це видно з наведених АЧХ для цього варіанта (рис. 5.14).



**Рис. 5.14.** АЧХ п'єзоелектричного перетворювача згідно з рис. 5.13, а при  $LI = \text{const}$ , 1 –  $C = 60$  нФ, 2 –  $C = 33$  нФ, 3 –  $C = 22$  нФ, 4 –  $C = 14$  нФ.

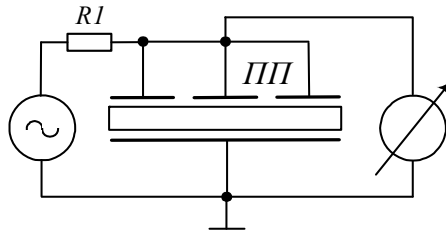
У другому випадку (рис. 5.13, б) утворюється коливальний контур  $LI (C1 + C_{\text{ex}})$ , що призводить до зсуву резонансної частоти в область низьких частот (рис. 5.15) [17].



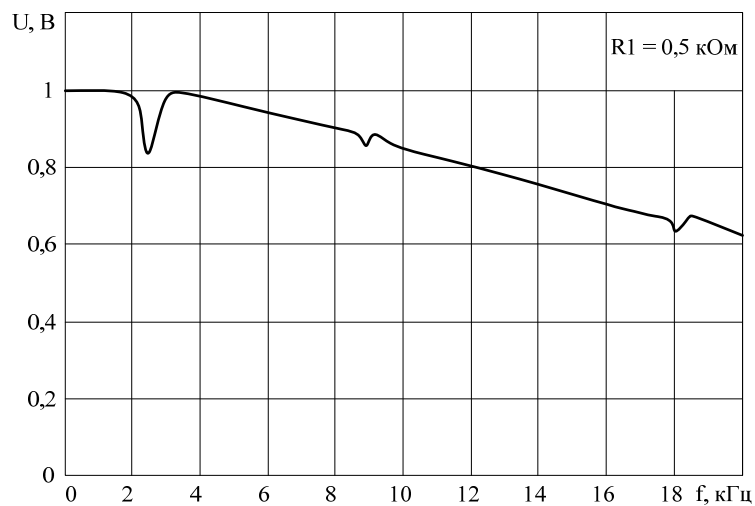
**Рис. 5.15.** АЧХ п'єзоелектричного перетворювача згідно з рис. 5.13, б при  $LI = \text{const}$ , 1 –  $C = 33$  нФ, 2 –  $C = 14$  нФ, 3 –  $C = 7$  нФ, 4 –  $C = 1$  нФ

Для розширення робочого діапазону п'єзоелементи можуть включатися в схеми електричних фільтрів. Найбільш часто в цих випадках використовуються схеми фільтрів нижніх і верхніх частот.

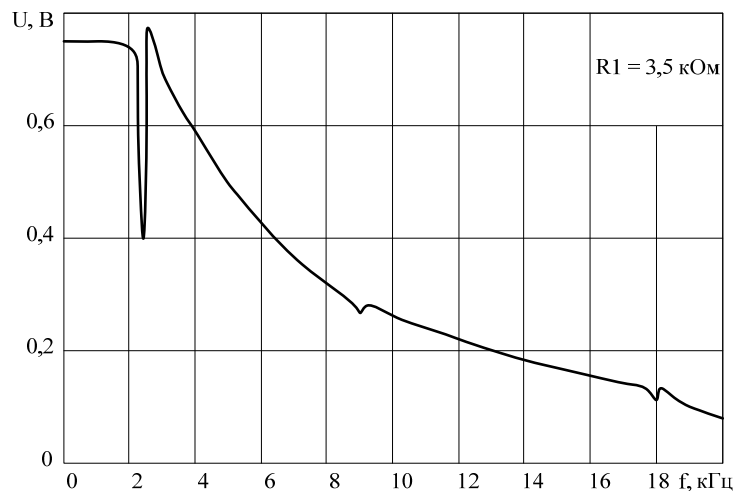
На рис. 5.16 показана схема підключення додаткового опору на вхід п'єзоелектричного перетворювача [18], а на рис. 5.17 – її амплітудно-частотні характеристики.



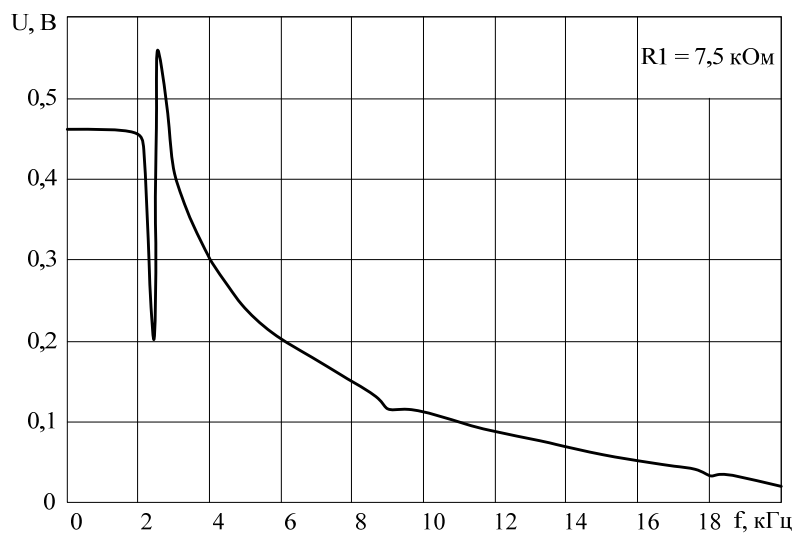
**Рис. 5.16.** Схема підключення додаткового опору на вхід перетворювача



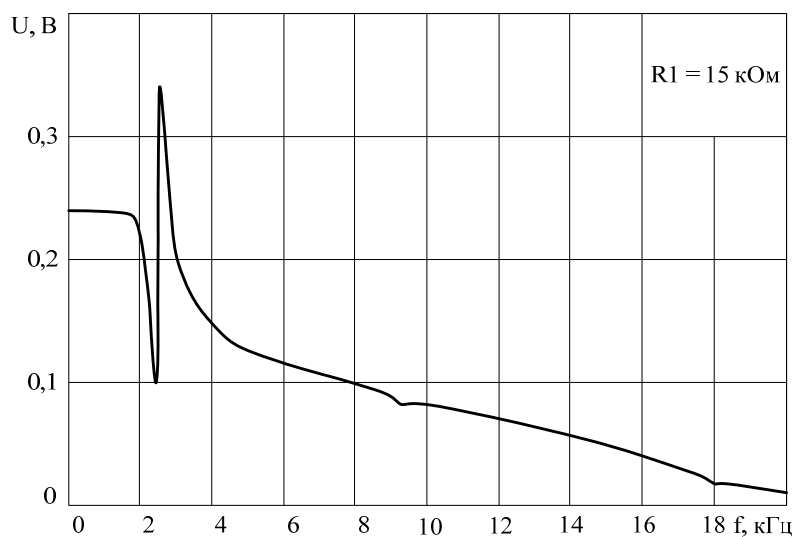
а)



б)



в)



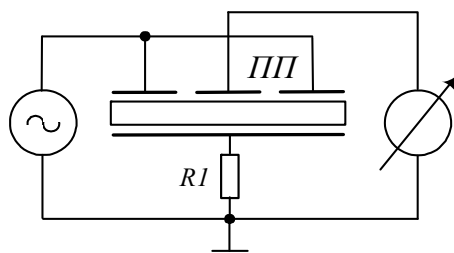
г)

**Рис. 5.17.** Амплітудно-частотна характеристика п'єзоелектричного перетворювача з додатковим опором  $R1$  згідно з рис. 5.16:

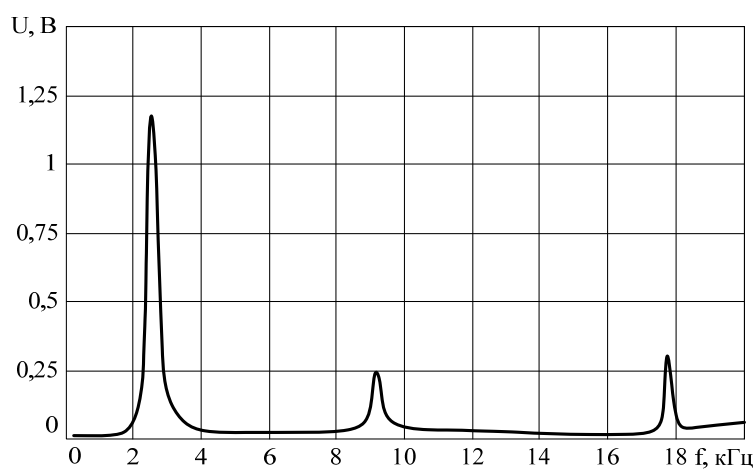
**а) 0,5 кОм; б) 3,5 кОм; в) 7,5 кОм; г) 15 кОм**

На рис. 5.18 показана схема підключення додаткового опору між п'єзоелектричним перетворювачем і загальним проводом [18], а на рис. 5.19 – її амплітудно-частотні характеристики.

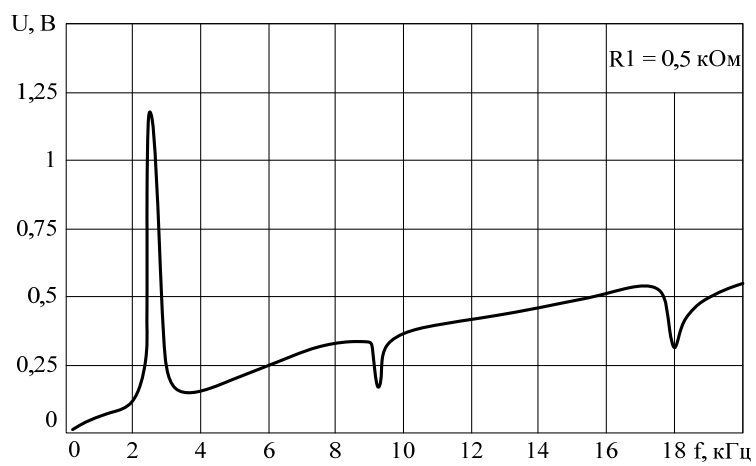




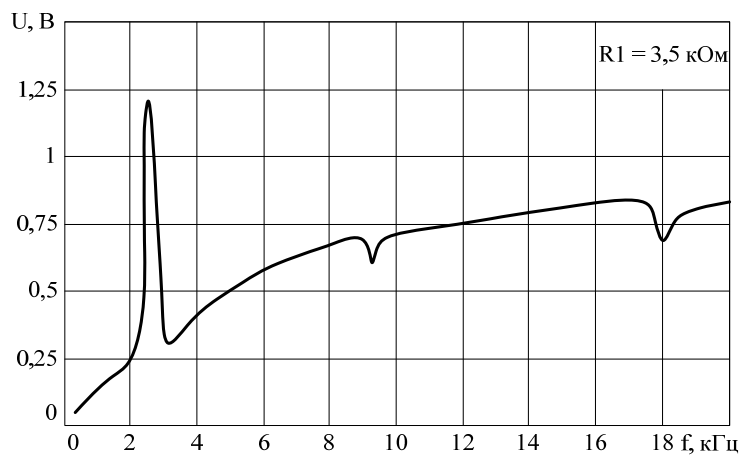
**Рис. 5.18. Схема підключення додаткового опору  $R1$  на вхід перетворювача**



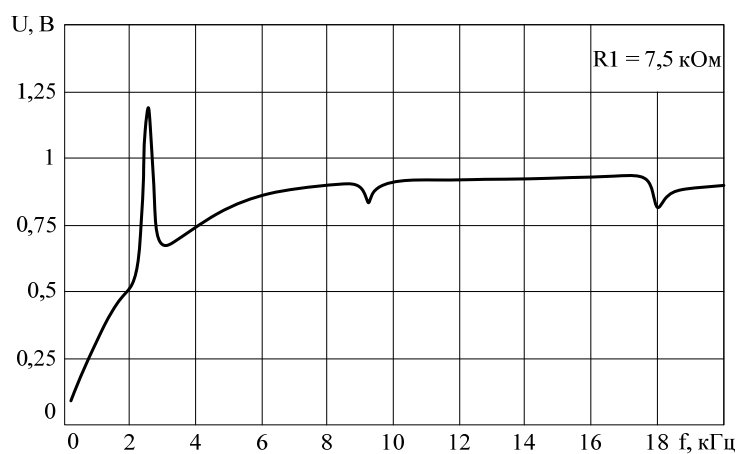
а)



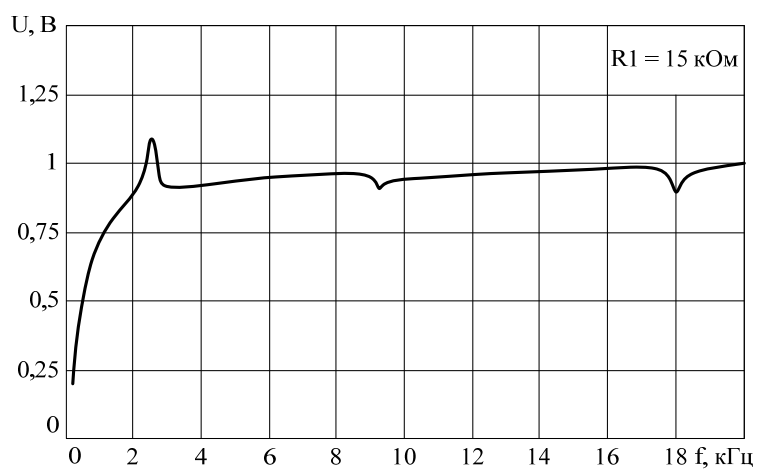
б)



в)



г)



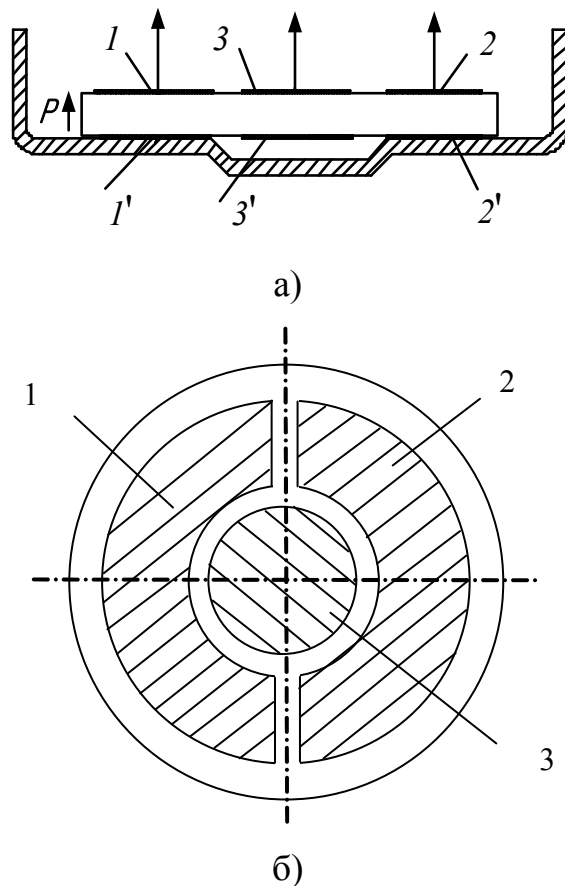
д)

**Рис. 5.19.** АЧХ п'єзоелектричного перетворювача з додатковим опором згідно з рис. 5.18: а) 0 кОм; б) 0,5 кОм; в) 3,5 кОм; г) 7,5 кОм; д) 15 кОм

Як видно з рис. 5.17, 5.19 підключення додаткового опору на вхід п'єзоелектричного перетворювача або між п'єзоелектричним перетворювачем та загальним проводом, тобто створення схем фільтрів нижніх або верхніх частот на основі п'єзоелектричного перетворювача дозволяє управляти полозою частот пропускання перетворювача [19].

### *Датчик тиску*

На основі біморфних п'єзоелектричних елементів з розділеними електродами можуть бути побудовані також датчики звукового тиску [20]. Один із можливих варіантів конструкції датчика показано на рис. 5.20.



**Рис. 5.20. Конструкція датчику тиску**

Датчик складається з п'єзоелементу діаметром 30 і товщиною 0,8 мм. П'єзоелемент приклеєний до металевої пластини (латунь) товщиною 0,3 мм.

Датчик має 3 системи електродів – 1-1', 2-2' і 3-3'. Електроди 1' і 2' з'єднані один з одним через металеву пластину.

Датчик встановлювався в віброакустичну камеру (рис. 5.21), де він піддавався впливу звуковим тиском 10 Па (114 дБ) на частоті 200 Гц.



**Рис. 5.21. Дослідний стенд з віброакустичною камерою**

Результати вимірювання вихідної напруги датчику тиску на основі п'єзоелектричного елемента з розділеними електродами наведені в табл. 5.4.

**Таблиця 5.4. Значення вихідної напруги датчику тиску на основі п'єзоелектричного елемента з розділеними електродами**

Електроди	1-1'	2-2'	3-3'	3-1'	1-3'	2-3'
Чутливість по напрузі, мВ/Па	2,6	2,7	2,0	1,3	4,0	4,2
Ємність між електродами, нФ	4,08	3,93	1,36	0,34	0,31	0,32

Як видно з табл. 5.4, в залежності від схеми підключення електродів до вимірювального приладу чутливість датчика може змінюватися практично в три рази. Причому збільшення чутливості досягається для випадку, коли кут

між вектором електричного поля вихідного сигналу і вектором поляризації близький до  $90^{\circ}$ . Одночасно в цьому випадку зменшується ємність між цими електродами [21].

### 5.3. Висновки до розділу

Основні результати розділу полягають у наступному:

– розглянута конструкція і особливості математичного опису біморфного п'єзоелектричного елемента, принцип дії якого оснований на використанні вісесиметричних коливань поперечного вигину;

– отримано розв'язок задачі про порушення коливань поперечного вигину в біморфному п'єзоелектричному елементі різницею електричних потенціалів, яку виробляє реальний генератор з вихідним електричним опором;

– розглянута конструкція та математична модель біморфного дискового п'єзоелектричного перетворювача з симетричним електричним навантаженням у вторинному електричному колі, що побудована з мінімальним числом спрощуючих реальну ситуацію припущень;

– розглянута технологія додаткових елементів, при якій не потрібна будь-яка доробка п'єзоелемента, а зміна характеристик перетворювача здійснюється за рахунок зовнішніх для п'єзоелемента кіл;

– встановлено вплив додаткових індуктивності й ємності на амплітудно-частотні характеристики п'єзоелектричного перетворювача;

– досліджено вплив на амплітудно-частотні характеристики п'єзоелектричного перетворювача додаткового опору, підключеного на його вхід і між п'єзоелектричним перетворювачем та загальним проводом, що дозволяє управляти полозою частот пропускання перетворювача;

– використання конструкції з розділеними електродами дозволило підвищити чутливість датчику тиску у 1,5-2 рази.

### Список використаних джерел:

- [1] Л.Г. Доннел, *Балки, пластины и оболочки*. М.: Наука, 1982, 568 с.
- [2] О.Н. Петрищев и К.В. Базило, *Принципы и методы математического моделирования колеблющихся пьезоэлектрических элементов*, ЧП Гордиенко Е.И. Черкасы, 2019, 408 с.
- [3] О.Н. Петрищев и К.В. Базило, "Математическое описание биморфного пьезоэлектрического элемента", *Вісник Черкаського державного технологічного університету, № 1*, с. 48–63, 2019.
- [4] В.М. Шарапов, И.Г. Минаев, Ж.В. Сотула, и Л.Г. Куницкая, *Электроакустические преобразователи*. Москва: Техносфера, 2013, 296 с.
- [5] В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, и Н.А. Шульга, *Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость*. Киев: Наук. думка, 1989, 280 с.
- [6] М. Абрамовиц и И. Стиган, Ред., *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*. М.: Наука, 1979, 832 с.
- [7] O. Petrishchev and C. Bazilo, "Modelling of bimorph piezoelectric elements for informational systems", *Mathematical Modeling: International scientific journal*, no. 1, pp. 25–29, 2019.
- [8] О.М. Петрищев і К.В. Базіло, "Побудова математичної моделі біморфного п'єзоелектричного трансформатора", *Вісник Черкаського державного технологічного університету, № 3*, с. 5–14, 2019.
- [9] С.В. Bazilo, "Construction of mathematical model of bimorph piezoelectric transducer", in *Проблеми інформатизації: тези доповідей сьомої міжнародної науково-технічної конференції*, Черкаси: ЧДТУ; Харків: НТУ «ХПІ»; Баку: ВА ЗС АР; Бельсько-Бяла: УТіГН, 2019, р. 97.
- [10] V. Sharapov, *Piezoceramic Sensors*. Springer, 2011, 500pp.

- [11] Р.Г. Джагунов и А.А. Ерофеев, *Пьезоэлектронные устройства вычислительной техники, систем контроля и управления: Справочник*. СПб.: Политехника, 1994, 608 с.
- [12] О.Н. Петрищев, *Гармонические колебания пьезокерамических элементов. Часть 1. Гармонические колебания пьезокерамических элементов в вакууме и метод резонанса – антирезонанса*. Киев: Аверс, 2012, 300 с.
- [13] В.М. Шарапов, "Технологии синтеза пьезокерамических датчиков", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 3, с. 90–96, 2010.
- [14] В.М. Шарапов, "Спосіб створення акустичних коливань за допомогою п'єзоелемента", патент України на корисну модель №56930, 25.01.11.
- [15] В.М. Шарапов, Ж.В. Сотула, І.В. Черноший, Л.Г. Куницька, і К.В. Базіло, "Електроакустичний перетворювач", патент України на корисну модель №56932, 25.01.2011.
- [16] В.М. Шарапов, К.В. Базило, Ж.В. Сотула, и В.Е. Снитюк, "Исследование пьезоэлектрических преобразователей с добавочными колебательными контурами", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 1, с. 35–38, 2013.
- [17] В.М. Шарапов, К.В. Базило, Ж.В. Сотула, А.С. Ткаченко, Савин В.Г., and Моргун И.О., "Методы синтеза пьезоэлектрических преобразователей: метод добавочных элементов. Индуктивность + емкость", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 2, pp. 59–62, 2011.
- [18] В.М. Шарапов, В.В. Туз, К.В. Базило, и А.С. Ткаченко, "Схемотехническое моделирование пьезоэлектрических преобразователей с добавочным сопротивлением", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 3, с. 74–76, 2011.
- [19] К.В. Базіло, "Дослідження характеристик біморфних п'єзоелектричних перетворювачів", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 2, с. 5–11, 2019.

- [20] Ж.В. Сотула, К.В. Базіло, і В.В. Туз, "П'єзоелектричні перетворювачі для роботехніки", *Вісник Хмельницького національного університету*, № 1, с. 190–192, 2015.
- [21] В.М. Шарапов, И.Г. Минаев, Ж.В. Сотула, К.В. Базило, и Л.Г. Куницкая, *Пьезокерамические трансформаторы и датчики*. Черкассы: Вертикаль, 2010, 278 с.



## РОЗДІЛ 6

### ТЕХНОЛОГІЯ ВИРОБНИЦТВА ТА ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ДИСКОВИХ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ З РОЗДІЛЕНИМИ ЕЛЕКТРОДАМИ ДЛЯ КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ КРИТИЧНОГО ЗАСТОСУВАННЯ

#### **6.1. Технологічні основи виробництва елементів пристроїв із п'єзоелектричних керамік**

Основними показниками якості п'єзоелектричного виробу, які впливають на безперебійну роботу і надійність їх експлуатації є дотримання необхідного рівня мікронерівностей поверхонь п'єзоелектричних елементів і відсутність на них мікродефектів [1].

Для елементів з п'єзоелектричних керамік сорту ЦТС (міжнародна назва – PZT) також залишаються питання підвищення механічної міцності срібних (рідше – нікелевих) електродів, які, за традиційною технологією, наносяться хімічним способом на поверхню керамік та мають незначну зносостійкість та адгезійну міцність (не більше 8 МПа) [2].

Технологічні особливості виготовлення п'єзокераміки досить докладно викладені в монографії [3]. При цьому слід зауважити, що технологія виготовлення п'єзокераміки є достатньо складною і може бути застосована лише на підприємствах, які мають спеціалізоване обладнання для отримання та обробки п'єзоелектричної кераміки (на сьогоднішній день, за даними огляду, в Україні таких підприємств не залишилося). Проте удосконаленню в даній роботі підлягає технологія формування струмопровідних електродів та подальшої поляризації зразків.

Тому, перспективним та актуальним в даному напрямку досліджень є удосконалення технології формування струмопровідних електродів елементів із п'єзоелектричних керамік, що дозволить збільшити їх зносостійкість та

адгезійну міцність не зменшуючи значень мікронерівностей поверхонь та терміну надійної експлуатації зразків цих керамік.

У роботах [2], [4] показано, що термічним осадженням у вакуумі можна отримати високоякісні однорідні покриття на поверхнях п'єзокерамічних елементів.

За участю автора дисертаційного дослідження, розроблений комбінований метод осадження металевих покриттів на поверхню діелектричних матеріалів з подальшою її низькоенергетичною електронно-променевою модифікацією. Суть такого методу полягає в термічному (резистивному чи електронно-променевому) осадженні матеріалу покриття (наприклад, Ag) у вакуумі  $(5-6) \cdot 10^{-3}$  Па на підготовлену спеціальним способом п'єзокерамічну поверхню [5] та подальшою дією (в одному технологічному циклі) електронного потоку фіксованої потужності на поверхню п'єзоелектричного матеріалу. Така дія призводить до розігріву та ущільнення матеріалу покриття з одночасним збільшенням глибини його дифузійного проникнення у матеріал п'єзоелементу [6].

Особливістю такого комбінованого методу є здійснення його в одному технологічному циклі "термовакuumне осадження – електронно-променева модифікація покриття" за незмінних умов робочого середовища (вакуум  $p = (5-7) \cdot 10^{-5}$  Па), що виключає утворення хімічних сполук осаджуваного покриття з елементами доквілля на проміжному етапі формування наноструктури [7].

Залежно від виду термічної обробки, що виконується на установці, на поверхні об'єкта потрібно забезпечити і підтримувати певну питому потужність електронного потоку.

Питома потужність електронного потоку має широкий діапазон значень: від  $10^2$  Вт/см<sup>2</sup> (нагрівання поверхні) до  $10^7$  Вт/см<sup>2</sup> (випаровування) і може досягти  $5 \cdot 10^9$  Вт/см<sup>2</sup> (сублімація – перехід з твердої фази в парову, минаючи рідку фазу).

На практиці густина потужності регулюється зміною сили струму

потоків  $I_n$  його прискорюючої напруги  $U_n$  та поперечних розмірів потоку на поверхні об'єкта обробки. За допомогою геометричних, часових та енергетичних параметрів потоку можна реалізувати різні види термічних процесів.

Порядок проведення технологічного експерименту виконується в такій послідовності [7]:

- очищення поверхні скла від можливих органічних та неорганічних забруднень;
- підготовка електронно-променевої установки до роботи;
- резистивне осадження матеріалу електроду на поверхню зразка у вакуумі;
- електронно-променеве модифікування (ЕПМ) отриманого покриття;
- завершальні операції [8].

В основі технології отримання модифікованих електродів на п'єзокерамічних елементах лежить комбінований процес термічного вакуумного осадження тонкого срібного покриття (товщиною 80...120 мкм) на основі з п'єзоелектричної кераміки марки ЦТС-19.

Вихідною речовиною для отримання покриття на п'єзокераміці був прокалібрований за розмірами частинок порошок Ag («хч» (хімічно чистий), дисперсність – 1,2...1,6 мкм). Виробник порошку – ТОВ «Порошкові нанотехнології» (м. Черкаси).

Попередньо порошок зважували на електронних вагах ВЛА-200г-М. Далі, отриману наважку завантажували у спеціальну ванночку, яку розташовували у вольфрамовому випарнику, температура якого підтримувалась на рівні 2300...2800 К.

Технологічний експеримент проводився в навчально-науковому Центрі «Мікронанотехнології та обладнання» (ННЦ МНО) Черкаського державного технологічного університету на модифікованій технологічній вакуумній установці за наступними режимами [9]:

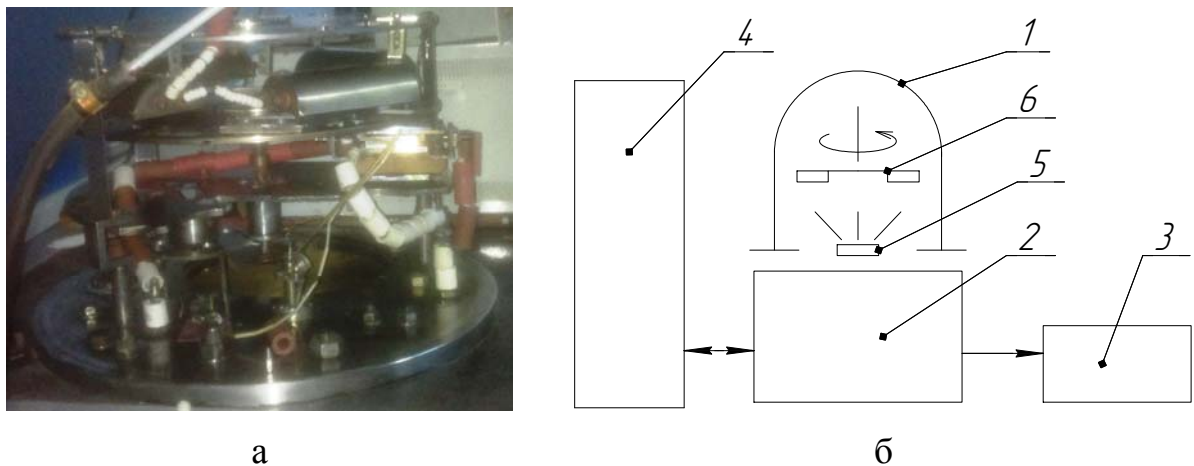
- сила струму випаровування,  $I = 45...60$  А;
- час наплення у вакуумі,  $t = 90...110$  с;

- маса осаджуваного матеріалу,  $m = 40$  мг;
- питома потужність випаровування,  $P_{\text{пит}} = 35$  Вт/мм<sup>2</sup>;
- швидкість електронної обробки,  $v = 10$  см/с.

В якості базової для експериментальної електронно-променевої установки (ЕПУ) служила промислова вакуумна установка УВН-71ПЗ, яка була розширена додатковим устаткуванням, а саме:

- підковпачним технологічним оснащенням;
- електронною гарматою Пірса з дротяним вольфрамовим катодом;
- термічною піччю попереднього нагріву матеріалу у вакуумі;
- механізмом кріплення та переміщення виробів в зону обробки.

Загальний вигляд та схема ЕПУ наводяться на рис. 6.1 а, б.



**Рис. 6.1. Зовнішній вигляд (а) та структурна схема (б) вакуумної установки УВН-71ПЗ:**

- 1 – ковпак вакуумної установки; 2 – пост керування; 3 – форвакуумний насос вакуумної системи; 4 – стійка блоку керування; 5 – електронно-променевий випарник; 6 – пристрій кріплення з виробами

Основні технічні характеристики експериментальної вакуумної установки наведені в табл. 6.1.

**Таблиця 6.1. Основні технічні характеристики  
удосконаленої вакуумної установки**

Параметр, що керуються (техніко-експлуатаційні умови)	Діапазон значень	Пристрій вимірювання (точність вимірювання)
Параметри, що керуються		
Струм розігріву випарника, $I_B$ , А	30...400	Встановлюється джерелом живлення випарника ( $\Delta I_B = \pm 10\%$ )
Струм розігріву катода, $I_K$ , А	10...30	Встановлюється джерелом живлення ( $\Delta I_K = \pm 15\%$ )
Струм електронного потоку, $I_p, \times 10^{-3}$ , А	50...500	Встановлюється джерелом живлення ( $\Delta I_p = \pm 10\%$ )
Прискорююча напруга, $U_{прис}, \times 10^3$ , В	5...6	Встановлюється джерелом живлення ( $\Delta U_{прис} = \pm 4\%$ )
Відстань від аноду ЕГ до оброблюваної поверхні, $H, \times 10^{-3}$ , м	5...80	Мірна лінійка ( $\delta H = 10^{-4}$ м)
Відстань від випарника до оброблюваної поверхні, $H_1, \times 10^{-3}$ , м	40...90	Мірна лінійка ( $\delta H = 10^{-4}$ м)
Лінійна швидкість переміщення виробу, $v$ , см/с	до 25	Енкодер механізму переміщення
Техніко-експлуатаційні умови		
Залишковий тиск в камері, $p_0$ , Па	$5 \cdot 10^{-3} -$ $7 \cdot 10^{-5}$	Вакууметр "ВМБ-8"
Нестабільність струму емісії по довжині катода, %	1,0...1,5	—
Діапазон робочих температур теплової печі, $T$ , К	300...900	Встановлюється системою програмного керування тепловою піччю ( $\Delta T = \pm 1$ К)
Лінійні розміри зони дії електронного потоку на поверхню, $\times 10^{-3}$ , м — вздовж вісі ОХ — вздовж вісі ОУ	0,3...3,5 60	Мірна лінійка ( $\delta L = 10^{-4}$ м)

*Алгоритм отримання тонкої плівки та визначення її товщини.*

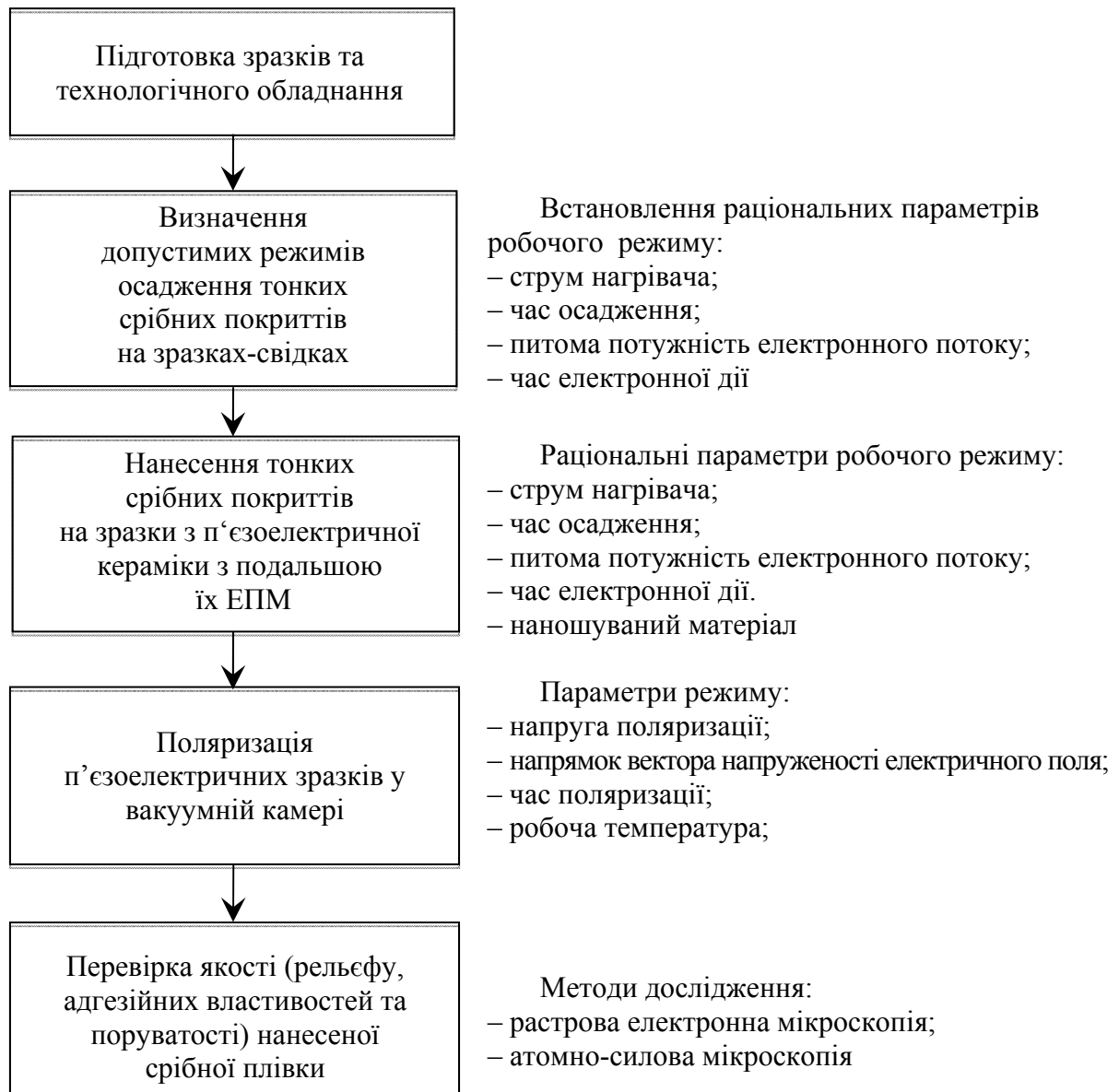
Підготовка до вимірювань товщини плівок на отриманих зразках відбувається в наступному порядку [10]:

- підготовка УВН-71ПЗ до роботи;
- підготовка кварцового резонатора;
- напилювання плівки з порошку Ag-999 на ЦТС-19;
- визначення товщини отриманої плівки (товщину отримуваних покриттів вимірювали двома методами: в процесі осадження – методом кварцового резонатора, що дозволило підібрати необхідну швидкість осадження (~9...11 нм/с); товщину отриманого покриття вимірювали методом оптичної інтерферометрії Лінника на приладі МІІ-4).

*Порядок підготовки зразків для дослідження наведено на рис. 6.2:*

1. Закріплюють зразок ПКМ в затискачі і розміщують в робочому об'ємі УВН-71ПЗ.
2. Розташовують вольфрамову корзинку для напилювання на відстані 6-8 см від зразка (встановлюється експериментально).
3. На електронних вагах ВЛА-200-М зважують наважку порошку Ag-999 масою 20 мг і розміщують у корзинку вольфрамового випаровувача.
4. Розміщують датчик товщини кварцового генератора на рівні зразка.
5. Закривають діафрагмою поверхню зразка та датчик кварцового генератора. Цим зводять до мінімуму температурну нестабільність резонансної частоти кварцового резонатора. Відкривають діафрагму тільки під час безпосереднього нанесення матеріалу, що напилюється, на зразок та датчик товщини.
6. Закривають робочий об'єм і відкачують до вакууму  $6 \cdot 10^{-3}$  Па. Кварцовий резонатор вводять у робочий стан. Після проведених операцій проводять напилювання матеріалу електроду на зразок.
7. Під час проведення напилювання відбувається зміна резонансної частоти кварцового генератора. В кварцовому резонаторі в якості датчика товщини

використовують кварцову пластинку РГ-08 з резонансною частотою 10 МГц, що входить до схеми генератора (рис. 6.3).



**Рис. 6.2. Послідовність отримання срібного покриття комбінованим електронно-променевим методом на п'єзоелектричній кераміці ЦТС-19 в одному технологічному циклі**

Зображена схема (рис. 6.3, б) проста і працює стабільно. Частота вихідного сигналу вимірюють приладом ЧЗ-34А.

8. Розраховують товщину отриманого покриття на ПКМ за наступною формулою [11]:

$$d = \frac{N_p \cdot \rho_g}{\rho_f \cdot f_g^2} \cdot (f_g - f), \quad (6.1)$$

де  $N_g = 1,668 \cdot 10^5$  Гц·см – частотна константа, яка залежить від кристалографічної орієнтації кварцової пластинки РГ-08;  $\rho_g, \rho_f$  – питома густина кварцу та плівки, що напилюється, відповідно, г/см<sup>3</sup>;  $f_g, f$  – резонансні частоти кварцової пластини перед та після напилювання, Гц.

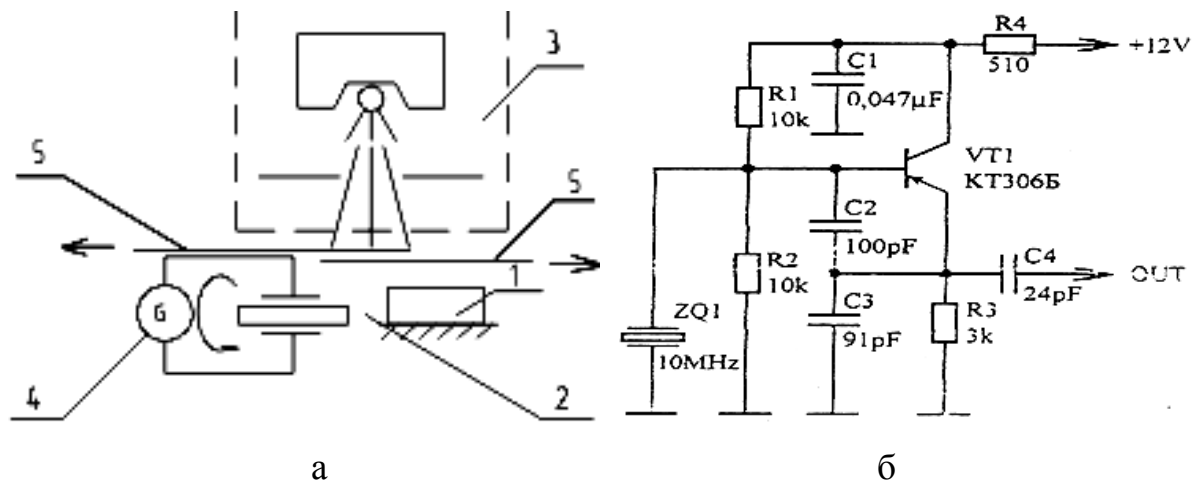
9. Останньою операцією в технологічному ланцюгу виготовлення п'єзокераміки є операція електричної поляризації. При цьому, за розробленим методом готовий виріб з уже нанесеними електродами не виймаючи з вакуумної камери, поступово розігрівається до температури, що перевищує точку Кюрі синтетичного сегнетоелектрика (цирконата титаната свинцю). До електродів під'єднуються струмопровідні затискачі з постійною в часі різницею потенціалів  $U_0$  такої величини, щоб напруженість поляризуючого матеріал постійного електричного поля  $E_0 = -U_0/\alpha$ , де  $\alpha$  – відстань між електродами або товщина виробу, не перевищувала гранично допустиму величину 2 МВ/м. Протягом півгодини всі електричні домени в об'ємі виробу вибудовуються вздовж напрямку поляризуючого поля і синтетичний матеріал набуває властивостей п'єзоелектрика. Потім виріб охолоджують до температури нижче точки Кюрі зі швидкістю охолодження 0,2-0,25 град/с і відключають постійну електричну напругу. Електричні домени при цьому не змінюють свою орієнтацію, тобто штучний матеріал, який був до цієї операції сегнетоелектриком, набуває і зберігає протягом років властивості і характеристики п'єзоелектричного матеріалу [12].

Контроль параметрів якості сформованих покриттів призначений для оцінки якості мікроструктури та поверхневих властивостей цих покриттів [13].

Мікроструктуру поверхні електродів зразків до та після експлуатації та довготривалого зберігання, а також елементний склад покриттів проводили на растровому електронному мікроскопі «ZEISS EVO 50 XVP» (виробник – ТОВ «Карл Цейсс», Німеччина) в Центрі колективного користування ІНТМ



ім. В.Н. Бакуля НАН України (м. Київ), а нанорельєфу та зносостійкості отриманих покриттів – на атомно-силовому мікроскопі NT-206 (виробник – ТДВ «Мікротестмашини», Білорусь) у ННЦ МНО (рис.6.4). Вимірювання мікрорельєфу поверхні зразків проводили в статичному режимі на ділянках поверхні, максимальним розміром  $13 \times 13$  мкм, згідно з розробленими методиками та рекомендаціями [14].



**Рис. 6.3. Схема вимірювача товщини (а) та електрична принципова схема (б) підключення пристрою вимірювання товщини:**

- 1 – зразок, на який наноситься покриття; 2 – резонатор для визначення товщини покриття; 3 – електронно-променевий випарник;  
4 – кварцовий генератор; 5 – діафрагма

Підготовка до вимірювань мікрогеометрії поверхні функціональних шарів в п'єзоелектричних матеріалах, оброблених електронним потоком із застосуванням методу АСМ здійснюється в послідовності згідно методики розробленій в роботі [15], рис.6.5:

- підготовка зразків до дослідження;
- підготовка атомно-силового мікроскопу до роботи;
- отримання топограми ділянки оптичної поверхні методом АСМ;
- завершення роботи АСМ.



а



б

**Рис. 6.4. Зовнішній вигляд растрового електронного мікроскопу «ZEISS EVO 50 XVP» (а) та атомно-силового мікроскопу NT-206 (б)**

*Дослідження мікрорельєфу срібних покриттів на п'єзоелектричній кераміці*

В результаті технологічного експерименту були отримані зразки (І група) із п'єзоелектричної кераміки ЦТС-19. Для порівняння результатів експерименту також бралися зразки (ІІ група) із того ж матеріалу, отримані у промисловий спосіб (ПАТ «Укрп'єзо», м. Черкаси).

Механізм утворення зародків та формування однорідного суцільного срібного покриття полікристалічної структури досліджувався методами растрової електронної мікроскопії, а сам мікрорельєф поверхні покриттів визначався методом атомно-силової мікроскопії.

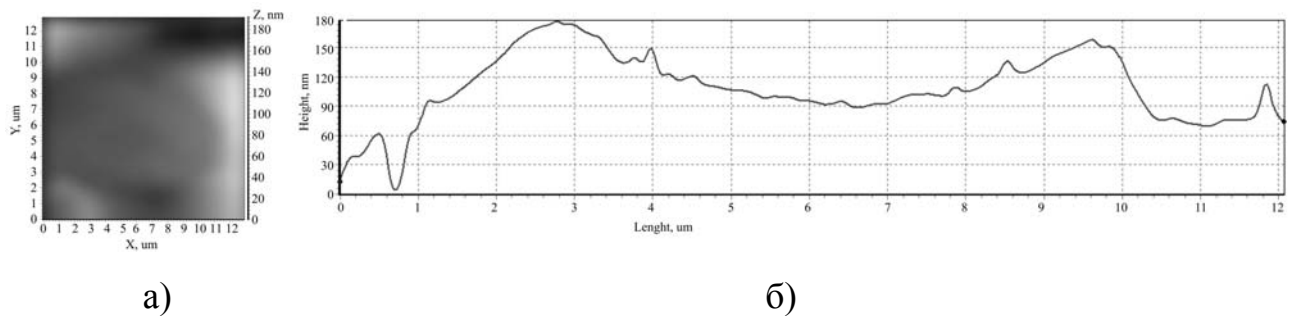
Отримані експериментальні результати дозволили з'ясувати наступне. Температура, вище за яку відбуваються необоротні структурні перетворення в покритті при його електронно-променевій модифікації складала порядку 830...900 К.



**Рис. 6.5. Алгоритм проведення дослідження нанорельєфу методом АСМ**

При цьому, срібне покриття на п'єзокерамічній основі стає більш ущільненим та менш розвиненим, рис.6.6, (середнє відношення фактичної площі покриття до площі досліджуваної ділянки 1,5:1 на відміну від зразків покриттів отриманих у вакуумі без електронно-променевої обробки (вихідна поверхня) – 2,8:1) та має відносну поруватість порядку 0,06...0,08 (відносна

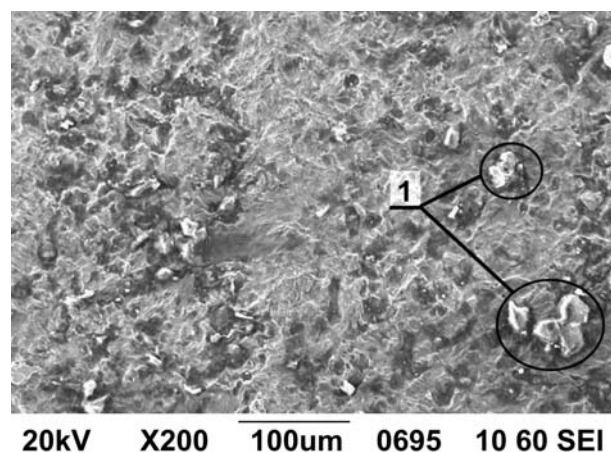
поруватість поверхні покриттів без електронно-променевої обробки складає 0,1...0,14).



**Рис. 6.6. Зовнішній вигляд (а) та мікропрофіль ділянки поверхні срібного електроду (б) на п'єзокераміці ЦТС-19. Прилад NT-206**

При цьому, як видно з рис. 6.6, б середньоарифметичне значення мікронерівностей поверхні такого покриття складає 178,7 нм, що значно менше значення мікронерівностей вихідної поверхні (~680 нм).

Дослідження із застосуванням методів електронної мікроскопії поверхонь зразків, як групи I, так і групи II, модифікування покриттів на яких відбувалося за температури вище 900 К показало утворення на ній конгломератів срібла (поз. 1), рис. 6.7.

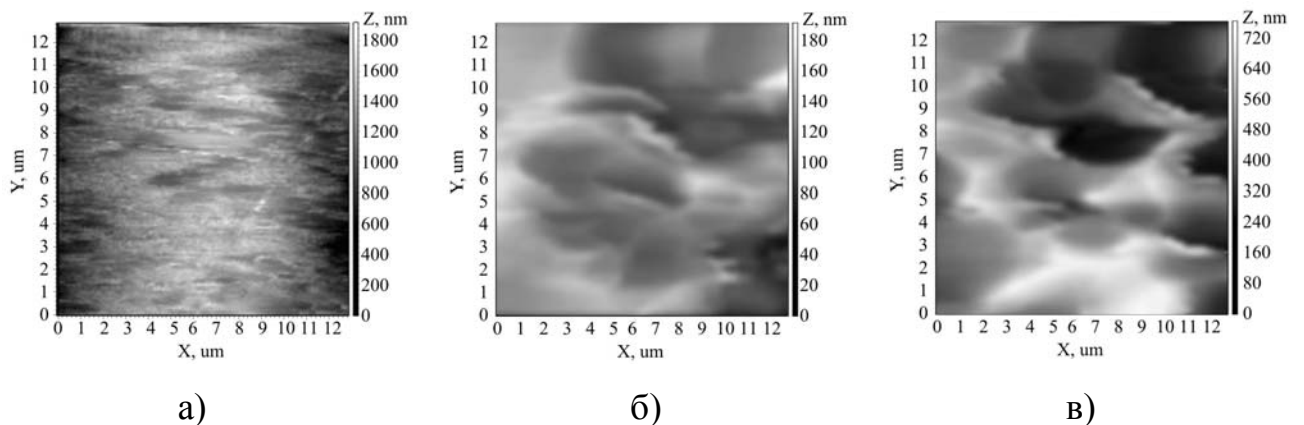


**Рис. 6.7. Поверхня срібного електроду зразка з п'єзоелектричної кераміки ЦТС-19 з утвореними на ній внаслідок електронно-променевої модифікації за температур вище 900 К конгломератами срібла (1).**

**Прилад ZEISS EVO 50 XVP**

Утворення та зростання таких конгломератів носить неупорядкований характер. Це підтверджує той факт, що температура не є основним фактором утворення та зростання цих структур, а лише виступає умовою їхнього виникнення на срібному покритті.

В той же час, модифікування покриття за температури меншої за 830 К призводить до формування аморфного покриття, що має низьку адгезійну міцність (~6...8 МПа) та зносостійкість (характерне утворення мікро- та нанодфектів поверхонь від дії зовнішніх силових навантажень та вібрацій). Тому, сформовані за понижених температур срібні електроди є несущільними та неоднорідними по товщині, рис. 6.8. Це значно погіршує граничні строки експлуатації п'єзокерамічних елементів та основні техніко-експлуатаційні характеристики пристроїв створюваних на їх основі [6].



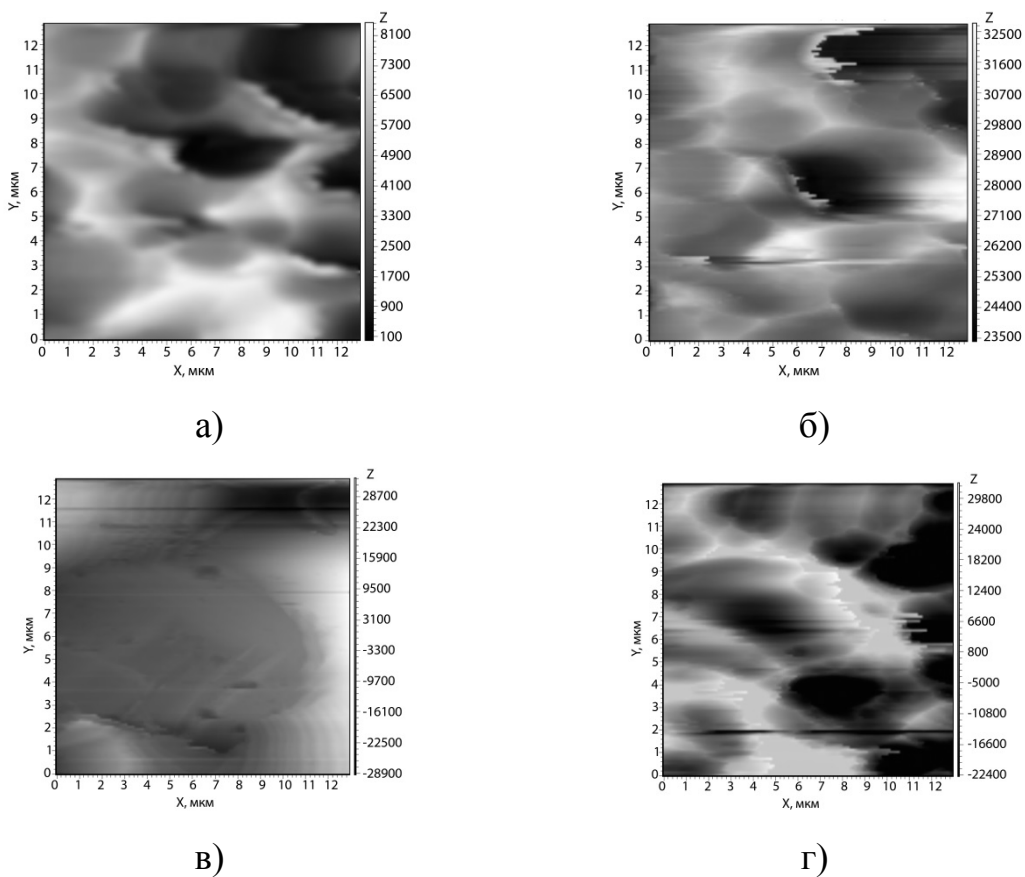
**Рис. 6.8. Поверхня срібного покриття на п'єзоелектричній кераміці ЦТС-19 II групи (а) та I групи: при електронно-променевої модифікації за температури 880 К (б) та при електронно-променевої модифікації за температури 780 К (в). Прилад NT-206**

В той же час, подальше вдосконалення виробів п'єзотехніки неможливе без прогнозування терміну їх безвідмовної експлуатації.

На рис. 6.9 представлені топограми п'єзоелементу, отриманого традиційним шляхом в початковий момент часу (рис. 6.9, а) та через 5 років

експлуатації (рис. 6.9, б), а також отриманого нанесенням покриття у вакуумі (рис. 6.9, в) та через 5 років експлуатації (рис. 6.9, г).

Порівнюючи результати отримані методом атомно-силової мікроскопії (АСМ) до та після п'яти років експлуатації для зразків отриманих як традиційним способом, так і методом термовакуумного напилення, можна зробити наступні висновки. Зразки, що не перебувають в експлуатації мають значно менш кількість артефактів сканування (горизонтальні лінії на топограмах), на відміну від зразків, що перебувають тривалий час в експлуатації (рис. 6.9, б – г).



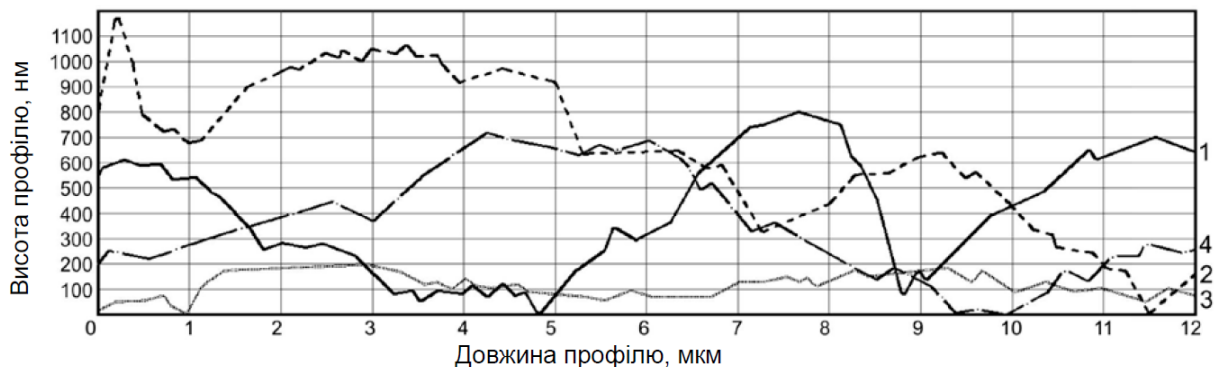
**Рис. 6.9. Топограми п'єзоелементу: отриманого традиційним шляхом в початковий момент часу (а) та через 5 років експлуатації (б); отриманого нанесенням покриття у вакуумі в початковий момент часу (в) та через 5 років експлуатації (г)**

Такі артефакти сканування, на думку автора дисертаційного дослідження, виникають в процесі контактного сканування зонду АСМ з

досліджуваною поверхнею. На останніх, які перебувають в умовах атмосфери оточуючого середовища тривалий час (не менше 3-5 років) утворюються нестійкі з'єднання сульфідів і аміачних сполук. При скануванні такі сполуки зминаються зондом АСМ, утворюючи дані артефакти.

У той же час, проводячи порівняння зразків отриманих традиційним способом (рис. 6.9, а) і методом термовакуумного напилення (рис. 6.9, в), можна переконатися в значному зменшенні кількості мікронерівностей і пористості поверхонь, отриманих запропонованим методом. Останнє підтверджує перспективність даного методу при виготовленні виробів з п'єзокераміки сорту ЦТС.

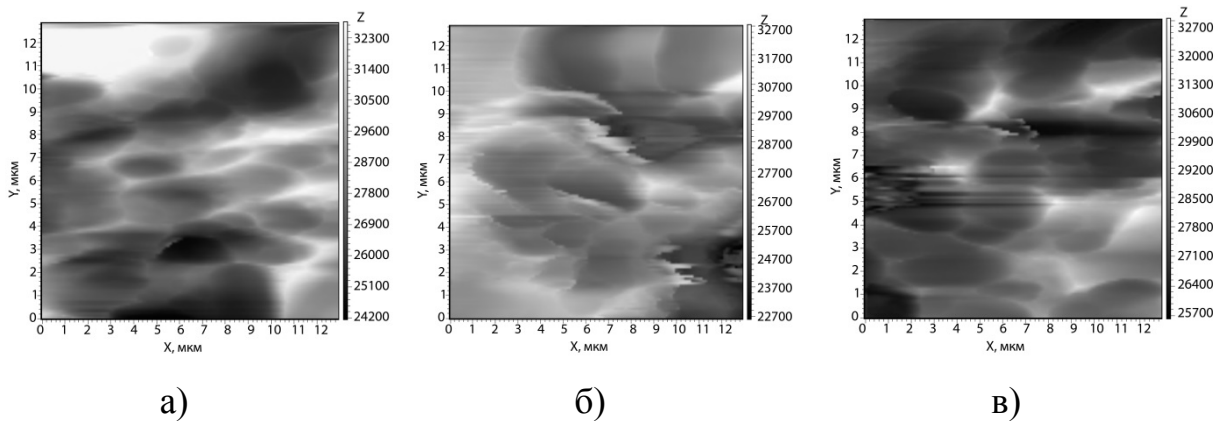
На рис. 6.10 представлені профілі поверхні п'єзоелементів, отриманих традиційним шляхом в початковий момент часу (профіль 1) і через 5 років експлуатації (профіль 2), а також отриманого нанесенням покриття у вакуумі (профіль 3) і через 5 років експлуатації (профіль 4). З отриманих профілограм видно, що експлуатація виробів, отриманих обома способами, з часом збільшує мікронерівності в 1,5...3,6 рази.



**Рис. 6.10. Профілі поверхні п'єзоелементу: отриманого традиційним шляхом в початковий момент часу (профіль 1) та через 5 років експлуатації (профіль 2); отриманого нанесенням покриття у вакуумі (профіль 3) та через 5 років експлуатації (профіль 4)**

На рис. 6.11 представлені топограми п'єзоелементу в початковий момент часу (рис. 6.11, а), через 5 років експлуатації (рис. 6.11, б) та через

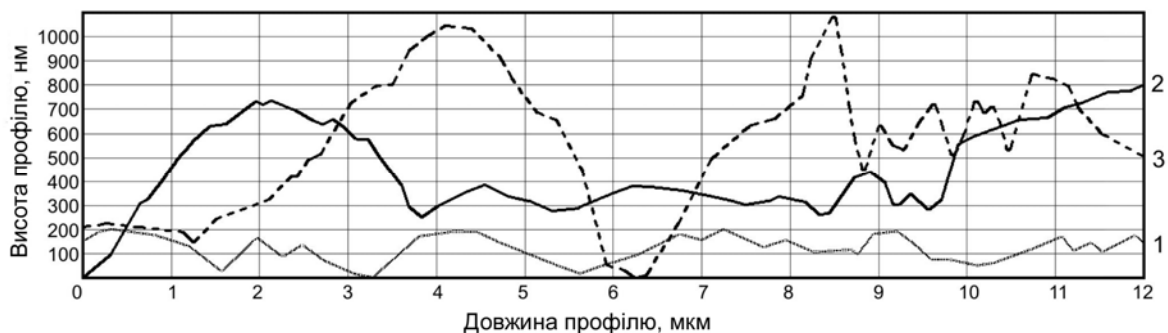
7 років експлуатації (рис. 6.11, в). З представлених топограм видно появу артефактів сканування після п'яти, і, особливо, після семи років експлуатації. При цьому також відбувається збільшення пористості поверхні п'єзокераміки сорту ЦТС. Аналогічні дослідження були проведені і для п'єзокерамік типу ЦТБС, зокрема для п'єзокераміки ЦТБС-3, що використовувалася для збудження коливань у розроблюваному ультразвуковому хірургічному інструменті.



**Рис. 6.11. Топограми п'єзоелементу: а – в початковий момент часу; б – через 5 років експлуатації; в – через 7 років експлуатації**

На рис. 6.12 представлені профілі поверхні п'єзоелементу в початковий момент часу (профіль 1), через 5 років експлуатації (профіль 2) і через 7 років експлуатації (профіль 3).

При цьому встановлено, що мікронерівності поверхні з часом експлуатації збільшуються, відповідно в 3,8...4,2 рази (5 років експлуатації) і 5,3...5,5 рази (7 років експлуатації).

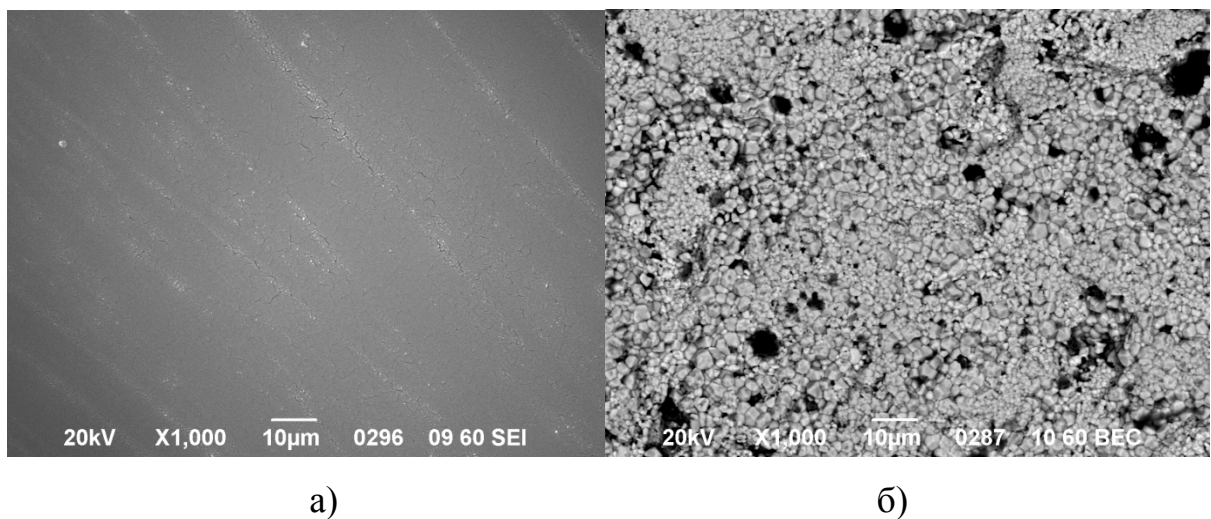


**Рис. 6.12. Профілі поверхні п'єзоелементу: 1 – в початковий момент часу; 2 – через 5 років експлуатації; 3 – через 7 років експлуатації**



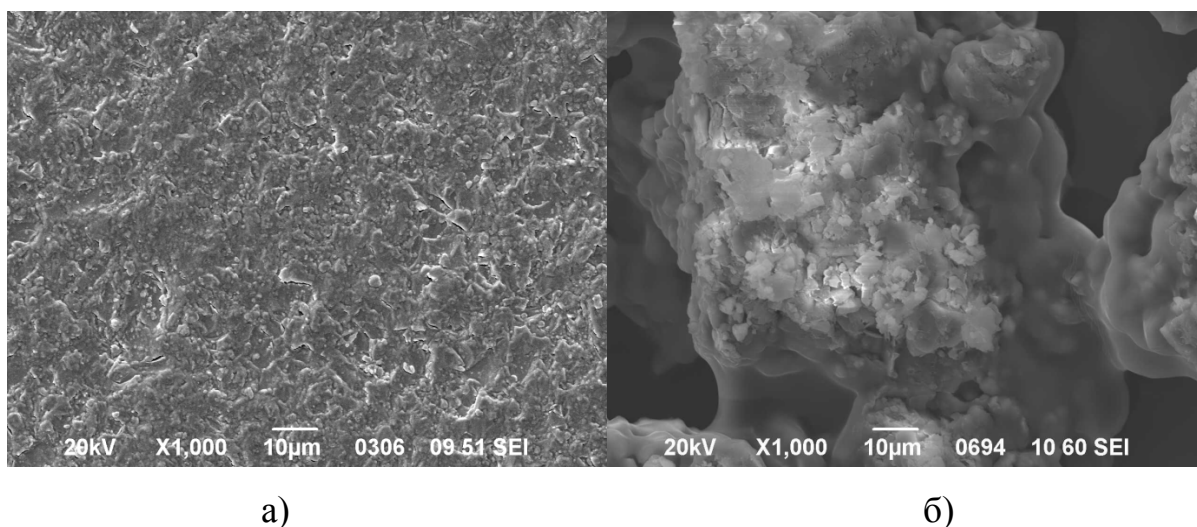
Аналіз результатів АСМ досліджень поверхонь п'єзоелектричних елементів дозволив встановити, що в процесі тривалої експлуатації відбувається руйнування їх поверхонь (рис.6.10) (збільшення мікронерівностей від 805...815 нм до 1130...1180 нм (поверхні отримані традиційним методом), а також від 180...210 нм до 680...710 нм (поверхні отримані методом термічного напилення у вакуумі), поява мікротріщин, відколів та інших мікродефектів) [16].

В той же час, дослідження зразків показали, що на якість електродів також чинить вплив метод їх нанесення. Так електроди на зразках I групи, які були отримані термічним осадженням у вакуумі з порошку Ag, мали хімічну чистоту близько 99,63 мас.% і пористість менше 0,08, тоді як хімічна чистота електродів, отриманих у промисловий спосіб (зразки II групи), складала 96,98 мас.% при їх мінімальній товщині близько 160 мкм і пористості – 0,24...0,26 (рис. 6.13).



**Рис. 6.13. Фрагменти поверхонь електродів на зразках із п'єзокераміки ЦТС-19 (у експлуатації не знаходилися): а – електроди модифіковані електронним потоком (I група зразків); б – електроди отримані у промисловий спосіб (II група зразків). Прилад ZEISS EVO 50 XVP**

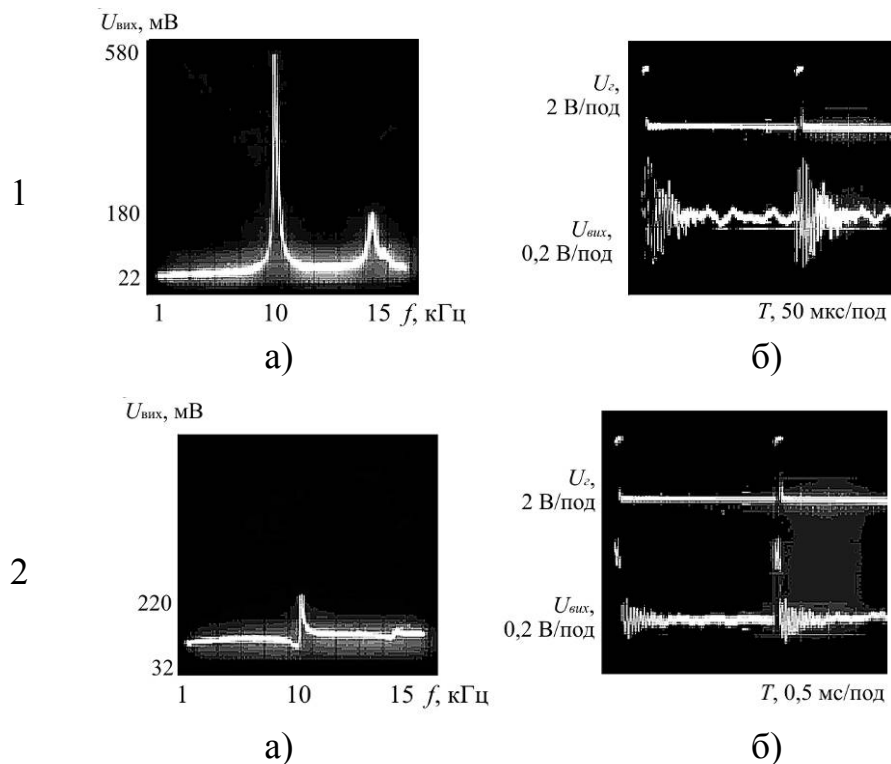
Аналіз зразків з I групи показав, що після експлуатації протягом 10 років, пористість поверхонь електродів для 50% зразків цієї групи збільшилася в середньому до 0,12 (хімічна чистота таких покриттів складала 83,3 мас.%) і до 0,36 для зразків з електродами, отриманими у промисловий спосіб (хімічна чистота таких покриттів складала 56,8 мас.%), що унеможливило подальшу експлуатацію промислово виготовлених зразків (рис. 6.14) [6].



**Рис. 6.14. Фрагменти поверхонь електродів на зразках із п'єзокераміки ЦТС-19 (перебували в експлуатації в екстремальних умовах протягом 10 років): а – електроди модифіковані електронним потоком (I група зразків); б – електроди отримані у промисловий спосіб (II група зразків).**

#### **Прилад ZEISS EVO 50 XVP**

Проте, слід також врахувати, що тривала експлуатація таких п'єзоелементів, що до електронно-променевого відновлення мали високу кількість мікродфектів, одночасно призводить до різкого зниження резонансного піку з 580 мВ до 220 мВ (у 2,6 рази) амплітудно-частотної характеристики цих елементів (рис. 6.15) [17].



**Рис. 6.15. Амплітудно-частотна (а), імпульсна (б) характеристики п'єзоелектричного перетворювача (ЦТС-19, діаметр 10 мм, товщина 0,3 мм) на початку (1) та після 12 років (2) експлуатації.**

**Прилад: осцилограф "Х1-46"**

Таким чином, показана доцільність отримання срібних покриттів для електродів елементів виробів із п'єзоелектричної кераміки методом комбінованого ЕПМ в одному технологічному циклі з поляризацією цих елементів. Це дозволило запропонувати якісно нову технологію виготовлення елементів пристроїв з п'єзоелектричної кераміки, що в порівнянні з традиційними (промисловими) методами виготовлення таких елементів має вищу у 1,5 – 2,3 рази адгезійну міцність, у 1,2 – 1,8 рази – зносостійкість, менші у 3,5 – 4,2 рази поверхневі мікронерівності та у 1,3 – 1,5 рази – поруватість. Це приводить до збільшення часу надійної експлуатації цих елементів у 1,6 – 2,0 разів, добротності – у 3,5 – 5 разів, електромеханічного коефіцієнту – у 2,2 – 2,6 разів.

Порівнюючи результати дослідження стану поверхні срібних покриттів отриманих за запропонованою комбінованою технологією (І група), та

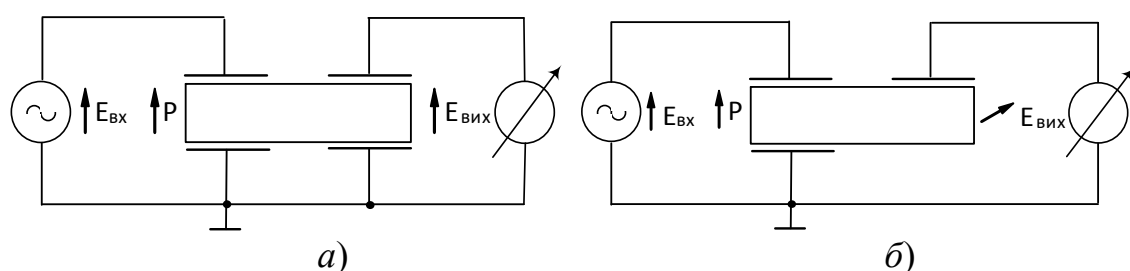
покриттів, отриманих у промисловий спосіб (II група), було встановлено, що граничний термін експлуатації за екстремальних умов 90% зразків I групи перевищував вісім років, тоді, як за нормальних умов, зменшення функціональності усіх зразків I групи при їх експлуатації протягом 10 років виявлено не було. При цьому, для зразків із II групи (з промислово сформованими електродами), граничний термін експлуатації за екстремальних умов буде обмежений шістьма роками. Так, за нормальних умов експлуатації, лише для 40% зразків II групи термін експлуатації перевищить 10 років [6].

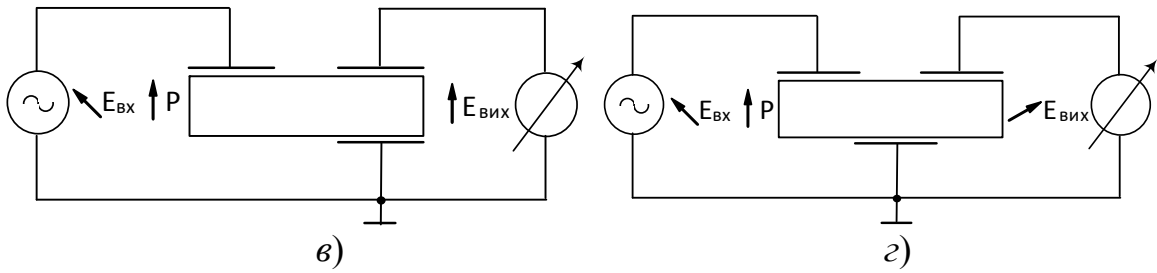
Разом з тим встановлено, що температура п'єзокерамічного зразка в процесі електронно-променевого модифікування срібних покриттів є необхідною умовою формування якісних електродів, для яких зведена до мінімуму можливість виникнення дефектів від дії зовнішніх силових навантажень та вібрацій. В той же час визначено зміну структури та мікрогеометрії модифікованих покриттів на п'єзокераміці від параметрів стрічкового електронного потоку.

## 6.2. Принципи побудови основних елементів п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування

### 6.2.1. Дискові п'єзоелектричні трансформатори

Аналіз значної кількості можливих схем підключення дискових п'єзоелектричних трансформаторів показує, що всі вони можуть бути зведені до чотирьох основних типів (рис. 6.16).





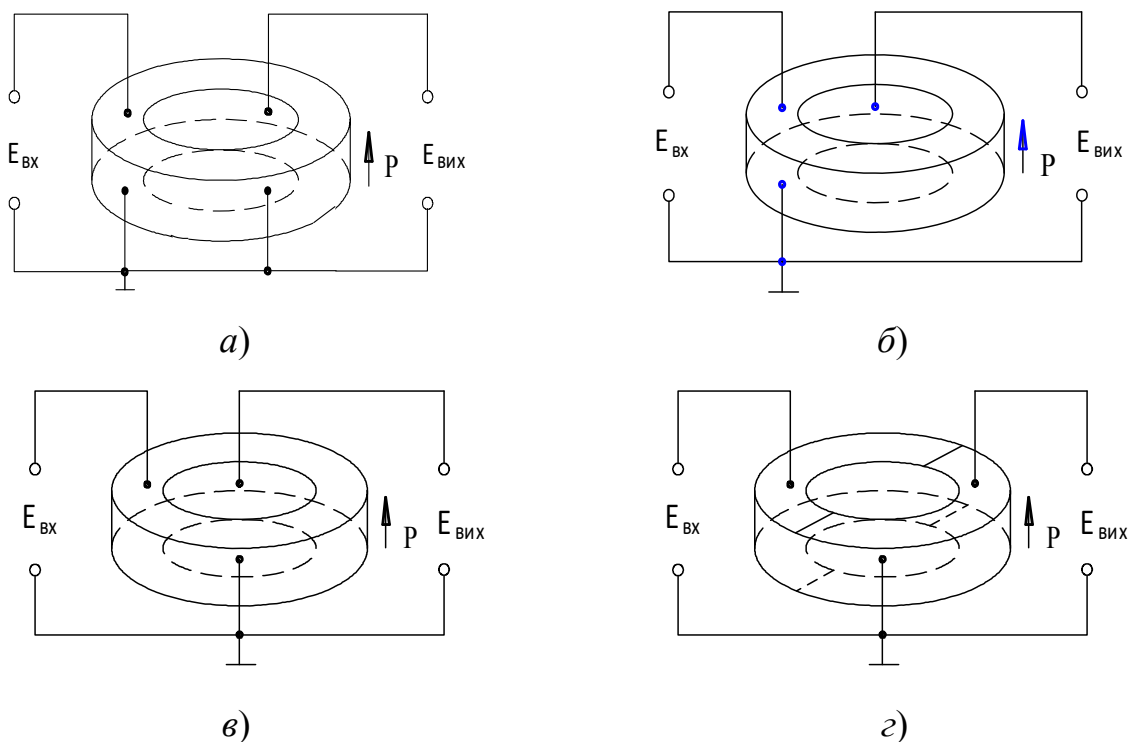
**Рис. 6.16. Конструкції п'єзоелектричних трансформаторів**

1. Традиційна схема підключення. У цьому випадку кут  $\alpha$  між вектором поляризації  $\mathbf{P}$  і вектором електричного поля напруги збудження  $\mathbf{E}_{\text{вх}}$  (напруга генератора) дорівнює нулю. Аналогічно дорівнює нулю і кут  $\beta$  між вектором поляризації  $\mathbf{P}$  і вектором електричного поля вихідної напруги  $\mathbf{E}_{\text{вих}}$  (рис. 6.17, а).

2. Вхідна секція п'єзоелектричного трансформатора побудована за традиційною схемою ( $\alpha = 0$ ), а для вихідної секції кут  $\beta \leq 90^\circ$  (рис. 6.17, б).

3. Вхідна секція п'єзоелектричного трансформатора побудована таким чином, що  $0 < \alpha \leq 90^\circ$ , а вихідна секція – за традиційною схемою  $\beta = 0$  (рис. 6.17, в).

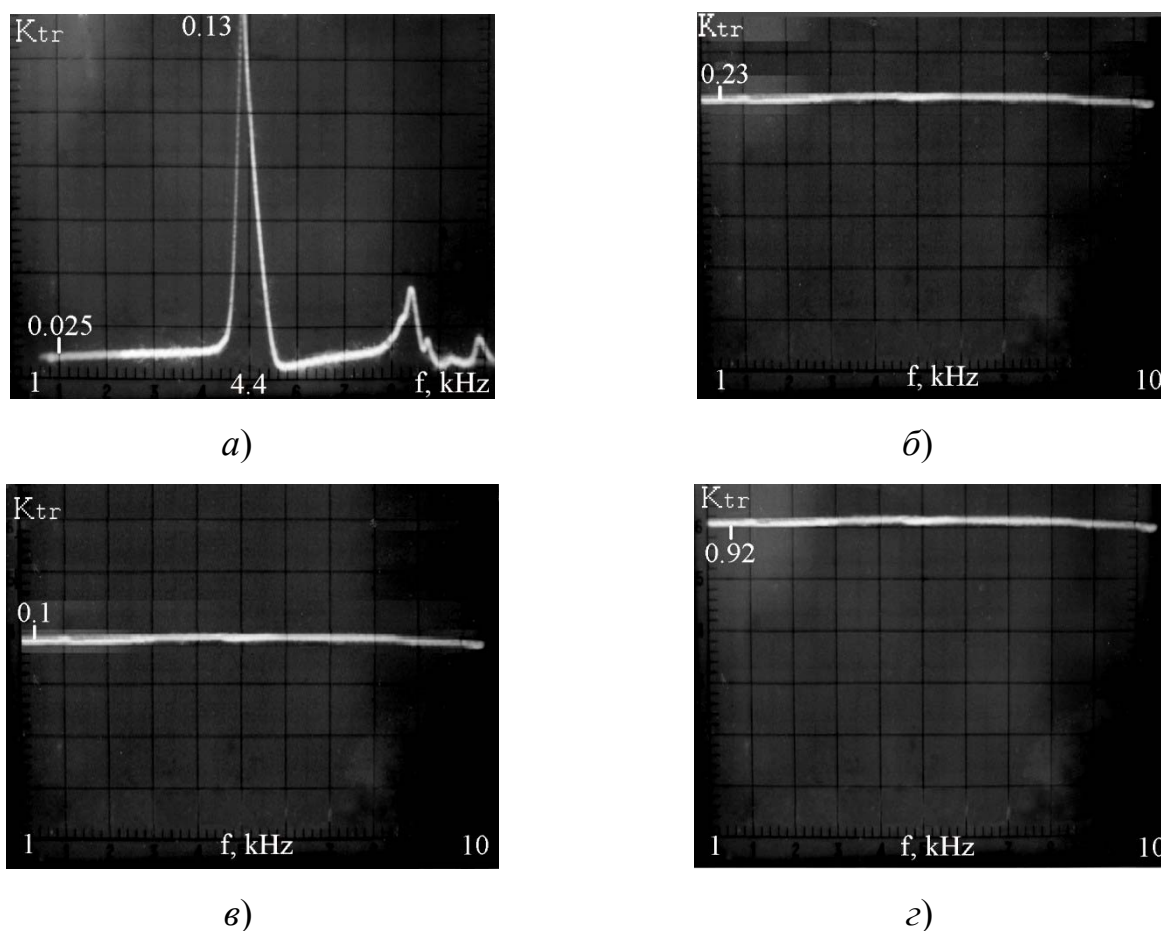
4. Схема підключення, при якій кути між вектором поляризації та векторами електричних полів  $0 < \alpha \leq 90^\circ$  і  $0 < \beta \leq 90^\circ$  (рис. 6.17, г).



**Рис.6.17. Схеми дискових п'єзоелектричних трансформаторів**

Для експериментів був виготовлений п'єзоелектричний трансформатор з п'єзокераміки ЦТС-19 (PZT-5) діаметром 30 мм і товщиною 0,8 мм. П'єзоелектричний трансформатор має електроди, розташовані на торцевих поверхнях п'єзоелемента, причому нижні електроди є проєкціями верхніх. До п'єзоелемента приклеєна пластина з склотекстоліту діаметром 36 мм і товщиною 0,5 мм.

Результати вимірювань амплітудно-частотних характеристик для зазначеного п'єзоелектричного трансформатора показані на рис. 6.18.



**Рис.6.18.** Амплітудно-частотні характеристики п'єзоелектричних трансформаторів згідно з рис. 6.17

З рис. 6.18 видно, що у п'єзоелектричного трансформатора за схемою 4 (рис. 6.17, г) амплітудно-частотна характеристика стала лінійною, а коефіцієнт трансформації став істотно більшим [18].

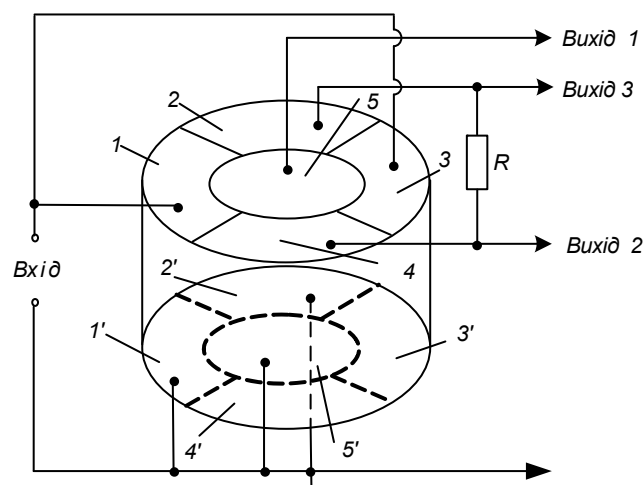
### ***Багатофункціональний пристрій***

Розглянемо далі багатосекційний п'єзоелектричний перетворювач [18]. Як відомо, п'єзоелектричний трансформаторний перетворювач – це перетворювач електричної напруги одного рівня в електричну напругу іншого рівня. П'єзоелектричний перетворювач виготовлений з п'єзокераміки ЦТС-19 (PZT-4) діаметром 30 і товщиною 0,8 мм. Перетворювач має по п'ять електродів, розташованих на торцевих поверхнях п'єзоелемента, причому нижні електроди є проекціями верхніх [19].

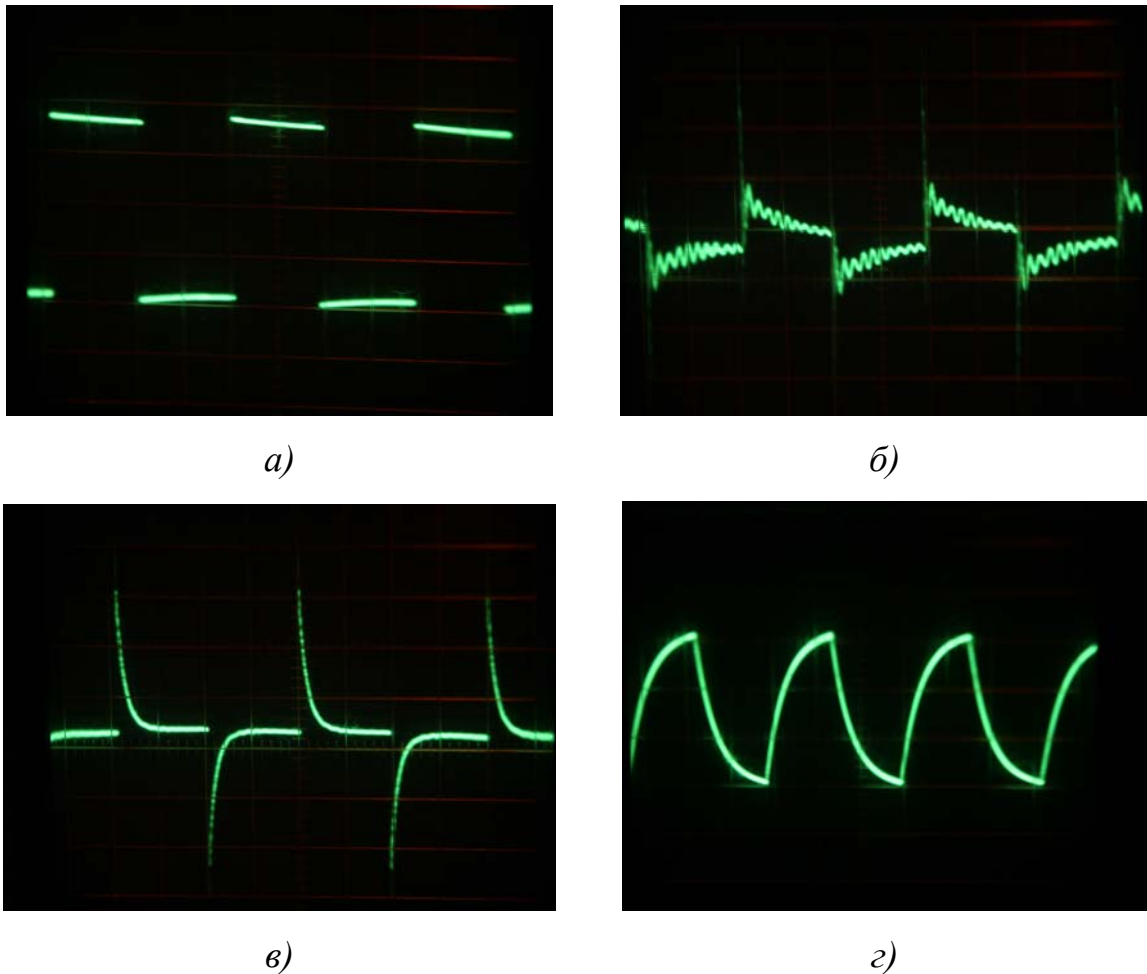
Для п'єзокерамічного трансформаторного перетворювача слід враховувати не тільки розташування вектора електричного поля вихідного сигналу, але і вектора електричного поля вхідного сигналу (генератора) [20].

При цьому, якщо використовувати п'єзоелементи малої товщини, кут між векторами  $\mathbf{E}$  і  $\mathbf{P}$  може бути близьким до  $90^\circ$ .

Схема включення п'єзоелектричного перетворювача показана на рис. 6.19, а осцилограми сигналів на вході і виходах перетворювача показані на рис. 6.20.



**Рис. 6.19. Схема підключення електродів багатосекційного перетворювача**



**Рис. 6.20. Осцилограми сигналів п'єзоелектричного перетворювача**  
**а) вхідний сигнал (меандр); б) вихід 1; в) вихід 2; г) вихід 3**

Як видно з рис. 6.20, в залежності від схеми підключення електродів (тобто від взаємного розташування векторів  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{E}_{\text{вх}}$  і  $\mathbf{E}_{\text{вих}}$ ), можна отримати сигнал, відповідний коливальній (рис. 6.20, б), диференціальній (рис. 6.20, в) і інтегральній ланці (рис. 6.20, г).

Однак найбільш цікавими в даному випадку є те, що п'єзоелемент – пружне монолітне тверде тіло – може мати такі властивості одночасно [19] завдяки технологічній можливості методу термовакуумного напилення. Це дозволяє створювати багатофункціональні п'єзоелектричні перетворювачі на єдиній основі з високим ступенем інтеграції (у 3-4 рази більший за базовий елемент).



Описаний варіант п'єзоелектричного перетворювача, що дозволяє проводити обробку вхідного сигналу, є, зрозуміло, не єдиним. Зміна розмірів електродів, їх взаємного розташування дозволяє впливати на параметри вихідних сигналів і відкриває широкі можливості для проектування п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування.

### **6.2.2. П'єзоелектричні суматори**

Суматори є одними з найпоширеніших, і необхідних вузлів при побудові елементів порівняння систем автоматики, диференціальних схем і ряду інших функціональних вузлів. Крім того, такі пристрої здатні виконувати роль сполучних елементів при компонуванні великих діелектричних твердих схем. Причому це або зовсім самостійний елемент, або частина об'єму інтегрального п'єзоелектричного пристрою, де відбувається складання або віднімання стаціонарних або нестаціонарних процесів [21].

Як відомо, при прикладанні синусоїдального електричного поля до п'єзоелектрика в ньому за рахунок зворотного п'єзоефекту виникають пряма і зворотна біжучі хвилі зміщення, деформації та напруження, які в стаціонарному режимі дають стоячу хвилю. Природно, що якщо порушити в об'ємі п'єзоелектрика кілька біжучих хвиль, то, застосовуючи принцип суперпозиції (при порушенні коливань на лінійній ділянці роботи елемента), отримаємо алгебраїчне додавання потоків енергії в кожній точці об'єму збудження.

Вихідний сигнал з об'єму п'єзоелемента виводиться за допомогою вихідного електрода, на якому за рахунок прямого п'єзоефекту індукується заряд, пропорційний сумарному значенню механічного напруження, що діє в області розташування електрода.

Один з варіантів конструкції суматора представлений на рис. 6.21. За режимом роботи він являє собою п'єзоелектричний трансформатор поперечного типу.

При підсумовуванні двох напруг однакової резонансної частоти  $\omega$   $U_{\text{вх1}} = U_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1)$  і  $U_{\text{вх2}} = U_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2)$  отримаємо:

$$U_{\text{вих}} = k_1 U_{\text{вх1}} + k_2 U_{\text{вх2}} = U_m \sin(\omega t + \varphi),$$

де

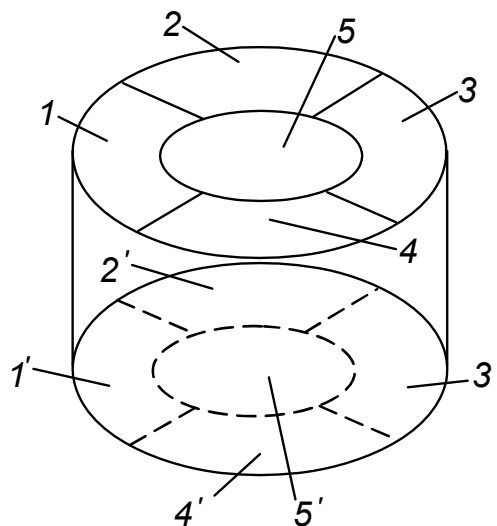
$$U_m = \sqrt{k_1^2 U_{m1}^2 + k_2^2 U_{m2}^2 + 2U_{m1} U_{m2} k_1 k_2 \cos(\varphi_2 + \varphi_1)},$$

$$\text{tg} \varphi = \frac{k_1 U_1 \sin \varphi_1 + k_2 U_2 \sin \varphi_2}{k_1 U_1 \cos \varphi_1 + k_2 U_2 \cos \varphi_2}.$$

Тут  $k_1$  і  $k_2$  – коефіцієнти, що визначають зв'язок по напрузі між виходом і кожним із входів [21].

Одним з основних параметрів ефективності роботи п'єзокерамічних суматорів є коефіцієнт передачі електричного сигналу.

Для експериментальних досліджень був виготовлений багатосекційний дисковий п'єзоелектричний перетворювач з розділеними електродами (рис. 6.21) з п'єзокераміки ЦТС-19 діаметром 30 і товщиною 0,8 мм.

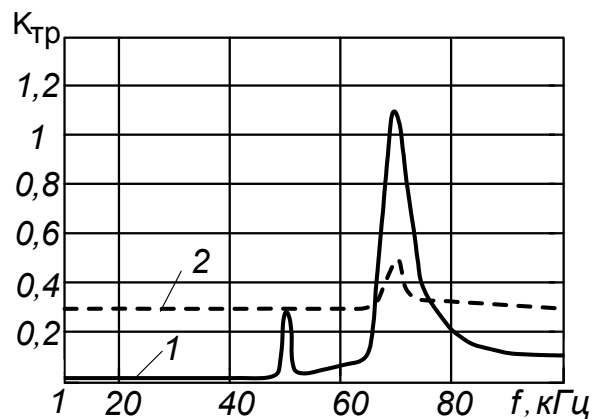


**Рис. 6.21. Багатосекційний дисковий п'єзоелектричний перетворювач з розділеними електродами**

Електроди на торцевих поверхнях п'єзоелемента були розділені на п'ять частин – центральний диск 5 (5') і зовнішнє кільце, що складається з чотирьох рівних частин 1–4 (1'–4').

Вимірювання АЧХ проводилися в п'єзотрансформаторному режимі при впливі синусоїдальної електричної напруги від генератора ГЗ-106 ( $U = 1$  В) на електроди 1–1'. Вихідний сигнал знімався мілівольтметром ВЗ-38 з електродів 5–5' (традиційна схема) і з електродів 5–1' [17].

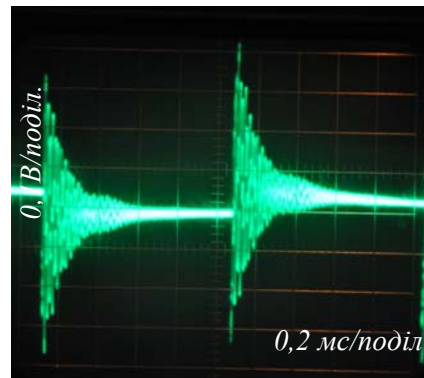
Результати вимірювання амплітудно-частотних характеристик показані на рис. 6.22.



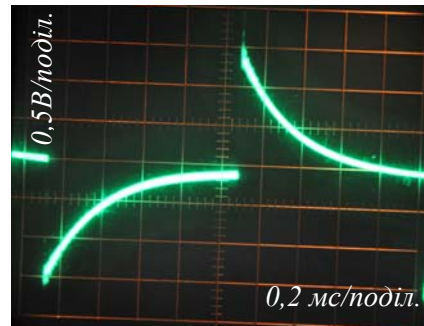
**Рис. 6.22.** Амплітудно-частотні характеристики п'єзоелектричного перетворювача: 1– традиційна схема; 2– вихід 5–1'

На рис. 6.23 показані перехідні характеристики п'єзоелектричного перетворювача. Вимірювання проводились також в п'єзотрансформаторному режимі при впливі на перетворювач електричної напруги в формі меандру ( $f = 500$  Гц,  $U = 3$  В). Фотографування проводилося цифровою камерою «Nikon-D90».

Досліджувався також вплив площі електродів, на які подається вхідна напруга, на коефіцієнт передачі п'єзоелектричного трансформаторного перетворювача в дорезонансній, на резонансній частоті і в післярезонансній областях. Для вимірювань використовувалася традиційна схема підключення. Результати вимірювань наведені в таблиці 6.2.



а)



б)

**Рис. 6.23.** Перехідні характеристики п'єзоелектричного перетворювача:

а) традиційна схема; б) вихід 5–1'

**Таблиця 6.2.** Коефіцієнт передачі п'єзоелектричного перетворювача

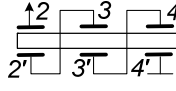
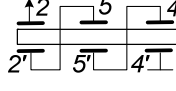
Електроди		К <sub>пер</sub>		
Вхід	Вихід	f <sub>др</sub>	f <sub>p</sub>	f <sub>пр</sub>
1-1'	5-5'	0,004	1,1	0,100
1+2-1'+2'	5-5'	0,006	2,2	0,195
1+2+3-1'+2'+3'	5-5'	0,010	3,0	0,265
1+2+3+4-1'+2'+3'+4'	5-5'	0,013	4,1	0,310

З таблиці 6.2 випливає, що збільшення площі вхідних електродів призводить до збільшення коефіцієнта передачі п'єзоелектричного перетворювача.

Дослідження п'єзоелектричного перетворювача також показало, що зсув фаз між вхідним і вихідним сигналами становить  $0^\circ$  в дорезонансній області,  $90^\circ$  на резонансі і  $180^\circ$  в післярезонансній області.

Досліджено вплив послідовного з'єднання частин п'єзоелектричного перетворювача на коефіцієнт передачі на резонансній частоті. Для вимірювань використовувалася традиційна схема підключення перетворювача. Максимальна вихідна напруга вимірювалася за допомогою осцилографа С1-55. Результати вимірювань наведені в таблиці 6.3.

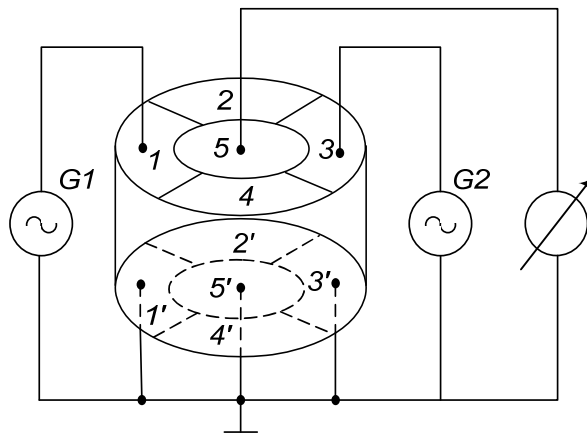
**Таблиця 6.3. Вихідна напруга п'єзоелектричного трансформатора**

№ схеми	Електроди		$U_{\text{вих}}, \text{В}$
	Вхід	Вихід	
1	1-1'	2-2'	2,0
2	1-1'	3-3'	2,2
3	1-1'	4-4'	1,8
4	1-1'	5-5'	4,6
5	1-1'		4,6
6	1-1'		6,2
7	1-1'	2+3+4 – 2'+3'+4'	2,3
8	1-1'	2+5+4 – 2'+5'+4'	3,1

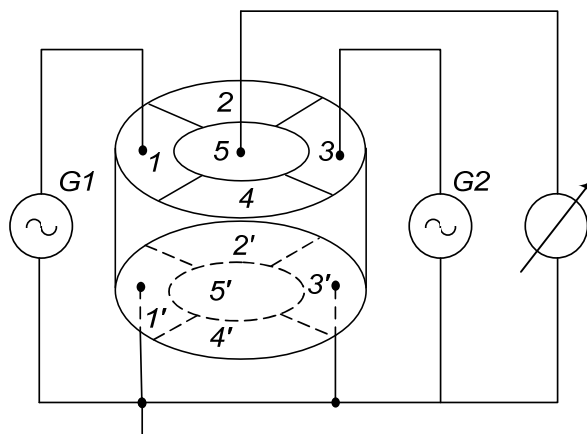
З таблиці 6.3 випливає, що найбільшу вихідну напругу п'єзоелектричного трансформатора можна отримати при його підключенні по схемі № 6.

Для дослідження суматора використовувалися традиційна (рис. 6.24) і схема з просторовою енергосиловою структурою (рис. 6.25).

П'єзокерамічний суматор містить два генератора електричних коливань  $G1$  і  $G2$ , і дисковий мономорфний п'єзоелектричний перетворювач (рис. 6.21).

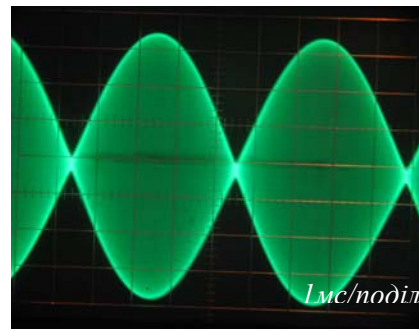


**Рис. 6.24. Традиційна схема підключення п'єзоелектричного суматора**

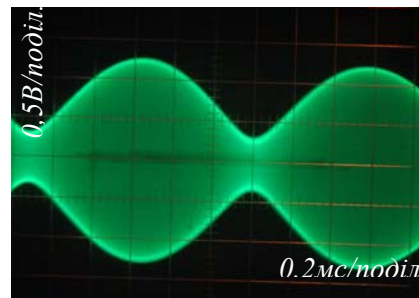


**Рис. 6.25. Підключення п'єзоелектричного суматора за схемою з просторовою енергосиловою структурою**

При проведенні експериментів використовувався генератор ГЗ-106, осцилограф С1-55 і мілівольтметр ВЗ-38. Вимірювання проводилися при впливі на суматор синусоїдальної електричної напруги ( $U = 1$  В). Результати вимірювань наведені на рис. 6.26 і в таблиці 6.4.



а)



б)

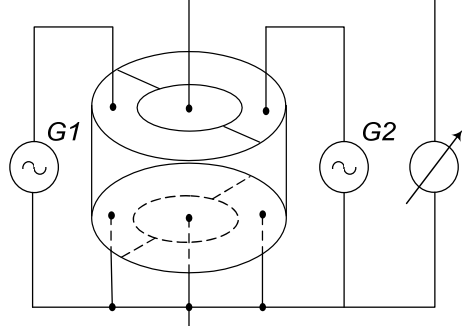
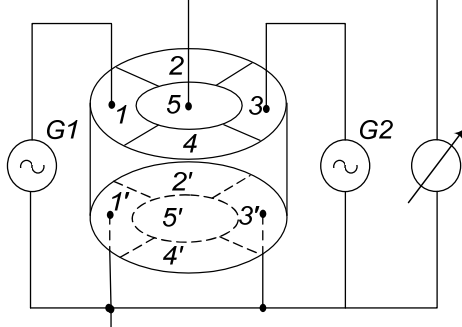
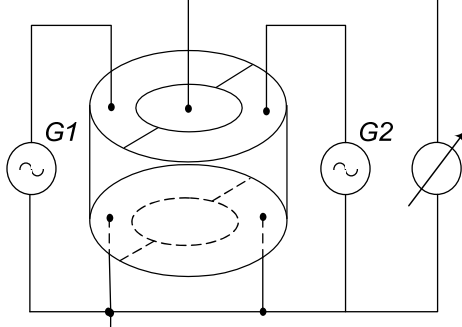
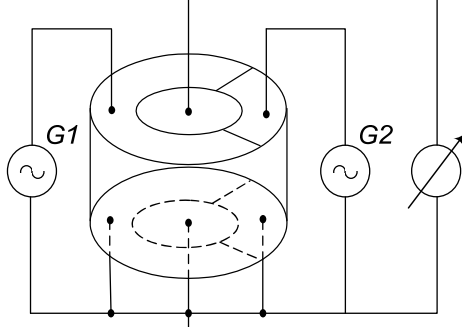
**Рис. 6.26. Осцилограми п'єзоелектричного суматора: а) традиційна схема; б) схема з просторовою енергосиловою структурою**

У таблиці 6.4 вказана максимальна вихідна напруга суматора в залежності від схеми підключення електродів.

**Таблиця 6.4. Вихідна напруга суматора на основі дискового багатосекційного мономорфного п'єзоелектричного перетворювача**

№	Схема підключення	U <sub>вих</sub> , В		
		f <sub>др</sub>	f <sub>р</sub>	f <sub>пр</sub>
1		0,02	8,10	0,60

## Продовження таблиці 6.4

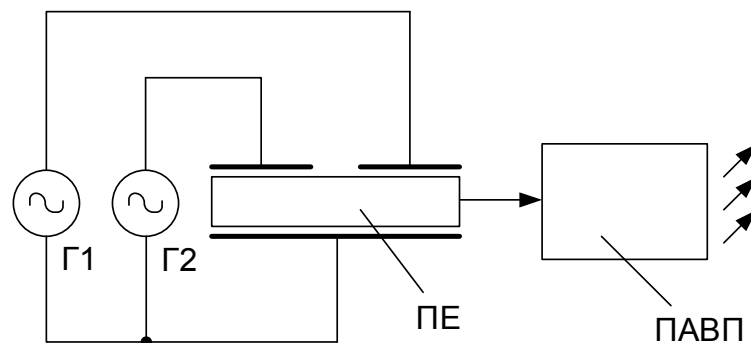
2		0,05	13,5	0,90
3		0,80	3,50	1,10
4		1,20	5,60	1,50
5		0,04	13,0	0,80

З таблиці 6.4 видно, що підключення п'єзоелектричного суматора за схемою з просторовою енергосиловою структурою (схеми № 3, 4) призводить до збільшення вихідної напруги в дорезонансній і післярезонансній областях [22], [23], [18].



## *Застосування п'єзоелектричних суматорів в електро- і гідроакустиці*

Суть цієї ідеї стосовно гідроакустичних випромінювачів полягає в тому, що в якості випромінювача використовують п'єзоелемент з двома системами електродів (п'єзотрансформаторний тип). На одну систему електродів подають електричну напругу від першого генератора, причому частоту коливань електричної напруги цього генератора встановлюють рівною чи близькою до однієї з резонансних частот п'єзоелемента. На другу систему електродів п'єзоелемента подають напругу від другого генератора, причому частоту коливань цього генератора встановлюють також близькою до тієї ж резонансної частоти таким чином, щоб різниця між частотами коливань першого і другого генератора дорівнювала робочій частоті випромінювача (рис. 6.27) [24].



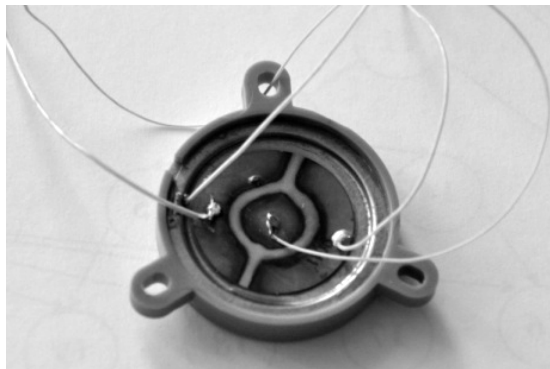
**Рис. 6.27. Низькочастотний п'єзокерамічний випромінювач: Г1, Г2 – генератори електричних коливань; ПЕ – п'єзоелемент; ПАВП – підсилювач акустичного випромінювання п'єзоелемента**

П'єзоелемент з двома системами електродів (п'єзоелектричний трансформатор) при підведенні до нього сигналів від двох генераторів виконує функції суматора [21], [23].

Таким чином, в цьому випадку в п'єзоелементі виникають механічні коливання, пропорційні сумі вхідних електричних напруг.

Запропонований спосіб був перевірений експериментально. Для цієї мети використовувався електроакустичний перетворювач ЗП-19 виробництва ВАТ «Аврора» (м. Волгоград). Перетворювач складався з пластини зі сталі 40Х діаметром 32 і товщиною 0,15 мм. До пластини був приклеєний епоксидним компаундом п'єзоелемент діаметром 23 мм і товщиною 0,2 мм. Отриманий біморфний елемент був закріплений в корпусі з ударостійкого полістиролу (рис. 6.28).

Один з електродів п'єзоелемента був розділений на три частини. До двох з них підключалися генератори ГЗ-106. Третій електрод у формі диска використовувався для контролю вихідного електроакустичного сигналу п'єзоелемента. Частота першого генератора вибиралася рівною 98,2 кГц, тобто резонансній частоті радіальних коливань п'єзоелемента ЗП-19, частота другого – 100,7 кГц.



**Рис. 6.28.Електроакустичний перетворювач ЗП-19**

При підключенні одночасно двох генераторів ЗП-19 почав звучати на частоті 2,5 кГц – резонансній частоті коливань згину.

Отриманий результат досить дивний – збуджуються коливання на нечутних частотах – 98,2 і 100,7 кГц, а звучить перетворювач на 2,5 кГц. Такий же ефект можна спостерігати на і на інших частотах, якщо міняти частоту коливань одного з генераторів [18], [25].

## *Застосування п'єзоелектричних суматорів у віброакустичній фізіотерапії*

Терапія – область клінічної медицини, що вивчає походження, лікування, діагностику та профілактику захворювань внутрішніх органів. Терапія є поширеною назвою методів лікування, які включають всі хірургічні методи[26].

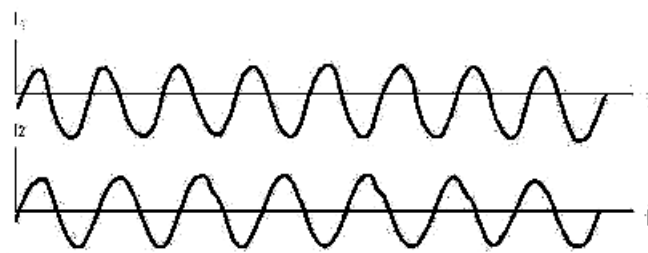
Вібротерапія – метод лікувального впливу механічними коливаннями низької частоти, який здійснюється при безпосередньому контакті випромінювача (вібратора) з тканинами хворого [27].

Віброакустична фізіотерапія є одним з видів вібротерапії, при якому для лікувальних і профілактичних цілей використовується контактна дія мікровібрацій з частотою звуку (20 Гц – 20 кГц).

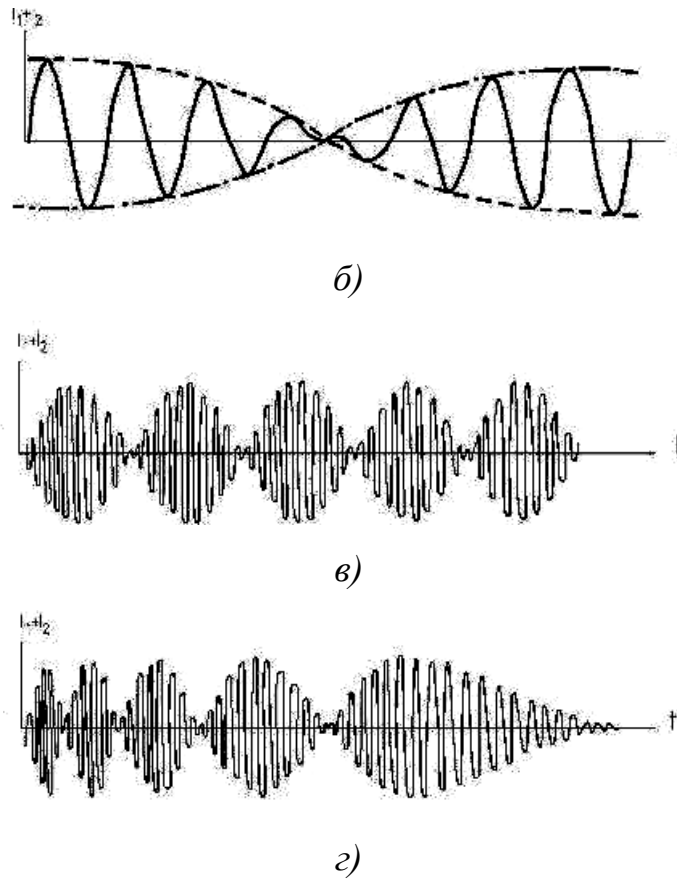
Методом інтерференційної терапії є одночасний вплив на пацієнта двома різними струмами, які подаються в організм через дві пари електродів, щоб їх шляхи всередині тканини перетнулися [28].

В результаті інтерференції замість двох середньочастотних струмів всередині тканини утворюється новий низькочастотний змінний струм (інтерференційний струм) [27]. Періодично змінна амплітуда цього струму утворює так зване " биття ", кількість якого визначається різницею частот струмів. Кількість биття під час процедури може бути постійним або періодично змінюватися в залежності від зазначеної програми (рис. 6.29).

У методі інтерференційної терапії використовуються змінні синусоїдальні струми з частотами від 3000 до 5000 Гц. Частота одного з них постійна, а друга автоматично змінюється в межах до 200 Гц [28].

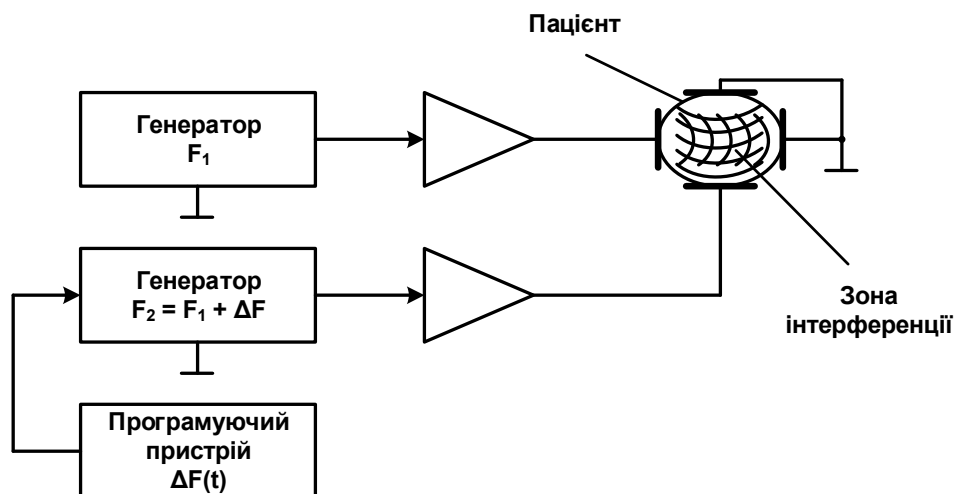


a)



**Рис. 6.29.** Графічне представлення двох первинних струмів (а); процес формування інтерференційних струмів в тканинах (б); інтерференційні струми з постійним числом ударів (в); інтерференційні струми зі спектром биття (з)

Один з варіантів блок-схеми пристрою для інтерференційної терапії показаний на рис. 6.30 [26].

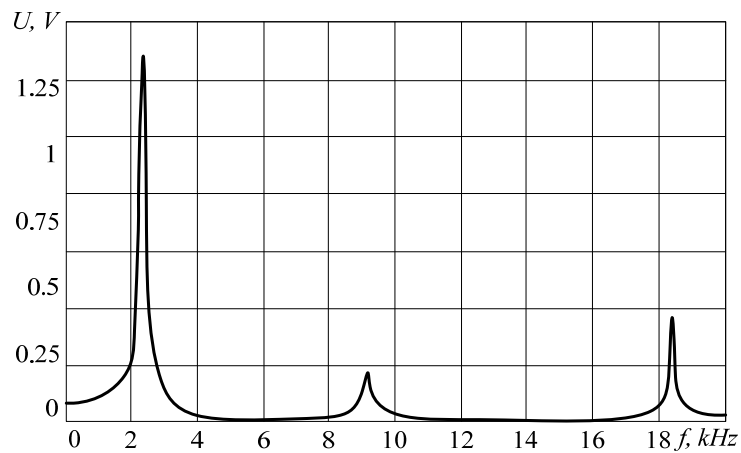


**Рис. 6.30.** Блок-схема пристрою для інтерференційної терапії

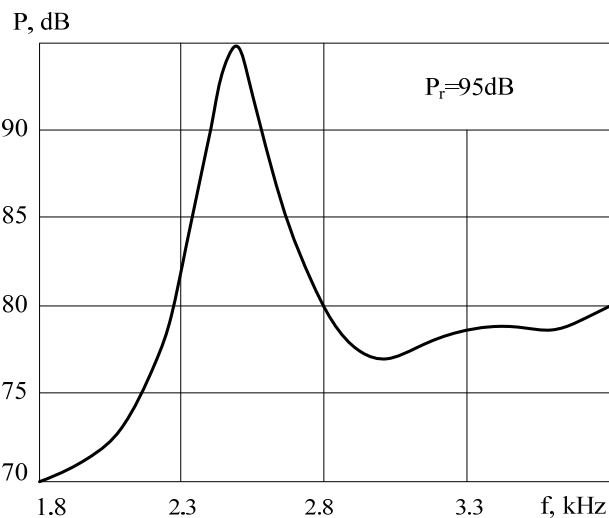
Було запропоновано застосовувати інтерференцію двох коливань в віброакустичній терапії (віброакустична інтерференційна терапія ВІТ) [29], [30], [31], [32].

Найчастіше п'єзоелектричні перетворювачі [33], [34], [35] використовуються в якості випромінювачів для віброакустичної фізіотерапії.

Для експериментальних досліджень використовувався електроакустичний перетворювач ЗП-19. Його амплітудно-частотні характеристики за напругою і звуковим тиском показані на рис. 6.31 і 6.32 відповідно.

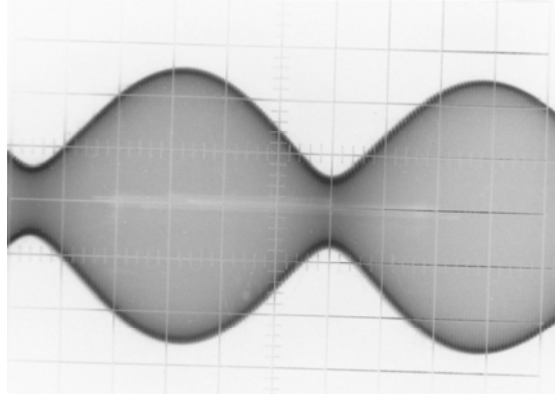


**Рис. 6.31. Експериментальна амплітудно-частотна характеристика по напрузі п'єзоелектричного перетворювача**



**Рис. 6.32. Експериментальна амплітудно-частотна характеристика по звуковому тиску п'єзоелектричного перетворювача**

Процес інтерференції двох коливань, згідно рис. 6.30, показаний на рис. 6.33.



**Рис. 6.33. Осцилограма п'єзоелектричного випромінювача**

Як видно з рис. 6.33, амплітуда вихідного інтерференційного сигналу, періодично змінюється, утворює так зване биття, число якого визначається різницею частот вхідних сигналів.

В роботі [36] розглянута можливість управління енергією використовуваних інтерференційних коливань шляхом зміни частоти биття для зменшення подразнюючого ефекту. Запропоновано методіку об'єднання властивостей двох методів в віброакустичній інтерференцотерапії (застосування інтерференції двох коливань у віброакустичній терапії. У запропонованому методі використовуються синусоїдальні сигнали, при цьому частота одного з них постійна, а другого змінювалася в межах 2,8 – 3,2 кГц. Запропонований метод дозволяє знизити звикання людського організму до терапевтичних процедур.

***Смуговий та режекторний фільтри на основі п'єзоелектричного перетворювача з розділеними електродами***

Для розширення робочого діапазону п'єзоелементи можуть включатися в схеми електричних фільтрів [18]. Найбільш часто в цих випадках використовуються схеми фільтрів нижніх і верхніх частот.

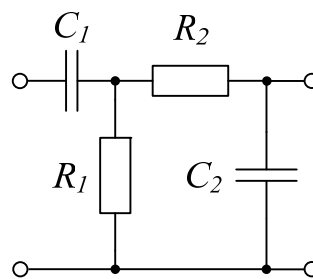
Недоліком таких перетворювачів є необхідність використання двох п'єзоелементів або п'єзоелемента і конденсатора.

Для усунення цього недоліку в схемах перетворювачів можуть використовуватися п'єзотрансформатори [18].

Поряд з електричними фільтрами нижніх і верхніх частот в приладобудуванні знаходять застосування смугові і режекторні фільтри.

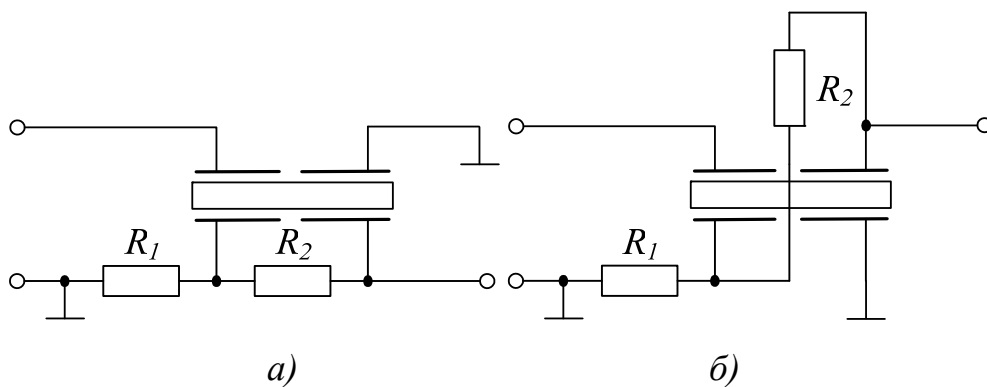
Як відомо, смуговим називається фільтр, що пропускає сигнал лише в діапазоні між двома частотами зрізу  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , а режекторним – фільтр, що пропускає сигнал за межами діапазону ( $\omega_1; \omega_2$ ) і подавляючи його між частотами зрізу [37], [38].

Схема смугового фільтра представлена на рис. 6.34.



**Рис. 6.34. Смуговий фільтр**

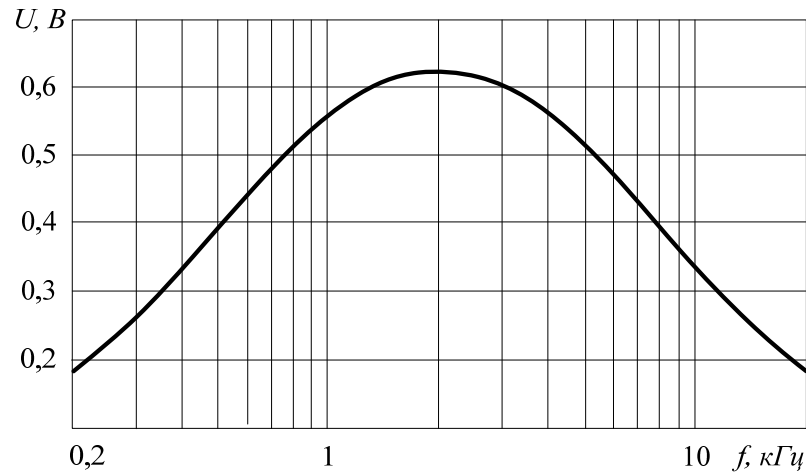
На рис. 6.35 представлений перетворювач з розділеними електродами в схемі смугового фільтра.



**Рис. 6.35. Схема смугового фільтра з п'єзоелектричним перетворювачем з розділеними електродами**

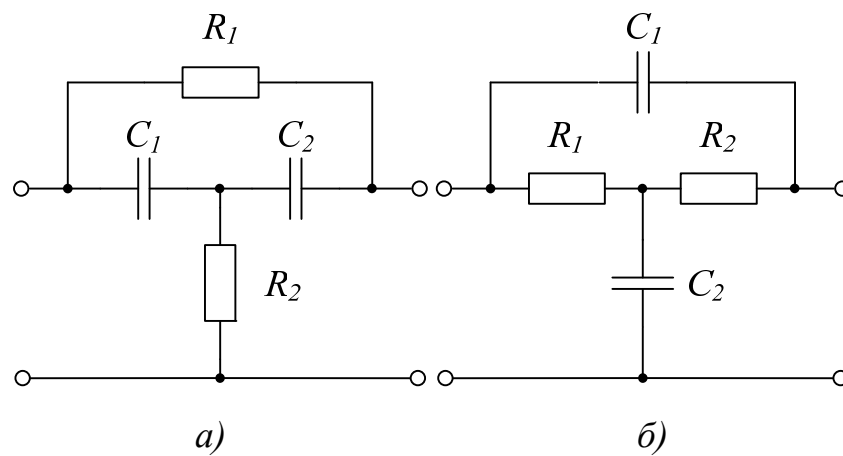
Була експериментально визначена амплітудно-частотна характеристика перетворювача з розділеними електродами в схемі смугового фільтра (рис.

6.36). Для досліджень використовувався п'єзоелектричний перетворювач на основі дискового п'єзоелектричного елемента  $\text{Ø}66 \times 3$  мм з п'єзокераміки ЦТС-19 з основною резонансною частотою 35 кГц і резистори  $R_1 = 12,6$  кОм і  $R_2 = 10,2$  кОм.



**Рис. 6.36.** Експериментальна АЧХ п'єзоелектричного перетворювача

Схема режекторного фільтра представлена на рис. 6.37.



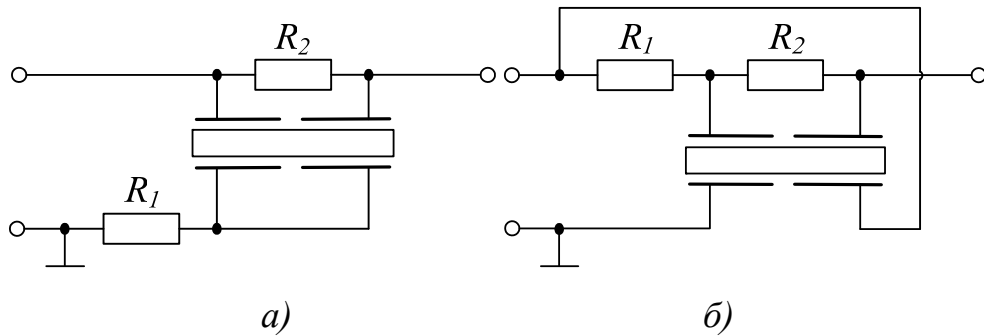
**Рис. 6.37.** Режекторний фільтр

На рис. 6.38 представлений перетворювач з розділеними електродами в схемі режекторного фільтра.

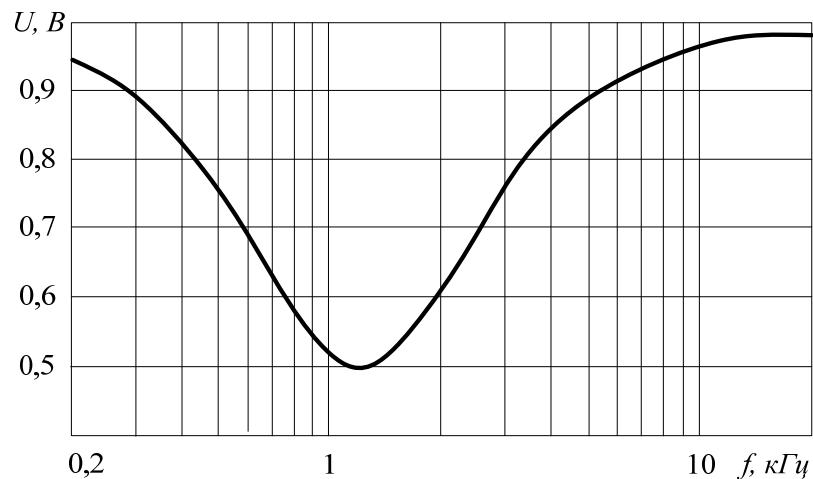
Була експериментально визначена амплітудно-частотна характеристика перетворювача з розділеними електродами в схемі режекторного фільтра (рис. 6.39). Для досліджень використовувався п'єзоелектричний перетворювач на основі дискового п'єзоелектричного елемента  $\text{Ø}66 \times 3$  мм з



п'єзокераміки ЦТС-19 з основною резонансною частотою 35 кГц і резистори  $R_1 = 9,5$  кОм і  $R_2 = 38$  кОм.



**Рис. 6.38. Схема режекторного фільтра з п'єзоелектричним перетворювачем з розділеними електродами**



**Рис. 6.39. Експериментальна АЧХ п'єзоелектричного перетворювача**

Перевагою запропонованих конструкцій є реалізація фільтрів в об'ємі одного п'єзоелемента [39], [40].

### **6.3. Результати дослідження п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами**

При проектуванні п'єзоелектричних перетворювачів (трансформаторів) зазвичай використовують п'єзоелемент певної форми і розмірів, з певного п'єзокерамічного матеріалу з певними електрофізичними властивостями (характеристиками). При цьому традиційно вектор поляризації  $\mathbf{P}$

паралельний вектору діючої на п'єзоелемент сили  $\mathbf{F}$  або прикладеного електричного поля  $\mathbf{E}$ , тобто перпендикулярний до електродів, які нанесені на поверхню п'єзоелемента. Такий тип перетворювача відомий і названий традиційним. Якщо вектор поляризації  $\mathbf{P}$  паралельний, наприклад, вектору поширення хвилі коливань, перетворювач називають поздовжнім, якщо перпендикулярний – поперечним. При цьому з певного п'єзоелемента можна отримати тільки один перетворювач з певними характеристиками (резонансна частота, чутливість, тощо) [18].

Вважалося, також, що таке розташування електродів і векторів  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{P}$  і  $\mathbf{E}$  для перетворювача з п'єзокераміки є природним і єдино можливим.

Це пов'язано, очевидно, з тим, що електроди використовують для поляризації п'єзоелемента при виготовленні. Одночасно вони використовуються також для зняття корисного сигналу при вимірюванні фізичних величин (сили, тиску, прискорення тощо), а також для введення в п'єзоелемент електричної напруги при використанні п'єзоелемента в якості випромінювача.

Тому пропозиція враховувати при розробці конструкцій перетворювачів взаємне розташування векторів  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{P}$  і  $\mathbf{E}$  було неординарним і незвичним рішенням. Таке взаємне розташування векторів було названо просторовою енергосиловою структурою п'єзоелемента [17], [19].

Для зміни характеристик п'єзокерамічних перетворювачів, побудованих за традиційною схемою, раніше існувала майже виключно одна можливість – застосувати інший п'єзоелемент, іншого розміру, форми або з іншого матеріалу. Тим часом, можна очікувати зміни характеристик перетворювача при зміні його просторової енергосилової структури.

В роботі [20] побудована класифікація п'єзоелектричних трансформаторів, при проектуванні яких запропоновано враховувати напрями векторів поляризації  $\mathbf{P}$  вхідної і вихідної частин, а також векторів  $\mathbf{E}$  електричного поля.

У розділі 1 показано, що п'єзоелектричні перетворювачі з розділеними електродами (конструкція трансформаторного типу) знайшли широке застосування не лише як безпосередньо трансформатори.

Особливе місце п'єзоелектричні перетворювачі займають в електро- і гідроакустиці, де вони призначені для випромінювання і прийому акустичних коливань в повітряному або водному середовищі [41].

Загальним завданням при вдосконаленні випромінювачів є збільшення дальності дії, що можливо досягти шляхом:

- зниження робочої (резонансної) частоти і (або)
- збільшення потужності випромінювання (підвищення рівня звукового тиску).

Відомо, що низькочастотний звук поширюється у воді практично без загасання на відстані до декількох тисяч кілометрів завдяки формуванню в верхньому шарі океану підводного звукового каналу – акустичного хвилеводу рефракційного типу. Саме завдяки цьому низькочастотна акустика має очевидні переваги у вирішенні широкого кола задач [42].

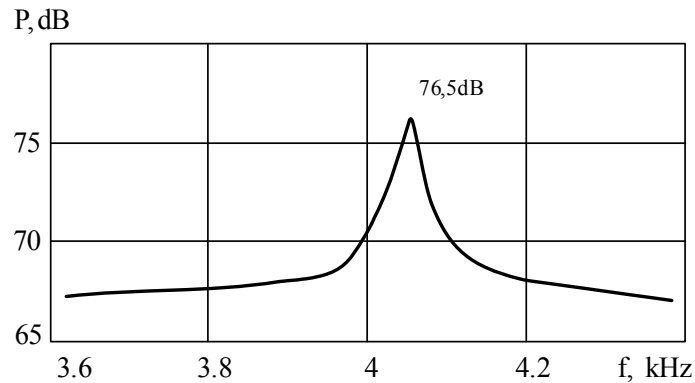
Для виготовлення електроакустичних перетворювачів використовуються мономорфні п'єзоелементи, тобто які складаються з одного п'єзоелемента, а також біморфні елементи, що складаються з двох п'єзоелементів або п'єзоелемента і металеві пластилини, з'єднаних за допомогою клею або припою.

Найчастіше в електро- і гідроакустиці використовуються асиметричні біморфні п'єзоелементи, які мають порівняно низьку резонансну частоту і високий рівень створюваного звукового тиску, однак вони складніше мономорфних і, крім того, містять клейове з'єднання, яке зменшує механічну міцність біморфних елементів [17], [41].

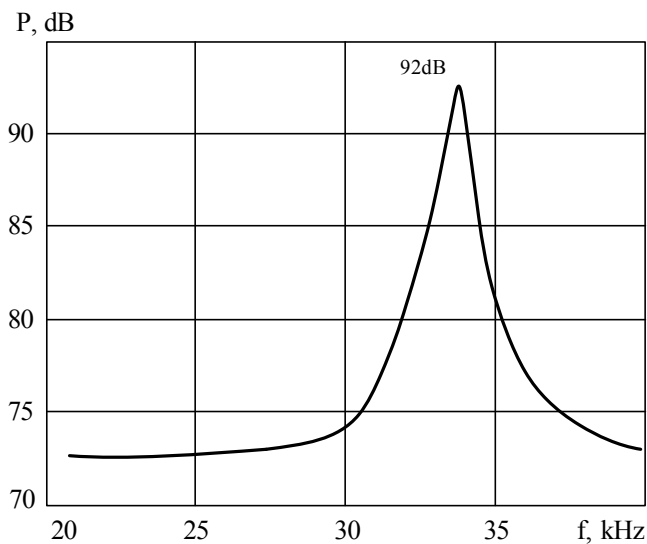
Традиційно вважається, що в вільно розташованих мономорфних п'єзоелементах у вигляді пластин, брусків, дисків коливання згину (низькочастотні) не виникають [17]. Тим часом, авторами виявлений ефект виникнення таких коливань в мономорфних п'єзоелементах, проте рівень

звукового тиску, створюваний цими п'єзоелементами, відносно невеликий [43].

На рис. 6.40 показана амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) по звуковому тиску мономорфного п'єзоелемента  $\text{Ø}66 \times 3$  мм, виготовленого з п'єзочераміки ЦТС-19.



a)



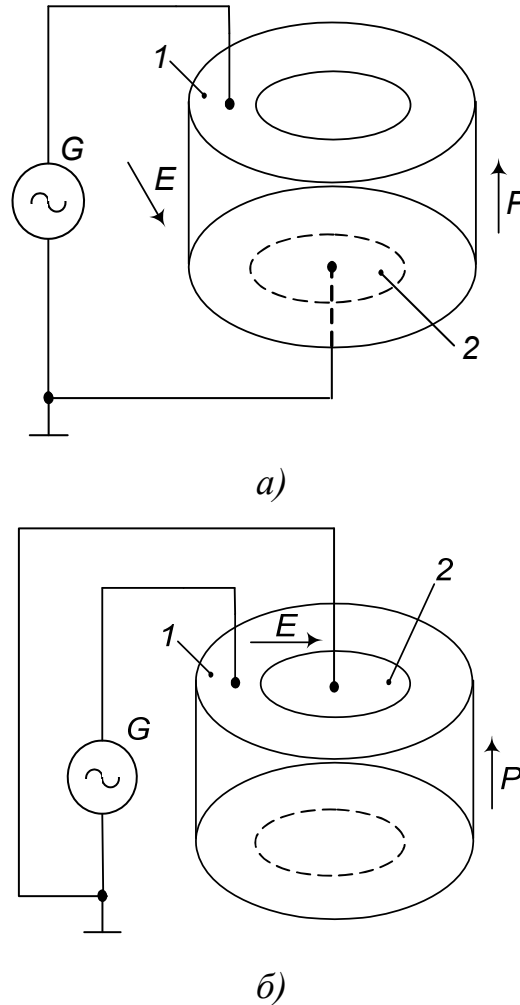
б)

**Рис. 6.40. Амплітудно-частотна характеристика по звуковому тиску в низькочастотній (а) і високочастотній (б) області мономорфного п'єзоелемента  $\text{Ø}66 \times 3$  мм**

Як видно з рис. 6.40, амплітудно-частотна характеристика мономорфних п'єзоелементів в низькочастотній області має резонансний характер.

Для збільшення рівня звукового тиску, створюваного за допомогою мономорфних п'єзоелементів, запропоновано [44], [45], [46] створювати в перетворювачі електричне поле таким чином, щоб вектор електричного поля  $E$  напруги збудження становив кут  $\alpha$  з вектором поляризації  $P$ , причому  $0 < \alpha \leq 90^\circ$  (рис. 6.41, а, б).

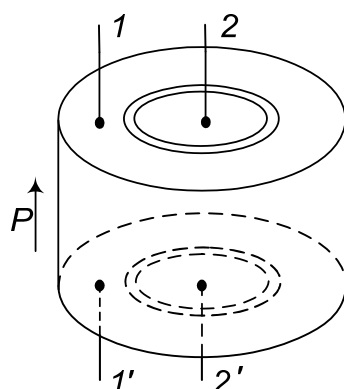
Схеми розрахунку дискового п'єзоелемента з частковим електродуванням поверхонь наведені в роботах [47], [48].



**Рис. 6.41. Схеми підключення дискового п'єзоелектричного перетворювача з розділеними електродами: 1, 2 – електроди; G – генератор; E – вектор електричного поля напруги збудження; P – вектор поляризації**

Для експериментальних досліджень використовувався п'єзоелемент  $\text{Ø}66$  і товщиною 3 мм з п'єзокераміки ЦТС-19. Для цього електроди на

п'єзоелементи були розділені на кільця (1, 1') і диски (2, 2'), як це показано на рис. 6.42.

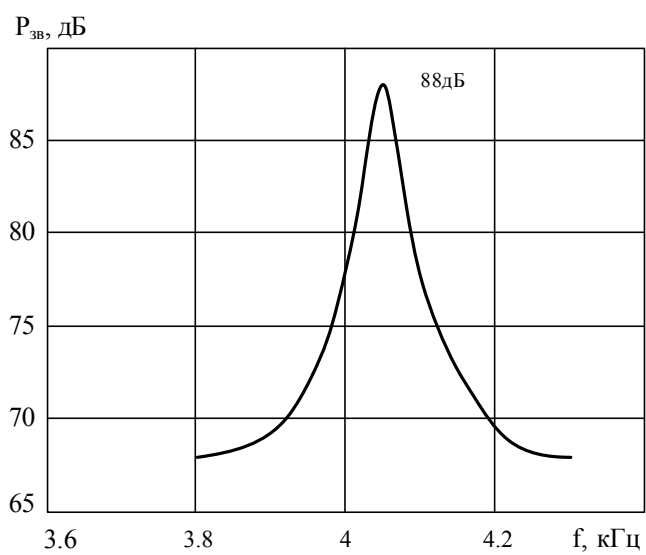


**Рис. 6.42. Дисковий п'єзоелемент з розділеними електродами**

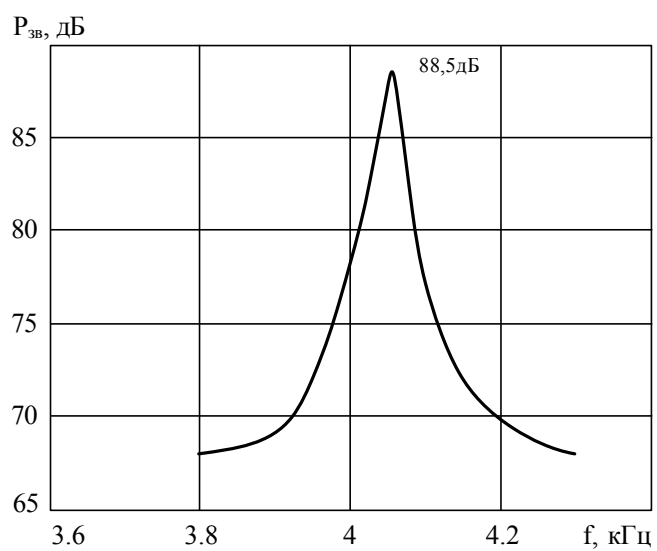
Для схем підключення (рис. 6.41) знімалися амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) за допомогою шумоміра RFT. На вхід п'єзоелектричного перетворювача подавалася напруга 2 В (рис. 6.43). Результати вимірювань приведені на рис. 6.44.



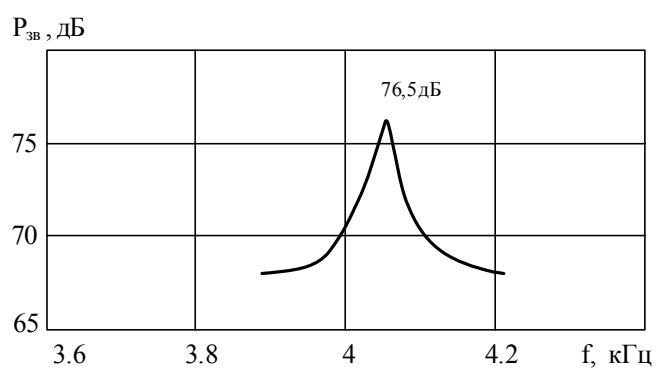
**Рис. 6.43. Установка для дослідження п'єзоелектричних перетворювачів**



а)



б)



в)

**Рис. 6.44. АЧХ перетворювачів за схемою: а) рис. 5.1, а; б) рис. 5.1, б; в) по традиційній схемі**

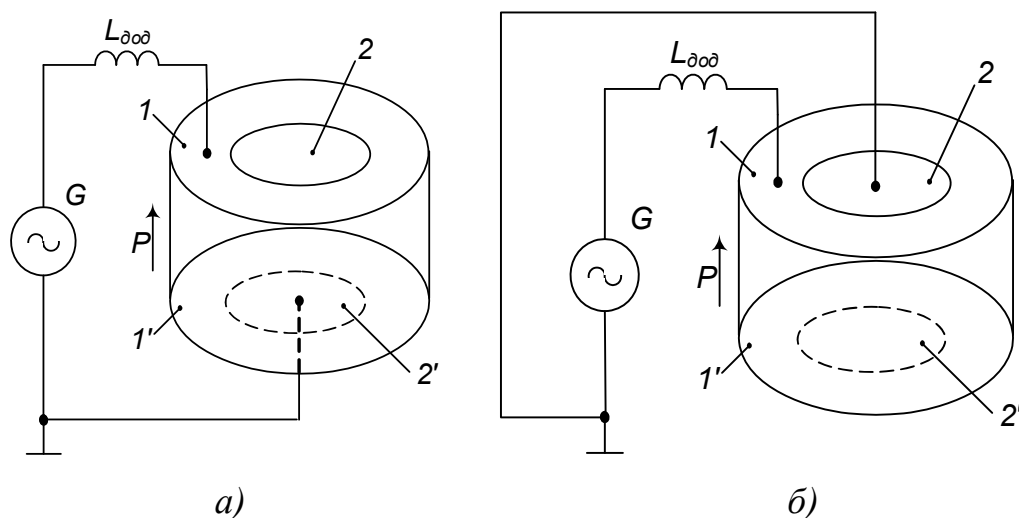
З рис. 6.44 видно, що для схем з  $\alpha \approx 90^\circ$  (рис. 6.41, а, б) рівень звукового тиску зріс приблизно на 12 дБ, резонансна частота не змінилася в порівнянні з перетворювачем з  $\alpha = 0^\circ$  (традиційна схема).

Для подальшого збільшення звукового тиску можна застосувати одну з технологій синтезу п'єзоелектричних перетворювачів – технологію додаткових елементів.

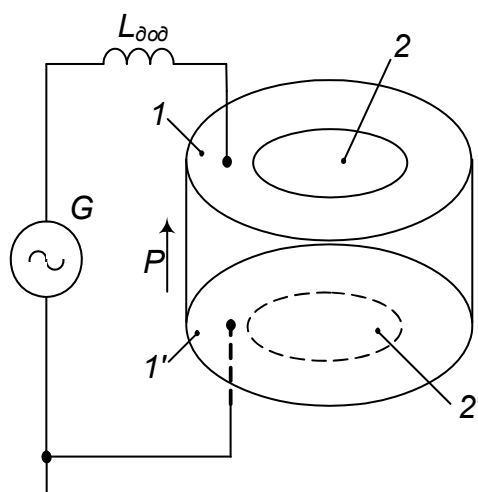
Суть цієї технології полягає в тому, що до п'єзоелектричного перетворювача, який є електромеханічною коливальною системою, приєднують додаткові елементи, які змінюють характеристики перетворювача. Тут можливі, як мінімум, два варіанти. У першому випадку до п'єзоелемента механічно приєднується другий п'єзоелемент, металева пластина, ультразвуковий концентратор або акустичний резонатор. У другому випадку до п'єзоелементів електрично приєднується індуктивність, ємність, коливальний контур, п'єзоелемент або частина п'єзоелемента. Таким чином, підключення до перетворювача електричних елементів (резисторів, конденсаторів, індуктивностей, кіл з цих елементів) може істотно змінювати його характеристики [49].

Зокрема, до входу перетворювача підключалася індуктивність  $L_{\text{доо}}$ , яка підбирається з урахуванням значення частоти коливань п'єзоелектричного перетворювача і величини його міжелектродної ємності [50], [51].

Схеми підключення п'єзоелектричного перетворювача в даному випадку приведені на рис. 6.45.



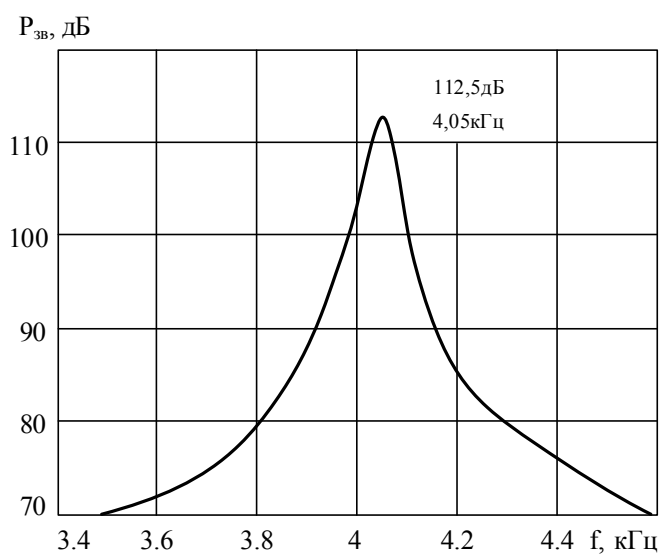




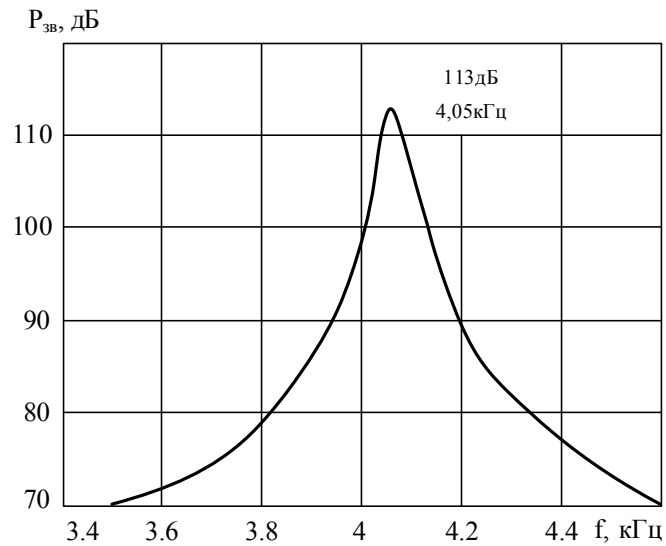
в)

**Рис. 6.45. Схеми підключення п'єзоелектричного перетворювача з додатковою індуктивністю: а)  $C_{1-2}=1,2$  нФ,  $L_{доод}=1,25$  Гн; б)  $C_{1-2}=1,13$  нФ,  $L_{доод}=1,3$  Гн; в)  $C_{1-1'}=8,1$  нФ,  $L_{доод}=0,185$  Гн**

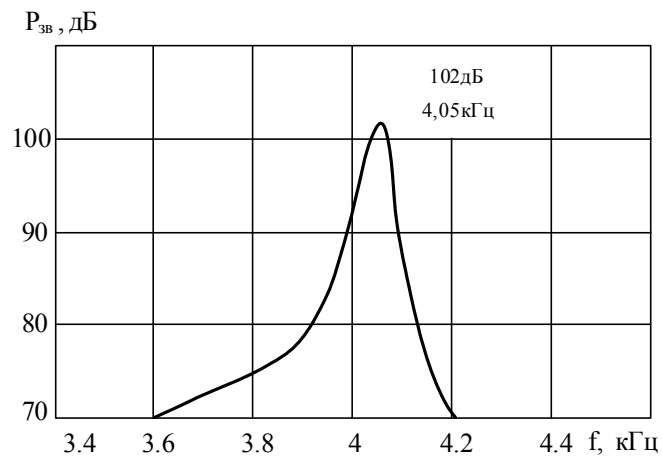
Результати вимірювань згідно схем, приведених на рис. 6.45, представлені на рис. 6.46.



а)



б)



в)

**Рис. 6.46. АЧХ перетворювачів з додатковою індуктивністю згідно:**

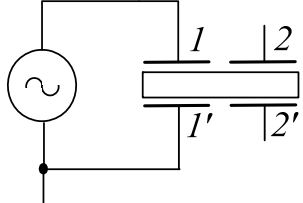
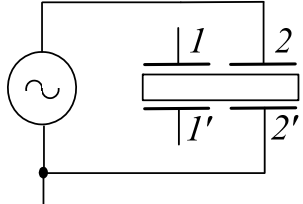
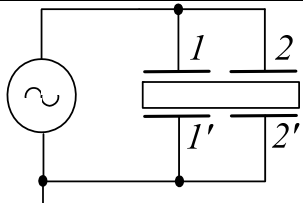
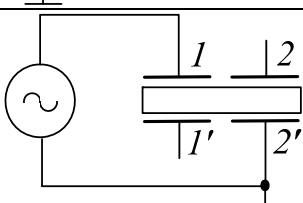
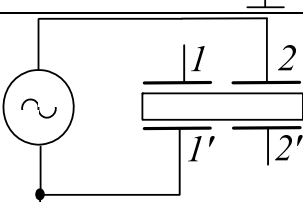
**а) рис. 6.45, а; б) рис. 6.45, б; в) рис. 6.45, в**

З рис. 6.46 видно, що рівень звукового тиску для перетворювачів з додатковою індуктивністю (рис. 6.45) зріс приблизно на 24 дБ у порівнянні з перетворювачами без індуктивності (рис. 6.41). Для схем з  $\alpha \approx 90^\circ$  (рис. 6.45, а, б) рівень звукового тиску зріс приблизно на 10 дБ, у порівнянні з перетворювачем з  $\alpha = 0^\circ$  (рис. 6.45, в) [44], [52].

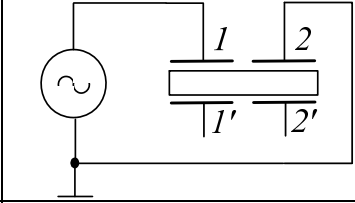
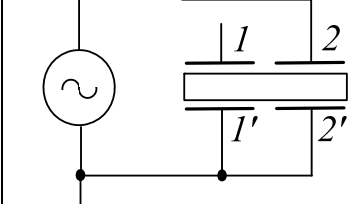
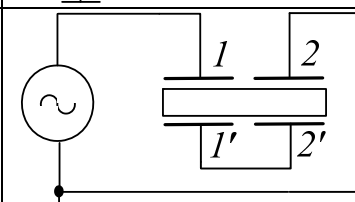
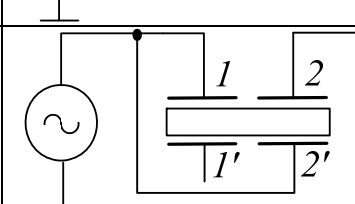
Метою подальших досліджень було визначення звукового тиску в залежності від схеми підключення перетворювача до генератора. Одночасно вимірювалася ємність між відповідними електродами  $C_{ij}$  на частоті низькочастотних коливань.

Для експериментів використовувався дисковий п'єзоелемент  $\text{Ø}50 \times 1,2$  мм з п'єзокераміки ЦТБС-3, який найчастіше використовується в електроакустиці. Частота низькочастотних коливань для даного п'єзоелемента становила 3,07 кГц. На вхід п'єзоелектричного перетворювача подавалася напруга 2 В. Амплітудно-частотні характеристики знімалися за допомогою шумоміра RFT (на висоті 0,5 см). Результати вимірювань наведені в табл. 6.5.

**Таблиця 6.5. Результати вимірювань перетворювача з розділеними електродами**

№	Схема	$C$ , нФ	$P_{36}$ , дБ
1		$C_{1-1'} = 22,5$	70
2		$C_{2-2'} = 7,1$	77
3		$C_{\Sigma} = 30,6$	72
4		$C_{1-2'} = 0,76$	79,5
5		$C_{2-1'} = 0,74$	79,5

## Продовження таблиці 6.5

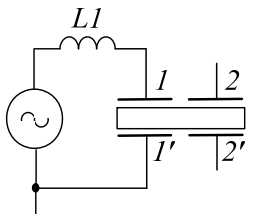
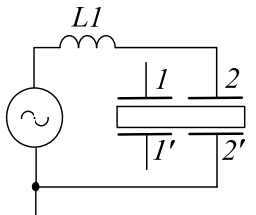
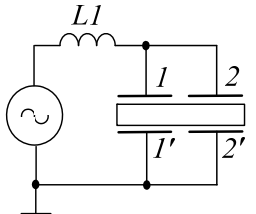
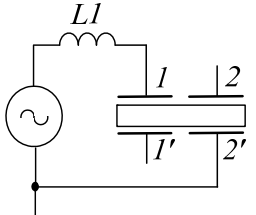
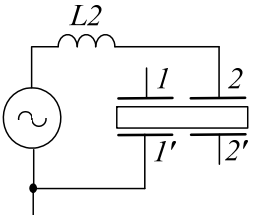
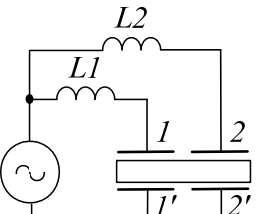
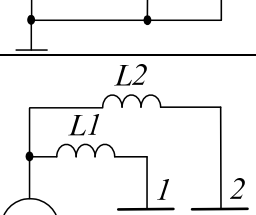
6		$C_{1-2} = 0,77$	79,5
7		$C_{\Sigma} = 7,3$	80,5
8		$C_{\Sigma} = 5,4$	80,5
9		$C_{\Sigma} = 7,4$	81,5

З табл. 6.5 випливає, що при підключенні генератора до електродів п'єзоелектричного перетворювача таким чином, щоб кут  $\alpha$  між електричним полем і вектором поляризації наближався до  $90^\circ$ , звуковий тиск зріс на 7,5 дБ. При комбінованому підключенні електродів п'єзоелектричного перетворювача звуковий тиск збільшився на 9,5 дБ.

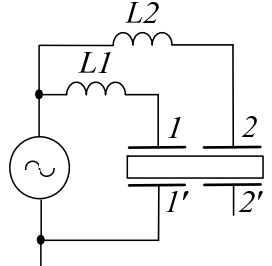
Для збільшення звукового тиску на вході перетворювача був створений коливальний контур з додаткової індуктивності  $L_{\text{дод}}$  і міжелектродної ємності п'єзоелемента  $C_{\text{ел}}$  (схеми 1–5, табл. 6.6).

На схемах 6–8 [53], [54], [55] (табл. 6.6) збудження п'єзоелемента проводиться по двох каналах, при цьому використовуються дві індуктивності. У схемі 6 використовується традиційне підключення частин п'єзоелемента ( $\alpha = 0^\circ$ ). У схемах 7 і 8 використовується одночасно як традиційне підключення ( $\alpha = 0^\circ$ ) (електроди 2–2', схема 7; електроди 1–1', схема 8), так і при  $\alpha \approx 90^\circ$  (електроди 1–2', схема 7; електроди 2–1', схема 8).

**Таблиця 6.6. Результати вимірювань перетворювача з додатковими індуктивностями**

№	Схема	$C$ , нФ	$L$ , Гн	$P_{36}$ , дБ
1		$C_{1-1'} = 22,5$	$L_1 = 0,109$	93
2		$C_{2-2'} = 7,1$	$L_1 = 0,36$	103
3		$C_{\Sigma} = 30,6$	$L_1 = 0,082$	95
4		$C_{1-2'} = 0,76$	$L = 3,34$	108
5		$C_{2-1'} = 0,74$	$L = 3,41$	108
6		$C_{1-1'} = 22,5$ $C_{2-2'} = 7,1$	$L_2 = 0,352$ $L_1 = 0,111$	109
7		$C_{2-2'} = 7,1$ $C_{1-2'} = 0,76$	$L_1 = 3,50$ $L_2 = 0,56$	111

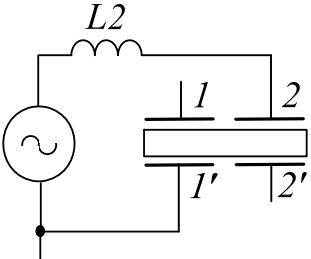
## Продовження таблиці 6.6

8		$C_{1-1'} = 22,5$ $C_{2-1'} = 0,74$	$L_1 = 0,141$ $L_2 = 3,41$	114
---	---	--	-------------------------------	-----

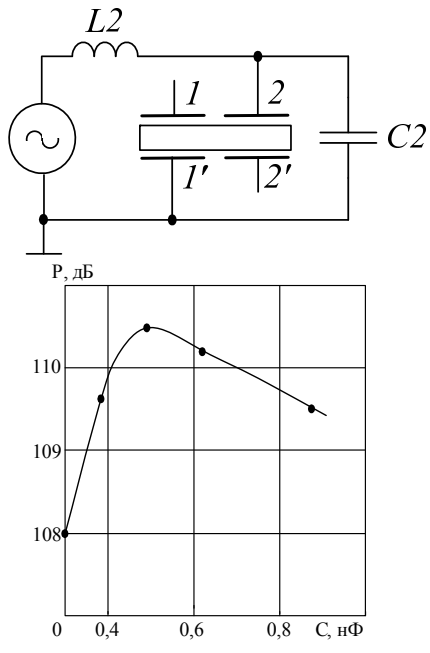
З табл. 6.6 випливає, що для схем з кутом  $\alpha \approx 90^\circ$  (схеми 4, 5) звуковий тиск на 5-15 дБ вище, ніж для схем з традиційним підключенням. Перетворювач за традиційною схемою з однією індуктивністю (схема 3) створює менший звуковий тиск, ніж перетворювач за традиційною схемою з двома індуктивностями (схема 6) [56], [57].

В таблиці 6.7 приведено дослідження зміни звукового тиску при внесенні в схему перетворювача додаткової ємності, паралельної до його електродів.

**Таблиця 6.7. Результати вимірювань перетворювача з розділеними електродми при введенні додаткової ємності**

№	Схема	$C$ , нФ	$L$ , Гн	$P_{зв}$ , дБ
1		$C_{2-1'} = 0,74$	$L_2 = 3,41$ (102 Ом)	108

## Продовження таблиці 6.7

2		$C_{2-1'} = 0,74$ $+C_2 = 0,39$	$L_2 = 2,22$ (87 Ом)	109,7
		$+C_2 = 0,48$	$L_2 = 2,06$ (98 Ом)	110,5
		$+C_2 = 0,61$	$L_2 = 1,873$ (88 Ом)	110,2
		$+C_2 = 0,87$	$L_2 = 1,577$ (65 Ом)	109,5

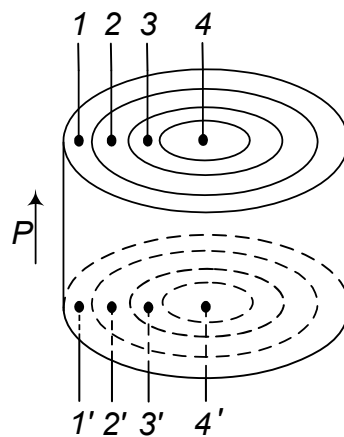


Рис. 6.47. Дисковий поліелектродний п'єзоелемент з розділеними електродами

Параметри поліелектродного переворювача, показаного на рис. 6.47:

– діаметри утворених електродів:  $d_4 = 13$  мм,  $d_{3,4} = 37$  мм,  $d_{2,3,4} = 51$  мм,  $d_{1,2,3,4} = 66$  мм;

– площі електродів:  $S_4 = 132,7$  мм<sup>2</sup>,  $S_{3,4} = 1074,7$  мм<sup>2</sup>,  $S_{2,3,4} = 2041,8$  мм<sup>2</sup>,  $S_{1,2,3,4} = 3419,5$  мм<sup>2</sup>;

– міжелектродні ємності:  $C_{1-1'} = 6,12$  нФ,  $C_{2-2'} = 4,86$  нФ,  $C_{3-3'} = 5,33$  нФ,  $C_{4-4} = 0,76$  нФ.

Частота низькочастотних коливань для даного перетворювача становила 4,02 кГц. На вхід п'єзоелектричного перетворювача подавалася напруга 2 В. Амплітудно-частотні характеристики знімалися за допомогою шумоміра RFT (на висоті 1 см). Результати вимірювань наведені в табл. 6.8.

**Таблиця 6.8. Результати вимірювань багатосекційного перетворювача**

№	Схема	$C$ , нФ	$L$ , Гн	$P_{3\delta}$ , дБ
1		1,96	0,763	103,5
2		1,96	0,762	103,5
3		$C_1 = 11,09$ $C_2 = 1,96$	$L_1 = 0,231$ $L_2 = 0,792$	107,5
4		$C_1 = 1,96$ $C_2 = 6,08$	$L_1 = 0,848$ $L_2 = 0,404$	107,5

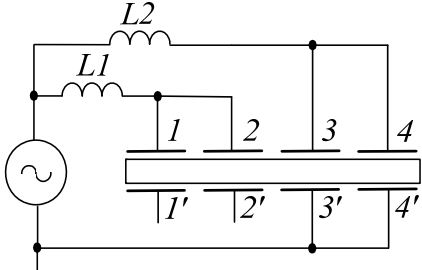
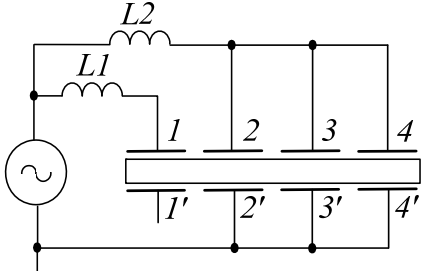
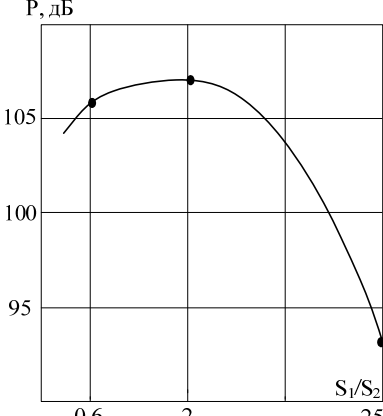
В таблиці 6.9 представлені результати дослідження поліелектродного п'єзоелектричного перетворювача при різному співвідношенні площ електродів ( $S_1$  – площа зовнішнього кільця;  $S_2$  – площа внутрішнього диску).



**Таблиця 6.9. Результати вимірювань багатосекційного перетворювача при різному співвідношенні площ електродів**

№	Схема	$C$ , нФ	$L$ , Гн	$P_{зв}$ , дБ
1		$C_1 = 6,12$ нФ $C_2 = 2,38$ нФ $S_1 = 1377,7$ $S_2 = 2041,8$ $S_1/S_2 = 0,675$	$L_1 = 0,479$ Гн $L_2 = 0,698$ Гн	106 дБ
2		$C_1 = 10,92$ $C_2 = 1,83$ нФ $S_1 = 2344,8$ $S_2 = 1074,7$ $S_1/S_2 = 2,182$	$L_1 = 0,162$ Гн $L_2 = 0,954$ Гн	107,5 дБ
3		$C_1 = 16,52$ $C_2 = 0,71$ нФ $S_1 = 3286,8$ $S_2 = 132,7$ $S_1/S_2 = 24,769$	$L_1 = 0,102$ Гн $L_2 = 2,07$ Гн	98,5 дБ
4		$C_1 = 0,69$ нФ $C_1' = 0,86$ $C_2 = 0,77$ нФ $S_1 = 3286,8$ $S_2 = 132,7$ $S_1/S_2 = 24,769$	$L_1 = 1,15$ Гн $L_2 = 2,47$ Гн	93 дБ

## Продовження таблиці 6.9

5		$C_1 = 1,84 \text{ нФ}$ $C_2 = 5,98 \text{ нФ}$ $S_1 = 2344,8$ $S_2 = 1074,7$ $S_1/S_2 = 2,182$	$L_1 = 0,905 \text{ Гн}$ $L_2 = 0,411 \text{ Гн}$	107 дБ
6		$C_1 = 2,35 \text{ нФ}$ $C_2 = 10,36$ $S_1 = 1377,7$ $S_2 = 2041,8$ $S_1/S_2 = 0,675$	$L_1 = 0,746 \text{ Гн}$ $L_2 = 0,213 \text{ Гн}$	106 дБ
				

Як видно з табл. 6.9, для кожної конкретної конструкції п'єзоелектричного перетворювача існує оптимальне (в сенсі величини вихідного сигналу) співвідношення площ електродів.

#### 6.4. Висновки до розділу

Підводячи підсумки всього вищесказаного, можна встановити наступне.

Для аналізу поверхні п'єзоелектричних перетворювачів використаний метод атомно-силової мікроскопії, який дозволив на початковій стадії експлуатації визначати приховані мікродфекти (мікротріщини, відколи, точки і т.п.) і мікронерівності, які не можуть бути визначені методами

оптичної та растрової електронної мікроскопії та наявність яких впливає на безперебійну роботу і надійність експлуатації п'єзоелектричних перетворювачів.

Показана перспектива використання методу термовакуумного напилення при отриманні покриттів електродів на виробках з п'єзоелектричної кераміки сорту ЦТС.

Встановлено, що при експлуатації п'єзоелектричних перетворювачів відбувається прогресування мікрodefektів (збільшення середніх значень мікронерівностей, розвиток тріщин тощо), що призводять до передчасного виходу останніх з ладу.

Встановлено, що температура п'єзокерамічного зразка в процесі електронно-променевого модифікування срібних покриттів є необхідною умовою формування якісних електродів, для яких зведена до мінімуму можливість виникнення defektів від дії зовнішніх силових навантажень та вібрацій. В той же час встановлено залежність зміни структури та мікрогеометрії модифікованих покриттів на п'єзокераміці від параметрів стрічкового електронного потоку.

Встановлено, що утворені за запропонованою технологією срібні покриття на п'єзоелектричних елементах є більш рівномірними та однорідними в порівнянні з покриттями, отриманими у традиційний промисловий спосіб.

Розроблено конструкції пристроїв п'єзоелектроніки на основі п'єзоелектричних елементів з розділеними електродами (багатофункціональний пристрій, п'єзоелектричний суматор, смуговий та режекторний фільтр на основі п'єзоелектричного перетворювача з розділеними електродами). Розглянуто можливості реалізації смугових та режекторних фільтрів в об'ємі одного п'єзоелемента, застосування п'єзоелектричних суматорів у віброакустичній фізіотерапії.

За допомогою енергосилового методу синтезу розроблено та досліджено п'єзоелектричні перетворювачі з частковим електродуванням

поверхні. Використання конструкції з енергосиловою структурою дозволило підвищити рівень звукового тиску приблизно на 12 дБ порівняно з перетворювачем, побудованим за традиційною схемою.

Для подальшого збільшення звукового тиску застосовувалася одна з технологій синтезу п'єзоелектричних перетворювачів, зокрема технологія додаткових елементів. Рівень звукового тиску для перетворювачів з додатковою індуктивністю зріс приблизно на 24 дБ у порівнянні з перетворювачами без індуктивності.

Проведено дослідження звукового тиску в залежності від схеми підключення перетворювача до генератора. При підключенні генератора до електродів п'єзоелемента таким чином, щоб кут  $\alpha$  між електричним полем і вектором поляризації наближався до  $90^\circ$ , звуковий тиск зріс на 7,5 дБ. При комбінованому підключенні електродів п'єзоелектричного перетворювача звуковий тиск збільшився на 9,5 дБ. При цьому, для схем з додатковими індуктивностями та з кутом  $\alpha \approx 90^\circ$  звуковий тиск на 5-15 дБ вище, ніж для схем з традиційним підключенням. В той же час слід зауважити, що перетворювач побудований за традиційною схемою з однією індуктивністю створює менший звуковий тиск, ніж перетворювач побудований за традиційною схемою з двома індуктивностями.

#### **Список використаних джерел:**

- [1] "DIN ISO 2859-1-2014. Sampling procedures for inspection by attributes – Part 1: Sampling schemes indexed by acceptance quality limit (AQL) for lot-by-lot inspection (ISO 2859-1:1999 + Cor. 1:2001 + Amd.1:2011); Text in German and English; 01.08.2014.". .
- [2] В.М. Шарапов, А.М. Гуржій, М.О. Бондаренко, и Ю.Ю. Бондаренко, "Исследование характеристик токопроводящих электропроводных пьезокерамических элементов", *Вісник Черкаського державного технологічного університету, спецвипуск*, с. 255–257, 2007.

- [3] Р.Г. Джагупов и А.А. Ерофеев, *Пьезоэлектронные устройства вычислительной техники, систем контроля и управления: Справочник*. СПб.: Политехника, 1994, 608 с.
- [4] М.А. Бондаренко и др., "Формирование упорядоченных наноструктур на пьезоэлектрической керамике системы ЦТС термическим осаждением в вакууме", в *Эффективность реализации научного, ресурсного и промышленного потенциала в современных условиях*, сел. Славське Львовской обл., 2010, с. 159–160.
- [5] М.О. Бондаренко, "Дослідження впливу низькоенергетичного електронного потоку на мікрогеометрію поверхонь п'єзокерамічних елементів", *Труди Одеського політехнічного університета: науч. и производ.-практ. сборник по техн. и естест. наукам*, № 2(32), с. 149–153, 2009.
- [6] V.V. Medianyuk, Yu.Yu. Bondarenko, S.V. Bazilo, and M.O. Bondarenko, "Research of Current-Conducting Electrodes of Elements from Piezoelectric Ceramics Modified by the Low-Energy Ribbon-Shaped Electron Stream", *Journal of Nano- and Electronic Physics*, vol. 10, no. 6, pp. 06012-1-06012–6, 2018.
- [7] В.А. Ващенко, М.О. Бондаренко, Г.В. Канашевич, і ін., "Технологічні основи отримання впорядкованих наноструктур на поверхнях зондів для атомно-силової мікроскопії", Черкаси, звіт про науково-дослідну роботу, 2012.
- [8] В.С. Антонюк, Г.С. Тимчик, Ю.Ю. Бондаренко, Ю.І. Коваленко, М.О. Бондаренко, і Р.П. Гайдаш, *Покриття у приладобудуванні*. К.: НТТУ «КПІ», 2016, 360 с.
- [9] V.S. Antonyuk, M.O. Bondarenko, and Yu.Yu. Bondarenko, "Studies of thin wear-resistant carbon coatings and structures formed by thermal evaporation in a vacuum on piezoceramic materials", *Journal of Superhard Materials*, vol. 34, no. 4, pp. 248–255, 2012.

- [10] М.О. Бондаренко, Н.І. Божко, О.В. Котляр, і П.І. Куриленко, "Вимірювання товщини тонких композиційних покриттів в процесі їхнього осадження у вакуумі", на *VIII МНТК «Приладобудування 2009: стан і перспективи»*, Київ, 2009.
- [11] В.А. Ващенко, М.О. Бондаренко, Г.В. Канашевич, і ін., "Технологічні основи електронної нанообробки поверхонь виробів із п'єзоелектричних керамік", Черкаси, звіт про науково-дослідну роботу, 2010.
- [12] О.Н. Петрищев, *Гармонические колебания пьезокерамических элементов. Часть 1. Гармонические колебания пьезокерамических элементов в вакууме и метод резонанса – антирезонанса*. Киев: Аверс, 2012, 300 с.
- [13] М.А. Бондаренко, К.В. Базило, Ю.Ю. Бондаренко, и В.В. Медяник, "Изучение микроэлектромеханических пьезоэлектрических структур методом атомно-силовой микроскопии", в *Датчики, прилади та системи – 2017: тези VI Міжнародної науково-технічної конференції*, Черкаси – Миколаїв – Херсон – Лазурне, 2017, с. 45–48.
- [14] Г.М. Дубровська, Г.В. Канашевич, Н.І. Божко, М.О. Бондаренко, і др., *Приклади застосування фізичних методів дослідження структури поверхні*. Sylhet, Bangladesh: Shobuz Biponi, Udoyon Offset Printers, 2007, 248 с.
- [15] А.А. Суслов и др., "Атомно-силовой микроскоп NT-206: новые возможности", на *6-й Белорусский семинар по сканирующей зондовой микроскопии "БелСЗМ-6"*, Минск, 2004.
- [16] К.В. Базило, С.О. Білокінь, М.О. Бондаренко, і В.В. Медяник, "Дослідження мікроелектромеханічних п'єзоелектричних структур методом атомно-силової микроскопії", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 3, с. 21–26, 2018.
- [17] V. Sharapov, *Piezoceramic Sensors*. Springer, 2011, 500pp.
- [18] В.М. Шарапов, И.Г. Минаев, Ж.В. Сотула, К.В. Базило, и Л.Г. Куницкая, *Пьезокерамические трансформаторы и датчики*. Черкасы: Вертикаль, 2010, 278 с.

- [19] V. Sharapov, A. Vladišauskas, K. Bazilo, L. Kunitskaya, and Zh. Sotula, "Methods of synthesis of piezoceramic transducers: spatial energy force structure of piezoelement", *Ultrasound, Kaunas, Lithuania, No. 4*, pp. 44–50, 2009.
- [20] В.М. Шарапов, О.Н. Петрищев, К.В. Базило, Ж.В. Сотула, и А.И. Маштапа, "Классификация пьезоэлектрических трансформаторов", *Вісник Черкаського державного технологічного університету, № 2*, с. 58–61, 2014.
- [21] В.М. Плужников и В.С. Семенов, *Пьезокерамические твердые схемы*. М.: Энергия, 1971, 168 с.
- [22] В.М. Шарапов, К.В. Базило, Л.Г. Куницкая, Ж.В. Сотула, и С.А. Филимонов, "Сумматоры на основе дискового мономорфного пьезотрансформатора", *Вісник Черкаського державного технологічного університету, № 4*, с. 61–64, 2009.
- [23] V. Sharapov, R. Kažys, A. Vladišauskas, K. Bazilo, and D. Romanenko, "Adders on a basis of piezoceramic transformers", *Ultrasound, Kaunas, Lithuania, No. 1*, pp. 40–44, 2011.
- [24] В.М. Шарапов і К.В. Базіло, "Спосіб створення ультразвукових коливань за допомогою п'єзоелектричного перетворювача", патент України на корисну модель №55516, Декабрь 10, 2010.
- [25] В.М. Шарапов, Ж.В. Сотула, Л.Г. Куницкая, и К.В. Базило, "Об одном способе создания низкочастотных акустических колебаний с помощью пьезокерамического излучателя", *Вісник Черкаського державного технологічного університету, № 1*, с. 62–65, 2010.
- [26] В.П. Олейник, *Терапевтические аппараты и системы*. Харьков: Нац. аэрокосмический ун-т „Харьк. авиац. ин-т“, 2002, 93 с.
- [27] В.С. Улащик, *Физиотерапия. Универсальная медицинская энциклопедия*. Мн.: Книжный Дом, 2008, 640 с.
- [28] В.Г. Ясногородский, *Электротерапия*. Москва: Медицина, 1987, 240 с.

- [29] K.V. Bazilo and V.V. Medianik, "The research and improvement of piezoelectric transducers for vibroacoustic physiotherapy", in *Проблеми інформатизації: матеріали другої міжнародної науково-технічної конференції*, Черкаси: ЧДТУ; Тольятті: ТДУ, 2014, p. 31.
- [30] K.V. Bazilo and V.V. Medianyk, "Research of piezoelectric adders for vibroacoustic physio-therapy", in *Фізика, електроніка, електротехніка «ФЕЕ–2015»: Матеріали та програма наук.-техн. конф.*, Суми, 2015, p. 196.
- [31] V.V. Medianyk and K.V. Bazilo, "Application of informational and measuring systems in vibro-acoustic therapy", in *Проблеми інформатизації: матеріали третьої міжнародної науково-технічної конференції*, Черкаси: ЧДТУ; Баку: ВА ЗС АР; Бельсько-Бяла: УТіГН; Полтава: ПНТУ, 2015, p. 77.
- [32] K.V. Bazilo and V.V. Medianyk, "Research of frequency generator for vibroacoustic therapy device", in *Фізика, електроніка, електротехніка «ФЕЕ–2016»: Матеріали та програма наук.-техн. конф.*, Суми, 2016, p. 214.
- [33] A. Arnau Vives, *Piezoelectric Transducers and Applications*. Springer, 2008, 549pp.
- [34] Ahmad Safari and E. Koray Akdogan, *Piezoelectric and Acoustic Materials for Transducer Applications*. Springer, 2008, 485pp.
- [35] G. Ciofani and A. Menciassi, *Piezoelectric Nanomaterials for Biomedical Applications*. Springer, 2012, 250pp.
- [36] K.V. Bazilo, O.N. Petrishchev, Yu.Yu. Bondarenko, L.G. Kynytska, and V.V. Medianik, "The research of piezoelectric electrodes for vibroacoustic interference therapy", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 2, pp. 12–15, 2015.
- [37] Л.А. Бессонов, *Теоретические основы электротехники: Электрические цепи*. М.: Высшая школа, 1984, 559 с.



- [38] Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, и С.В. Страхов, *Основы теории цепей*. М.: Энергия, 1975, 752 с.
- [39] В.М. Шарапов, К.В. Базило, Р.В. Трёмбовецкая, и В.В. Туз, "Преобразователи с пьезотрансформаторами в схемах полосовых и режекторных электрических фильтров", *Вісник Черкаського державного технологічного університету, № 1*, с. 22–26, 2015.
- [40] V.M. Sharapov, K.V. Bazilo, and R.V. Trembovetskaaya, "Piezoelectric transducers in the schemes of bandpass and bandstop electrical filters", in *Фізика, електроніка, електротехніка «ФЕЕ–2015»: Матеріали та програма наук.-техн. конф.*, Суми, 2015, p. 189.
- [41] V. Sharapov, Z. Sotula, and L. Kunickaya, *Piezo-Electric Electro-Acoustic Transducers*. Springer, 2014, 230pp.
- [42] В.В. Богородский, Л.А. Зубарев, Е.А. Корепин, и В.И. Якушев, *Подводные электроакустические преобразователи. Расчет и проектирование*. Л.: Судостроение, 1983, 248 с.
- [43] В.М. Шарапов, И.Г. Минаев, Ж.В. Сотула, К.В. Базило, и В.В. Самойленко, "Об эффекте возникновения изгибных колебаний в мономорфных пьезоэлементах", *Вісник Черкаського державного технологічного університету, № 3*, с. 60–62, 2011.
- [44] В.М. Шарапов, К.В. Базило, и Ж.В. Сотула, "Повышение уровня звукового давления низкочастотных колебаний преобразователей на основе дисковых мономорфных пьезоэлементов", *Вісник Черкаського державного технологічного університету, № 4*, с. 71–73, 2011.
- [45] Yu.Yu. Bondarenko, K.V. Bazilo, and L.G. Kunytska, "The increase of sound pressure level of monomorph transducers with the use of spatial energy force structure of a piezoelement", *Вісник Черкаського державного технологічного університету, № 3*, pp. 5–9, 2015.
- [46] Ю.Ю. Бондаренко, К.В. Базіло, і Л.Г. Куницька, "Підвищення ефективності електроакустичних перетворювачів шляхом зміни енергосилової структури п'єзоелемента", в *Датчики, прилади та*

*системи – 2017: тези VI Міжнародної науково-технічної конференції, Черкаси – Миколаїв – Херсон – Лазурне, 2017, с. 58–60.*

- [47] К.В. Базіло, "Схема розрахунку дискового п'єзоелемента з частковим електродуванням поверхонь", *Вісник Хмельницького національного університету, № 6, т. 1, с. 271–281, 2018.*
- [48] С. Bazilo, "Calculation of parameters of tensely deformed state of disk piezoelements with surfaces partially covered by electrodes", *Machines. Technologies. Materials: International scientific journal, vol. 12, no. 9, pp. 362–366, 2018.*
- [49] В.М. Шарапов, "Технологии синтеза пьезокерамических датчиков", *Вісник Черкаського державного технологічного університету, № 3, с. 90–96, 2010.*
- [50] В.М. Шарапов, К.В. Базіло, Ж.В. Сотула, і О.С. Ткаченко, "Електроакустичний перетворювач", патент України на корисну модель №67639, 27.02.2012.
- [51] В.М. Шарапов, К.В. Базіло, Ж.В. Сотула, і О.С. Ткаченко, "Електроакустичний перетворювач", патент України на корисну модель №67640, 27.02.2012.
- [52] В.М. Шарапов, О.Н. Петрищев, А.М. Прохоренков, К.В. Базіло, и Ж.В. Сотула, "Методы повышения звукового давления мономорфных акустических пьезоэлементов", *Известия вузов – Приборостроение, № 5, с. 47–50, 2014.*
- [53] В.М. Шарапов, К.В. Базіло, В.М. Заїка, О.М. Петрищев, і Ж.В. Сотула, "Електроакустичний перетворювач", патент України на корисну модель №97758, 10.04.2015.
- [54] К.В. Базіло, О.М. Петрищев, Ю.Ю. Бондаренко, В.В. Тичков, і Р.В. Трембовецька, "Електроакустичний перетворювач", патент України на корисну модель №115962, 10.05.2017.

- [55] В.М. Шарапов, К.В. Базіло, В.М. Заїка, О.М. Петріщев, і Ж.В. Сотула, "Електроакустичний перетворювач", патент України на корисну модель №97754, 10.04.2015.
- [56] V.M. Sharapov, O.N. Petrishchev, Zh.V. Sotula, and K.V. Bazilo, "The increase of the sound pressure created by monomorphic disk piezoelements", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 3, pp. 38–42, 2014.
- [57] Ю.Ю. Бондаренко, К.В. Базіло, і В.М. Заїка, "Розробка мономорфних перетворювачів з використанням просторово-кутової взаємодії вектора електричного поля та вектора поляризації", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 1, с. 78–88, 2016.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішена **актуальна науково-прикладна проблема** створення високоефективних п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування з одночасним підвищенням ступеня інтеграції та гібридизацією експлуатаційних властивостей шляхом створення нових та удосконалення існуючих моделей та методів синтезу дискових п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами, що повністю відповідає поставленій меті.

При виконанні дисертаційної роботи отримані такі наукові результати:

1. Удосконалено математичну модель для розрахунку електричного імпедансу коливального п'єзокерамічного диска, що враховує радіальний і аксіальний компоненти вектору зміщення матеріальних частинок п'єзокераміки, який коливається в широкому діапазоні частот. Вперше надана оцінка діелектричної проникності  $\chi_{33}^{\sigma}$  в області низьких частот через матеріальні константи, які використовуються для опису високочастотного напружено-деформованого стану п'єзокераміки.

2. Розроблено метод експериментального визначення матеріальних констант п'єзокераміки, яка дозволяє в рамках експерименту на одному зразку визначити три (з чотирьох не рівних один одному) модуля пружності  $c_{11}^E$ ,  $c_{12}^E$  і  $c_{33}^E$ , два (з двох не рівних один одному) п'єзомодулі  $e_{31}$  і  $e_{33}$ , і одне (з двох не рівних один одному) значення діелектричної проникності  $\chi_{33}^{\epsilon}$ , що дозволило підвищити точність характеристик у 2-2,5 рази.

3. Показано, що п'єзоелектричний дисковий перетворювач з розділеними електродами є функціональним елементом п'єзоелектроніки з негативним зворотним електроакустичним зв'язком, та чутливість частотної характеристики п'єзоелектричного перетворювача до значень імпедансу електричного навантаження. На основі цього побудовані математичні моделі

п'єзоелектричного перетворювача з кільцевим та дисковим електродами в первинному електричному колі, що дозволило отримати розрахункові залежності модуля коефіцієнта трансформації найбільш точно наближені до експериментальних даних (розходження між теоретичними та експериментальними даними не перевищували 2 – 3%).

4. Вперше запропонована схема побудови математичної моделі чотирьохсекційного дискового п'єзоелектричного перетворювача, що зберігає свою логічну конструкцію в широкому діапазоні значень числа секцій. Розглянуто особливості побудови математичних моделей багатосекційних дискових п'єзоелектричних перетворювачів, які виникають при груповому включенні секцій, можливість побудови багатофункціональних п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування.

5. Вперше сформульована теорія невісесиметричних планарних коливань тонкого п'єзокерамічного диска, яка заснована на адекватному описі фізичного стану коливального п'єзоелектрика. Експериментальні дослідження п'єзокерамічного перетворювача з секторним електродуванням робочої поверхні диска показали, що в міру зменшення кута розкриття сектора у формуванні напружено-деформованого стану диска починають приймати все більше число невісесиметричних мод, і число резонансів після першого вісесиметричного радіального резонансу зростає.

6. Отримала розв'язок задача про порушення коливань поперечного вигину в біморфному п'єзоелектричному перетворювачі за рахунок прикладання різниці електричних потенціалів, яку виробляє реальний генератор з вихідним електричним опором. Побудовано конструкцію та математичну модель біморфного дискового п'єзоелектричного перетворювача з симетричним електричним навантаженням у вторинному електричному колі, що побудована з мінімальним числом спрощуючих реальну ситуацію припущень.

7. Розглянута технологія застосування додаткових елементів, яка не потребує доробок п'єзоелемента, а зміна характеристик перетворювача здійснюється за рахунок зовнішніх для п'єзоелемента електричних кіл. За допомогою енергосилового методу синтезу розроблено та досліджено п'єзоелектричні перетворювачі з розділеними електродами, що дозволило управляти половою частот пропускання перетворювачів та підвищити чутливість датчику тиску у 1,5-2 рази.

8. Показана перспектива використання методу термовакуумного напилення при отриманні покриттів електродів на виробках з п'єзоелектричної кераміки сорту ЦТС. Встановлено, що утворені за запропонованою технологією срібні покриття на п'єзоелектричних перетворювачах є більш рівномірними та однорідними в порівнянні з покриттями, отриманими у традиційний промисловий спосіб, а технологічна можливість методу термовакуумного напилення дозволяє створювати багатофункціональні п'єзоелектричні перетворювачі на єдиній основі чим підвищувати ступінь інтеграції у 3-4 рази.

9. Аналіз результатів АСМ досліджень поверхонь п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування дозволив встановити, що в процесі тривалої експлуатації відбувається руйнування їх поверхонь (збільшення мікронерівностей від 805...815 нм до 1130...1180 нм (поверхні отримані традиційним методом), а також від 180...210 нм до 680...710 нм (поверхні отримані методом термічного напилення у вакуумі), поява мікротріщин, відколів та інших мікродефектів).

10. Технологія додаткових елементів дозволила підвищити рівень звукового тиску для п'єзоелектричного перетворювачів з додатковою індуктивністю приблизно на 5-10 дБ у порівнянні з перетворювачами без індуктивності. Для схем з додатковими індуктивностями та з кутом  $\alpha \approx 90^\circ$  звуковий тиск збільшився на 10-15 дБ порівняно зі схемами з традиційним підключенням.

11. Отримані наукові результати знайшли застосування (підтверджено актами впровадження) на підприємствах ПрАТ “Укрп’єзо” (м. Черкаси), ТОВ “Лілея” (м. Київ) та ПП “Сенсорна електроніка” (м. Черкаси). Окремі результати дисертації використовуються у навчальному процесі НТУУ "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського" та Черкаського державного технологічного університету.

## **ДОДАТКИ**



## **ДОДАТОК А**

**Документація про наукову значимість, практичне використання та  
впровадження основних результатів роботи**

# ПРИВАТНЕ ПІДПРИЄМСТВО "СЕНСОРНА ЕЛЕКТРОНІКА"

18029, Черкаси, вул. Олени Теліги, 7/69, тел.: (0472)66-26-97, Код ЄДРПОУ 33752446

від 16.12.2019 р. № 39/01

## АКТ

### ПРО ВПРОВАДЖЕННЯ ТА ПРАКТИЧНЕ ВИКОРИСТАННЯ

**результатів дисертаційного дослідження Базіла Костянтина Вікторовича на тему «Теорія побудови дискових п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами для комп'ютерних систем критичного застосування»**

Дослідження, які представлені у дисертаційній роботі Базіла К.В., є актуальними та направлені на покращення точності, чутливості та відтворюваності результатів синтезу та контролю п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування. Наукова новизна та практичні результати дисертації мають важливе прикладне значення, в тому числі і для наукових та виробничих завдань нашого підприємства.

Приватне підприємство «Сенсорна електроніка» займається розробкою та виробництвом елементів сенсорної та інших типів електроніки та систем на їх основі: датчиків різних фізичних величин, елементів та вузлів вимірювальної та комп'ютерної техніки, систем охорони та захисту інформації тощо.

Окрему цікавість у нас викликали розроблені Базіло К.В. методика експериментального визначення матеріальних констант п'єзокераміки, а саме спосіб визначення фізико-механічних констант п'єзокерамічних матеріалів, що захищений патентом України на корисну модель № 119993, та методи модифікації п'єзоелектричних перетворювачів шляхом використання поліелектродної конструкції, технології додаткових елементів, просторової енергосилової структури п'єзоелектричних перетворювачів, що захищені патентами України на корисну модель №67640 та № 97752.

Зазначені розробки будуть використані приватним підприємством «Сенсорна електроніка» та спрямовані на розвиток засобів вимірювального контролю, що має важливе прикладне значення для різноманітних галузей української промисловості. Обсяги виробництва та терміни реалізації будуть визначені після завершення маркетингових досліджень. Також ці результати можуть зацікавити науково-дослідні організації та підприємства, що займаються розробкою та дослідженням компонентів пристроїв п'єзотехніки, а також комп'ютерних систем критичного застосування та є партнерами нашого підприємства.

Директор  
ПП «Сенсорна електроніка»



М. П. Мусієнко

**ПРИВАТНЕ  
АКЦІОНЕРНЕ  
ТОВАРИСТВО  
"УКРП'ЄЗО"**



**ЧАСТНОЕ  
АКЦИОНЕРНОЕ  
ОБЩЕСТВО  
"УКРПЬЕЗО"**

вул. Сумгайтська, 10, м. Черкаси, 18016, Україна  
Телефон: +38(0472) 66-16-10, 66-65-36  
Факс: +38(0472) 360300  
Веб-сайт: <http://www.ukrpiezo.by.ru>

ул. Сумгайтская, 10, г. Черкассы, 18016, Украина  
Телефон: +38(0472) 66-16-10, 66-65-36  
Факс: +38(0472) 360300  
Веб-сайт: <http://www.ukrpiezo.by.ru>

« 19 » 12 20 19 р. № 106

на № \_\_\_\_\_ від « \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

**ДОВІДКА**

**про наукову значимість, практичне використання і впровадження  
результатів експериментальних досліджень дисертаційної роботи  
Базіла Костянтина Вікторовича на тему: «Теорія побудови дискових  
п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами для  
комп'ютерних систем критичного застосування»**

Результати наукових досліджень, що виконані Базілом К.В., мають важливе наукове та практичне значення для нашого підприємства, де використовуються для визначення матеріальних констант виробів мікросистемної техніки з п'єзокераміки, що знайшли застосування в комп'ютерних системах критичного застосування, точному приладобудуванні та функціональній електроніці.

Автором запропоновано метод експериментального визначення матеріальних констант п'єзокераміки, який, на відміну від відомих методів, дозволяє в рамках одного експерименту визначити три модуля пружності, два п'єзомодулі та одне значення діелектричної проникності для отримання змістовних і достовірних

кількісних оцінок параметрів фізичного стану п'єзоелектричних перетворювачів.

В результаті математичної обробки результатів експериментальних досліджень п'єзоелектричних елементів, що використовуються на нашому підприємстві в різноманітних елементах виробів мікросистемної техніки (резонаторах кварцових УРК02, мікрогенераторах ГК21-ТК, фільтрах УФП2П6-10,0М-2,7К), були отримані високоточні та якісні значення матеріальних констант, а також спрогнозовано термін експлуатації таких виробів. В той же час своєчасне та оперативне діагностування поверхневих дефектів методом атомно-силової мікроскопії, а також усунення відхилень експлуатаційних показників від діапазону заданих значень дозволяє зменшити кількість браку продукції на етапі її виготовлення та підвищити термін надійної експлуатації виробів.

В цілому сукупність наукових досліджень та розробок в рамках дисертаційної роботи Базило К.В. можна розглядати, як вирішення важливої науково-технічної проблеми, отримання рішення якої дозволяє з високою точністю, чутливістю та відтворюваністю проводити синтез п'єзоелектричних перетворювачів для систем критичного застосування.

Генеральний директор ПрАТ "Укрп'єзо"



 Л. В. Баглій

ДОДАТОК

**РОЗРАХУНОК ЕКОНОМІЧНОГО ЕФЕКТУ**

від впровадження результатів дисертаційної роботи

«Теорія побудови дискових п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами для комп'ютерних систем критичного застосування»

Базіла Костянтина Вікторовича, представленої на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 05.13.05 "Комп'ютерні системи та компоненти"

В дисертаційній роботі створені нові конструкторсько-технологічні рішення, спрямовані на вдосконалення методів модифікації та експериментального визначення матеріальних констант п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування.

Передане для впровадження алгоритмічне забезпечення можна оцінити як інтелектуальну власність, що могла б бути розроблена провідним фахівцем ПрАТ «Укрп'єзо» з окладом 8 064 грн., мінімальна вартість якої (без врахування витрат на матеріали та додаткове обладнання) протягом двох років досліджень з врахуванням додаткової заробітної плати, загально виробничих витрат, адміністративних витрат складає 250 000 грн.

Таким чином, економічний ефект від впровадження результатів дисертаційної роботи Базіла К.В. складає 250 000 грн.

**СТРУКТУРА ЦІНИ  
НА НАУКОВО-ТЕХНІЧНУ ПРОДУКЦІЮ  
по ПрАТ «Укрп'єзо» (станом на 19.12.2019)**

№ п/п	Статті витрат	Всього, грн	
1	Сировина та матеріали		
2	Покупні та комплектуючі вироби		
4	Основна заробітна плата	8 064,00	
5	Додаткова заробітна плата	2 128,90	26,4%
6	Відрахування на соціальні заходи	2 242,44	22%
7	Витрати на службові відрядження	0,00	
8	Паливо та енергія на технологічні цілі	0,00	79%
9	Загальновиробничі витрати	9 273,60	115%
10	Витрати на роботи, що виконують сторонні організації	0,00	
11	Виробнича собівартість	21 708,94	
12	Виробнича собівартість (без врахування вартості покупних та комплектуючих виробів, робіт, що виконують сторонні організації)	0,00	
13	Адміністративні витрати	1 532,16	19%
14	Витрати на збут	0,00	1,4%
15	Загальна собівартість	23 241,10	
16	Прибуток	6 512,68	30%
17	<b>Ціна</b>	<b>29 753,78</b>	
18	<b>ПЦДВ</b>	<b>5 950,76</b>	20%
19	<b>Разом</b>	<b>35 704,54</b>	

при серед. зп = 8 064,00 грн. за місяць.

## ДОВІДКА

**про наукову значимість, практичне використання і впровадження результатів експериментальних досліджень дисертаційної роботи Базіла Костянтина Вікторовича на тему: «Теорія побудови дискових п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами для комп'ютерних систем критичного застосування»**

Дисертаційна робота Базіла К. В. присвячена удосконаленню існуючих та створенню нових методів синтезу п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування.

Вимоги до сучасних комп'ютерних систем критичного застосування регламентуються на світовому та національному рівнях у формі галузевих стандартів, норм та правил, зокрема, це такі вимоги, як: функціональні вимоги; вимоги до надійності виконання функцій; вимоги до стійкості виконання функцій; вимоги до якості функціонування, тощо.

В дисертаційній роботі Базіла К. В. побудовано математичні моделі п'єзоелектричних перетворювачів з кільцевим і дисковим електродами в первинному електричному колі та багатосекційних дискових п'єзоелектричних перетворювачів з можливістю групового включення секцій з урахуванням негативного зворотного електроакустичного зв'язку та значень імпедансу електричного навантаження, що розширює можливість побудови багатофункціональних п'єзоелектричних перетворювачів.

В дисертаційному дослідженні запропоновано комплексний підхід до проектування п'єзоелектричних компонентів (перетворювачів), розроблені нові та вдосконалені існуючі методи синтезу та проектування п'єзоелектричних перетворювачів шляхом використання поліелектродної конструкції, технології додаткових елементів, просторової енергосилової структури п'єзоелектричних перетворювачів, технології термовакуумного

напилення, що забезпечує можливість синтезу п'єзоелектричних перетворювачів з покращеними характеристиками.

Результати дисертаційного дослідження становлять наукову основу для технічної реалізації та впровадження у виробництво методичного, математичного та технічного забезпечення процесу проектування перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування на основі п'єзоелектричних елементів з розділеними електродами.

Отримані результати, а саме створення принципово нових підходів до проектування перетворювачів, а також до створення моделей, методів та засобів синтезу п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування нового покоління має важливе наукове і практичне значення, що доводить практичну значимість даного дослідження, його актуальність та наукову значимість.

Генеральний директор  
малого науково-виробничого  
підприємства ТОВ "ЛІЛЕЯ"



С. Ф. Петренко

**Затверджую**

Декан приладобудівного факультету  
Національного технічного університету  
України "Київський політехнічний  
інститут імені Ігоря Сікорського",  
доктор технічних наук, професор



Г. С. Тимчик

" " 2020 р.

**Акт**

практичного використання результатів дисертаційної роботи

**Базіла Костянтина Вікторовича**

**"Теорія побудови дискових п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами для комп'ютерних систем критичного застосування"**

в навчальному процесі Національного технічного університету України

"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

Ми, що підписались нижче, заступник декана з методичної роботи кандидат технічних наук, доцент Філіппова Марина В'ячеславівна, виконуючий обов'язки завідувача кафедри виробництва приладів доктор технічних наук, професор Антонюк Віктор Степанович, вчений секретар кафедри Матвієнко Сергій Миколайович, склали цей акт про те, що результати дисертаційної роботи кандидата технічних наук, доцента кафедри приладобудування, мехатроніки та комп'ютеризованих технологій Черкаського державного технологічного університету Базіла Костянтина Вікторовича "Теорія побудови дискових п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами для комп'ютерних систем критичного застосування" використовуються в навчальному процесі кафедри виробництва приладів приладобудівного факультету Національного технічного університету "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", а саме: при читанні лекцій, проведенні лабораторних і практичних занять, виконанні курсових проектів з навчальних дисциплін «Спеціальні технології виробництва приладів», "Методологія наукових досліджень", "Процеси та обладнання мікротехніки", "Діагностика та надійність автоматизованих систем", в яких використовуються наступні науково-технічні результати



дисертаційної роботи: методи експериментального визначення матеріальних констант п'єзоелектричних матеріалів, побудови математичних моделей перетворювачів з розділеними електродами та методи модифікації п'єзоелектричних перетворювачів з покращеними характеристиками для комп'ютерних систем.

Також у навчальному процесі використовуються результати дисертаційної роботи викладені в монографіях:

– Принципы и методы математического моделирования колеблющихся пьезоэлектрических элементов [Текст]: моногр. / О.Н. Петрищев, К.В. Базило. – Черкассы: ЧП Гордиенко Е.И., 2019. – 408 с.

– Основи розрахунку та проектування дискових п'єзотрансформаторів [Текст]: моногр. / О. Петрищев, К. Базило. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2019. – 170 с.

Використання студентами і здобувачами освітньо-наукового ступеня «доктор філософії» науково-технічних результатів дисертаційної роботи Базила К. В. дозволяє їм детально ознайомитися та освоїти навички проведення наукових експериментів, а також сучасні методи та засоби проектування п'єзоелектричних перетворювачів, зокрема перетворювачів з розділеними електродами для комп'ютерних систем критичного застосування.

Заступник декана приладобудівного факультету  
КПІ ім. Ігоря Сікорського з методичної роботи,  
кандидат технічних наук, доцент

М. В. Філіппова

В.о. завідувача кафедри виробництва  
приладів КПІ ім. Ігоря Сікорського  
доктор технічних наук, професор

В. С. Антонюк

Вчений секретар кафедри виробництва  
приладів КПІ ім. Ігоря Сікорського  
кандидат технічних наук

С. М. Матвієнко

**ЗАТВЕРДЖУЮ:**

Ректор Черкаського державного  
технологічного університету,  
к.н. з держ. ун-тів, доцент

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2019 р.  
О. О. Григор

**АКТ**

впровадження в навчальний процес

Черкаського державного технологічного університету  
результатів дисертаційної роботи **Базіла Костянтина Вікторовича**  
на тему: "Теорія побудови дискових п'єзоелектричних перетворювачів з  
розділеними електродами для комп'ютерних систем критичного застосування"

Основні результати дисертаційного дослідження Базіла К.В. впроваджені в навчальний процес при виконанні курсових і дипломних проектів, при викладанні лекцій, проведенні лабораторних та практичних занять з навчальних дисциплін "Основи моделювання технічних систем", "Проектування електромеханічних вузлів робототехнічних систем", "Механічні, електричні та магнітні вимірювання", "Автоматизовані інформаційно-вимірювальні системи", зокрема:

- комплекс методів проведення теоретичних та експериментальних досліджень, який включає метод експериментального визначення матеріальних констант п'єзоелектричних матеріалів та методи математичного моделювання п'єзоелектричних перетворювачів;
- методи модифікації дискових п'єзоелектричних перетворювачів для комп'ютерних систем критичного застосування шляхом використання поліелектродної конструкції, технології додаткових елементів, просторової енергосилової структури п'єзоелектричних перетворювачів, технології термовакuumного наплення, що забезпечує можливість синтезу п'єзоелектричних перетворювачів з покращеними характеристиками;
- випробувальний стенд, схемотехнічні рішення п'єзоелектричних перетворювачів поліелектродної конструкції з використанням технології додаткових елементів та просторової енергосилової структури;

- математичні моделі дискових п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами, що працюють на вісесиметричних радіальних коливаннях, коливаннях поперечного вигину та невісесиметричних коливаннях;
- конструкції багатосекційних дискових п'єзоелектричних перетворювачів, що розширює можливість побудови багатофункціональних перетворювачів.

Крім цього в навчальному процесі використовуються наступні монографії:

- Принципы и методы математического моделирования колеблющихся пьезоэлектрических элементов [Текст]: моногр. / О.Н. Петрищев, К.В. Базило. – Черкассы: ЧП Гордиенко Е.И., 2019. – 408 с.
- Основи розрахунку та проектування дискових п'єзотрансформаторів [Текст]: моногр. / О. Петрищев, К. Базило. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2019. – 170 с.
- Пьезокерамические трансформаторы и датчики [Текст]: моногр. / В.М. Шарапов, И.Г. Минаев, Ж.В. Сотула, К.В. Базило, Л.Г. Куницкая – Черкассы: Вертикаль, 2010. – 278 с.

Використання результатів дисертаційної роботи Базила К.В. дозволяє здобувачам освітньо-наукового ступеня "доктор філософії" на більш високому науково-технічному рівні проводити наукові дослідження, а студентам виконувати дипломні проекти та магістерські роботи.

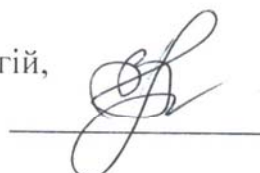
Начальник навчально-методичного відділу,  
к.е.н., доцент

  
С.М. Мильніченко

Декан факультету електронних технологій і робототехніки,  
к.т.н., доцент

  
А. В. Гончаров

Завідувач кафедри приладобудування,  
мехатроніки та комп'ютеризованих технологій,  
к.т.н., доцент

  
Ю. Ю. Бондаренко

## ДОДАТОК Б

### Схема побудови математичних моделей дискових п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами

В додатку наводяться принципи побудови математичних моделей дискових п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами, що працюють на радіальних вісесиметричних коливаннях\*.

Розглянемо принцип дії п'єзоелектричного перетворювача з розділеними електродами на прикладі п'єзоелектричного перетворювача електричної напруги\*\*.

При подачі різниці електричних потенціалів  $U_1 e^{i\omega t}$  ( $U_1$  – амплітудне значення різниці електричних потенціалів;  $i = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця;  $\omega$  – кругова частота;  $t$  – час) на пару електродів, які частково покривають донну і лицьову поверхні п'єзоелектричної пластини, в об'ємі пластини порушуються гармонійні коливання матеріальних частинок, які, в загальному випадку, можна описати за допомогою вектора зміщення матеріальних частинок  $\bar{u}(x_k) e^{i\omega t}$  ( $x_k$  – координати точки, в якій визначається зміщення з положення рівноваги матеріальної частинки п'єзоелектрика). Коливання матеріальних частинок супроводжуються динамічними деформаціями  $\varepsilon_{mn}(x_k) e^{i\omega t}$  нескінченно малих елементів об'єму п'єзоелектрика. Внаслідок прямого п'єзоелектричного ефекту в п'єзоелектрику, що деформується, виникають гармонійно змінні в часі за законом  $e^{i\omega t}$  поляризаційні заряди з поверхневою густиною  $q_m(x_k) e^{i\omega t}$ . Частина цих зарядів збирається другою парою електродів, яка, як і перша пара, частково покриває поверхні п'єзоелектричної пластини. Поляризаційний заряд на другій парі електродів викликає електричний струм  $i(t) = I e^{i\omega t}$  в провіднику,

\* Bazilo С., «Principles and methods of the calculation of transfer characteristics of disk piezoelectric transformers», *Радіоелектроніка, інформатика, управління*, № 4, сс. 7–22, 2018.

\*\* Лавриненко В.В., *Пьезоэлектрические трансформаторы*. М.: Энергия, 1975.

який з'єднує один з електродів другої пари з опором навантаження  $Z_H$ . Падіння напруги  $U_2 e^{i\omega t} = Z_H I e^{i\omega t}$  є вихідним сигналом п'єзоелектричного перетворювача. Очевидно, що коефіцієнт трансформації  $K(\omega, \Pi)$  (символ  $\Pi$  визначає сукупність геометричних і фізико-механічних параметрів п'єзоелектричного перетворювача), дорівнює відношенню вихідного сигналу до вхідного впливу, тобто

$$K(\omega, \Pi) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_H I}{U_1},$$

визначений тим чи іншим математичним виразом, є, слідуючи визначенню академіка Тихонова А.М.\*, математичною моделлю п'єзоелектричного перетворювача трансформаторної конструкції (з розділеними електродами).

Практична цінність аналітичної конструкції  $K(\omega, \Pi)$ , яка адекватно описує фізичні процеси в реальному об'єкті, очевидна. За допомогою персональної ЕОМ можна протягом кількох годин опрацювати безліч комбінацій геометричних і фізико-механічних параметрів конкретної конструкції п'єзоелектричного перетворювача, і знайти таке їх поєднання, яке забезпечує реалізацію заданих показників пристрою. Це дозволяє різко зменшити кількість натурних експериментів, які неминуче виконуються в процесі розробки нових пристроїв. Крім того, за допомогою математичної моделі легко визначається чутливість характеристик п'єзоелектричного перетворювача до варіацій параметрів елементів його конструкції. Маючи в своєму розпорядженні ці залежності, можна здійснити раціональний вибір технології виготовлення виробу, тобто вибрати з ряду технологій найменш витратну. Таким чином, якісна математична модель дозволяє істотно скоротити час і вартість розробки нових моделей п'єзоелектричних перетворювачів.

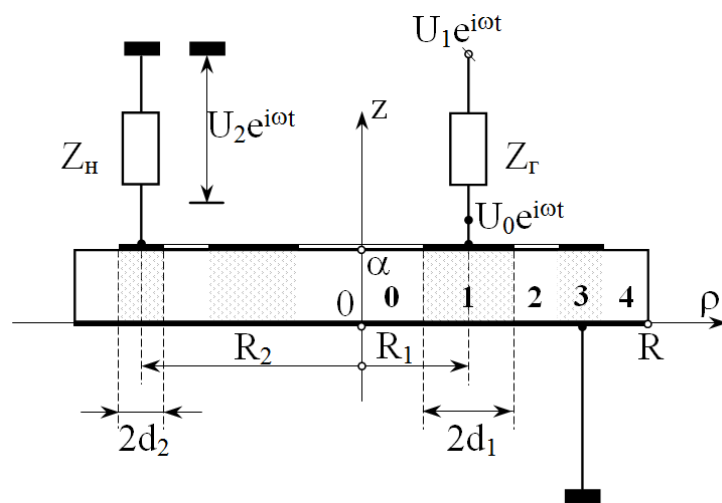
Саме ці, в достатній мірі очевидні, обставини спонукали і спонукають

---

\* *Математическая энциклопедия. Том 2: Д – Коо.* М.: Советская энциклопедия, 1979.

фахівців займатися розробкою різних аспектів теорії п'єзоелектричних перетворювачів\*\*.

Розглянемо диск радіусом  $R$  і товщиною  $\alpha$  (рис. Б.1), виготовлений з п'єзокераміки типу ЦТС, поляризованої в процесі виготовлення по товщині, тобто вздовж координатної вісі  $z$  циліндричної системи координат  $(\rho, \varphi, z)$ . Напрямок електричної поляризації задає властивості і конструкцію матриць матеріальних констант п'єзокерамічного диска.



**Рис. Б.1. Розрахункова схема дискового п'єзоелектричного перетворювача з розділеними електродами, що працює на радіальних коливаннях**

Матриця модулів пружності поляризованого по товщині п'єзокерамічного диска має такий вигляд

$$|c_{\lambda\beta}^E| = \begin{vmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22}^E & c_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44}^E & 0 & 0 \\ & & & & c_{55}^E & 0 \\ & & & & & c_{66}^E \end{vmatrix}, \quad (\text{Б.1})$$

де  $\lambda, \beta = 1; \dots; 6$  — індекси Фойгта;  $c_{11}^E = c_{22}^E \neq c_{33}^E$ ;  $c_{12}^E = c_{13}^E = c_{23}^E$ ;  $c_{44}^E = c_{55}^E$ ;

\*\* О. Н. Петрищев и К. В. Базило, *Принципы и методы математического моделирования колеблющихся пьезоэлектрических элементов*, ЧП Гордиенко Е.И. Черкассы, 2019.

$$c_{66}^E = (c_{11}^E - c_{12}^E)/2.$$

Матриця п'єзомодулів  $e_{k\beta}$  ( $k = 1;2;3; \beta = 1;2;\dots;6$ ) записується наступним чином\*

$$|e_{k\beta}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (\text{Б.2})$$

$$\text{де } e_{31} = e_{32} \neq e_{33}; \quad e_{15} = e_{24} = (e_{33} - e_{31})/2.$$

Матриця тензора діелектричної проникності  $\chi_{mn}^E$  має діагональну конструкцію, причому

$$|\chi_{mn}^E| = \begin{vmatrix} \chi_{11}^E & 0 & 0 \\ & \chi_{22}^E & 0 \\ & & \chi_{33}^E \end{vmatrix}, \quad (\text{Б.3})$$

$$\text{де } \chi_{11}^E = \chi_{22}^E \neq \chi_{33}^E.$$

Донна поверхня  $z=0$  (рис. Б.1) диска повністю електродована і заземлена. На верхній (лицьовій) поверхні  $z = \alpha$  концентрично розташовані два кільцевих електрода. При виконанні наступних побудов будемо вважати, що товщина електродів, розташованих на нижній і верхній поверхнях диска, в порівнянні з товщиною диска зникаюче мала. Говорячи іншими словами, товщину електродів, яка, як правило, не перевищує 15 мкм, не будемо брати в розрахунок при побудові математичної моделі п'єзоелектричного перетворювача.

На кільцевий електрод 1 (його ширина дорівнює  $2d_1$  (рис. Б.1)) від джерела електричних сигналів з вихідним опором  $Z_r$  подається різниця електричних потенціалів  $U_1 e^{i\omega t}$ . Очевидно, що на електроді 1 буде спостерігатися інше, відмінне від вхідного впливу, значення електричного потенціалу  $U_0 e^{i\omega t}$ , де  $|U_0| < U_1$ . Амплітудне значення  $U_0$  різниці електричних потенціалів на електроді 1 можна записати в такий спосіб

\* Петрищев О.Н., *Гармонические колебания пьезокерамических элементов. Часть 1. Гармонические колебания пьезокерамических элементов в вакууме и метод резонанса – антирезонанса*. Киев: Аверс, 2012.

$$U_0 = \frac{U_1 Z_1}{Z_r + Z_1}, \quad (\text{Б.4})$$

де  $Z_1$  – електричний імпеданс електрода 1, тобто вхідного електрода п'єзоелектричного перетворювача.

Електричний імпеданс  $Z_1$  визначається із закону Ома для ділянки електричного кола

$$Z_1 = U_0 / I_1, \quad (\text{Б.5})$$

де  $I_1$  – амплітудне значення електричного струму в провіднику, який з'єднує вхідний електрод (електрод 1) перетворювача з джерелом електричних сигналів. Якщо на поверхні електрода 1 є гармонійно змінний в часі електричний заряд  $q(t) = Q_1 e^{i\omega t}$ , то амплітудне значення електричного струму визначається наступним чином\*

$$I_1 = -i\omega Q_1. \quad (\text{Б.6})$$

Амплітудне значення  $Q_1$  електричного заряду визначається через поверхневу густину електричних зарядів, тобто через аксіальний компонент  $D_z(\rho, \alpha)$  вектора електричної індукції, очевидним співвідношенням

$$Q_1 = 2\pi \int_{R_1-d_1}^{R_1+d_1} \rho D_z(\rho, \alpha) d\rho, \quad (\text{Б.7})$$

де  $2d_1$  – ширина вхідного кільцевого електрода.

Не підлягає сумніву той факт, що електричний стан будь-якого матеріального об'єкта визначається фундаментальними співвідношеннями теорії електрики, тобто рівняннями Максвелла

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (\text{Б.8})$$

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (\text{Б.9})$$

---

\* Петрищев О.Н., *Гармонические колебания пьезокерамических элементов. Часть 1. Гармонические колебания пьезокерамических элементов в вакууме и метод резонанса – антирезонанса.* Киев: Аверс, 2012.



де  $\vec{H}$  і  $\vec{E}$  – вектори напруженості сполучених магнітного і електричного полів;  $\vec{B}$  і  $\vec{D}$  – вектори магнітної і електричної індукції складових електромагнітного поля;  $\vec{J} = r\vec{E}$  – поверхнева густина струму провідності;  $r$  – питома електрична провідність матеріалу. Так як п'єзоелектрична кераміка є досить хорошим ізолятором, то її можна наділити властивостями ідеального діелектрика, тобто прийняти, що  $r \cong 0$ . У цьому випадку рівняння Максвелла (Б.8) для гармонійно змінних в часі полів приймає наступний вигляд

$$\text{rot}\vec{H} = i\omega\vec{D}, \quad (\text{Б.10})$$

де  $\vec{H}$  і  $\vec{D}$  мають сенс амплітудних значень напруженості магнітного поля і індукції електричного поля. Обчислюючи дивергенцію від лівої і правої частини співвідношення (Б.10), приходимо до наступного висновку

$$\text{div}\vec{D} = 0. \quad (\text{Б.11})$$

Вираз (Б.11) має сенс умови відсутності вільних носіїв електрики в об'ємі ідеального діелектрика.

У монографії\* показано, що в частотному діапазоні аж до 10 МГц магнітна складова електромагнітного поля в п'єзокераміці, що деформується на кілька порядків менше електричної складової. Це дає підставу для наступного запису рівняння (Б.9):

$$\text{rot}\vec{E} \cong 0. \quad (\text{Б.12})$$

Співвідношення (Б.12) дозволяє говорити про те, що електричне поле в об'ємі деформованої п'єзокераміки носить безвихровий, тобто потенційний характер і може бути описано за допомогою скалярного електричного потенціалу  $\Phi$ , причому

$$\vec{E} = -\text{grad}\Phi. \quad (\text{Б.13})$$

З урахуванням визначення (Б.13), відомий\*\* вираз для розрахунку  $m$ -го

\* Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., и Шульга Н.А., *Механика связанных полей в элементах конструкций*. Т. 5. *Электроупругость*. Киев: Наук. думка, 1989.

\*\* Петрищев О.Н., *Гармонические колебания пьезокерамических элементов. Часть 1. Гармонические колебания пьезокерамических элементов в вакууме и метод резонанса – антирезонанса*. Киев: Аверс, 2012.

компонента вектора електричної індукції в об'ємі п'єзоелектрика, що деформується можна записати в наступному вигляді

$$D_m = e_{mkj} \varepsilon_{kj} - \chi_{mn}^{\varepsilon} (\text{grad}\Phi)_n, \quad (\text{Б.14})$$

де  $e_{mkj} \Leftrightarrow e_{mj\beta}$  ( $\beta$  – індекс Фойгта, яким замінюється пара симетричних відносно перестановки тензорних індексів  $k, j$ ) – елемент матриці п'єзоелектричних констант;  $\varepsilon_{kj}$  – компонент тензора нескінченно малих деформацій;  $\chi_{mn}^{\varepsilon}$  – компонент тензора діелектричної проникності;  $(\text{grad}\Phi)_n$  –  $n$ -ий компонент вектора градієнта скалярного потенціалу. При записі рівняння (Б.14) в циліндричній системі координат необхідно враховувати наступну відповідність між символами  $(\rho, \varphi, z)$  координатних вісей циліндричної системи координат і номерами  $k = 1, 2, 3$  координатних вісей  $x_k$  декартової системи координат:  $1 \Leftrightarrow \rho$ ;  $2 \Leftrightarrow \varphi$ ;  $3 \Leftrightarrow z$ .

Стосовно ситуації, що розглядається, із загального виразу (Б.14) випливає, що

$$D_{\rho} = 2e_{15}\varepsilon_{\rho z} - \chi_{11}^{\varepsilon} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \rho}, \quad (\text{Б.15})$$

$$\begin{aligned} D_z &= e_{31}\varepsilon_{\rho\rho} + e_{32}\varepsilon_{\varphi\varphi} + e_{33}\varepsilon_{zz} - \chi_{33}^{\varepsilon} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} = \\ &= e_{31}(\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) + e_{33}\varepsilon_{zz} - \chi_{33}^{\varepsilon} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (\text{Б.16})$$

де  $D_{\varphi} \equiv 0$  через осьову симетрію даної задачі;  $\varepsilon_{\rho z} = (\partial u_{\rho} / \partial z + \partial u_z / \partial \rho) / 2$  – зсувна деформація;  $u_{\rho}$  і  $u_z$  – амплітудні значення радіального і аксіального компонентів вектора зміщення матеріальних частинок п'єзоелектричного диска, що динамічно деформується. При записі співвідношення (Б.16) однакові за величиною п'єзомодулі  $e_{31}$  і  $e_{32}$  (див. коментар до матриці (Б.2)) позначені, як це прийнято в механіці деформованого твердого тіла, одним і тим же символом  $e_{31}$ . Компоненти  $\varepsilon_{\rho\rho} = \partial u_{\rho} / \partial \rho$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi} = u_{\rho} / \rho$  і  $\varepsilon_{zz} = \partial u_z / \partial z$  визначають деформації стискання-розтягування уздовж координатних ліній

циліндричної системи координат. Символом  $\Phi^{(1)}$  позначений електричний потенціал в кільцевій області  $\{R_1 - d_1 \leq \rho \leq R_1 + d_1; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq z \leq \alpha\}$  під електродом 1. Необхідно підкреслити, що співвідношення (Б.15), (Б.16) записані для амплітудних значень характеристик гармонійно змінних в часі фізичних полів.

Підстановка виразів (Б.15) і (Б.16) в умову (Б.11) дає диференціальне рівняння другого порядку в часткових похідних щодо шуканого скалярного потенціалу  $\Phi^{(1)}(\rho, z)$  електричного поля в п'єзоелектрику, що деформується.

В окремому випадку досить тонкого диска, коли виконується нерівність  $\alpha/R < 1$ , можна стверджувати, що в області частот, в якій довжина пружної хвилі перевершує товщину п'єзоелектричного диска, електричні і пружні поля в його об'ємі практично не залежать від значень аксіальної координати  $z$ , тобто практично не змінюють своїх значень по товщині диска.

Якщо диск м'яко закріплений по поверхні  $\{\rho = R; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq z \leq \alpha\}$ , то деформації зсуву обертаються в нуль на цій поверхні і на поверхнях  $z = 0$  і  $z = \alpha$ . Крім того, на електродованій поверхні  $z = 0$  радіальний компонент  $D_\rho = 0$ . Радіальний компонент  $D_\rho = 0$  на бічній поверхні  $\rho = R$  п'єзокерамічного диска\*, на поверхні кільцевого електрода 1 і на вісі симетрії диска, тобто на вісі  $Oz$ . Сукупність цих фактів дозволяє припустити, що в тонкому п'єзокерамічному диску, в першому наближенні, можна вважати  $D_\rho = 0 \forall (\rho, \varphi, z) \in V$ , де  $V$  – об'єм диска. У цьому випадку вектор електричної індукції повністю визначається єдиним, не рівним нулю, аксіальним компонентом  $D_z$ , а умова (Б.11) приймає наступний вигляд

$$\partial D_z^{(1)} / \partial z = 0, \quad (\text{Б.17})$$

де символ  $D_z^{(1)}$  додатково підкреслює те, що мова йде про вектор електричної індукції в кільцевій області  $\{R_1 - d_1 \leq \rho \leq R_1 + d_1; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq z \leq \alpha\}$  під вхідним

---

\* Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., и Шульга Н.А., *Механика связанных полей в элементах конструкций*. Т. 5. *Электроупругость*. Киев: Наук. думка, 1989.

електродом п'єзоелектричного перетворювача.

З умови (Б.17) випливає, що аксіальний компонент  $D_z^{(1)}$  є функцією радіальної координати  $\rho$  і не залежить від значень аксіальної координати  $z$ , що знаходиться в повній згоді з прийнятим вище припущенням про слабку залежність характеристик фізичних полів від значень аксіальної координати в області частот, в якій виконується нерівність  $\lambda \gg \alpha$  ( $\lambda$  – довжина пружної хвилі). Цю обставину можна використовувати для визначення електричного стану п'єзокераміки в кільцевій області під електродом 1.

Оскільки  $\varepsilon_{pp} + \varepsilon_{\varphi\varphi} = \partial u_p / \partial \rho + u_p / \rho = [\partial(\rho u_p) / \partial \rho] / \rho$ , остільки визначення (Б.16) можна записати в наступному вигляді

$$D_z^{(1)}(\rho) = \frac{e_{31}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u_p^{(1)}] + e_{33} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z} - \chi_{33}^\varepsilon \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z}, \quad (\text{Б.18})$$

де  $u_p^{(1)}(\rho, z)$  і  $u_z^{(1)}(\rho, z)$  – амплітудні значення компонентів вектора зміщення матеріальних частинок в кільцевій області  $\{R_1 - d_1 \leq \rho \leq R_1 + d_1; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq z \leq \alpha\}$ .

Інтегруючи по змінній  $z$  ліву і праву частини співвідношення (Б.18), і беручи при цьому до уваги умову (Б.17), отримуємо наступний результат

$$\alpha D_z^{(1)}(\rho) = \frac{e_{31}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \int_0^\alpha u_p^{(1)}(\rho, z) dz \right] + e_{33} [u_z^{(1)}(\rho, \alpha) - u_z^{(1)}(\rho, 0)] - \chi_{33}^\varepsilon [\Phi^{(1)}(\alpha) - \Phi^{(1)}(0)]. \quad (\text{Б.19})$$

Введемо позначення

$$\hat{u}_p^{(1)}(\rho) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha u_p^{(1)}(\rho, z) dz, \quad (\text{Б.20})$$

і будемо називати величину  $\hat{u}_p^{(1)}(\rho)$  усередненим по товщині диска радіальним компонентом вектора зміщення матеріальних частинок в кільцевій області під електродом 1. Так як  $\Phi^{(1)}(\alpha) - \Phi^{(1)}(0) \equiv U_0$ , то співвідношення (Б.19) приймає наступний вигляд

$$D_z^{(1)}(\rho) = \frac{e_{31}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho \hat{u}_p^{(1)}(\rho)] + \frac{e_{33}}{\alpha} [u_z^{(1)}(\rho, \alpha) - u_z^{(1)}(\rho, 0)] - \chi_{33}^\varepsilon \frac{U_0}{\alpha}. \quad (\text{Б.21})$$

Підставляючи вираз (Б.21) у визначення (Б.7) амплітудного значення

електричного заряду, отримуємо

$$Q_1 = 2\pi \left\{ e_{31} \left[ \rho u_p^{(1)}(\rho) \right]_{R_1-d_1}^{R_1+d_1} + \frac{e_{33}}{\alpha} \int_{R_1-d_1}^{R_1+d_1} \rho \left[ u_z^{(1)}(\rho, \alpha) - u_z^{(1)}(\rho, 0) \right] d\rho - \frac{\chi_{33}^\varepsilon}{2\alpha} \left[ (R_1 + d_1)^2 - (R_1 - d_1)^2 \right] U_0 \right\}. \quad (B.22)$$

Введемо позначення

$$\hat{u}_z^{(1)}(z) = \frac{1}{2d_1 R_1} \int_{R_1-d_1}^{R_1+d_1} \rho u_z^{(1)}(\rho, z) d\rho, \quad (B.23)$$

і будемо називати величину  $\hat{u}_z^{(1)}(z)$  усередненим по площі кільця  $\{R_1-d_1 \leq \rho \leq R_1+d_1; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$  аксіальним компонентом вектора зміщення  $\bar{u}(\rho, z)$  матеріальних частинок в кільцевій області під електродом 1. З урахуванням визначення (B.23) співвідношення (B.22) можна записати в наступному вигляді

$$Q_1 = 2\pi e_{31} \left[ (R_1 + d_1) \hat{u}_p^{(1)}(R_1 + d_1) - (R_1 - d_1) \hat{u}_p^{(1)}(R_1 - d_1) \right] + 4\pi d_1 R_1 \frac{e_{33}}{\alpha} \left[ \hat{u}_z^{(1)}(\alpha) - \hat{u}_z^{(1)}(0) \right] - C_1^\varepsilon U_0, \quad (B.24)$$

де  $C_1^\varepsilon = 4\pi d_1 R_1 \chi_{33}^\varepsilon / \alpha$  – статична електрична ємність об'єму п'єзокераміки під кільцевим електродом 1.

В області низьких частот, коли довжина пружної хвилі (масштаб неоднорідності напружено-деформованого стану) в об'ємі п'єзокерамічного диска істотно перевищує товщину диска, різниця зміщень  $\hat{u}_z^{(1)}(\alpha) - \hat{u}_z^{(1)}(0) \rightarrow 0$ , і другий доданок у формулі (B.24) стає істотно менше першого доданка. З цієї причини вираз для розрахунку електричного заряду  $Q_1$  необхідно переписати в наступному вигляді

$$Q_1 = 2\pi e_{31} \left[ (R_1 + d_1) \hat{u}_p^{(1)}(R_1 + d_1) - (R_1 - d_1) \hat{u}_p^{(1)}(R_1 - d_1) \right] - C_1^\varepsilon U_0. \quad (B.25)$$

Для того, щоб просунутися далі, необхідно визначити радіальний компонент  $\hat{u}_p^{(1)}(\rho)$  вектора зміщень матеріальних частинок п'єзоелектрика в області 1 (рис. Б.1) під кільцевим електродом первинного електричного кола п'єзоелектричного перетворювача. З розрахункової схеми, яка показана на рис.

Б.1, чітко видно, що радіальні зміщення  $\hat{u}_\rho^{(1)}(\rho)$  не є самостійно визначальною величиною. Очевидно, що вони залежать від значень радіальних зміщень  $\hat{u}_\rho^{(0)}(\rho)$ ,  $\hat{u}_\rho^{(2)}(\rho)$ ,  $\hat{u}_\rho^{(3)}(\rho)$  і  $\hat{u}_\rho^{(4)}(\rho)$  у відповідних областях тонкого п'єзокерамічного диска. Зміщення  $\hat{u}_\rho^{(3)}(\rho)$  в кільцевій області під електродом вторинного електричного кола будуть, і це очевидно, визначатися потенціалом  $U_2$ . З цього випливає, що потенціали  $U_0$  і  $U_2$  на електродах первинного і вторинного електричного кола п'єзоелектричного перетворювача взаємопов'язані і визначають один одного через єдине поле пружних зміщень матеріальних частинок п'єзокерамічного диска.

Визначимо усереднені по товщині диска радіальні зміщення  $\hat{u}_\rho^{(m)}(\rho)$  в  $m$ -ій області (рис. Б.1) п'єзокерамічного диска.

Запишемо узагальнений закон Гука\* для  $m$ -ої області п'єзокерамічного диска

$$\sigma_{\rho\rho}^{(m)}(\rho, z) = c_{11}^E \varepsilon_{\rho\rho}^{(m)}(\rho, z) + c_{12}^E \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(m)}(\rho, z) + c_{12}^E \varepsilon_{zz}^{(m)}(\rho, z) - e_{31} E_z^{(m)}(\rho, z), \quad (\text{Б.26})$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(m)}(\rho, z) = c_{12}^E \varepsilon_{\rho\rho}^{(m)}(\rho, z) + c_{11}^E \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(m)}(\rho, z) + c_{12}^E \varepsilon_{zz}^{(m)}(\rho, z) - e_{31} E_z^{(m)}(\rho, z), \quad (\text{Б.27})$$

$$\sigma_{zz}^{(m)}(\rho, z) = c_{12}^E \varepsilon_{\rho\rho}^{(m)}(\rho, z) + c_{12}^E \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(m)}(\rho, z) + c_{33}^E \varepsilon_{zz}^{(m)}(\rho, z) - e_{33} E_z^{(m)}(\rho, z), \quad (\text{Б.28})$$

$$\sigma_{\rho z}^{(m)}(\rho, z) = \sigma_{z\rho}^{(m)}(\rho, z) = 2c_{55}^E \varepsilon_{\rho z}^{(m)}(\rho, z) - e_{15} E_\rho^{(m)}(\rho, z).$$

Інші компоненти напружено-деформованого стану дорівнюють нулю через осьову симетрію фізичного стану коливального диска.

З міркувань, які викладені вище, і які призвели до твердження, що  $D_\rho = 0 \forall (\rho, \varphi, z) \in V$ , випливає, що  $\sigma_{\rho z}^{(m)}(\rho, z) = \sigma_{z\rho}^{(m)}(\rho, z) = 0 \forall (\rho, \varphi, z) \in V$ .

Усереднимо, відповідно до алгоритму (Б.20) нормальні напруження  $\sigma_{\rho\rho}^{(m)}(\rho, z)$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(m)}(\rho, z)$  і  $\sigma_{zz}^{(m)}(\rho, z)$ .

$$\hat{\sigma}_{\rho\rho}^{(m)}(\rho) = c_{11}^E \frac{\partial \hat{u}_\rho^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{12}^E \frac{1}{\rho} \hat{u}_\rho^{(m)}(\rho) + c_{12}^E \frac{1}{\alpha} [u_z^{(m)}(\rho, \alpha) - u_z^{(m)}(0)] - e_{31} \hat{E}_z^{(m)}(\rho), \quad (\text{Б.29})$$

\* Петрищев О.Н., *Гармонические колебания пьезокерамических элементов. Часть 1. Гармонические колебания пьезокерамических элементов в вакууме и метод резонанса – антирезонанса*. Киев: Аверс, 2012.

$$\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(m)}(\rho) = c_{12}^E \frac{\partial \hat{u}_\rho^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{11}^E \frac{1}{\rho} \hat{u}_\rho^{(m)}(\rho) + c_{12}^E \frac{1}{\alpha} [u_z^{(m)}(\rho, \alpha) - u_z^{(m)}(0)] - e_{31} \hat{E}_z^{(m)}(\rho), \quad (\text{Б.30})$$

$$\hat{\sigma}_{zz}^{(m)}(\rho) = c_{12}^E \frac{\partial \hat{u}_\rho^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{12}^E \frac{1}{\rho} \hat{u}_\rho^{(m)}(\rho) + c_{33}^E \frac{1}{\alpha} [u_z^{(m)}(\rho, \alpha) - u_z^{(m)}(0)] - e_{33} \hat{E}_z^{(m)}(\rho). \quad (\text{Б.31})$$

На поверхнях  $z = 0$  і  $z = \alpha$  нормальне напруження  $\sigma_{zz}^{(m)}(\rho, z)$  обертається в нуль, оскільки п'єзокерамічний диск не контактує з іншими матеріальними об'єктами. В області низьких частот, коли довжина хвилі пружних збурень істотно перевищує товщину диска, можна стверджувати що напружено-деформований стан диска практично не змінюється по його товщині. З цієї причини можна вважати, що  $\sigma_{zz}^{(m)}(\rho, z) = 0 \forall (\rho, \varphi, z) \in V$  і як наслідок,  $\hat{\sigma}_{zz}^{(m)}(\rho) = 0 \forall (\rho, \varphi, z) \in V$ . Підставляючи нуль в ліву частину співвідношення (Б.31), отримуємо можливість записати наступне визначення

$$\frac{1}{\alpha} [u_z^{(m)}(\rho, \alpha) - u_z^{(m)}(\rho, 0)] = \frac{e_{33}}{c_{33}^E} \hat{E}_z^{(m)}(\rho) - \frac{c_{12}^E}{c_{33}^E} \left[ \frac{\partial \hat{u}_\rho^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \hat{u}_\rho^{(m)}(\rho) \right]. \quad (\text{Б.32})$$

Виключаючи за допомогою рівності (Б.32) аксіальні зміщення з визначень (Б.29) і (Б.30), отримуємо наступні формули для розрахунку нормальних напружень в тонкому п'єзокерамічному диску:

$$\hat{\sigma}_{\rho\rho}^{(m)}(\rho) = c_{11}^* \frac{\partial \hat{u}_\rho^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{12}^* \frac{1}{\rho} \hat{u}_\rho^{(m)}(\rho) - e_{31}^* \hat{E}_z^{(m)}(\rho), \quad (\text{Б.33})$$

$$\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(m)}(\rho) = c_{12}^* \frac{\partial \hat{u}_\rho^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{11}^* \frac{1}{\rho} \hat{u}_\rho^{(m)}(\rho) - e_{31}^* \hat{E}_z^{(m)}(\rho), \quad (\text{Б.34})$$

де  $c_{11}^* = c_{12}^E - (c_{12}^E)^2 / c_{33}^E$ ,  $c_{12}^* = c_{12}^E (1 - c_{12}^E / c_{33}^E)$  і  $e_{31}^* = e_{31} - e_{33} c_{12}^E / c_{33}^E$  – ефективні модулі пружності і п'єзоелектричний модуль для режиму радіальних вісесиметричних коливань тонкого п'єзокерамічного диска.

Визначимо аксіальний компонент  $\hat{E}_z^{(m)}(\rho)$  усередненого по товщині диска вектора напруженості електричного поля.

Розглянемо спочатку області номери 0, 2, 4 (області з парними номерами) (див. рис. Б.1), у яких поверхня  $z = \alpha$  не покрита шаром металу.

На поверхні  $z = 0$  для всіх, без винятку, областей парних і непарних

номерів виконується очевидна умова  $D_z^{(m)}(\rho) \equiv 0$ . В областях з парними номерами на поверхні  $z = \alpha$  має виконуватися наближена умова  $D_z^{(n)}(\rho) \equiv 0^*$ , яка виконується тим точніше, чим більше значення має діелектрична проникність  $\chi_{33}^{\varepsilon}$ . Для сучасних п'єзоелектричних керамік  $\chi_{33}^{\varepsilon} \cong 2000\chi_0$ , де  $\chi_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – діелектрична проникність вакууму або, що те ж саме, діелектрична постійна. При таких значеннях діелектричної проникності  $\chi_{33}^{\varepsilon}$  наближена гранична умова  $D_z^{(n)}(\rho) \equiv 0$  виконується практично точно.

В області низьких частот, коли довжина хвилі пружних коливань значно перевищує товщину диска, вираз для розрахунку аксіального компонента  $\hat{D}_z^{(m)}(\rho)$  можна записати в такий спосіб

$$\hat{D}_z^{(m)}(\rho) = e_{31} \left[ \frac{\partial \hat{u}_\rho^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \hat{u}_\rho^{(m)}(\rho) \right] + \frac{e_{33}}{\alpha} [u_z^{(m)}(\rho, \alpha) - u_z^{(m)}(\rho, 0)] + \chi_{33}^{\varepsilon} \hat{E}_z^{(m)}(\rho). \quad (\text{Б.35})$$

Підставляючи в співвідношення (Б.35) праву частину рівності (Б.32), отримуємо

$$\hat{D}_z^{(m)}(\rho) = e_{31}^* \left[ \frac{\partial \hat{u}_\rho^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \hat{u}_\rho^{(m)}(\rho) \right] + \chi_{33}^* \hat{E}_z^{(m)}(\rho), \quad (\text{Б.36})$$

де  $\chi_{33}^* = \chi_{33}^{\varepsilon} + e_{33}^2/c_{33}^E$  – діелектрична проникність тонкого п'єзокерамічного диска для режиму рівності нулю нормальних напружень  $\sigma_{zz}^{(m)}$ .

Для областей з парними номерами  $n = 0, 2, 4$  справедливим є твердження  $\hat{D}_z^{(m)}(\rho) = 0 \forall (\rho, \varphi, z) \in V$ . З цього виходить що

$$\hat{E}_z^{(n)}(\rho) = -\frac{e_{31}^*}{\chi_{33}^*} \left[ \frac{\partial \hat{u}_\rho^{(n)}(\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \hat{u}_\rho^{(n)}(\rho) \right]. \quad (\text{Б.37})$$

Підставляючи визначення (Б.37) в формули (Б.33) і (Б.34), отримуємо наступні результати

$$\hat{\sigma}_{\rho\rho}^{(n)}(\rho) = c_{11}^D \frac{\partial \hat{u}_\rho^{(n)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{12}^D \frac{1}{\rho} \hat{u}_\rho^{(n)}(\rho), \quad (\text{Б.38})$$

\* Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., и Шульга Н.А., *Механика связанных полей в элементах конструкций*. Т. 5. *Электроупругость*. Киев: Наук. думка, 1989.



$$\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(n)}(\rho) = c_{12}^D \frac{\partial \hat{u}_\rho^{(n)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{11}^D \frac{1}{\rho} \hat{u}_\rho^{(n)}(\rho), \quad (\text{Б.39})$$

де  $c_{11}^D = c_{11}^* + (e_{31}^*)^2 / \chi_{33}^*$ ,  $c_{12}^D = c_{12}^* + (e_{31}^*)^2 / \chi_{33}^*$  – модулі пружності для режиму деформування п'єзоелектрика при сталості (рівності нулю) електричної індукції.

Для областей з непарними номерами  $k=1,3$  аксіальний компонент  $\hat{D}_z^{(k)}(\rho) \neq 0$  і задовольняє умовам (Б.17). Так як  $E_z^{(k)}(\rho, z) = -\partial \Phi^{(k)}(\rho, z) / \partial z$ , то усереднений по товщині диска компонент  $\hat{E}_z^{(k)}(\rho) = -U^{(k)} / \alpha$ , де  $U^{(1)} = U_0$ , а  $U^{(3)} = U_2$ . Таким чином

$$\hat{D}_z^{(k)}(\rho) = e_{31}^* \left[ \frac{\partial \hat{u}_\rho^{(k)}(\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \hat{u}_\rho^{(k)}(\rho) \right] - \chi_{33}^* \frac{U^{(k)}}{\alpha}. \quad (\text{Б.40})$$

З урахуванням визначення компонента  $\hat{E}_z^{(k)}(\rho)$ , співвідношення (Б.33) і (Б.34) необхідно переписати в наступному вигляді

$$\hat{\sigma}_{\rho\rho}^{(k)}(\rho) = c_{11}^* \frac{\partial \hat{u}_\rho^{(k)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{12}^* \frac{1}{\rho} \hat{u}_\rho^{(k)}(\rho) + e_{31}^* \frac{U^{(k)}}{\alpha}, \quad (\text{Б.41})$$

$$\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(k)}(\rho) = c_{12}^* \frac{\partial \hat{u}_\rho^{(k)}(\rho)}{\partial \rho} + c_{11}^* \frac{1}{\rho} \hat{u}_\rho^{(k)}(\rho) + e_{31}^* \frac{U^{(k)}}{\alpha}. \quad (\text{Б.42})$$

Радіальні компоненти вектора зміщення  $\hat{u}_\rho^{(n)}(\rho)$  і  $\hat{u}_\rho^{(k)}(\rho)$  повинні задовольняти рівнянню сталих гармонійних коливань елемента об'єму деформованого твердого тіла, яке за своїм фізичним змістом і смислом є другим законом Ньютона в диференціальній формі. Це рівняння записується в такий спосіб

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{\rho\rho}^{(m)}(\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} [\hat{\sigma}_{\rho\rho}^{(m)}(\rho) - \hat{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(m)}(\rho)] + \rho_0 \omega^2 \hat{u}_\rho^{(m)}(\rho) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, 3, 4), \quad (\text{Б.43})$$

де  $\hat{\sigma}_{\rho\rho}^{(m)}(\rho)$ ,  $\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(m)}(\rho)$  і  $\hat{u}_\rho^{(m)}(\rho)$  – амплітудні значення змінних в часі за законом  $e^{i\omega t}$  напружень і зміщень;  $\rho_0$  – густина п'єзокераміки.

Підставляючи в диференціальне рівняння (Б.43) в залежності від номера області  $m$  або співвідношення (Б.38), (Б.39), або розрахункові формули (Б.41), (Б.42), отримуємо стандартне рівняння Бесселя, загальний розв'язок якого для

різних областей записується в наступному вигляді

$$\begin{aligned}\hat{u}_\rho^{(0)}(\rho) &= A_1 J_1(\gamma\rho), & \hat{u}_\rho^{(1)}(\rho) &= A_2 J_1(\lambda\rho) + A_3 N_1(\lambda\rho), & \hat{u}_\rho^{(2)}(\rho) &= A_4 J_1(\gamma\rho) + A_5 N_1(\gamma\rho), \\ \hat{u}_\rho^{(3)}(\rho) &= A_6 J_1(\lambda\rho) + A_7 N_1(\lambda\rho), & \hat{u}_\rho^{(4)}(\rho) &= A_8 J_1(\gamma\rho) + A_9 N_1(\gamma\rho),\end{aligned}\quad (\text{Б.44})$$

де  $A_1, \dots, A_9$  – частотно залежні константи, що підлягають визначенню;  $J_1(x)$  і  $N_1(x)$  – функції Бесселя і Неймана першого порядку;  $\gamma$  і  $\lambda$  – хвильові числа радіальних коливань матеріальних частинок п'єзокерамічного диска, причому  $\gamma^2 = \rho_0 \omega^2 / c_{11}^D$  і  $\lambda^2 = \rho_0 \omega^2 / c_{11}^*$ .

Загальні розв'язки (Б.44) повинні забезпечувати безперервність напружено-деформованого стану на умовних межах розділів кільцевих областей диска і виконання граничних умов на контурі  $\rho = R$  (рис. Б.1). Умови кінематичного і динамічного сполучення рішень на умовних межах розділу кільцевих областей п'єзокерамічного диска записуються наступним чином:

$$\begin{aligned}\hat{u}_\rho^{(0)}(R_1 - d_1) &= \hat{u}_\rho^{(1)}(R_1 - d_1), & \hat{\sigma}_{\rho\rho}^{(0)}(R_1 - d_1) &= \hat{\sigma}_{\rho\rho}^{(1)}(R_1 - d_1); \\ \hat{u}_\rho^{(1)}(R_1 + d_1) &= \hat{u}_\rho^{(2)}(R_1 + d_1), & \hat{\sigma}_{\rho\rho}^{(1)}(R_1 + d_1) &= \hat{\sigma}_{\rho\rho}^{(2)}(R_1 + d_1); \\ \hat{u}_\rho^{(2)}(R_2 - d_2) &= \hat{u}_\rho^{(3)}(R_2 - d_2), & \hat{\sigma}_{\rho\rho}^{(2)}(R_2 - d_2) &= \hat{\sigma}_{\rho\rho}^{(3)}(R_2 - d_2); \\ \hat{u}_\rho^{(3)}(R_2 + d_2) &= \hat{u}_\rho^{(4)}(R_2 + d_2), & \hat{\sigma}_{\rho\rho}^{(3)}(R_2 + d_2) &= \hat{\sigma}_{\rho\rho}^{(4)}(R_2 + d_2).\end{aligned}\quad (\text{Б.45})$$

У разі м'якого закріплення контуру  $\rho = R$  на бічній поверхні диска відповідно до третього закону Ньютона має виконуватися така умова

$$\hat{\sigma}_{\rho\rho}^{(4)}(R) = 0. \quad (\text{Б.46})$$

Співвідношення (Б.45) і умова (Б.46) після підстановки в них визначень нормальних напружень  $\hat{\sigma}_{\rho\rho}^{(m)}(\rho)$  і радіальних зміщень  $\hat{u}_\rho^{(m)}(\rho)$  утворюють неоднорідну систему з дев'яти алгебраїчних рівнянь, в якій міститься рівно дев'ять шуканих констант  $A_1, \dots, A_9$ . Ця система рівнянь вирішується щодо шуканих констант єдиним способом і записується в наступному вигляді

$$m_{ij} A_j = P_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, 9, \quad (\text{Б.47})$$

де  $m_{11} = J_1(\Omega r_1)$ ;  $\Omega = \gamma R$ ;  $r_1 = (R_1 - d_1)/R$ ;  $m_{12} = -J_1(\Omega r_1/\xi)$ ;  $\xi = \sqrt{c_{11}^*/c_{11}^D}$ ;  $m_{13} = -N_1(\Omega r_1/\xi)$ ;

$$\begin{aligned}
(m_{14} \div m_{19}) &= 0; P_1 = 0; m_{21} = J_0(\Omega r_1) - \frac{1 - k^D}{\Omega r_1} J_1(\Omega r_1); k^D = c_{12}^D / c_{11}^D; k^* = c_{12}^* / c_{11}^*; \\
m_{22} &= -\xi \left[ J_0(\Omega r_1 / \xi) - \frac{1 - k^*}{\Omega r_1 / \xi} J_1(\Omega r_1 / \xi) \right]; m_{23} = -\xi \left[ N_0(\Omega r_1 / \xi) - \frac{1 - k^*}{\Omega r_1 / \xi} N_1(\Omega r_1 / \xi) \right]; (m_{24} \div m_{29}) = 0; \\
P_2 &= \frac{e_{31}^* U_0}{c_{11}^D \gamma \alpha}; m_{31} = 0; m_{32} = J_1(\Omega r_2 / \xi); r_2 = (R_1 + d_1) / R; m_{33} = N_1(\Omega r_2 / \xi); m_{34} = -J_1(\Omega r_2); \\
m_{35} &= -N_1(\Omega r_2); (m_{36} \div m_{39}) = 0; P_3 = 0; m_{41} = 0; m_{42} = \xi \left[ J_0(\Omega r_2 / \xi) - \frac{1 - k^*}{\Omega r_2 / \xi} J_1(\Omega r_2 / \xi) \right]; \\
m_{43} &= \xi \left[ N_0(\Omega r_2 / \xi) - \frac{1 - k^*}{\Omega r_2 / \xi} N_1(\Omega r_2 / \xi) \right]; m_{44} = -\left[ J_0(\Omega r_2) - \frac{1 - k^D}{\Omega r_2} J_1(\Omega r_2) \right]; \\
m_{45} &= -\left[ N_0(\Omega r_2) - \frac{1 - k^D}{\Omega r_2} N_1(\Omega r_2) \right]; (m_{46} \div m_{49}) = 0; P_4 = -\frac{e_{31}^* U_0}{c_{11}^D \gamma \alpha}; (m_{51} \div m_{53}) = 0; \\
m_{54} &= J_1(\Omega r_3); r_3 = (R_2 - d_2) / R; m_{55} = N_1(\Omega r_3); m_{56} = -J_1(\Omega r_3 / \xi); m_{57} = -N_1(\Omega r_3 / \xi); \\
(m_{58} \div m_{59}) &= 0; P_5 = 0; (m_{61} \div m_{63}) = 0; m_{64} = \left[ J_0(\Omega r_3) - \frac{1 - k^D}{\Omega r_3} J_1(\Omega r_3) \right]; \\
m_{65} &= \left[ N_0(\Omega r_3) - \frac{1 - k^D}{\Omega r_3} N_1(\Omega r_3) \right]; m_{66} = -\xi \left[ J_0(\Omega r_3 / \xi) - \frac{1 - k^*}{\Omega r_3 / \xi} J_1(\Omega r_3 / \xi) \right]; \\
m_{67} &= -\xi \left[ N_0(\Omega r_3 / \xi) - \frac{1 - k^*}{\Omega r_3 / \xi} N_1(\Omega r_3 / \xi) \right]; (m_{68} \div m_{69}) = 0; P_6 = \frac{e_{31}^* U_2}{c_{11}^D \gamma \alpha}; (m_{71} \div m_{75}) = 0; \\
m_{76} &= J_1(\Omega r_4 / \xi); r_4 = (R_2 + d_2) / R; m_{77} = N_1(\Omega r_4 / \xi); m_{78} = -J_1(\Omega r_4); m_{79} = -N_1(\Omega r_4); \\
P_7 &= 0; (m_{81} \div m_{85}) = 0; m_{86} = \xi \left[ J_0(\Omega r_4 / \xi) - \frac{1 - k^*}{\Omega r_4 / \xi} J_1(\Omega r_4 / \xi) \right]; \\
m_{87} &= \xi \left[ N_0(\Omega r_4 / \xi) - \frac{1 - k^*}{\Omega r_4 / \xi} N_1(\Omega r_4 / \xi) \right]; m_{88} = -\left[ J_0(\Omega r_4) - \frac{1 - k^D}{\Omega r_4} J_1(\Omega r_4) \right]; \\
m_{89} &= -\left[ N_0(\Omega r_4) - \frac{1 - k^D}{\Omega r_4} N_1(\Omega r_4) \right]; P_8 = -\frac{e_{31}^* U_2}{c_{11}^D \gamma \alpha}; (m_{91} \div m_{97}) = 0; \\
m_{98} &= J_0(\Omega) - \frac{1 - k^D}{\Omega} J_1(\Omega); m_{99} = N_0(\Omega) - \frac{1 - k^D}{\Omega} N_1(\Omega); P_9 = 0.
\end{aligned}$$

Загальний розв'язок системи рівнянь (Б.47) можна записати в наступному вигляді

$$A_j = \frac{(-1)^{j+2} e_{31}^*}{c_{11}^D \gamma \alpha \Delta_0(\Omega)} [B_j(\Omega) U_0 + C_j(\Omega) U_2], \quad (\text{Б.48})$$

де  $\Delta_0(\Omega)$  – головний визначник системи рівнянь (Б.47);  $V_j(\Omega) = \Delta_j^{(2)}(\Omega) - \Delta_j^{(4)}(\Omega)$ ;  $C_j(\Omega) = \Delta_j^{(6)}(\Omega) - \Delta_j^{(8)}(\Omega)$ ;  $\Delta_j^{(n)}(\Omega)$  – алгебраїчне доповнення при елементі  $m_{nj}$ , тобто визначник квадратної матриці, яка виходить з вихідної матриці розміром  $9 \times 9$ , складеної з усіх елементів  $m_{ij}$ , шляхом викреслювання  $n$ -го рядка і  $j$ -го стовпця, на перетині яких розташовується елемент  $m_{nj}$ . Зі співвідношення (Б.48) випливає, що всі без винятку коефіцієнти  $A_j$  залежать від значень потенціалів  $U_0$  і  $U_2$ , що і доводить сформульоване вище припущення.

Повертаючись до розрахунку потенціалу  $U_0$ , перепишемо вираз (Б.25) в наступному вигляді

$$Q_1 = 2\pi e_{31}^* \left[ (R_1 + d_1) \hat{u}_\rho^{(1)}(R_1 + d_1) - (R_1 - d_1) \hat{u}_\rho^{(1)}(R_1 - d_1) \right] - C_1^* U_0, \quad (\text{Б.49})$$

де  $C_1^* = 4\pi d_1 R_1 \chi_{33}^* / \alpha$  – динамічна електрична ємність кільцевої області 1 для режиму сталості (рівності нулю) аксіального компонента  $\sigma_{zz}$ .

Так як

$$\hat{u}_\rho^{(1)}(\rho) = \frac{e_{31}^*}{c_{11}^D \gamma \alpha \Delta_0(\Omega)} \left\{ [B_2(\Omega) U_0 + C_2(\Omega) U_0] J_1(\Omega r / \xi) - [B_3(\Omega) U_0 + C_3(\Omega) U_0] N_1(\Omega r / \xi) \right\},$$

де  $r = \rho / R$  – безрозмірна радіальна координата, то, підставляючи визначення  $\hat{u}_\rho^{(1)}(\rho)$  в вираз (Б.49), отримуємо наступну розрахункову формулу

$$Q_1 = C_1^* U_0 \left[ \frac{K_{31}^2}{2(1 + K_{31}^2)} \left( \frac{R}{d_1} + \frac{R}{R_1} \right) \Psi_1(\Omega, \Gamma_1) - 1 \right], \quad (\text{Б.50})$$

де  $K_{31}^2 = (e_{31}^*)^2 / (c_{11}^* \chi_{33}^*)$  – квадрат коефіцієнта електромеханічного зв'язку п'єзоелектричної кераміки в режимі радіальних коливань тонкого диска;  $\Psi_1(\Omega, \Gamma_1)$  – частотно залежна функція, яка залежить від набору геометричних параметрів кільцевого електрода 1 (символ  $\Gamma_1$  в списку аргументів функції).

Числові значення функції  $\Psi_1(\Omega, \Gamma_1)$  розраховуються за формулою

$$\Psi_1(\Omega, \Gamma_1) = \frac{1}{\Omega \Delta_0(\Omega)} \left[ F_0(\Omega, \Gamma_1) + \frac{U_2}{U_0} F_2^{(0)}(\Omega, \Gamma_1) \right], \quad (\text{Б.51})$$

$$\text{де } F_0(\Omega, \Gamma_1) = B_2(\Omega) \left[ J_1(\Omega r_2 / \xi) - \frac{r_1}{r_2} J_1(\Omega r_1 / \xi) \right] - B_3(\Omega) \left[ N_1(\Omega r_2 / \xi) - \frac{r_1}{r_2} N_1(\Omega r_1 / \xi) \right];$$

$$F_2^{(0)}(\Omega, \Gamma_1) = C_2(\Omega) \left[ J_1(\Omega r_2 / \xi) - \frac{r_1}{r_2} J_1(\Omega r_1 / \xi) \right] - C_3(\Omega) \left[ N_1(\Omega r_2 / \xi) - \frac{r_1}{r_2} N_1(\Omega r_1 / \xi) \right].$$

Для того, щоб визначити співвідношення  $U_2/U_0$ , що фактично еквівалентно визначенню коефіцієнта зворотного електроакустичного зв'язку, побудуємо вираз для розрахунку потенціалу  $U_2$ .

Очевидно, що  $U_2 = -i\omega Z_H Q_2$ , де  $Q_2$  – амплітудне значення електричного заряду на кільцевому електроді 2 вторинного електричного кола п'єзоелектричного перетворювача. Електричний заряд  $Q_2$  визначається також як і електричний заряд  $Q_1$ , тобто

$$Q_2 = 2\pi e_{31}^* \left[ (R_2 + d_2) \hat{u}_\rho^{(3)}(R_2 + d_2) - (R_2 - d_2) \hat{u}_\rho^{(3)}(R_2 - d_2) \right] - C_3^* U_2, \quad (\text{Б.52})$$

де  $\hat{u}_\rho^{(3)}(\rho) = A_6 J_1(\Omega r / \xi) + A_7 N_1(\Omega r / \xi) = \frac{e_{31}^*}{c_{11}^D \gamma \alpha \Delta_0(\Omega)} \{ [B_6(\Omega) U_0 + C_6(\Omega) U_2] J_1(\Omega r / \xi) - [B_7(\Omega) U_0 + C_7(\Omega) U_2] N_1(\Omega r / \xi) \}$ ;  $r = \rho / R$ ;  $\xi = \sqrt{c_{11}^* / c_{11}^D}$ ;  $C_3^* = 4\pi d_2 R_2 \chi_{33}^* / \alpha$  – динамічна електрична ємність кільцевої області 3 п'єзокерамічного диска (рис. Б.1) для режиму сталості (рівності нулю) нормального напруження  $\sigma_{zz}$ .

Підставляючи визначення радіального зміщення  $\hat{u}_\rho^{(3)}(\rho)$  в співвідношення (Б.52), отримуємо наступну розрахункову формулу

$$Q_2 = 2\pi \frac{(e_{31}^*)^2 (R_2 + d_2)}{c_{11}^D \gamma \alpha \Delta_0(\Omega)} U_0 \left[ \Xi_0(\Omega, \Gamma_2) + \frac{U_2}{U_0} \Xi_2(\Omega, \Gamma_2) \right] - C_3^* U_2, \quad (\text{Б.53})$$

де  $\Xi_0(\Omega, \Gamma_2) = B_6(\Omega) \left[ J_1(\Omega r_4 / \xi) - \frac{r_3}{r_4} J_1(\Omega r_3 / \xi) \right] - B_7(\Omega) \left[ N_1(\Omega r_4 / \xi) - \frac{r_3}{r_4} N_1(\Omega r_3 / \xi) \right]$ ;

$$\Xi_2(\Omega, \Gamma_2) = C_6(\Omega) \left[ J_1(\Omega r_4 / \xi) - \frac{r_3}{r_4} J_1(\Omega r_3 / \xi) \right] - C_7(\Omega) \left[ N_1(\Omega r_4 / \xi) - \frac{r_3}{r_4} N_1(\Omega r_3 / \xi) \right].$$

Так як  $U_2 = -i\omega Z_H Q_2$ , то з виразу (Б.53) випливає, що

$$U_2 (1 - i\omega C_3^* Z_H) = -i\omega C_3^* Z_H \frac{2\pi (e_{31}^*)^2 (R_2 + d_2)}{C_3^* c_{11}^D \gamma \alpha \Delta_0(\Omega)} U_0 \left[ \Xi_0(\Omega, \Gamma_2) + \frac{U_2}{U_0} \Xi_2(\Omega, \Gamma_2) \right]$$

або

$$\frac{U_2}{U_0} = -f_H(\omega) \frac{K_{31}^2}{2(1 + K_{31}^2)} \left( \frac{R}{d_2} + \frac{R}{R_2} \right) \frac{1}{\Omega \Delta_0(\Omega)} \left[ \Xi_0(\Omega, \Gamma_2) + \frac{U_2}{U_0} \Xi_2(\Omega, \Gamma_2) \right], \quad (\text{Б.54})$$

де  $f_n(\omega) = -i\omega C_3^* Z_n / (1 - i\omega C_3^* Z_n)$  – функція включення або навантажувальна характеристика вихідного кільцевого електрода п'єзоелектричного перетворювача.

У режимі короткого замикання ( $Z_n = 0$ ), про який, як це не дивно, іноді розмірковують деякі автори, функція  $f_n(\omega) = 0$  і  $U_2 = 0$ . Цей факт самоочевидний і не вимагає ніяких математичних викладок для доказу його справедливості. У режимі холостого ходу, коли  $Z_n \rightarrow \infty$ , Функція включення  $f_n(\omega)$  при  $\omega = 0$  дорівнює нулю, а при як завгодно малих  $\omega > 0$   $f_n(\omega) = 1$ , тобто в цьому режимі функція включення є функцією Хевісайда. Звідси випливає, що п'єзоелектричний приймач пружних коливань не здатний реєструвати статичні тиски і деформації. Це твердження, не настільки очевидне для практиків, фактично скасовує велику групу пристроїв п'єзоелектроніки, які представлені в монографії\*.

Швидкість зміни функції включення  $f_n(\omega)$  визначається постійною часу  $\tau_n = C_3^* Z_n$  електричного кола, яка з'єднує електрод приймача з електричним навантаженням. Значення модуля функції  $f_n(\omega)$  в залежності від значення безрозмірної частоти  $\Omega_n = \omega \tau_n$  показані на рис. Б.2.

З рівності (Б.53) визначається шукане співвідношення  $U_2/U_0$  :

$$\frac{U_2}{U_0} = -\Psi_2^{(0)}(\Omega, \Gamma_2), \quad (\text{Б.55})$$

де частотно залежна функція  $\Psi_2^{(0)}(\Omega, \Gamma_2) = A(\Omega, \Gamma_2)/B(\Omega, \Gamma_2)$ ;

$$A(\Omega, \Gamma_2) = \frac{f_n(\omega) K_{31}^2}{2(1 + K_{31}^2)} \left( \frac{R}{d_2} + \frac{R}{R_2} \right) \frac{\Xi_0(\Omega, \Gamma_2)}{\Omega \Delta_0(\Omega)};$$

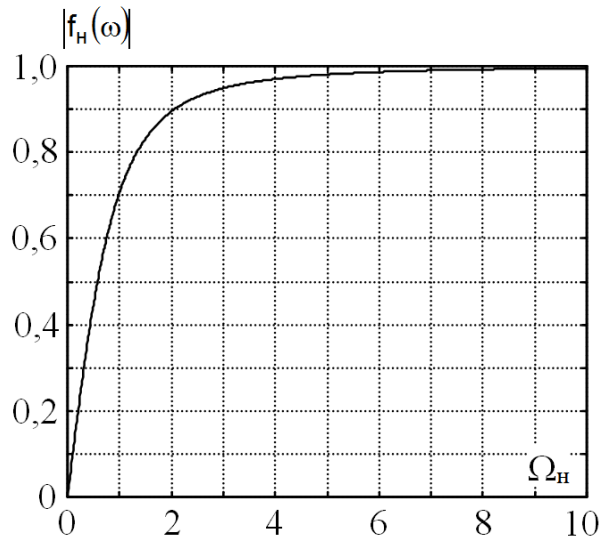
$$B(\Omega, \Gamma_2) = 1 + \frac{f_n(\omega) K_{31}^2}{2(1 + K_{31}^2)} \left( \frac{R}{d_2} + \frac{R}{R_2} \right) \frac{\Xi_2(\Omega, \Gamma_2)}{\Omega \Delta_0(\Omega)}.$$

Підставляючи праву частину виразу (Б.55) в співвідношення (Б.51) отримуємо остаточний вигляд формули для розрахунку числових значень

\* Джагупов Р.Г. и Ерофеев А.А., *Пьезоэлектронные устройства вычислительной техники, систем контроля и управления: Справочник*. СПб.: Политехника, 1994.

частотно залежної функції  $\Psi_1(\Omega, \Gamma_1)$ :

$$\Psi_1(\Omega, \Gamma_1) = \frac{1}{\Omega \Delta_0(\Omega)} \left[ F_0(\Omega, \Gamma_1) - \Psi_2^{(0)}(\Omega, \Gamma_2) F_2^{(0)}(\Omega, \Gamma_1) \right]. \quad (\text{Б.56})$$



**Рис. Б.2. Зміна модуля функції включення п'єзоелектричного приймача акустичних хвиль**

Після цього, беручи до уваги, що  $l_1 = -i\omega Q_1$ , отримуємо формулу для розрахунку електричного імпедансу  $Z_1$ . Згідно з визначенням (Б.5) маємо

$$Z_1 = \frac{U_0}{-i\omega Q_1} = \frac{1}{-i\omega C_1^* [\Xi_1(\Omega, \Pi) - 1]}, \quad (\text{Б.57})$$

де  $\Xi_1(\Omega, \Pi)$  – функція, що залежить від частоти і набору електричних, геометричних і фізико-механічних (символ  $\Pi$  в списку аргументів) параметрів дискового п'єзокерамічного перетворювача. Числові значення цієї функції розраховуються за формулою

$$\Xi_1(\Omega, \Pi) = \frac{K_{31}^2}{2(1 + K_{31}^2)} \left( \frac{R}{d_1} + \frac{R}{R_1} \right) \Psi_1(\Omega, \Gamma_1),$$

де функція  $\Psi_1(\Omega, \Gamma_1)$  задана виразом (Б.56). при  $K_{31}^2 = 0$ , тобто у разі відсутності п'єзоелектричних властивостей у діелектрика під кільцевим електродом 1, вираз (Б.57) перетворюється в добре відому в електротехніці формулу для розрахунку реактивного опору конденсатора з електричною ємністю  $C_1^*$ .

Підставляючи визначення електричного імпедансу  $Z_1$  в формулу (Б.4) для розрахунку потенціалу  $U_0$ , отримуємо наступний результат

$$U_0 = \frac{U_1}{1 - i\omega C_1^* Z_r [\Xi_1(\Omega, \Pi) - 1]},$$

після чого вираз (Б.55) можна записати в наступному вигляді

$$\frac{U_2}{U_0} = \frac{U_2}{U_1} \{1 - i\omega C_1^* Z_r [\Xi_1(\Omega, \Pi) - 1]\} = -\Psi_2^{(0)}(\Omega, \Gamma_2).$$

Оскільки коефіцієнт трансформації  $K(\omega, \Pi) = U_2/U_1$ , остільки з останньої рівності визначається математична модель дискового п'єзоелектричного перетворювача з розділеними електродами

$$K(\omega, \Pi) = -\frac{\Psi_2^{(0)}(\Omega, \Gamma_2)}{1 - i\omega C_1^* Z_r [\Xi_1(\Omega, \Pi) - 1]}. \quad (\text{Б.58})$$

Як впливає з усього вищесказаного, аналітична конструкція (Б.58), що має сенс математичної моделі дискового п'єзоелектричного перетворювача з розділеними електродами, враховує всі без винятку особливості фізичних процесів, які розвиваються в тонкому, п'єзокерамічному диску, що здійснює вісесиметричні радіальні коливання, А це означає, що її можна розглядати як теоретичну основу при розробці системи автоматизованого проектування аналогічних функціональних елементів п'єзоелектроніки\*.

---

\* Bazilo С., «Principles and methods of the calculation of transfer characteristics of disk piezoelectric transformers», *Радіоелектроніка, інформатика, управління*, № 4, сс. 7–22, 2018.



## ДОДАТОК В

### Список опублікованих праць за темою дисертації

- [1] О. Н. Петрищев и К. В. Базило, *Принципы и методы математического моделирования колеблющихся пьезоэлектрических элементов*, ЧП Гордиенко Е.И. Черкассы, 2019, 408 с.
- [2] О. Петрищев та К. Базіло, *Основи розрахунку та проектування дискових п'єзотрансформаторів*, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2019, 170 с.
- [3] О. Н. Петрищев и К. В. Базило, "Принципы и методы расчета передаточных характеристик дисковых пьезоэлектрических трансформаторов. Часть 2. Методика расчета параметров и характеристик простейшего дискового пьезоэлектрического трансформатора", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 4, сс. 10–23, 2015.
- [4] О. Н. Петрищев и К. В. Базило, "Определение электрического импеданса пьезокерамического диска и его расчет в области низких частот", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 3, сс. 24–35, 2016.
- [5] С. Bazilo, A. Zagorskis, O. Petrishchev, Y. Bondarenko, V. Zaika, and Y. Petrushko, "Modelling of Piezoelectric Transducers for Environmental Monitoring", in *Proceedings of 10th International Conference "Environmental Engineering"*, Vilnius Gediminas Technical University, Lithuania, 2017, doi: 10.3846/enviro.2017.008. (**Scopus**)
- [6] О. Н. Петрищев и К. В. Базило, "Математическая модель многосекционного пьезоэлектрического трансформатора с кольцевыми электродами во вторичных электрических цепях", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 1, сс. 11–24, 2017.

- [7] O. N. Petrishchev and C. V. Bazilo, "Methodology of Determination of Physical and Mechanical Parameters of Piezoelectric Ceramics", *J. Nano-Electron. Phys.*, vol. 9, issue 3, pp. 03022-1-03022-6, 2017, doi: 10.21272/jnep.9(3).03022. **(Scopus)**
- [8] О. Н. Петрищев и К. В. Базило, "Принципы и методы построения математических моделей дисковых пьезоэлектрических трансформаторов с секторными электродами", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 2, сс. 33–44, 2017.
- [9] К. В. Базіло, "Принципи розрахунку електричного імпедансу коливального п'єзокерамічного диску в області середніх частот", *Радіоелектроніка, інформатика, управління*, № 4, сс. 15–25, 2017. **(Web of Science)**
- [10] О. Н. Петрищев и К. В. Базило, "Расчет электрического импеданса дискового пьезокерамического трансформатора с закороченным секторным электродом во вторичной электрической цепи", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 4, сс. 47–62, 2017.
- [11] К. В. Базіло, "Дослідження електричного імпедансу п'єзоелектричного диска з секторними електродами", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 1, сс. 41–45, 2018.
- [12] К. В. Базіло, "Дослідження електричного імпедансу п'єзоелектричного диску в області середніх частот", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 2, сс. 100–104, 2018.
- [13] C. Bazilo, "Calculation of parameters of tensely deformed state of disk piezoelements with surfaces partially covered by electrodes", *Machines. Technologies. Materials: International scientific journal*, vol. 12, issue 9, pp. 362–366, 2018.
- [14] К. В. Базіло, "Дослідження впливу навантаження та розмірів електродів п'єзоелектричного диска на його амплітудно-частотні характеристики",

*Вісник Черкаського державного технологічного університету, № 3, сс. 15–20, 2018.*

[15] К. В. Базіло, С. О. Білокінь, М. О. Бондаренко, та В. В. Медяник, "Дослідження мікроелектромеханічних п'єзоелектричних структур методом атомно-силової мікроскопії", *Вісник Черкаського державного технологічного університету, № 3, сс. 21–26, 2018.*

[16] К. В. Базіло, "Розрахунок коефіцієнта трансформації п'єзокерамічного трансформатора з секторними електродами", *Вісник Житомирського державного технологічного університету, № 2, сс. 179–184, 2018.*

[17] К. В. Базіло, "Схема розрахунку дискового п'єзоелемента з частковим електродуванням поверхонь", *Вісник Хмельницького національного університету, № 6, т. 1, сс. 271–281, 2018.*

[18] Bazilo C., "Principles and methods of the calculation of transfer characteristics of disk piezoelectric transformers", *Радіоелектроніка, інформатика, управління, № 4, сс. 7–22, 2018. (Web of Science)*

[19] V. V. Medianyuk, Yu. Yu. Bondarenko, C. V. Bazilo, and M. O. Bondarenko, "Research of Current-Conducting Electrodes of Elements from Piezoelectric Ceramics Modified by the Low-Energy Ribbon-Shaped Electron Stream", *J. Nano-Electron. Phys.*, vol. 10, issue 6, pp. 06012-1-06012–6, 2018, doi: 10.21272/jnep.10(6).06012. **(Scopus)**

[20] О. М. Петрищев, та К. В. Базіло, "Побудова моделі п'єзоелектричного дискового трансформатора з кільцевим електродом в первинному електричному колі", *Вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». Серія: Приладобудування, № 56(2), сс. 45–49, 2018.*

[21] К. В. Базіло, "Розрахунок електричного імпедансу п'єзокерамічного диску в області високих частот", *Вісник Кременчуцького національного університету ім. М. Остроградського, № 5, сс. 9–16, 2018.*

- [22] О. Н. Петрищев и К. В. Базило, "Математическое описание биморфного пьезоэлектрического элемента", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 1, сс. 48–63, 2019.
- [23] O. Petrishchev and C. Bazilo, "Modelling of bimorph piezoelectric elements for informational systems", *Mathematical Modeling: International scientific journal*, issue 1, pp. 25–29, 2019.
- [24] К. В. Базіло, "Дослідження характеристик біморфних п'єзоелектричних перетворювачів", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 2, сс. 5–11, 2019.
- [25] О. М. Петрищев та К. В. Базіло, "Побудова математичної моделі біморфного п'єзоелектричного трансформатора", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 3, сс. 5–14, 2019.
- [26] В. М. Шарапов, К. В. Базило, Ж. В. Сотула, и В. Е. Снитюк, "Исследование пьезоэлектрических преобразователей с добавочными колебательными контурами", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 1, сс. 35–38, 2013.
- [27] В. М. Шарапов, К. В. Базило, Ж. В. Сотула, А. С. Ткаченко, В. Г. Савин и И. О. Моргун, "Методы синтеза пьезоэлектрических преобразователей: метод добавочных элементов. Индуктивность + емкость", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 2, сс. 59–62, 2011.
- Здобувачем розроблено метод синтезу п'єзоелектричних перетворювачів.*
- [28] В. М. Шарапов, В. В. Туз, К. В. Базило, и А. С. Ткаченко, "Схемотехническое моделирование пьезоэлектрических преобразователей с добавочным сопротивлением", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 4, сс. 74–76, 2011.
- [29] V. Sharapov, A. Vladišauskas, K. Bazilo, L. Kunitskaya, and Zh. Sotula, "Methods of synthesis of piezoceramic transducers: spatial energy force structure of piezoelement", *Ultrasound, Kaunas, Lithuania, No. 4*, pp. 44–50, 2009.

- [30] В. М. Шарапов, О. Н. Петрищев, К. В. Базило, Ж. В. Сотула, и А. И. Маштапа, "Классификация пьезоэлектрических трансформаторов", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 2, сс. 58–61, 2014.
- [31] В. М. Шарапов, К. В. Базило, Л. Г. Куницкая, Ж. В. Сотула, и С. А. Филимонов, "Сумматоры на основе дискового мономорфного пьезотрансформатора", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 4, сс. 61–64, 2009.
- [32] В. М. Шарапов, Ж. В. Сотула, Л. Г. Куницкая, и К. В. Базило, "Об одном способе создания низкочастотных акустических колебаний с помощью пьезокерамического излучателя", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 1, сс. 62–65, 2010.
- [33] K. V. Bazilo, O. N. Petrishchev, Yu. Yu. Bondarenko, L. G. Kunytska, and V. V. Medianik, "The research of piezoelectric electrodes for vibroacoustic interference therapy", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 2, сс. 12–15, 2015.
- [34] V. Sharapov, R. Kažys, A. Vladišauskas, K. Bazilo, and D. Romanenko, "Adders on a basis of piezoceramic transformers", *Ultrasound, Kaunas, Lithuania*, No. 1, pp. 40–44, 2011.
- [35] В. М. Шарапов, К. В. Базило, Р. В. Трёмбовецкая, и В. В. Туз, "Преобразователи с пьезотрансформаторами в схемах полосовых и режекторных электрических фильтров", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 1, сс. 22–26, 2015.
- [36] В. М. Шарапов, И. Г. Минаев, Ж. В. Сотула, К. В. Базило, и В. В. Самойленко, "Об эффекте возникновения изгибных колебаний в мономорфных пьезоэлементах", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 3, сс. 60–62, 2011.
- [37] В. М. Шарапов, К. В. Базило, и Ж. В. Сотула, "Повышение уровня звукового давления низкочастотных колебаний преобразователей на основе

ДИСКОВЫХ МОНОМОРФНЫХ ПЬЕЗОЭЛЕМЕНТОВ", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 4, сс. 71–73, 2011.

[38] V. M. Sharapov, O. N. Petrishchev, Zh. V. Sotula, and K. V. Bazilo, "The increase of the sound pressure created by monomorphic disk piezoelements", *Вісник Черкаського державного технологічного університету*, № 3, сс. 38–42, 2014.

[39] Ж. В. Сотула, К. В. Базіло, та В. В. Туз, "П'єзоелектричні перетворювачі для роботехніки", *Вісник Хмельницького національного університету*, № 1, сс. 190–192, 2015.

[40] K. V. Bazilo and V. V. Medianik, "The research and improvement of piezoelectric transducers for vibroacoustic physiotherapy", в *Проблеми інформатизації: матеріали другої міжнародної науково-технічної конференції*, Черкаси: ЧДТУ; Тольятті: ТДУ, 2014, с. 31.

[41] V. M. Sharapov, K. V. Bazilo, and R. V. Trembovetskaya, "Piezoelectric transducers in the schemes of bandpass and bandstop electrical filters", в *Фізика, електроніка, електротехніка "ФЕЕ–2015": Матеріали та програма наук.-техн. конф.*, Суми, 2015, с. 189.

[42] K. V. Bazilo and V. V. Medianyuk, "Research of piezoelectric adders for vibroacoustic physiotherapy", в *Фізика, електроніка, електротехніка "ФЕЕ–2015": Матеріали та програма наук.-техн. конф.*, Суми, 2015, с. 196.

[43] V. V. Medianyuk and K. V. Bazilo, "Application of informational and measuring systems in vibro-acoustic therapy", в *Проблеми інформатизації: матеріали третьої міжнародної науково-технічної конференції*, Черкаси: ЧДТУ; Баку: ВА ЗС АР; Бельсько-Бяла: УТіГН; Полтава: ПНТУ, 2015, с. 77.

[44] K. V. Bazilo and V. V. Medianyuk, "Research of frequency generator for vibroacoustic therapy device", в *Фізика, електроніка, електротехніка "ФЕЕ–2016": Матеріали та програма наук.-техн. конф.*, Суми, 2016, с. 214.

- [45] С. V. Bazilo, "Mathematical modelling of disk piezoelectric transformer with ring electrode in primary electrical circuit", в *Інформатика, математика, автоматика "ІМА –2017": Матеріали та програма наук.-техн. конф.*, Суми, 2017, сс. 233–234.
- [46] О. М. Петрищев та К. В. Базіло, "Визначення електричних потенціалів у вторинних електричних колах багатосекційного дискового п'єзоелектричного трансформатора", в *Датчики, прилади та системи – 2017: тези VI Міжнародної науково-технічної конференції*, Черкаси – Миколаїв – Херсон – Лазурне, 2017, сс. 20–23.
- [47] М. А. Бондаренко, К. В. Базіло, Ю. Ю. Бондаренко, и В. В. Медяник, "Изучение микроэлектромеханических пьезоэлектрических структур методом атомно-силовой микроскопии", в *Датчики, прилади та системи – 2017: тези VI Міжнародної науково-технічної конференції*, Черкаси – Миколаїв – Херсон – Лазурне, 2017, сс. 45–48.
- [48] Ю. Ю. Бондаренко, К. В. Базіло, та Л. Г. Куницька, "Підвищення ефективності електроакустичних перетворювачів шляхом зміни енергосилової структури п'єзоелемента", в *Датчики, прилади та системи – 2017: тези VI Міжнародної науково-технічної конференції*, Черкаси – Миколаїв – Херсон – Лазурне, 2017, сс. 58–60.
- [49] К. В. Базіло, "Математичне моделювання п'єзокерамічного трансформатора з секторними електродами", в *Інформатика, математика, автоматика "ІМА –2018": Матеріали та програма наук.-техн. конф.*, Суми, 2018, сс. 213–214.
- [50] О. М. Петрищев та К. В. Базіло, "Електричний імпеданс дискового п'єзоелектричного елемента в області середніх частот", в *Датчики, прилади та системи – 2018: тези VII Міжнародної науково-технічної конференції*, Черкаси – Херсон – Лазурне, 2018, сс. 32–35.

- [51] К. В. Базіло, "Застосування п'єзоелектричних трансформаторів в джерелах вторинного електроживлення", в *Датчики, прилади та системи – 2019: збірник праць VIII Міжнародної науково-технічної конференції*, Черкаси – Херсон – Лазурне, 2019, сс. 21–25.
- [52] С. V. Bazilo, "Construction of mathematical model of bimorph piezoelectric transducer", в *Проблеми інформатизації: тези доповідей сьомої міжнародної науково-технічної конференції*, Черкаси: ЧДТУ; Харків: НТУ «ХПІ»; Баку: ВА ЗС АР; Бельсько-Бяла: УТiГН, 2019, с. 97.
- [53] О. М. Петрищев та К. В. Базіло, "Спосіб визначення фізико-механічних констант п'єзокерамічних матеріалів", Патент України на корисну модель №119993, 25.10.2017.
- [54] К. В. Базіло, О. М. Петрищев, Ю. Ю. Бондаренко, В. В. Тичков, та Р. В. Трембовецька, "Електроакустичний перетворювач", Патент України на корисну модель №115962, 10.05.2017.
- [55] В. М. Шарапов, К. В. Базіло, В. М. Заїка, О. М. Петрищев, та Ж. В. Сотула, "Електроакустичний перетворювач", Патент України на корисну модель №97758, 10.04.2015.
- [56] В. М. Шарапов, К. В. Базіло, В. М. Заїка, О. М. Петрищев, та Ж. В. Сотула, "Електроакустичний перетворювач", Патент України на корисну модель №97754, 10.04.2015.
- [57] В. М. Шарапов, К. В. Базіло, Ж. В. Сотула, та О. С. Ткаченко, "Електроакустичний перетворювач", Патент України на корисну модель №67640, 27.02.2012.
- [58] В. М. Шарапов, К. В. Базіло, Ж. В. Сотула, та О. С. Ткаченко, "Електроакустичний перетворювач", Патент України на корисну модель №67639, 27.02.2012.



[59] В. М. Шарапов, Ж. В. Сотула, І. В. Черноший, Л. Г. Куницька, та К. В. Базіло, "Електроакустичний перетворювач", Патент України на корисну модель №56932, 25.01.2011.

[60] В. М. Шарапов та К. В. Базіло, "Спосіб створення ультразвукових коливань за допомогою п'єзоелектричного перетворювача", Патент України на корисну модель №55516, 10.12.2010.