УДК 519.85

ФОРМУВАННЯ ТА ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ У ЗАДАЧАХ СПАДКОВОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОСТІ

Корнєєв О.М.
ВАТ "Хмельницькгаз"
Протасов С.Ю.
Черкаський державний технологічний університет

Рассматриваются некоторые общие подходы к решению предельных и начально-предельных задач наследственной теории вязкоупругости, приводится анализ их особенностей во время решения конкретных задач с использованием компьютера. Приведено три основных, наиболее распространенных подходов дискретизации за пространственными переменными, которые возводят задачу к решению интегрального уравнения или интегро-дифференциального уравнения типа Вольтера.

Some general approaches to the extreme and initial extreme problems decision of the viscoelasticity ancestral theory are considered. In the course of specific problems decision with the use of computer their features analysis is presented. The three basic most accepted discredit approaches according to spatial variables, that reduce the problem to the integral equation or Volterra integro-differential equation decision are introduced.

Проблема моделювання задач спадкової теорії в'язкопружності. Однією з характерних особливостей розвитку теорії в'язкопружності є взаємозв'язок між процесом побудови математичної моделі даного класу задач та розробкою методу розв'язання задач, які описуються даною моделлю. Спершу теорія в'язкопружності розвивалась на основі простіших моделей Фойгта, Кельвіна, моделі в'язкопружного стандартного тіла. Застосування їх зводилось до розв'язання диференціальних рівнянь з початковими умовами, для яких наявні ефективні методи чисельних або аналітичних розв'язків. Але з появою комп'ютерів ситуація змінилася, з'явилась можливість уточнити вищезазначені моделі, тому що вони дають досить наближені залежності між деформаціями та напруженнями. Відомо, що швидкість змін деформацій та швидкість змін напружень у початковий момент часу відповідно до цих моделей будуть завжди кінцеві, що експериментально не підтверджується [1; 5; 9].

Стан досліджень у формуванні динамічних моделей спадкової в`язкопружності. На основі теоретичних та експериментальних результатів [1; 5; 9; 12] запропоновані інтегральні залежності між напруженнями та деформаціями. У цих залежностях було використано особливі ядра спадковості та методи теорії в'язкопружності. Отримані залежності названі спадковою теорією в'язкопружності.

Використання початкових в'язко-пружних моделей теорії в'язкопружності при побудові математичних моделей лінійних та деяких простіших нелінійних задач для елементів тонкостінних конструкцій дозволили отримати розв'язки в аналітичній формі. Але за допомогою аналітичних методів вдавалось побудувати розв'язок лише для простих задач механіки. Таким чином, у «докомп'ютерний» період можливості отримання розв'язків задач теорії в'язкопружності, навіть для простих моделей, були суттєво обмежені. Також ускладнюється розв'язання задачі, якщо під час побудови математичних моделей використовувались інтегральні залежності між напруженнями та деформаціями.

Постановка завдання. Як зазначається в роботі [2], під час розв'язання задачі з використанням комп'ютера треба розглядати весь ланцюг, який складається з таких ланок: математична модель, метод, алгоритм, програма, аналіз результатів та з урахуванням зв'язку між усіма її ланками. Тому при побудові математичної моделі задачі та вибору чисельних методів розв'язку потрібно передбачати відповідні точність, універсальність, економічність алгоритму та простоту реалізації його на комп'ютері. Зумовлено це тим, що нині ставляться підвищені вимоги до точності розв'язку задач для елементів тонкостінних будівельних та авіаційних конструкцій, виготовлених із композиційних матеріалів, які мають яскраво виражені в'язкопружні властивості.

Отримання динамічних моделей теорії в'язкопружності. Розглянемо в'язкопружне тіло, на яке діють зовнішні сили, які є поверхневими навантаженнями, масовими силами і функціями положення та часу. До зовнішніх впливів віднесемо задані на поверхні S тіла переміщення, які також є функціями положення та часу. Розглянемо обмежену область за умови, щоб переміщення $U(x,t)$ мали неперервні похідні як по просторових змінних $x_l\left(l=\overline{1,3}\right)$, так і в часі t. Впливом температури та іншими немеханічними чинниками знехтуємо. Якщо тіло є лінійним в'язкопружним, то в області D мають місце такі рівняння [4, 8]:

рівняння руху

$$s_{ij,j} + rF_i = r\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}, \qquad (1)$$

зв'язок вектора переміщень із тензором деформацій (формула Коші)

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(U_{i,j} + U_{j,i}\right), \qquad (2)$$

та умови сумісності деформацій

$$e_{ij,kl} + e_{kl,ij} = e_{ik,jl} + e_{jl,ik}. \qquad (3)$$

Тут використано спосіб опису середовища за Лагранжем та як лагранжеві координати взяті ортогональні декартові координати. Індекси після коми вказують на диференціювання за тими самими координатами. У співвідношеннях (1) – (3) d_{ij} – тензор напружень; e_{ij} – тензор деформацій; U – вектор переміщень; F – вектор масових сил; r – густина; t – час.

У статичних та квазістатичних задачах, коли інерційними членами можна знехтувати, рівняння руху можна замінити рівнянням рівноваги

$$s_{ij,j} + rF_i = 0. \qquad (4)$$

Доповнюючи ці рівняння залежностями між напруженнями та деформаціями, отримаємо замкнену систему рівнянь.

Для ізотермічних процесів деформування анізотропних в'язкопружних тіл система рівнянь (1) – (4) запишеться відношенням

$$s_{ij} = E_{ijkl}e_{kl} - \int_0^t R_{ijkl}(t-t)e_{kl}(t)dt, \qquad (5)$$

де тензор E_{ijkl} – називається коефіцієнтом миттєвої пружності, тензор R_{ijkl} – функцією релаксації, які залежать від просторових змінних, але обмеження по них задовольняють вимоги

$$E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{klij}, \quad R_{ijkl} = R_{jikl} = R_{klij}, \qquad (6)$$

та вимоги еліптичності

$$E_{ijkl}e_{ij}e_{kl} \geq a_1 e_{ij}e_{ij}, \quad a_1 > 0, \quad \forall e_{ij}. \qquad (7)$$

Звернемо увагу, що кожний із тензорів E_{ijkl}, R_{ijkl} має по 21 незалежному компоненту. При викладених вище припущеннях співвідношення (5) можна розв'язати відносно тензора деформації

$$e_{ij} = S_{ijkl}s_{kl} + \int_0^t \Pi_{ijkl}(t-t)s_{kl}(t)dt. \qquad (8)$$

У формулі (8) коефіцієнт піддатливості S_{ijkl} та функція повзучості Π_{ijkl} можуть залежати від просторових змінних x_l і мають властивості симетрії

$$S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{klij}, \quad \Pi_{ijkl} = \Pi_{jikl} = \Pi_{klij} \qquad (9)$$

та

$$S_{ijkl}s_{ij}s_{kl} \geq a_2 s_{ij}s_{ij}, \quad a_2 > 0, \quad \forall s_{ij}. \qquad (10)$$

Припускаючи, що $a = \min(a_1, a_2) > 0$, співвідношення (7) та (10) можна замінити такими:

$$E_{ijkl}e_{ij}e_{kl} \geq ae_{ij}e_{ij}, \quad S_{ijkl}s_{ij}s_{kl} \geq as_{ij}s_{ij}.$$

На основі цих рівнянь можна сформулювати різні крайові задачі. Для цього, крім рівнянь, розглянутих вище, необхідне також задання граничних умов, а у випадку динамічних задач ще йпочаткових умов.

При заданні на поверхні S тіла зовнішніх поверхневих сил граничні умови мають вигляд

$$s_{ij}n_j\big|_S = g_i(S,t), \qquad (11)$$

де $g_i(S,t)$ – густина заданих поверхневих сил; n_j – зовнішня одинична нормаль до поверхні S тіла. При заданих на границі S тіла переміщеннях маємо граничні умови

$$U_i\big|_S = j_i(S,t), \qquad (12)$$

де $j_i(S,t)$ – задані на поверхні функції часу.

Якщо на частині поверхні S_s задані напруження, а на частині S_u – переміщення, граничні умови набудуть вигляду

$$s_{ij}n_j\big|_{S_s} = g_i(S_s,t), \quad U_i\big|_{S_u} = j_i(S_u,t). \qquad (13)$$

У динамічних задачах необхідне також задання початкових умов, які зазвичай записують як

$$U_i\big|_{t=0} = a_i(x), \quad \frac{\partial U_i}{\partial t}\Big|_{t=0} = b_i(x). \qquad (14)$$

Таким чином, у співвідношеннях (1), (2), (5), (11) – (14) дається постановка динамічної, а в (2), (4), (5), (11) – (13) – квазістатичної задачі нелінійної спадкової задачі в'язкопружності в переміщеннях. Питання коректності як у квазістатичній, так і у динамічній постановці задач під час виконання умов еліптичності (7), (10) вивчені в [3]. Але аналітичні та чисельні методи розв'язку інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь вищесформульованих задач при наявності слабосингулярних ядер спадковості на основі вищенаведених критеріїв досліджені недостатньо.

Дискретизація моделей. Перед тим як перейти до дискретизації за просторовими змінними, підставляючи (5) – (10), запишемо рівняння руху анізотропного в'язкопружного тіла у переміщеннях

$$\rho\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left[E_{ijkl}\frac{\partial U_k}{\partial x_l}-\int_0^t R_{ijkl}(t-\tau)\frac{\partial U_k}{\partial x_l}d\tau\right]=\overline{F}_i. \quad (15)$$

Під час розв'язку інтегро-диференціальних рівнянь у часткових похідних (15) один з можливих підходів це дискретизація за просторовими змінними у кожний момент часу. Нижче наведемо три основні найбільш розповсюджених підходи до дискретизації задачі за просторовими змінними.

Перший метод полягає в дискретизації задачі за просторовими змінними за допомогою методу Бубнова – Гальоркіна. Для цього обираємо базис $\{\varphi_n\}$, який залежить тільки від просторових координат у такому сенсі: $\{\varphi_n\}$ – лінійно незалежні, задовольняють граничні умови задачі та кінцева комбінація; $\sum_{n=1}^{N} T_{in}(t)\varphi_n(x)$ – неперервна в просторі, де шукається розв'язок задачі. Передбачається, що такий базис існує. Наприклад, для елементів тонкостінних конструкцій це – функції Крилова, або такий базис можливо побудувати за допомогою методу кінцевих елементів [7]. Наближений розв'язок рівняння (15) знаходиться у вигляді лінійної комбінації функції $\varphi_n(x)$ з невідомими коефіцієнтами, які є функціями часу t, тобто

$$U_{iN}=\sum_{n=1}^{N} T_{in}(t)\varphi_n(x). \quad (16)$$

Підставляючи розкладання (16) у (15) та виконуючи процедуру Бубнова – Гальоркіна, прийдемо до системи інтегро-диференціальних рівнянь вигляду

$$A\ddot{T}(t)+B\left[T(t)-\int_0^t R(t-\tau)T(\tau)d\tau\right]=f(t), \quad (17)$$

де A, B – відомі квадратні матриці; $T(t)$ та $f(t)$ – вектор-функції від t; $R(t)$ – ядро релаксації, яке має слабосингулярні особливості Абеля.

У випадку квазістатичної постановки задачі система (17) набуває вигляду

$$B\left[T(t)-\int_0^t R(t-\tau)T(\tau)d\tau\right]=f(t). \quad (18)$$

Для системи (17) відповідно до (14) отримаємо початкові умови

$$T(0)=r_0, \quad \dot{T}(0)=V_0. \quad (19)$$

Рівняння (18) та (17) відповідно називаються інтегральним та інтегро-диференціальним рівнянням спадкової теорії в'язкопружності.

Другий підхід. Для математичної постановки задачі використовують принцип можливих переміщень, відповідно до якого сума робіт всіх активних сил, які діють на систему, на дійсних переміщеннях дорівнює нулю

$$dA=-\int_v \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}dv-\int_v \rho\ddot{\vec{U}}d\vec{U}dU+$$
$$+\int_v \vec{F}_1 d\vec{U}dv+\int_s\left(\sigma_{ij}n_j+\vec{F}_1\right)d\vec{U}ds=0, \quad (20)$$

де $\vec{F}_1$ – вектор масових сил;

$\vec{F}_2$ – вектор зовнішніх сил, прикладених до поверхні S тіла;

n_j – направляючі косинуси зовнішньої нормалі.

Якщо тепер для дискретизації за просторовими змінними використати метод кінцевих елементів, тоді задача зводиться до розв'язання інтегро-диференціального рівняння вигляду (17). Розв'язок відносно $\ddot{T}$ можна записати у вигляді

$$\ddot{T}+B\left[T-\int_0^t R(t-\tau)T(\tau)d\tau\right]=F(t). \quad (21)$$

Нарешті, *до третього напрямку* належить спрощення моделі тіла шляхом заміни неперервного в'язкопружного матеріалу тіла системою тіл з кінцевим числом степенів свободи, які складаються з кінцевого числа матеріальних точок та абсолютно твердих тіл, з'єднаних між собою неінерційними в'язкопружними елементами. Пояснимо його зміст на прикладі поперечних коливань балки, що добре ілюструє фізичний зміст цього методу.

Розглянемо балку на двох опорах з постійним поперечним перерізом масою m та навантаженням $\rho(x,t)$ на одиницю довжини. Сконцентруємо масу балки у декількох точках, а розподілене навантаження $\rho(x,t)$ замінимо зосередженими силами $P(t)$. Сконцентруємо масу у n точках, приймаємо, що $M=\frac{ml}{n}$ (l – проліт балки), прогин цих точок позначимо відповідно $T_i(t)$, $\left(i=\overline{1,n}\right)$.

Тоді рівняння руху запишеться так:

$$M\ddot{T}_i(t)+R_i(t)=P_i(t), \quad (22)$$

де $R_i(t)$ – реактивні сили у визначених точках балки $i=\left(\overline{1,n}\right)$, обумовлені в'язкопружністю балки, протидіючої переміщенню мас із положення рівноваги. Сили $R_i(t)$ є лінійними функціями переміщень $T_i(t)$ та виражаються такою залежністю [6]:

$$R_i(t)=\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\left[T_k(t)-\int_0^t R(t-t)T_k(t)dt\right]. \quad (23)$$

Величина b_{ik} являє собою опорну реакцію нерозрізної балки (з опорами $0,1,2.....,n+1$), а саме опори i, викликаної одиничним переміщенням опори k. А саме при $n=1$ для вільно опертої балки постійного поперечного перерізу b_{11} набуває вигляду [6]

$$b_{11}=\frac{45EJ}{l^3},$$

де EJ – жорсткість балки при згині. Підставляючи (23) у (22), отримаємо основне інтегро-диференціальне рівняння теорії в’язкопружності

$$\ddot{T}(t)+C\left[T(t)-\int_0^t R(t-t)T(t)dt\right]=F(t), \quad (24)$$

де $T(t)$, $F(t)$ – n – мірний вектор функції $C=\left\|a_{ij}\right\|$;

$a_{ij}=\dfrac{b_{ij}}{M}$ – квадратна матриця.

Висновок. Таким чином, ми з багатьох методів дискретизації за просторовими елементами задач теорії в’язкопружності вибрали три методи, виходячи з ефективності використання для розв’язання конкретних задач. Всі вищенаведені методи у кінцевому результаті зводять задачу до розв’язання інтегрального або інтегро-диференціального рівняння типу Вольтера. Хоча ці рівняння лінійні, точний розв’язок їх при наявності слабосингулярних ядер спадковості у більшості випадків невідомий. Тому природним прийомом розв’язання цих рівнянь є наближено аналітичні та чисельні методи розв’язання за допомогою комп’ютера.

ЛІТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. – М.: Наука, 1983. – 336 с.
2. Григоренко Я.М. Решение задач теории оболочек методами численного анализа // Прикладная механіка. – 1984. – Т. 20, №10. – С. 3–22.
3. Дюво Г., Лионс Ж.Л. Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 383 с.
4. Илюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970.
5. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. – М.: Высшая школа, 1976. – 276 с.
6. Новацкий В. Динамика сооружений. – М.: Стройиздат, 1963. – 376 с.
7. Огибалов П.М., Бадалов А.Ф. Об одном методе решения интегро – дифференциальных уравнений динамической задачи теории вязкоупругости // Механика полимеров. – 1986. – №6.
8. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. – М.: МГУ, 1995. – 344 с.
9. Работнов Ю.Н. Равновесие упругой среды с последствиями // ПММ. – 1948. – Т. 12, №1.
10. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкции. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
11. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М: Наука, 1977. – 383 с.
12. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. – М.: Стройиздат, 1968. – 418 с.
13. Лукяненко С.О. Математичне забезпечення САПР. – К.: ІЗМН, 2004. – 144 с.

Корнєєв О.М., НАК “Нафтогаз України”, м. Хмельницький.

Протасов С.Ю., асистент кафедри електротехнічних систем Черкаського державного технологічного університету.