РАДИОТЕХНИКА

УДК621.391

АНАЛІЗ ОЦІНОК ПАРАМЕТРА ПОСТІЙНОГО СИГНАЛУ ПРИ АДИТИВНІЙ ВЗАЄМОДІЇ З АСИМЕТРИЧНОЮ ЗАВАДОЮ МЕТОДОМ МАКСИМІЗАЦІЇ ПОЛІНОМА ТА МЕТОДОМ МОМЕНТІВ

ГАВРИШ О.С., ГОНЧАРОВ А.В., ФІЛІПОВ В.В.

На основі моментно-кумулянтного опису випадкових величин отримані оцінки параметра постійного сигналу при спільному оцінюванні з параметрами асиметричної завади другого типу першого виду методом максимізації полінома та методом моментів. Проводиться порівняльний аналіз отриманих оцінок.

Вступ

Оцінка сигналів на тлі завад є одним з важливих завдань, яке вирішується в сучасних інформаційних системах. Зазвичай математичні моделі цих завад представляють як випадковы величини, що мають гауссівський закон розподілу. Проте дана модель завади не завжди відображає реальні властивості завад у каналах зв'язку. Тому для оцінювання параметра сигналу на тлі завад необхідно використовувати математичні моделі, які враховують негауссовість завади.

Така задача часто вирішується за допомогою як класичних, так і нових методів знаходження оцінок параметрів випадкових величин, які ґрунтуються на основі моментно-кумулянтного представлення випадкової величини. Як класичні методи зазвичай використовують: метод максимальної правдоподібності, який базується на використанні функції щільності розподілу випадкової величини, та метод моментів [1], який ґрунтується на розрахунку моментів від випадкової величини. Серед нових методів оцінювання параметрів випадкової величини використовують метод максимізації полінома, метод максимізації усіченого стохастичного полінома, які запропоновані професором Ю.П. Кунченком [2,4].

Оскільки на практиці щільність розподілу для негауссівської завади часто залишається невідомою, то при оцінюванні параметра постійного сигналу на тлі негауссівської завади використовують методи, в основі яких лежить моментно-кумулянтний опис випадкової величини.

Наукова задача даної роботи полягає в оцінюванні параметра постійного сигналу на тлі негауссівської завади методом максимізації полінома, методом максимізації усіченого стохастичного полінома і методом моментів та в подальшому порівняльному аналізі властивостей отриманих оцінок.

1. Постановка задачі

Нехай спостерігається випадкова величина η, яка являє собою адитивну суміш корисного сигналу $S(\vartheta)$ та завади ξ, тобто $\eta = S(\vartheta)+\xi$. Нехай здійснюється вибірка обсягом n незалежних однаково розподілених вибіркових значень $\vec{x} = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ з генеральної сукупності значень випадкової величини η. Як корисний сигнал $S(\vartheta) = S_\vartheta$ розглядається деяка функція від параметра ϑ, яка має постійне значення протягом часу спостереження. В даній роботі негауссівська завада η представлена асиметричною завадою другого типу першого виду [3], що описується кумулянтом другого порядку χ_2, коефіцієнтом асиметрії γ_3 та кумулянтним коефіцієнтом γ_5.

Метою даної роботи є синтез алгоритмів знаходження оцінки інформативного параметра ϑ постійного сигналу при спільному оцінюванні з параметрами асиметричної завади другого типу першого виду, а також аналіз властивостей отриманих оцінок.

2. Оцінка параметра постійного сигналу ϑ при адитивному впливі асиметричної завади 2-го типу 1-го виду методом моментів

Метод моментів полягає в прирівнюванні певної кількості вибіркових моментів до відповідних теоретичних моментів, які є функціями від невідомих параметрів. Розглядається така кількість моментів, яка дорівнює числу параметрів, що необхідно оцінити:

$$m_i(\vec{\theta}) - \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v^i \bigg|_{\vec{\theta}=\hat{\vec{\theta}}} = 0,\ i=\overline{1,r}. \qquad (1)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (1) відносно цих параметрів, ми отримуємо відповідні оцінки.

Питання про те, які саме моменти включати в систему (1), варто вирішувати, керуючись конкретними цілями дослідження й порівняльною простотою форми залежності альтернативних теоретичних характеристик від оцінюваних параметрів.

До переваг методу моментів варто віднести його порівняно просту обчислювальну реалізацію, а також те, що оцінки, отримані з розв'язку системи (1), є функціями від вибіркових моментів. Це спрощує дослідження статистичних властивостей оцінок методу моментів. Також можна показати, що при досить загальних умовах розподіл оцінки такого роду при великих значеннях обсягу вибірки асимптотично нормальний.

Ефективність оцінок, отриманих методом моментів, як правило, є невеликою, і щодо цього вони поступаються оцінкам, отриманим, наприклад, методом максимізації стохастичного полінома [2]. Проте метод моментів часто дуже зручний на практиці. Іноді оцінки, отримані за допомогою методу моментів, приймаються як перше наближення, за яким можна визначати оцінки більш високої ефективності іншими методами.

Для оцінки параметра постійного сигналу ϑ при роздільному оцінюванні з параметрами асиметричної завади 2-го типу 1-го виду методом моментів використаємо момент першого порядку m_1.

Тоді вираз (1) запишеться у такому вигляді:

$$m_1 - \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v \bigg|_{S_\vartheta = \hat{S}_\vartheta} = 0 . \qquad (2)$$

Підставляючи значення теоретичного моменту першого порядку в співвідношення (2), отримаємо лінійне рівняння:

$$\hat{S}_\vartheta = \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v . \qquad (3)$$

Оцінка параметра ϑ дорівнює функції, оберненій $\hat{S}_\vartheta$, наведена вище рівність запишеться в такому вигляді:

$$\hat{\vartheta} = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v \right).$$

Отримана оцінка параметра сигналу ϑ з рівняння (2) залежить лише від статистики першого порядку $\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v$, що збігається зі значенням оцінки, отриманої методом максимізації полінома при першому степені стохастичного полінома [2].

Проведемо аналіз асимптотичних властивостей оцінки (3), отриманої за допомогою методу моментів.

В загальному випадку як дисперсія оцінки (3) береться квадрат середньоквадратичного відхилення:

$$\sigma^2_{S_\vartheta} = E(\hat{S}_\vartheta - S_\vartheta)^2 . \qquad (4)$$

Внесемо дійсне значення оцінки S_ϑ під знак суми:

$$\sigma^2_{S_\vartheta} = E\left(\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n}(x_v - S_\vartheta) \right)^2 .$$

Оскільки вибіркові значення є незалежними та однаково розподіленими, можемо представити наведений вище вираз як добуток математичних сподівань:

$$\sigma^2_{S_\vartheta} = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{v=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} E(x_r - S_\vartheta)(x_v - S_\vartheta)\right) .$$

Якщо вибірки x_r та x_v є статистично-незалежними то вираз під сумами можна записати так:

$$\sum_{v=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} E(x_r - S_\vartheta)(x_v - S_\vartheta) = \sum_{v=1}^{n} E(x_v - S_\vartheta)^2 .$$

Враховуючи основні властивості математичного сподівання [1] та здійснивши нескладні математичні перетворення, отримаємо:

$$\sigma^2_{S_\vartheta} = \frac{1}{n^2}\sum_{v=1}^{n}(m_2 - m_1^2) .$$

Вираз під сумою наведеної вище рівності є центрованим корелянтом $K_{1,1}$. Підставляючи значення $K_{1,1}$, отримаємо:

$$\sigma^2_{S_\vartheta} = \frac{1}{n^2}\sum_{v=1}^{n} K_{1,1} = \frac{\chi_2}{n} . \qquad (5)$$

Проаналізувавши вираз (5), можна побачити, що дисперсія оцінки (3) прямо пропорційна потужності завади χ_2 та обернено пропорційна обсягу вибірки n.

3. Спільне оцінювання параметра постійного сигналу ϑ та кумулянта другого порядку при адитивному впливі асиметричної завади 2-го типу 1-го виду методом моментів

Для спільної оцінки постійного сигналу S_ϑ та дисперсії завади використаємо перших два моменти. Тоді система (1) матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} m_1 - \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v \bigg|_{\substack{S_\vartheta = \hat{S}_\vartheta \\ \chi_2 = \hat{\chi}_2}} = 0, \\ m_2 - \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v^2 \bigg|_{\substack{S_\vartheta = \hat{S}_\vartheta \\ \chi_2 = \hat{\chi}_2}} = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Система (6) складається з двох рівнянь. Перше рівняння будується на основі теоретичного та вибіркового моментів першого порядку. Відповідно друге рівняння системи (6) містить теоретичний момент m_2 та статистику другого порядку.

Підставляючи значення для теоретичних моментів в систему (6), отримаємо:

$$\begin{cases} S_\vartheta - \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v \bigg|_{\substack{S_\vartheta = \hat{S}_\vartheta \\ \chi_2 = \hat{\chi}_2}} = 0, \\ S_\vartheta^2 + \chi_2 - \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v^2 \bigg|_{\substack{S_\vartheta = \hat{S}_\vartheta \\ \chi_2 = \hat{\chi}_2}} = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Надалі для зручності ліві частини рівнянь системи (7) відповідно позначимо $f_1(S_\vartheta, \chi_2)$ та $f_2(S_\vartheta, \chi_2)$.

Система (7) містить нелінійне рівняння, тому для знаходження аналітичного розв'язку рівнянь (7) розкладемо їх в ряд Тейлора за статистиками $(\hat{S}_\vartheta - S_\vartheta)$, $(\hat{\chi}_2 - \chi_2)$, які є нескінченно малими величинами. До уваги беремо лише перших два члени ряду:

$$\begin{cases} f_1(S_\vartheta, \chi_2) + (\hat{S}_\vartheta - S_\vartheta)\frac{\partial}{\partial S_\vartheta} f_1(S_\vartheta, \chi_2) + \\ \qquad + (\hat{\chi}_2 - \chi_2)\frac{\partial}{\partial \chi_2} f_1(S_\vartheta, \chi_2) = 0, \\ f_2(S_\vartheta, \chi_2) + (\hat{S}_\vartheta - S_\vartheta)\frac{\partial}{\partial S_\vartheta} f_2(S_\vartheta, \chi_2) + \\ \qquad + (\hat{\chi}_2 - \chi_2)\frac{\partial}{\partial \chi_2} f_2(S_\vartheta, \chi_2) = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

де $\frac{\partial f_1}{\partial S_\vartheta}, \frac{\partial f_2}{\partial S_\vartheta}, \frac{\partial f_1}{\partial \chi_2}, \frac{\partial f_2}{\partial \chi_2}$ – часткові похідні по оцінюваним параметрам.

Надалі в функціях $f_1(S_\vartheta, \chi_2)$ та $f_2(S_\vartheta, \chi_2)$ для спрощення запису будемо опускати залежність вказаних величин від параметрів S_ϑ, χ_2. Тоді систему (8) можна записати так:

$$\begin{cases} (\hat{S}_\vartheta - S_\vartheta)\frac{\partial f_1}{\partial S_\vartheta} + (\hat{\chi}_2 - \chi_2)\frac{\partial f_1}{\partial \chi_2} = -f_1, \\ (\hat{S}_\vartheta - S_\vartheta)\frac{\partial f_2}{\partial S_\vartheta} + (\hat{\chi}_2 - \chi_2)\frac{\partial f_2}{\partial \chi_2} = -f_2. \end{cases} \tag{9}$$

Для розв'язку системи (9) скористаємось методом Крамера [1], для цього знайдемо значеныня часткових похідних:

$$\frac{\partial f_1}{\partial S_\vartheta} = 1, \ \frac{\partial f_2}{\partial S_\vartheta} = 2S_\vartheta, \ \frac{\partial f_1}{\partial \chi_2} = 0, \ \frac{\partial f_2}{\partial \chi_2} = 1.$$

Побудуємо з наведених вище значень матрицю та знайдемо її визначник:

$$\Lambda_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S_\vartheta} & \frac{\partial f_1}{\partial \chi_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S_\vartheta} & \frac{\partial f_2}{\partial \chi_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2S_\vartheta & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Тоді розв'язок системи (9) запишеться в такому вигляді:

$$\begin{cases} \hat{S}_\vartheta = S_\vartheta + \frac{\Lambda_{1(2)}}{\Lambda_2}, \\ \hat{\chi}_2 = \chi_2 + \frac{\Lambda_{2(2)}}{\Lambda_2}, \end{cases} \tag{10}$$

де коефіцієнти $\Lambda_{1(2)}$ та $\Lambda_{2(2)}$ знаходяться з таких співвідношень:

$$\Lambda_{1(2)} = \begin{vmatrix} -f_1 & \frac{\partial f_1}{\partial \chi_2} \\ -f_2 & \frac{\partial f_2}{\partial \chi_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v - S_\vartheta,$$

$$\Lambda_{2(2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S_\vartheta} & -f_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial S_\vartheta} & -f_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v^2 - 2S_\vartheta \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v + S_\vartheta^2 - \chi_2). \tag{11}$$

Враховуючи значення коефіцієнтів (11), система (10) після простих перетворень набуде вигляду:

$$\begin{cases} \hat{S}_\vartheta = \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v, \\ \hat{\chi}_2 = \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v^2 - 2S_\vartheta \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v + S_\vartheta^2. \end{cases}$$

Підставляючи значення оцінки $\hat{S}_\vartheta$, знайденої в першому рівнянні наведеної вище системи, в друге рівняння даної системи, отримаємо остаточний вираз для спільної оцінки сигналу S_ϑ та кумулянта другого порядку при адитивному впливі асиметричної завади 2-го типу 1-го виду методом моментів:

$$\begin{cases} \hat{S}_\vartheta = \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v, \\ \hat{\chi}_2 = \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v\right)^2. \end{cases} \tag{12}$$

Розрахуємо дисперсії оцінок (12). По аналогії з виразом (4) дисперсія спільної оцінки постійного сигналу S_ϑ та кумулянта другого порядку розраховується з таких співвідношень:

$$\begin{cases} \sigma_{S_\vartheta}^2 = E(\hat{S}_\vartheta - S_\vartheta)^2, \\ \sigma_{\chi_2}^2 = E(\hat{\chi}_2 - \chi_2)^2. \end{cases} \tag{13}$$

Підставивши значення отриманих оцінок (12) в систему (13), неважко показати, що дисперсія спільної оцінки (12) знаходиться з такого співвідношення:

$$\begin{cases} \sigma_{S_\vartheta}^2 = \frac{1}{n}K_{1,1}, \\ \sigma_{\chi_2}^2 = \frac{1}{n}(K_{2,2} - 4S_\vartheta K_{1,2} + 4S_\vartheta^2 K_{1,1}). \end{cases}$$

Врахуємо у наведеній вище системі значення центрованих корелянтів $K_{1,1}$, $K_{1,2}$, $K_{2,2}$ та запишемо остаточне значення для дисперсій відповідних оцінок (12):

$$\begin{cases} \sigma_{S_\vartheta}^2 = \frac{\chi_2}{n}, \\ \sigma_{\chi_2}^2 = \frac{2\chi_2^2}{n}. \end{cases} \tag{14}$$

4. Спільне оцінювання параметра постійного сигналу, коефіцієнта асиметрії та дисперсії асиметричної завади 2-го типу 1-го виду методом моментів

Спільна оцінка постійного сигналу S_ϑ та параметрів асиметричної завади знаходиться з системи рівнянь:

$$\begin{cases} m_1 - \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v \Big|_{\substack{S_\vartheta = \hat{S}_\vartheta \\ \chi_2 = \hat{\chi}_2 \\ \gamma_3 = \hat{\gamma}_3}} = 0, \\ m_2 - \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v^2 \Big|_{\substack{S_\vartheta = \hat{S}_\vartheta \\ \chi_2 = \hat{\chi}_2 \\ \gamma_3 = \hat{\gamma}_3}} = 0, \\ m_3 - \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v^3 \Big|_{\substack{S_\vartheta = \hat{S}_\vartheta \\ \chi_2 = \hat{\chi}_2 \\ \gamma_3 = \hat{\gamma}_3}} = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Третє рівняння системи (15) представлене теоретичним та статистичним моментом третього порядку. Перше та друге рівняння системи (15) будуються аналогічно до системи рівнянь (6).

Підставляючи значення для теоретичних моментів в систему (15), отримаємо:

$$\begin{cases} S_\vartheta - \frac{1}{n}\sum\limits_{v=1}^{n} x_v \Big|_{\substack{S_\vartheta=\hat{S}_\vartheta \\ \chi_2=\hat{\chi}_2 \\ \gamma_3=\hat{\gamma}_3}} = 0, \\ S_\vartheta^2 + \chi_2 - \frac{1}{n}\sum\limits_{v=1}^{n} x_v^2 \Big|_{\substack{S_\vartheta=\hat{S}_\vartheta \\ \chi_2=\hat{\chi}_2 \\ \gamma_3=\hat{\gamma}_3}} = 0, \\ S_\vartheta^3 + 3S_\vartheta\chi_2 + \chi_2^{3/2}\gamma_3 - \frac{1}{n}\sum\limits_{v=1}^{n} x_v^3 \Big|_{\substack{S_\vartheta=\hat{S}_\vartheta \\ \chi_2=\hat{\chi}_2 \\ \gamma_3=\hat{\gamma}_3}} = 0. \end{cases}$$

Розкладемо кожне рівняння наведеної вище системи за статистиками $(\hat{S}_\vartheta - S_\vartheta)$, $(\hat{\chi}_2 - \chi_2)$, $(\hat{\gamma}_3 - \gamma_3)$ в ряд Тейлора, беручи до уваги лише перших два члени ряду:

$$\begin{cases} (\hat{S}_\vartheta - S_\vartheta)\frac{\partial f_1}{\partial S_\vartheta} + (\hat{\chi}_2 - \chi_2)\frac{\partial f_1}{\partial \chi_2} + (\hat{\gamma}_3 - \gamma_3)\frac{\partial f_1}{\partial \gamma_3} = -f_1, \\ (\hat{S}_\vartheta - S_\vartheta)\frac{\partial f_2}{\partial S_\vartheta} + (\hat{\chi}_2 - \chi_2)\frac{\partial f_2}{\partial \chi_2} + (\hat{\gamma}_3 - \gamma_3)\frac{\partial f_2}{\partial \gamma_3} = -f_2, \\ (\hat{S}_\vartheta - S_\vartheta)\frac{\partial f_3}{\partial S_\vartheta} + (\hat{\chi}_2 - \chi_2)\frac{\partial f_3}{\partial \chi_2} + (\hat{\gamma}_3 - \gamma_3)\frac{\partial f_3}{\partial \gamma_3} = -f_3. \end{cases} \tag{16}$$

По аналогії з розв’язком для спільної оцінки двох параметрів, наведеним вище, знайдемо розв’язок системи (16) методом Крамера.

Значення часткових похідних будуть дорівнювати:

$$\frac{\partial f_1}{\partial S_\vartheta} = 1, \ \frac{\partial f_2}{\partial S_\vartheta} = 2S_\vartheta, \ \frac{\partial f_3}{\partial S_\vartheta} = (3S_\vartheta^2 + 3\chi_2),$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \chi_2} = 0, \ \frac{\partial f_2}{\partial \chi_2} = 1, \ \frac{\partial f_3}{\partial \chi_2} = 3S_\vartheta + \frac{3}{2}\chi_2^{1/2}\gamma_3,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \gamma_3} = 0, \ \frac{\partial f_2}{\partial \gamma_3} = 0, \ \frac{\partial f_3}{\partial \gamma_3} = \chi_2^{3/2}.$$

Визначник матриці, побудованої з наведених вище значень часткових похідних, буде дорівнювати:

$$\Lambda_3 = \chi_2^{3/2}.$$

Тоді розв’язок системи (16) буде таким:

$$\begin{cases} \hat{S}_\vartheta = S_\vartheta + \frac{\Lambda_{1(3)}}{\Lambda_3}, \\ \hat{\chi}_2 = \chi_2 + \frac{\Lambda_{2(3)}}{\Lambda_3}, \\ \hat{\gamma}_3 = \gamma_3 + \frac{\Lambda_{3(3)}}{\Lambda_3}. \end{cases} \tag{17}$$

Коефіцієнти $\Lambda_{1(3)}$, $\Lambda_{2(3)}$ та $\Lambda_{3(3)}$ розраховуються метод Крамера:

$$\Lambda_{1(3)} = -\chi_2^{3/2}\left(S_\vartheta - \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v\right),$$

$$\Lambda_{2(3)} = \chi_2^{3/2}\left(\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v^2 - 2S_\vartheta \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v + S_\vartheta^2 - \chi_2\right),$$

$$\Lambda_{3(3)} = \Big(\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v^3 - \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v^2 (3S_\vartheta + \frac{3}{2}\chi_2^{1/2}\gamma_3) + $$
$$+ 3\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v (S_\vartheta^2 + S_\vartheta\chi_2^{1/2}\gamma_3 - \chi_2) - S_\vartheta^3 -$$
$$- \frac{3}{2}S_\vartheta^2\chi_2^{1/2}\gamma_3 + 3S_\vartheta\chi_2 + \frac{1}{2}\chi_2^{3/2}\gamma_3\Big).$$

Підставимо наведені вище коефіцієнти в систему (17), отримаємо співвідношення для спільної оцінки постійного сигналу та параметрів асиметричної завади:

$$\begin{cases} \hat{S}_\vartheta = \frac{1}{n}\sum\limits_{v=1}^{n} x_v, \\ \hat{\chi}_2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{v=1}^{n} x_v^2 - 2S_\vartheta \frac{1}{n}\sum\limits_{v=1}^{n} x_v + S_\vartheta^2, \\ \hat{\gamma}_3 = \gamma_3 + \frac{\Lambda_{\gamma 3}}{\Lambda_3}. \end{cases} \tag{18}$$

Третє рівняння системи (18) в розширеному вигляді запишеться так:

$$\hat{\gamma}_3 = \frac{1}{\chi_2^{3/2}}\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v^3 -$$
$$- \frac{1}{\chi_2^{3/2}}\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v^2 (3S_\vartheta + \frac{3}{2}\chi_2^{1/2}\gamma_3) +$$
$$+ 3\frac{1}{\chi_2^{3/2}}\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v (S_\vartheta^2 + S_\vartheta\chi_2^{1/2}\gamma_3 - \chi_2) -$$
$$- \frac{S_\vartheta^3}{\chi_2^{3/2}} - \frac{3}{2}S_\vartheta^2\chi_2^{-1}\gamma_3 + 3S_\vartheta\chi_2^{-1/2} + \frac{3}{2}\gamma_3.$$

Здійснивши нескладні підстановки, систему рівнянь (18) можна представити у вигляді:

$$\begin{cases} \hat{S}_\vartheta = \frac{1}{n}\sum\limits_{v=1}^{n} x_v, \\ \hat{\chi}_2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{v=1}^{n} x_v^2 - \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{v=1}^{n} x_v\right)^2, \\ \hat{\gamma}_3 = \dfrac{\frac{1}{n}\sum\limits_{v=1}^{n} x_v^3 - 3\frac{1}{n}\sum\limits_{v=1}^{n} x_v \frac{1}{n}\sum\limits_{v=1}^{n} x_v^2 + 2\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{v=1}^{n} x_v\right)^3}{\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{v=1}^{n} x_v^2 - \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{v=1}^{n} x_v\right)^2\right)^{3/2}}. \end{cases}$$

Розрахуємо дисперсії оцінок постійного сигналу S_ϑ кумулянта другого порядку та коефіцієнта асиметрії:

$$\begin{cases} \sigma^2_{S_\vartheta} = E(\hat{S}_\vartheta - S_\vartheta)^2, \\ \sigma^2_{\chi_2} = E(\hat{\chi}_2 - \chi_2)^2, \\ \sigma^2_{\gamma_3} = E(\hat{\gamma}_3 - \gamma_3)^2. \end{cases} \tag{19}$$

Розв'язок рівнянь, складених для знаходження дисперсій оцінки сигналу S_ϑ та кумулянта другого порядку системи (19) наведений у виразах (13) та (14), тому розглянемо лише третє рівняння даної системи.

Підставивши значення отриманої оцінки (18) в дане рівняння, неважко показати, що дисперсія знаходиться з такого співвідношення:

$$\sigma^2_{\gamma_3} = \frac{1}{n}(K_{3,3} + Z_2^2 K_{2,2} + Z_1^2 K_{1,1} + 2Z_2 K_{2,3} + $$
$$+ 2Z_1 K_{1,3} + 2Z_1 Z_2 K_{1,2}),$$

де коефіцієнти Z_1 та Z_2 відповідно дорівнюють:

$$Z_1 = 3(S_\vartheta^2 + S_\vartheta \chi_2^{1/2}\gamma_3 - \chi_2),$$
$$Z_2 = -\frac{3}{2}(2S_\vartheta + \chi_2^{1/2}\gamma_3).$$

Врахуємо в наведеному вище виразі значення центрованих корелянт $K_{1,1}$, $K_{1,2}$, $K_{1,3}$, $K_{2,2}$, $K_{2,3}$, $K_{3,3}$ та запишемо остаточне значення для наведеної вище дисперсії:

$$\sigma^2_{\gamma_3} = \frac{3}{n}\left(2 - \frac{3}{2}\gamma_3^2 - \gamma_3\gamma_5\right). \tag{20}$$

Дисперсія (20) прямо пропорційно залежить від кумулянтних коефіцієнтів γ_3, γ_5 та обернено пропорційно від обсягу вибірки n.

5. Спільне оцінювання параметра постійного сигналу, коефіцієнта асиметрії при усіченому оцінюванні дисперсії асиметричної завади 2-го типу 1-го виду методом максимізації полінома

Одним з ефективних напрямків у теорії обробки сигналів на фоні негауссівських завад є оцінювання параметрів сигналів за допомогою методу максимізації полінома, який був запропонований професором Ю.П. Кунченком [2].

Даний метод дозволяє синтезувати оцінки з високими точнісними характеристиками, проте зі збільшенням степеня стохастичного полінома разом з підвищенням точності оцінювання також суттєво ускладнюються і алгоритми знаходження оцінок. Тому у випадках, коли в дослідженнях поряд з високою точністю оцінювання важливу роль відіграє швидкість обчислення оцінки, яка безпосередньо пов'язана зі складністю обчислювальних алгоритмів, необхідно застосовувати новий метод знаходження оцінок параметрів, заснований на використанні усічених узагальнених стохастичних поліномів, який називається методом максимізації усіченого стохастичного полінома [4]. Даний метод дозволяє спростити алгоритми знаходження оцінок параметрів і при цьому знаходити оцінки з мінімальною дисперсією при заданому спрощеному стохастичному поліномі.

Параметр корисного сигналу ϑ та коефіцієнт асиметрії γ_3 необхідно оцінювати з максимальною точністю і тому при побудові алгоритмів для знаходження оцінки параметра ϑ та кумулянта третього порядку γ_3 застосовується метод максимізації полінома [2]. Що ж стосується дисперсії завади χ_2, то про цей параметр необхідно мати мінімальну інформацію, оскільки він є заважаючим, тому для синтезу алгоритмів знаходження оцінки кумулянта другого порядку застосовується метод максимізації усіченого стохастичного полінома [4].

Спільна оцінка параметра сигналу ϑ, дисперсії завади χ_2 та коефіцієнта асиметрії γ_3 в загальному вигляді знаходиться з розв'язку системи рівнянь при степенях стохастичного полінома $s \geq 3$ та при апріорно відомому параметрі асиметричної завади другого типу γ_5:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{s} h_{i(s)[1]} \sum\limits_{v=1}^{n} [x_v^i - m_i] \Big|_{\substack{\vartheta=\hat{\vartheta} \\ \chi_2=\hat{\chi}_2 \\ \gamma_3=\hat{\gamma}_3}} = 0, \\ \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq(c,e,\ldots,l)}}^{s} h_{i(s)[2]} \sum\limits_{v=1}^{n} [x_v^i - m_i] \Big|_{\substack{\vartheta=\hat{\vartheta} \\ \chi_2=\hat{\chi}_2 \\ \gamma_3=\hat{\gamma}_3}} = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{s} h_{i(s)[3]} \sum\limits_{v=1}^{n} [x_v^i - m_i] \Big|_{\substack{\vartheta=\hat{\vartheta} \\ \chi_2=\hat{\chi}_2 \\ \gamma_3=\hat{\gamma}_3}} = 0, \end{cases} \tag{21}$$

де $h_{i(s)[1]}$, $h_{i(s)[2]}$, $h_{i(s)[3]}$ – невідомі коефіцієнти, що в загальному вигляді знаходяться з розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{j=1}^{s} h_{j(s)[1]} K_{i,j} = \frac{\partial}{\partial\vartheta} m_i, \quad i = \overline{1,s},$$
$$\sum_{j=1}^{s} h_{j(s)[3]} K_{i,j} = \frac{\partial}{\partial\vartheta} m_i, \quad i = \overline{1,s}, \tag{22}$$
$$\sum_{j=1}^{s} h_{j(s)[2]} K_{i,j} = \frac{\partial}{\partial\chi_2} m_i, \quad i = \overline{1,s}, \quad i \neq (c,e,\ldots,l),$$

де значення цілих чисел $c,e,\ldots,l$ вибирається відповідно до методу максимізації усіченого стохастичного полінома [4].

Коефіцієнти $h_{j(s)[1]}$, $h_{j(s)[3]}$ та $h_{j(s)[2]}$ забезпечують мінімум дисперсій оцінок $\hat{\vartheta}$, $\hat{\gamma}_3$ та $\hat{\chi}_2$, знайдених методом максимізації полінома та методом максимізації усіченого полінома відповідно.

Синтез алгоритму спільного оцінювання параметра сигналу ϑ, кумулянта другого порядку χ_2 та кумулянтного коефіцієнта γ_3 можливий починаючи з третього степеня стохастичного полінома. Для того щоб знайти оцінку з високими точнісними характеристиками, розглянемо четвертий степінь стохастичного полінома.

Тоді відповідно до методу максимізації полінома запишемо систему рівнянь (21) для знаходження оцінки параметра ϑ, кумулянта χ_2 та кумулянтного коефіцієнта γ_3 при степені полінома $s = 4$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{4} h_{i(4)[1]} \sum_{v=1}^{n} [x_v^i - m_i] \Big|_{\substack{\vartheta=\hat{\vartheta} \\ \chi_2=\hat{\chi}_2 \\ \gamma_3=\hat{\gamma}_3}} = 0, \\ \sum_{i=1}^{4} h_{i(4)[2]} \sum_{v=1}^{n} [x_v^i - m_i] \Big|_{\substack{\vartheta=\hat{\vartheta} \\ \chi_2=\hat{\chi}_2 \\ \gamma_3=\hat{\gamma}_3}} = 0, \\ \sum_{i=1}^{4} h_{i(4)[3]} \sum_{v=1}^{n} [x_v^i - m_i] \Big|_{\substack{\vartheta=\hat{\vartheta} \\ \chi_2=\hat{\chi}_2 \\ \gamma_3=\hat{\gamma}_3}} = 0, \end{cases} \qquad (23)$$

де оптимальні коефіцієнти $h_{1(4)[1]} - h_{4(4)[1]}$, $h_{1(4)[2]}$, $h_{2(4)[2]}$ та $h_{1(4)[3]} - h_{4(4)[3]}$ знаходяться з розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь (22) при степені полінома $s = 4$.

Аналогічний розрахунок для оптимальних коефіцієнтів наведений в роботах [5,6]. В даній статті, внаслідок громіздкості виразів, коефіцієнти $h_{i(4)[1]}$, $h_{i(4)[3]}$, $i = \overline{1,4}$ та $h_{j(4)[2]}$, $j = \overline{1,2}$ не наводяться.

Підставляючи описані вище коефіцієнти у систему рівнянь (23), отримаємо систему степеневих рівнянь для знаходження оцінки параметра ϑ, дисперсії завади χ_2 та коефіцієнта асиметрії γ_3. Аналітичний розв'язок аналогічної системи степеневих рівнянь показаний в роботі [5].

Для дослідження статистичних характеристик оцінок, отриманих з розв'язку системи (23), розглядають асимптотичний випадок, коли обсяг вибірки прямує до нескінченності.

Для розрахунку асимптотичної дисперсії оцінки $\hat{\vartheta}$ при спільному оцінюванні з χ_2 та γ_3 необхідно знайти матрицю кількості добутої інформації, яка для четвертого степеня стохастичного полінома має вигляд:

$$J_{4n} = \begin{pmatrix} J_{4n}^{(1,1)} & J_{4n}^{(1,2)} & J_{4n}^{(1,3)} \\ J_{4n}^{(2,1)} & J_{4n}^{(2,2)} & J_{4n}^{(2,3)} \\ J_{4n}^{(3,1)} & J_{4n}^{(3,2)} & J_{4n}^{(3,3)} \end{pmatrix}. \qquad (24)$$

Елементи матриці (24) відповідно дорівнюють:

$$J_{4n}^{(1,1)} = \sum_{i=1}^{4} h_{i(4)[1]} \frac{\partial}{\partial \vartheta} m_i, \quad J_{4n}^{(1,2)} = \sum_{i=1}^{4} h_{i(4)[1]} \frac{\partial}{\partial \chi_2} m_i,$$

$$J_{4n}^{(1,3)} = \sum_{i=1}^{4} h_{i(4)[1]} \frac{\partial}{\partial \gamma_3} m_i, \quad J_{4n}^{(2,1)} = \sum_{i=1}^{4} h_{i(4)[2]} \frac{\partial}{\partial \vartheta} m_i,$$

$$J_{4n}^{(2,2)} = \sum_{i=1}^{4} h_{i(4)[2]} \frac{\partial}{\partial \chi_2} m_i, \quad J_{4n}^{(2,3)} = \sum_{i=1}^{4} h_{i(4)[2]} \frac{\partial}{\partial \gamma_3} m_i,$$

$$J_{4n}^{(3,1)} = \sum_{i=1}^{4} h_{i(4)[3]} \frac{\partial}{\partial \vartheta} m_i, \quad J_{4n}^{(3,2)} = \sum_{i=1}^{4} h_{i(4)[3]} \frac{\partial}{\partial \chi_2} m_i,$$

$$J_{4n}^{(3,3)} = \sum_{i=1}^{4} h_{i(4)[3]} \frac{\partial}{\partial \gamma_3} m_i. \qquad (25)$$

Тоді дисперсія оцінки $\hat{\vartheta}$ при спільному оцінюванні χ_2 та γ_3 буде дорівнювати відповідному діагональному елементу варіаційної матриці оцінок, котра асимптотично дорівнює оберненій матриці кількості добутої інформації, тобто асимптотичну дисперсію оцінки $\hat{\vartheta}$, отриманої з розв'язку системи рівнянь (23), можна записати в такому вигляді:

$$\sigma_{(\vartheta)4}^2 = \frac{(24 + 132\gamma_3^2 - 90\gamma_3^4 - \gamma_5^2 + 6\gamma_3\gamma_5(8 - 3\gamma_3^2))}{3(8 + 44\gamma_3^2 - 30\gamma_3^4 + \gamma_3\gamma_5(16 - 7\gamma_3^2))} \times$$

$$\times \frac{\chi_2}{n} \left(\frac{\partial S_\vartheta}{\partial \vartheta} \right)^{-2}. \qquad (26)$$

Для визначення ефективності оцінок, отриманих з розв'язку системи рівнянь (23), одержаною за допомогою методу максимізації полінома, в порівнянні з оцінками (18), отриманими за допомогою методу моментів, розрахуємо коефіцієнт ефектвності:

$$g_{(\vartheta)41} = \frac{\sigma_{(\vartheta)4}^2}{\sigma_{S_\vartheta}^2},$$

де $\sigma_{(\vartheta)4}^2$ – асимптотична дисперсія, розрахована методом максимізації полінома при четвертому степені стохастичного полінома; $\sigma_{S_\vartheta}^2$ – асимптотична дисперсія, розрахована методом моментів при спільному оцінюванні сигналу S_ϑ з параметрами асиметричної завади.

Отже, коефіцієнт $g_{(\vartheta)41}$ має такий вигляд:

$$g_{(\vartheta)41} = 1 - \frac{\gamma_5(\gamma_5 - 3\gamma_3^2)}{3(8 + 44\gamma_3^2 - 30\gamma_3^4 + \gamma_3\gamma_5(16 - 7\gamma_3^2))}. \qquad (27)$$

На рис. 1 показаний графік залежності коефіцієнта ефективності $g_{(\vartheta)41}$ від кумулятного коефіцієнта третього та п'ятого порядків, побудований у відповідності з виразом (27). Даний графік являє собою поверхню, яка приймає максимальне значення при нульових значеннях кумулянтних коефіцієнтів третього та п'ятого порядків та наближається до нуля при наближенні γ_3 та γ_5 до границі області допустимих значень.

На рис. 2 побудована проекція даної поверхні на площину $0\gamma_3\gamma_5$, яка наочно показує характер зміни коефіцієнта зменшення дисперсії при різних значеннях кумулянтних коефіцієнтів γ_3 та γ_5.

Проаналізувавши вираз (27) та графіки, які зображені на рис. 1, 2, можемо побачити, що при нульових значеннях кумулянтних коефіцієнтів γ_3 та γ_5 коефіцієнт зменшення дисперсії (27) буде рівним одиниці, а це значить, що дисперсія оцінки, отриманої з розв'язку системи рівнянь (23), буде збігатися з дисперсією оцінки, отриманої методом моментів (19).

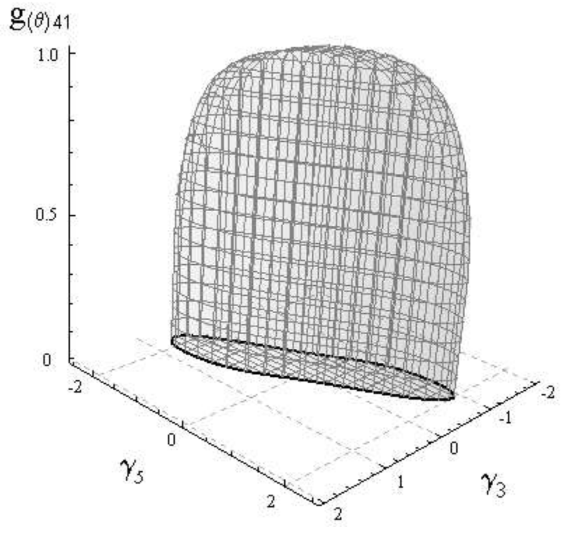

Рис. 1. Графічне зображення коефіцієнта $g_{(\vartheta)41}$

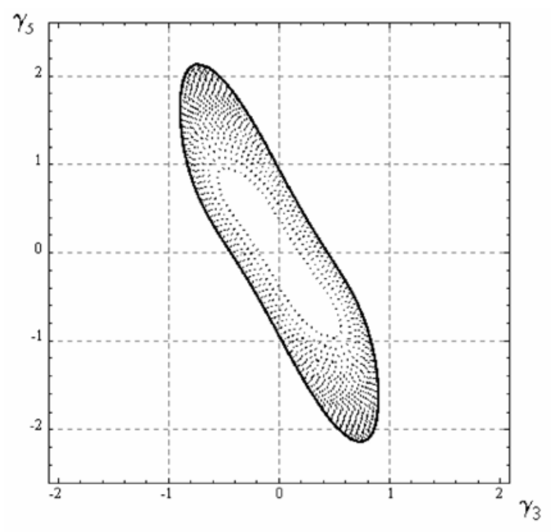

Рис. 2. Проекція поверхні $g_{(\vartheta)41}$ на площину

Висновки

Наукова новизна даної роботи полягає у тому, що на основі моментно-кумулянтного опису випадкових величин та використання усічених стохастичних поліномів вищих порядків отримані алгоритми оцінювання параметра корисного сигналу при адитивному впливі негауссівської завади. Як завада обрана несиметрична завада, а саме асиметрична випадкова величина другого типа першого виду.

Аналізуючи отримані результати, можна зробити висновок, що використовуючи даний метод для спільної оцінки параметра постійного сигналу та параметрів завади, ми отримуємо значно ефективніші алгоритми, порівняно з оцінками методом моментів.

Література: **1.** *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Мир, 1975. 648 с. **2.** *Кунченко Ю.П.* Полиномиальные оценки параметров близких к гауссовским случайных величин. Часть 1. Стохастические полиномы, их свойства и применение для нахождения оценок параметров. Черкассы: ЧИТИ, 2001. 133 с. **3.** *Кунченко Ю.П.* Стохастические полиномы. Киев: Наук. думка, 2006. 275 с. **4.** *Кунченко Ю.П.* Метод максимизации усеченного стохастического полинома // Труды 8-й Международной научно-практической конференции "Системы и средства передачи и обработки информации" (ССПОИ 2004). Одесса: ОНАС им. А.С. Попова, 2004. С. 153-155. **5.** *Лега Ю.Г., Гончаров А.В., Філіпов В.В.* Спільне оцінювання інформативного параметра постійного сигналу при усіченому оцінюванні дисперсії асиметричної завади першого типу першого виду // Вісник ЧДТУ. 2008. № 1. С. 50-56. **6.** *Лега Ю.Г., Гончаров А.В., Філіпов В.В.* Спільна оцінка інформативного параметра постійного сигналу при усіченому оцінюванні дисперсії асиметричної завади другого типу першого виду // Третий международный радиоэлектронный форум "Прикладная радиоэлектроника. состояние и перспективы развития". Харків: ХНУРЕ, 2008. С. 169–172.

Надійшла до редколегії 05.09.2008

Рецензент: д-р техн. наук, професор Шарапов В.М.

Гавриш Олександр Степанович, канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри радіотехніки Черкаського державного технологічного університету. Наукові інтереси: статистична обробка сигналів, оцінка параметрів сигналів на тлі негауссівських завад. Адреса: Україна, 18006, Черкаси, бул. Шевченка, 406, тел. (0472)730261, e-mail: hackee74@yahoo.com.

Гончаров Артем Володимирович, канд. техн. наук, доцент кафедри радіотехніки Черкаського державного технологічного університету. Наукові інтереси: статистична обробка сигналів, оцінка параметрів сигналів на тлі негауссівських завад. Адреса: Україна, 18006, Черкаси, бул. Шевченка, 406, тел. (0472)730261, E-mail: gartyom@ukr.net

Філіпов Віталій Вікторович, аспірант кафедри радіотехніки Черкаського державного технологічного університету. Наукові інтереси: статистична обробка сигналів, оцінка параметрів сигналів на тлі негауссівських завад. Адреса: Україна, 18006, Черкаси, бул. Шевченка, 406, тел. (0472)730261, E-mail: vetalliy@mail.ru.