УДК 621.37:621.391

[0000-0003-1903-6022] **В. В. Палагин,** *д.т.н., профессор,*
[0000-0003-4431-2068] **Д. А. Ведерников,** *аспирант*
e-mail: palahin@ukr.net
Черкасский государственный технологический университет,
бульв. Шевченко, 460, Черкассы, 18005, Украина

НЕЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА НА ФОНЕ АСИММЕТРИЧНО-ЭКСЦЕССНЫХ НЕГАУССОВСКИХ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ПОМЕХ

В теории статистического анализа многомерных случайных величин задачи корреляционного анализа являются важными при построении и реализации многих технических систем контроля, мониторинга и диагностики. В процессе решения этих задач определение наличия и характера статистической взаимосвязи исследуемых случайных величин является приоритетным направлением. На основании результатов корреляционного анализа делаются выводы о наличии и характере функциональной зависимости случайных величин, предпочтительности используемых методов исследований и предлагаемых моделей для описания случайных многомерных процессов. Применение классического математического аппарата корреляционного анализа широко используется в предположении о принадлежности наблюдаемого случайного процесса многомерному нормальному закону распределения. На практике такие предпосылки корреляционного анализа выполняются далеко не всегда и, скорее всего, являются удобной математической идеализацией исследуемых процессов. Исследования показывают, что при описании случайных процессов, в том числе негауссовских, перспективным является подход, основанный на использовании моментных и кумулянтных функций высших порядков. Такое представление случайных процессов позволяет повысить точность их обработки при заданных ограничениях на их алгоритмическую сложность, учесть корреляционные связи исследуемых негауссовых случайных величин. В предложенной работе рассматривается построение методов оценивания параметра постоянного сигнала, принимаемого на фоне асимметрично-эксцесных негауссовских коррелированных помех при использовании метода максимизации полинома (метода Кунченко) и его адаптации для реализации нелинейных алгоритмов и компьютерных средств функционирования систем обработки сигналов. Показано, что учет параметров негауссовского распределения в виде кумулянтных функций высших порядков, нелинейная обработка случайных процессов, позволяет повысить эффективность обработки сигналов в виде уменьшения дисперсии оценки полиномиальных алгоритмов по сравнению с классическими результатами.

Ключевые слова: *моментно-кумулянтные функции, адаптированный метод максимизации полинома, коррелированные негауссовские стохастические процессы.*

Введение. Задачи оценивания параметров сигналов, принимаемых на фоне помех, являются важными при реализации многих технических систем, имеющих отношение к статистической обработке данных. Для их решения успешно используются хорошо известные статистические методы, такие как метод максимального правдоподобия, метод моментов и др. [1–3]. Использование данных методов не накладывает принципиальных ограничений на вид распределений исследуемых случайных процессов, однако на практике широкое распространение получили гауссовские модели исследуемых случайных величин. Такое предположение не всегда адекватно отображает реальные случайные процессы, отличные от гауссовских [4–6], что в целом приводит к снижению эффективности оценивания параметров исследуемых случайных процессов.

Использование классических методов оценивания параметров сигналов, принимаемых на фоне негауссовских помех, сопровождается большими трудностями, которые связаны с априорной неопределенностью параметров негауссовских распределений, со сложностью алгоритмической реализации данных методов, что в целом не позволяет

DOI: 10.24025/2306-4412.2.2020.198405

создавать эффективные программно-алгоритмические системы обработки случайных процессов. Кроме того, при необходимости учета корреляционных связей исследуемых негауссовских процессов, проблемы применения традиционных классических подходов к оцениванию параметров сигналов существенно возрастают, что не позволяет синтезировать адекватные модели случайных процессов и соответствующие им алгоритмы обработки сигналов.

Научные исследования последних лет показывают, что перспективным направлением для решения подобных проблем является использование моментных и кумулянтных функций высших порядков [6–9]. Такой подход позволяет с допустимым приближением описать статистические свойства негауссовских случайных процессов, в том числе статистически зависимых. Применение моментно-кумулянтных моделей исследуемых случайных процессов позволяет повысить их адекватность реальным природным процессам и успешно использовать для построения новых методов оценивания параметров сигналов, принимаемых на фоне негауссовских коррелированных помех [8–12].

Применение такого подхода к решению задач оценивания параметров сигналов, принимаемых на фоне коррелированных негауссовских помех, требует теоретических и практических исследований, направленных на изучение и развитие многомерных моментно-кумулянтных функций высших порядков, построении и анализе новых методов обработки сигналов.

Целью работы является построение и анализ нелинейных методов оценивания параметра постоянного сигнала на фоне асимметрично-эксцессных коррелированных негауссовских помех при использовании моментно-кумулянтных функций высших порядков для создания эффективных алгоритмов и компьютерных средств проектирования систем обработки сигналов.

Моментно-кумулянтные функции и их использование при описании коррелированных негауссовских случайных процессов. Для описания статистических свойств коррелированных негауссовских процессов используем подход, основанный на применении моментно-кумулянтных функций. Такое представление случайных величин позволяет учесть не только негауссовский характер исследуемых процессов в виде моментов и кумулянтов выше третьего порядка, но и статистические зависимости при использовании совместных моментных и кумулянтных функций.

Пусть имеются две статистически зависимые случайные величины ξ и η, которые описываются плотностями распределения p_ξ и p_η и характеризуются начальными моментами i-го порядка:

$$m_i^{(\xi)} = E\xi^i = \int_{-\infty}^{+\infty} x^i p_\xi(x)dx,$$

$$m_i^{(\eta)} = E\eta^i = \int_{-\infty}^{+\infty} y^i p_\eta(y)dy.$$

Известно, что статистически зависимые случайные величины можно характеризовать совместными моментами различной размерности. С практической точки зрения достаточной характеристикой описания статистических связей является использование смешанных моментов размерности (i, j) двух случайных величин:

$$m_{i,j}^{(\xi,\eta)} = E\xi^i\eta^j = \int_{-\infty}^{+\infty} x^i y^j p(x,y)dxdy\,.$$

Использование начальных моментов высших порядков хорошо зарекомендовало себя при построении моделей негауссовских процессов и соответствующих им алгоритмов обработки сигналов [8–12]. Такое описание позволило оперировать такими параметрами, как коэффициенты асимметрии (γ_3), эксцесса (γ_4) и др., которые равны нулю в предположении гауссовских моделей случайных процессов.

При рассмотрении статистических связей негауссовских случайных величин удобно оперировать двумерными моментами m_{ij} и кумулянтами χ_{ij}, которые представлены в виде [6]:

$$m_{11} = \chi_{11},\ m_{12} = \chi_{12},\ m_{13} = \chi_{13} + 3\chi_2\chi_{11},$$

$$m_{22} = \chi_{22} + \chi_2^2 + 2\chi_{11}^2,$$

$$m_{23} = \chi_{23} + \chi_2\chi_3 + 6\chi_{11}\chi_{12} + 3\chi_2\chi_{12},\ \dots\ .$$

При отсутствии статистической зависимости двумерные моменты и кумулянты преобразуются в одномерное представление.

DOI: 10.24025/2306-4412.2.2020.198405

Отметим, что совместные моменты и кумулянты связаны между собой. Например, параметр ковариации представляется как совместный кумулянт второго порядка χ_{11} и характеризует статистическую связь случайных величин:

$$\chi_{11} = m_{11} - m_{\xi} m_{\eta},$$

где m_{ξ} и m_{η} – математическое ожидание случайной величины ξ и η соответственно.

При $\chi_{11} \neq 0$ проявляется статистическая зависимость исследуемых случайных величин. Однако, при равенстве нулю данного параметра может проявляться более сложная статистическая зависимость в виде кумулянтов высших порядков [6].

Анализ статистических двумерных связей можно представить в виде таблицы 1, которая наглядно описывает характеристики случайной величины.

Таблица 1 – **Представление двумерных совместных моментов**

Порядок совместных кумулянтов	Обозначение двумерных совместных моментов					
1	χ_{10}	χ_{01}				
2	χ_{20}	χ_{11}	χ_{20}			
3	χ_{30}	χ_{12}	χ_{21}	χ_{03}		
4	χ_{40}	χ_{31}	χ_{22}	χ_{13}	χ_{04}	
…	…	…	…	…	…	…

Равенство нулю всех совместных кумулянтов χ_{ij} (таблица 1) является необходимым и достаточной условием статистической независимости случайной величины.

Задаваясь кумулянтами в таблице 1, выделим определенные классы случайных величин. В частности, для двухмерного гауссовского распределения совместные моменты представлены в таблице 2. Отличающимися от нуля являются кумулянты первого и второго порядков, причем данная случайная величина характеризуется только статистической связью первого порядка или корреляцией. Задаваясь совместными кумулянтами, приходим к понятию зависимых негауссовых случайных величин.

Таблица 2 – **Представление двумерных совместных моментов для гауссовского распределения**

Порядок совместных кумулянтов	Обозначение двумерных совместных моментов					
1	χ_{10}	χ_{01}				
2	χ_{20}	χ_{11}	χ_{20}			
3						
4						

Определение 1. Гауссовскими статистически зависимыми случайными величинами будем называть такие, для которых отличными от нуля будут одномерный кумулянт второго порядка χ_2 и совместный кумулянт второго порядка χ_{11}, а все остальные кумулянты третьего и выше порядков, а также совместные кумулянты выше второго порядка равны нулю. В этом случае начальные моменты до шестого порядка имеют вид:

$$\alpha_1 = \chi_1,\ \alpha_2 = \chi_2,\ \alpha_3 = 0,$$

$$\alpha_4 = 3\chi_2^2,\ \alpha_5 = 0,\ \alpha_6 = 15\chi_2^3, \ldots,$$

а совместные моменты имеют следующую взаимосвязь с совместными кумулянтами:

$$m_{11}^{(v,k)} = \chi_{11} = \chi_2 \cdot r^{(v,k)},\ m_{12} = \chi_{12} = 0,$$

$$m_{22}^{(v,k)} = \chi_2^2 + 2\chi_{11}^2 = \chi_2^2\left(1 + 2r^{(v,k)^2}\right), \ldots,$$

где $r^{(v,k)}$ – корреляционная функция заданного вида между v-м и k-м выборочным значением. Например, корреляционная функция может иметь:

$$r_{\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|},\ r_{\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}\cos\beta\tau,$$

$$r_{\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}(\cos\beta\tau + \frac{A}{\beta}\sin\beta|\tau|),$$

где $\tau = |t_v - t_k|$ – корреляционный интервал, который при учете статистических связей меньше интервала корреляции $\tau = |t_v - t_k| \leq \tau_{кор}$, $v, k = \overline{1, n}$; $\tau_{кор}$ – время корреляции; $\sigma^2 = r_{\xi}(0)$ – дисперсия случайного процесса; $1/A > 0$ – постоянная времени, характеризующая статистическую связь выборочных значений.

В. В. Палагин, Д. А. Ведерников, 2020
DOI: 10.24025/2306-4412.2.2020.198405

В данной работе проводится исследование по построению нелинейных методов оценивания параметра постоянного сигнала, принимаемого на фоне асимметрично-эксцессных коррелированных негауссовских помех. Данный класс исследуемого случайного процесса представлен в таблице 3.

Таблица 3 – **Представление двумерных совместных моментов для асимметрично-эксцессной негауссовской коррелированной случайной величины**

Порядок совместных кумулянтов	Обозначение двумерных совместных моментов					
1	χ_{10}	χ_{01}				
2	χ_{20}	χ_{11}	χ_{20}			
3	χ_{30}	χ_{03}				
4	χ_{40}	χ_{04}				

Определение 2. Асимметрично-эксцессными статистически зависимыми случайными величинами 2-го типа 1-го вида будем называть такие, для которых отличными от нуля будут χ_2, χ_3 и χ_4, а также совместные кумулянты χ_{11}, χ_{12}, χ_{13} и χ_{22}, а все остальные кумулянты выше четвертого порядков, а также совместные кумулянты выше четвертого порядка равны нулю. В этом случае начальные моменты до шестого порядка имеют вид:

$$\alpha_1 = \chi_1,\ \alpha_2 = \chi_2,\ \alpha_3 = \chi_3,\ \alpha_4 = \chi_4 + 3\chi_2^2,$$
$$\alpha_5 = 10\chi_3\chi_3,\ \alpha_6 = 15\chi_2\chi_4 + 10\chi_3^{\ 2} + 15\chi_2^3, \ldots,$$

а совместные моменты имеют следующую взаимосвязь с совместными кумулянтами:

$$m_{11}^{(v,k)} = \chi_{11} = \chi_2 \cdot r^{(v,k)},$$
$$m_{12}^{(v,k)} = \chi_{12} = \gamma_3 \chi_2^{3/2} r^{(v,k)^{3/2}},$$
$$m_{22}^{(v,k)} = \chi_2^2\left(\gamma_4 r^{(v,k)^2} + 1 + 2r^{(v,k)^2}\right), \ldots .$$

Если предположить, что случайная величина имеет нулевое математическое ожидание, то начальный момент первого порядка будет равняться нулю, т.е. $\alpha_1 = 0$.

На основе предложенных моментно-кумулянтных моделей асимметрично-эксцессных коррелированных негауссовских процессов будут построены методы оценивания параметра постоянного сигнала при использовании адаптированного метода максимизации полинома (АММП).

Применение АММП для оценивания параметра сигналов, принимаемых на фоне асимметрично-эксцессных коррелированных негауссовских помех. Пусть наблюдается исследуемый сигнал $\xi(t)$, который состоит из полезного постоянного сигнала $S(\vartheta)$, зависящего от параметра ϑ, и стационарной асимметрично-эксцессной негауссовской коррелированной помехи $\eta(t)$:

$$\xi(t) = S(\vartheta) + \eta(t).$$

Для описания исследуемого процесса используем следующие двумоментные кумулянтные функции, которые отличные от нуля:

$$\chi_2,\ \chi_3,\ \chi_4,\ \chi_2(0,\tau),$$
$$\chi_3(0,\tau,\tau),\ \chi_4(0,0,0,\tau).$$

Пусть из принятого сигнала $\xi(t)$ исследуется статистически зависимая и одинаково распределенная выборка $\vec{\mathrm{x}} = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_\mathrm{n}\}$ объемом n:

$$\mathrm{x}_v = S_\vartheta + \eta_v,$$

где для краткости записи используем обозначение $S_\vartheta = S(\vartheta)$.

По результатам обработки $\vec{\mathrm{x}} = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_\mathrm{n}\}$ необходимо определить оценку параметра постоянного сигнала ϑ при условии, что остальные параметры априорно известны.

Для решения поставленной задачи предлагается использовать подход, основанный на полиномиальном оценивании неизвестных параметров – метод максимизации полинома (метод Кунченко) [8, 9] и его адаптацию (АММП) на случай исследования статистически зависимых случайных процессов [12].

В соответствии с АММП исследуемые процессы представляются в виде стохастических полиномов степени s [8, 9]. Тогда оценка параметра ϑ постоянного сигнала нахо-

DOI: 10.24025/2306-4412.2.2020.198405

дится из решения уравнения, которое имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{s} h_{i(v,k)}[\vartheta]\sum_{v=1}^{n}\left(\xi_{(v)}^{i}-\alpha_i[\vartheta]\right)\Big|_{\vartheta=\hat{\vartheta}}=0,\ v,k=\overline{1,n} \quad (1)$$

где $\xi_{(v)}$ – случайные одинаково распределенные и статистически зависимые величины в моменты времени v, $\alpha_i[\vartheta]$ – начальные моменты i-го порядка, зависящие от параметра ϑ; $h_{i(v,k)}[\vartheta]$ – коэффициенты, зависящие от параметра ϑ и функции корреляции $r_\xi(\tau)$, $\tau=|v-k|$. Неизвестные коэффициенты (1) будут находиться из решения системы алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^{s} h_{i(v,k)}[\vartheta]K_{i,j}(\tau,\vartheta)=\frac{d}{d\vartheta}\alpha_i(\vartheta), \qquad (2)$$

$i=\overline{1,s}$, $v,k=\overline{1,n}$,

$K_{i,j}(\tau,\vartheta)=E\{[\xi_v^i-\alpha_i][\xi_k^j-\alpha_j]\}=E[\xi_v^i\xi_k^j]-\alpha_i\alpha_j$.

Коррелянты $K_{i,j}(\tau,\vartheta)$ зависят не только от одномерных начальных моментов α_i порядка i, но от совместных двумерных моментов $E[\xi_v^i\xi_k^j]$. При таком моментно-кумулянтном подходе для описания случайных процессов имеется возможность представить статистические связи коррелированных негауссовских процессов.

Эффективность синтезированных алгоритмов сопоставляется с количеством извлекаемой информации об оценивании параметра ϑ, которое в общем случае имеет вид [8, 9]:

$$I_{sn}(\vartheta)=\sum_{v=1}^{n}\sum_{i=1}^{s} h_{i(v,k)}[\vartheta]\frac{d}{d\vartheta}\alpha_i(\vartheta)=\frac{1}{\sigma^2_{(\vartheta)s}}, \quad (3)$$

$k=\overline{1,n}$,

и обратно пропорционально дисперсии оценки.

На основе использования моментно-кумулянтных функций высших порядков и совместных кумулянтов представления случайных процессов, использование нового метода оценки АММП, синтезированы нелинейные алгоритмы оценивания параметра ϑ постоянного сигнала, принимаемого на фоне коррелированных асимметрично-эксцессных негауссовских помех.

Результаты исследования и их анализ. На основе предложенного подхода к описанию коррелированных негауссовских процессов и применения полиномиальных методов при использовании АММП, рассмотрим получение алгоритмов оценивания параметра постоянного сигнала при степени полинома $s=1,2$.

Приведем начальные одномерные моменты до 4-го порядка, а также совместные двумерные моменты, характеризующие корреляционные связи асимметрично-эксцессных негауссовских процессов.

Выражения для начальных одномерных моментов до 4-го порядка асимметрично-эксцессной негауссовской случайной величины имеют вид:

$$\alpha_1=0,\ \alpha_2=\chi_2,\ \alpha_3=\chi_2^{3/2}\gamma_3,$$
$$\alpha_4=\chi_2^2(\gamma_4+3),$$

а двумоментные функции данного распределения запишутся как:

$$\alpha_2(0,\tau)=\chi_2(0,\tau),\ \alpha_3(0,\tau,\tau)=\chi_3(0,\tau,\tau),$$
$$\alpha_4(0,\tau,\tau,\tau)=\chi_4(0,\tau,\tau,\tau)+3\chi_2\cdot\chi_2(0,\tau),$$

$$\alpha_4(0,0,\tau,\tau)=\chi_4(0,0,\tau,\tau)+\chi_2^2+2\chi_2^2\cdot(0,\tau).$$

Для рассматриваемой аддитивной смеси постоянного сигнала S_ϑ и асимметрично-эксцессной негауссовской помехи моменты одномоментного распределения до 4-го порядка примут вид:

$$m_1=S_\vartheta,\ m_2=\chi_2+S_\vartheta^2,$$
$$m_3=\chi_2^{1,5}\gamma_3+3\chi_2S_\vartheta+S_\vartheta^3,$$
$$m_4=3\chi_2^2+4\chi_2^{1,5}\gamma_3S_\vartheta+6\chi_2S_\vartheta^2+S_\vartheta^4+\gamma_4\chi_2^2,$$

а моменты двумоментного распределения запишутся как:

$$m_{11}={S_\vartheta}^2+\chi_2r^{(v,k)},$$

$$m_{12}={S_\vartheta}^3+S_\vartheta\chi_2+2S_\vartheta\chi_2r^{(v,k)}+\gamma_3\chi_2^{3/2}r^{(v,k)^{3/2}} \quad ,$$

$$m_{22}={S_\vartheta}^4+2{S_\vartheta}^2\chi_2+4{S_\vartheta}^2\chi_2r^{(v,k)}+4S_\vartheta\gamma_3\chi_2^{3/2}r^{(v,k)^{3/2}}+$$
$$+\chi_2^2\left(\gamma_4r^{(v,k)^2}+1+2r^{(v,k)^2}\right)$$

Представление коррелянтов $K_{i,j}(\tau,\vartheta)$ двумоментного случайного процесса $\xi(t)$ примет вид:

В. В. Палагин, Д. А. Ведерников, 2020
DOI: 10.24025/2306-4412.2.2020.198405

$$K_{1,1}(0,\tau,\vartheta) = m_{11} - m_1 m_2 = \chi_2 r_\xi(\tau),$$

$$K_{1,2}(0,\tau,\tau,\vartheta) = m_{12} - m_1 m_2 =$$
$$= 2S_\vartheta \chi_2 r^{(v,k)} + \gamma_3 \chi_2^{3/2} r^{(v,k)^{3/2}},$$

$$K_{2,2}(0,0,\tau,\tau,\vartheta) = m_{22} - m_2 m_2 = 4{S_\vartheta}^2 \chi_2 r^{(v,k)} +$$
$$+ 4S_\vartheta \gamma_3 \chi_2^{3/2} r^{(v,k)^{3/2}} + \gamma_4 \chi_2^2 r^{(v,k)^2} + 2\chi_2^2 r^{(v,k)^2}.$$

При отсутствии корреляционных связей между выборочными значениями центрированные коррелянты примут хорошо известный вид:

$$K_{1,1} = \chi_2,\ K_{1,2} =_2= \chi_2^{3/2}\gamma_3 + 2\chi_2 S_\vartheta,$$

$$K_{2,2} = 4{S_\vartheta}^2 \chi_2 + S_\vartheta \gamma_3 \chi_2^{3/2} + \chi_2^2(\gamma_4 + 2).$$

Для определения неизвестного параметра ϑ используем предложенный новый метод АММП (1), где оптимальные коэффициенты $h_{i(v,k)}[\vartheta]$ находятся из решения системы алгебраических уравнений (2). Поскольку центральные коррелянты представляют собой матрицы размерностью $n \times n$ (объем выборочных значений), то при решении (2) воспользуемся формулами Крамера и Шура:

$$h_{i(v,k)}[\vartheta] = \frac{\Delta_{is}(\vartheta)}{\Delta_s(\vartheta)},\ i = \overline{1,s},$$

где $\Delta_s(\vartheta) = \det\left\| K_{i,j}(\tau,\vartheta) \right\|$ – определитель матрицы размерности s, элементами которой являются центральные коррелянты асимметрично-эксцессного коррелированного случайного процесса; $\Delta_{is}(\vartheta)$ – определитель, получаемый из $\Delta_s(\vartheta)$ заменой *i*-го столбца столбцом, состоящим из свободных членов системы уравнений.

Легко показать, что при степени полинома s=1 оценка параметра ϑ постоянного сигнала находится из уравнения (1) и имеет вид:

$$\sum_{v=1}^{n} h_{1(v,k)}[\vartheta]\left(\xi_{(v)} - S_\vartheta\right)\Big|_{S_\vartheta = \hat{S}_\vartheta} = 0,\ k = \overline{1,n}. \quad (4)$$

Используя приведенные выше выражения для начальных моментов и центральных коррелянтов, получим:

$$h_{1(v,k)}[\vartheta] = \frac{A_v(\vartheta)}{\det\left|K_{1,1}(\tau,\vartheta)\right|},\ v,k = \overline{1,n}, \quad (5)$$

где $A_v(\vartheta)$ – определитель, получаемый из определителя $\det\left|K_{1,1}(\tau,\vartheta)\right|$ заменой v-го столбца столбцом, состоящим из свободных членов системы уравнений (2).

Центральные коррелянты $K_{1,1}(\tau,\vartheta)$ описывают статистические зависимости выборочных значений в моменты времени (v,k) и представляет собой корреляционную матрицу. Для экспоненциальной корреляционной функции $K_{1,1}(\tau,\vartheta)$ примет вид:

$$K_{1,1}(\tau,\vartheta) = \sigma^2 \begin{vmatrix} 1 & e^{-A} & \dots & e^{-A(n-1)} \\ e^{-A} & 1 & \dots & e^{-A(n-2)} \\ . & . & . & . \\ e^{-A(n-1)} & e^{-A(n-2)} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Используя коэффициенты $h_{1(v,k)}[\vartheta]$ (5) уравнение максимизации полинома (4) при степени s=1 примет окончательный вид:

$$\hat{S}_\vartheta = \frac{\sum_{v=1}^{n} A_v(\vartheta) x_v}{\sum_{v=1}^{n} A_v(\vartheta)}. \quad (6)$$

При отсутствии статистических связей между выборочными значениями данная оценка параметра $\hat{S}_\vartheta$ (6) примет хорошо известный вид [8, 9]:

$$\hat{S}_\vartheta = \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v.$$

Для получения количественного показателя эффективности полиномиального оценивания при степени полинома s=1 воспользуемся количеством извлекаемой информации о параметре $\hat{S}_\vartheta$ (3), который является обратной величиной дисперсии оценки и примет вид:

$$I_{1n}(\vartheta) = \sum_{v=1}^{n} h_{1(v,k)}[\vartheta] = \frac{A_v(\vartheta)}{\det\left|K_{1,1}(\tau,\vartheta)\right|}. \quad (7)$$

Полученная оценка параметра $\hat{S}_\vartheta$ (6) не учитывает параметры негауссовского распределения исследуемого процесса, т.к. в этом случае используются только первых два начальных момента.

DOI: 10.24025/2306-4412.2.2020.198405

Для учета характеристик негауссовского коррелированного процесса увеличим степень полинома до $s=2$. Для нахождения оценки параметра $\hat{S}_\vartheta$ используем уравнение максимизации полинома (1), в котором неизвестные коэффициенты, согласно (2), примут вид:

$$h_{1(v,k)}[\vartheta]=\frac{\Delta_{12}(\vartheta)}{\Delta(\vartheta)},\ h_{2(v,k)}[\vartheta]=\frac{\Delta_{22}(\vartheta)}{\Delta(\vartheta)},$$

где

$$\Delta(\vartheta)=\det\begin{Vmatrix} K_{1,1}(0,\tau,\vartheta) & K_{1,2}(0,\tau,\tau,\vartheta) \\ K_{2,1}(0,\tau,\tau,\vartheta) & K_{2,2}(0,0,\tau,\tau,\vartheta) \end{Vmatrix},$$

$$\Delta_{12}(\vartheta)=\det\begin{Vmatrix} \frac{d}{d\vartheta}m_1(\vartheta) & K_{1,2}(0,\tau,\tau,\vartheta) \\ \frac{d}{d\vartheta}m_2(\vartheta) & K_{2,2}(0,0,\tau,\tau,\vartheta) \end{Vmatrix},$$

$$\Delta_{22}(\vartheta)=\det\begin{Vmatrix} K_{1,1}(0,\tau,\vartheta) & \frac{d}{d\vartheta}m_1(\vartheta) \\ K_{2,1}(0,\tau,\tau,\vartheta) & \frac{d}{d\vartheta}m_2(\vartheta) \end{Vmatrix},$$

а центральные коррелянты асимметрично-эксцессного коррелированного негауссовского случайного процесса приведены выше. Из-за громоздкости выражений значения определителей не приводятся. Подставляя полученные коэффициенты в уравнение (1) получим нелинейное уравнение максимизации полинома для определения оценки параметра $\hat{S}_\vartheta$.

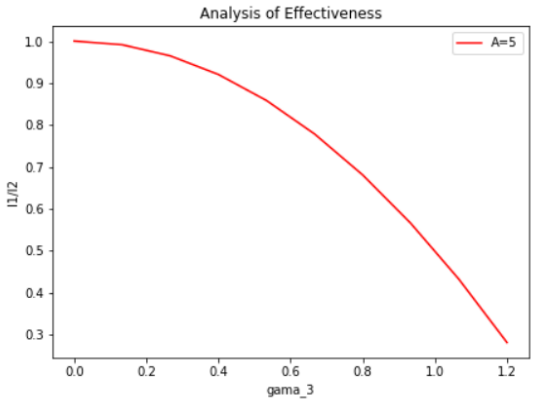
Для получения количественных показателей эффективности оценивания неизвестного значения постоянного сигнала методом АММП при различных степенях полинома воспользуемся количеством извлекаемой информации из выборочных значений (3), которая является обратной величиной дисперсии оценки. Тогда отношение дисперсий оценок, найденных при использовании АММП при различных степенях полинома $s=2$ и $s=1$, примет вид:

$$g(\vartheta)=\frac{\sigma^2_{(\vartheta)2n}}{\sigma^2_{(\vartheta)1n}}=\frac{I_{1n}(\vartheta)}{I_{2n}(\vartheta)}.$$

На рис. 1 приведен анализ полученных результатов оценивания параметра постоянного сигнала на фоне асимметрично-эксцессных негауссовских помех при различных степенях полинома.

Полученная оценка $\hat{S}_\vartheta$ (6) при степени полинома $s=1$ не учитывает негауссовский характер исследуемого случайного процесса, и ее эффективность определялась выражением (7). С ростом степени полинома $s=2$ (1) для нахождения оценки неизвестного параметра учитываются моментные функции высших порядков, а именно коэффициенты асимметрии γ_3 и эксцесса γ_4, а также двумерные совместные моменты, позволяющие описать корреляционные свойства. На рис.1 приведены сравнительные результаты отношения I_1/I_2 от значения коэффициента асимметрии γ_3 при различных значениях коэффициентов эксцесса γ_4 и корреляции A=5, 0.1. Из графиков видно, что с ростом значения коэффициента γ_3 количество извлекаемой информации I_2 по сравнению с I_1 возрастает, что равносильно увеличению эффективности оценивания в виде уменьшения дисперсии оценки неизвестного параметра. При слабых корреляционных связях (A=5) результат эффективности оценивания будет совпадать с хорошо изученными свойствами, представленными в [8, 9]. В тоже время необходимо отметить, что наличие сильных корреляционных связей между выборочными значениями (уменьшение коэффициента корреляции A с 5 до 0.1 для функции $r_\xi(\tau)=\sigma^2 e^{-A|\tau|}$) приводит к увеличению дисперсии оценки, что эквивалентно уменьшению эффективности оценивания. Однако, в этом случае дисперсия оценки при степени полинома $s=2$ все равно остается меньшей по сравнению с хорошо известными результатами для гауссовских моделей исследуемых случайных процессов (оценивание при степени полинома $s=1$).

В. В. Палагин, Д. А. Ведерников, 2020
DOI: 10.24025/2306-4412.2.2020.198405



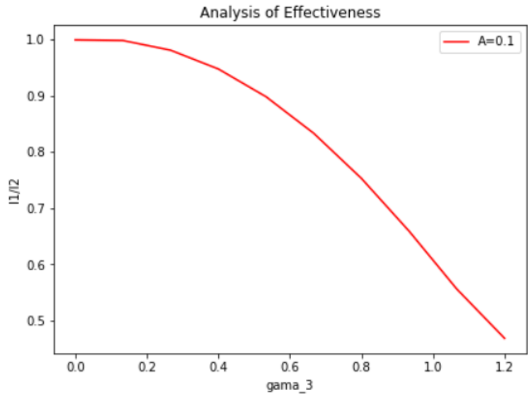


Рисунок 1 – Отношение количества извлекаемой информации об оцениваемом параметре постоянного сигнала от коэффициента асимметрии γ_3 при значении коэффициентов эксцесса $\gamma_4 = 1$ и корреляции (A=5, 0.1) для экспоненциальной корреляционной функции $r_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$

Выводы. Применение нового подхода к описанию случайных процессов в виде одномерных и двумерных моментно-кумулянтных функций позволило создать полиномиальные методы оценивания неизвестного параметра постоянного сигнала, принимаемого на фоне асимметрично-экцессных коррелированных негауссовских помех при использовании адаптированного метода максимизации полинома. Данный подход учитывает негауссовское распределение исследуемого случайного процесса, статистические связи выборочных значений, что позволило повысить точность оценивания неизвестного параметра постоянного сигнала по сравнению с хорошо известными результатами в предположении широко распространенных гауссовских помех. Эффективность полученных результатов зависит не только от степени негауссовости исследуемого случайного процесса (коэффициента асимметрии и эксцесса), но и от параметра, характеризующего статистические связи выборочных значений.

Список використаних джерел

[1] H. L. Van Trees, K. L. Bell, and Z. Tiany, *Detection Estimation and Modulation Theory, 2nd Edition, Part I, Detection, Estimation, and Filtering Theory*, John Wiley & Sons, New York, 2013.

[2] V. P. Tuzlukov, *Signal Processing Noise*, CRC Press LLC, Boca Raton, 2002.

[3] Mourad Barkat, *Signal Detection and Estimation*, Artech House, Boston, 2005.

[4] D. Middleton, *Non-Gaussian Statistical Communication Theory*, Jonn Willey & Sons, New Jersey, 2012.

[5] Zhao Huihong, and Chenghui Zhang, "Non-Gaussian noise quadratic estimation for linear discrete-time time-varying systems", *Neurocomputing*, 174 (B), pp. 921-927, 2016.

[6] А. Н. Малахов, *Кумулянтный анализ негауссовских процессов и их преобразований*. Москва: Сов. радио, 1979.

[7] A. K. Nandi, *Blind Estimation Using Higher-Order Statistics*, Springer-Verlag, New York, 1999.

[8] Y. P. Kunchenko, *Polynomial Parameter Estimations of Close to Gaussian Random variables*. Germany, Aachen: Shaker Verlag, 2002.

[9] Ю. П. Кунченко, *Стохастические полиномы*. Киев: Наук. Думка, 2006.

[10] V. Palahin, O. Palahina, V. Filipov, S. Leleko, and A. Ivchenko, "Modeling of Joint Signal Detection and Parameter Estimation on Background of Non-Gaussian Noise", *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 14 (3), pp. 87-94, 2015.

[11] V. Palahin, and J. Juhár, "Joint Signal parameters estimation in non-Gaussian noise by the method of polynomial maximization", *Journal of Electrical Engineering*, vol. 67, no. 3, pp. 217-221, 2016.

[12] L. Vokorokos, S. Marchevský, A. Ivchenko, E. Palahina, and V. Palahin, "Parameters Estimation of Correlated non-Gaussian processes by the Method of Polynomial Maximization", *Submitted to IET Signal Processing*, 313-319, 2016.

DOI: 10.24025/2306-4412.2.2020.198405

References

[1] H. L. Van Trees, K. L. Bell, and Z. Tiany, *Detection Estimation and Modulation Theory, 2nd Edition, Part I, Detection, Estimation, and Filtering Theory*, John Wiley & Sons, New York, 2013.

[2] V. P. Tuzlukov, *Signal Processing Noise*, CRC Press LLC, Boca Raton, 2002.

[3] Mourad Barkat, *Signal Detection and Estimation*, Artech House, Boston, 2005.

[4] D. Middleton, *Non-Gaussian Statistical Communication Theory*, Jonn Willey & Sons, New Jersey, 2012.

[5] Zhao Huihong, and Chenghui Zhang, "Non-Gaussian noise quadratic estimation for linear discrete-time time-varying systems", *Neurocomputing*, 174 (B), pp. 921-927, 2016.

[6] A. N. Malakhov, *Cumulant analysis of non-Gaussian processes and their transformation*, Moscow: Sovetskoe Radio, 1979.

[7] A. K. Nandi, *Blind Estimation Using Higher-Order Statistics*, Springer-Verlag, New York, 1999.

[8] Y. P. Kunchenko, *Polynomial Parameter Estimations of Close to Gaussian Random variables*. Germany, Aachen: Shaker Verlag, 2002.

[9] Y. Kunchenko, *Stochastic polynomials*, Kiev: Naukova Dumka, 2006.

[10] V. Palahin, O. Palahina, V. Filipov, S. Leleko, and A. Ivchenko, "Modeling of Joint Signal Detection and Parameter Estimation on Background of Non-Gaussian Noise", *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 14 (3), pp. 87-94, 2015.

[11] V. Palahin, and J. Juhár, "Joint Signal parameters estimation in non-Gaussian noise by the method of polynomial maximization", *Journal of Electrical Engineering*, vol. 67, no. 3, pp. 217-221, 2016.

[12] L. Vokorokos, S. Marchevský, A. Ivchenko, E. Palahina, and V. Palahin, "Parameters Estimation of Correlated non-Gaussian processes by the Method of Polynomial Maximization", *Submitted to IET Signal Processing*, 313-319, 2016.

V. V. Palahin, *Dr. Sc., professor,*
e-mail: palahin@ukr.net
D. A. Viediernikov, *postgraduate student*
Cherkasy State Technological University
Shevchenko blvd, 460, Cherkasy, 18006, Ukraine

NONLINEAR METHODS FOR SIGNAL PARAMETERS ESTIMATION IN ASYMMETRIC-EXCESS NON-GAUSSIAN CORRELATED NOISE

In the theory of statistical analysis of multidimensional random variables, the tasks of correlation analysis are quite important in the construction and implementation of many technical systems of control, monitoring and diagnostics. In the process of solving these tasks, the determination of the presence and nature of statistical relationship of the studied random variables is a priority.

Based on the results of correlation analysis, conclusions are drawn about the presence and nature of functional dependence of random variables, the preference of the research methods used and the proposed models for describing random multidimensional processes. The application of classical mathematical apparatus of correlation analysis is widely used in the assumption that the observed random process belongs to multidimensional normal distribution law. In practice, such prerequisites for correlation analysis are not always fulfilled and most likely are a convenient mathematical idealization of the processes under study. Studies show that in describing random processes, including non-Gaussian ones, an approach based on the use of moment and cumulative functions of higher orders is promising. Such a representation of random processes makes it possible to increase the accuracy of their processing under given restrictions on their algorithmic complexity and to take into account correlation relationships of the studied non-Gaussian random variables. In the proposed paper, we consider the construction of methods for constant signal parameter estimation in asymmetric-excess non-Gaussian correlated noise using the method of polynomial maximization (Kunchenko method)

DOI: 10.24025/2306-4412.2.2020.198405

and its adaptation to implement non-linear algorithms and computer-aided means of functioning of signal processing systems. It is shown that polynomial processing of random variables, taking into account the parameters of a non-Gaussian distribution in the form of cumulants of one-dimensional and multidimensional distributions, makes it possible to reduce the variance of the parameter estimation in comparison with the well-known results.

Keywords: *moment-cumulant functions, adapted method of polynomial maximization, correlated non-Gaussian stochastic processes.*

В. В. Палагін, *д.т.н., професор,*
e-mail: palahin@ukr.net
Д. А. Вєдєрніков, *аспірант*
Черкаський державний технологічний університет,
б-р Шевченка, 460, м. Черкаси, 18006, Україна

НЕЛІНІЙНІ МЕТОДИ ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ СИГНАЛУ НА ФОНІ АСИМЕТРИЧНО-ЕКСЦЕСНИХ НЕГАУСОВИХ КОРЕЛЬОВАНИХ ЗАВАД

В теорії статистичного аналізу багатовимірних випадкових величин завдання кореляційного аналізу є важливими при побудові і реалізації багатьох технічних систем контролю, моніторингу та діагностики. В процесі вирішення цих завдань визначення наявності та характеру статистичного взаємозв'язку досліджуваних випадкових величин є пріоритетним напрямом. На основі результатів кореляційного аналізу робляться висновки про наявність і характер функціональної залежності випадкових величин, перевагу використовуваних методів досліджень і пропонованих моделей для опису випадкових багатовимірних процесів. Застосування класичного математичного апарату кореляційного аналізу широко використовується в припущенні про належність спостережуваного випадкового процесу багатовимірному нормальному закону розподілу. На практиці такі передумови кореляційного аналізу виконуються далеко не завжди і, швидше за все, є зручною математичною ідеалізацією досліджуваних процесів. Дослідження показують, що при описі випадкових процесів, у тому числі негаусових, перспективним є підхід, що базується на використанні моментних і кумулянтних функцій вищих порядків. Таке уявлення випадкових процесів дає можливість підвищити точність їх обробки при заданих обмеженнях на їх алгоритмічну складність, врахувати кореляційні зв'язки досліджуваних негаусових випадкових величин. У запропонованій роботі розглядається побудова методів оцінювання параметра постійного сигналу, що приймається на фоні асиметрично-ексцесних негаусових корельованих завад при використанні методу максимізації полінома (методу Кунченка) і його адаптації для реалізації нелінійних алгоритмів і комп'ютерних засобів функціонування систем обробки сигналів. Показано, що врахування параметрів негаусових розподілів у вигляді кумулянтних функцій вищих порядків та нелінійна обробка випадкових процесів дають змогу підвищити ефективність обробки сигналів у вигляді зменшення дисперсії оцінки поліноміальних алгоритмів порівняно з класичними результатами.

Ключові слова: *моментно-кумулянтні функції, адаптований метод максимізації полінома, корельовані негаусові стохастичні процеси.*

Стаття надійшла 14.01.2020
Прийнято 04.02.2020

DOI: 10.24025/2306-4412.2.2020.198405