МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ЕКОНОМІКИ ТА УПРАВЛІННЯ
КАФЕДРА МЕНЕДЖМЕНТУ

МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК ДО ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ «МЕТОДИ ПРОГНОЗУВАННЯ І МОДЕЛЮВАННЯ В ЕКОНОМІЦІ»

(для студентів денної та заочної форм навчання напряму підготовки 6.030601 «Менеджмент»)

Черкаси 2016

УДК 331(075.8)

Методичний посібник до вивчення дисципліни «Методи прогнозування і моделювання в економіці» (для студентів денної та заочної форм навчання напряму підготовки 6.030601 «Менеджмент») / Уклад.: Захарова О.В. – Черкаси: ЧДТУ, 2016. – 64 с.

Методичний посібник містить зміст лекційного матеріалу за курсом, завдання до проведення лабораторних занять, зміст контрольної роботи, перелік рекомендованої літератури. Посібник призначений для студентів денної та заочної форм навчання напряму підготовки 6.030601 «Менеджмент».

Укладач: д.е.н., проф. Захарова О.В.

Рецензент проф. Фінагіна О.В.
д.е.н., проф. Манн Р.В.

Відповідальний за випуск: д.е.н., проф. Фінагіна О.В.

ЗМІСТ

ЛЕКЦІЙНА ЧАСТИНА

Тема 1. КОНЦЕПТУАЛЬНІ АСПЕКТИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІКИ

1 *Основні поняття економіко-математичного моделювання*
2 *Етапи побудови економіко-математичних моделей*

1 Основні поняття економіко-математичного моделювання

Економіка як наука про об'єктивні причини розвитку суспільства ще з ранніх часів користується різноманітними кількісними характеристиками, і тому вона акумулювала в собі велике число математичних методів. Активність економічних досліджень стає рушійною силою для математиків у подальшому розвитку математичного інструментарію. Сьогодні в економічній науці на перший план виходить математична модель як дієвий інструмент дослідження і прогнозування розвитку економічних процесів і явищ.

Предметом ЕММ є інструментарій побудови і рішення детермінованих оптимізаційних задач.

Об'єкт ЕММ – економіка предметних областей і її структурні складові.

Мета дисципліни – формування системи знань з методології та інструментарію побудови та використання різних типів економіко-математичних моделей.

Модель – це умовний образ об'єкта (в якості якого можуть виступати системи або поняття), що формує уявлення про нього в деякій формі, відмінній від реального існування даного об'єкта. Моделі можуть приймати різні форми, але найбільш корисною та загальновживаною з них є математична форма.

Побудова моделі будь-якого об'єкта чи явища передбачає абстрагування від багатьох реальних властивостей об'єкта, акцентування уваги на його основних властивостях, виходячи з основних цілей моделювання. Іншими словами, модель абстрактна і, отже, неповна, так як, виділяючи основні властивості, що визначають ті чи інші закономірності поведінки об'єкта, вона абстрагується від інших властивостей, які, незважаючи на свою відносну незначність, можуть визначити не тільки відхилення в поведінці об'єкта, але і змінити тенденцію поведінки. Зазвичай вважають, що всі властивості, явно не враховані в моделі, роблять на об'єкт відносно малий результуючий вплив. Таким чином, відображаються тільки ті аспекти об'єкта або системи, які відповідають меті дослідження (рис. 1).

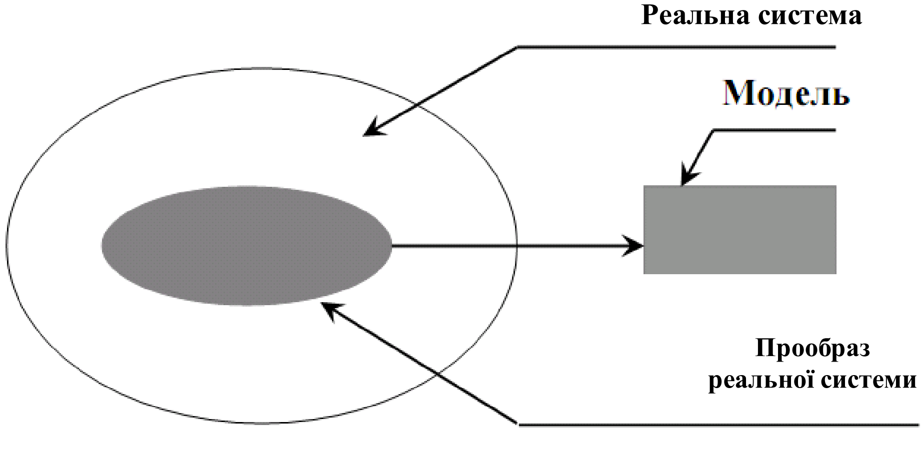


Рисунок 1 – Схематичне зображення рівнів абстракції

Економіко-математична модель – це концентроване відображення основних закономірностей процесу функціонування економічного об'єкта або системи в математичній формі, яке складається із сукупності взаємозалежних формул, рівнянь, нерівностей, логічних умов.

Процес побудови та використання математичних моделей для розв'язання з їх допомогою прикладних задач економіки являє собою економіко-математичне моделювання.

2 Етапи побудови економіко-математичних моделей

У загальному вигляді складові процесу ЕММ має вигляд, рис. 2.

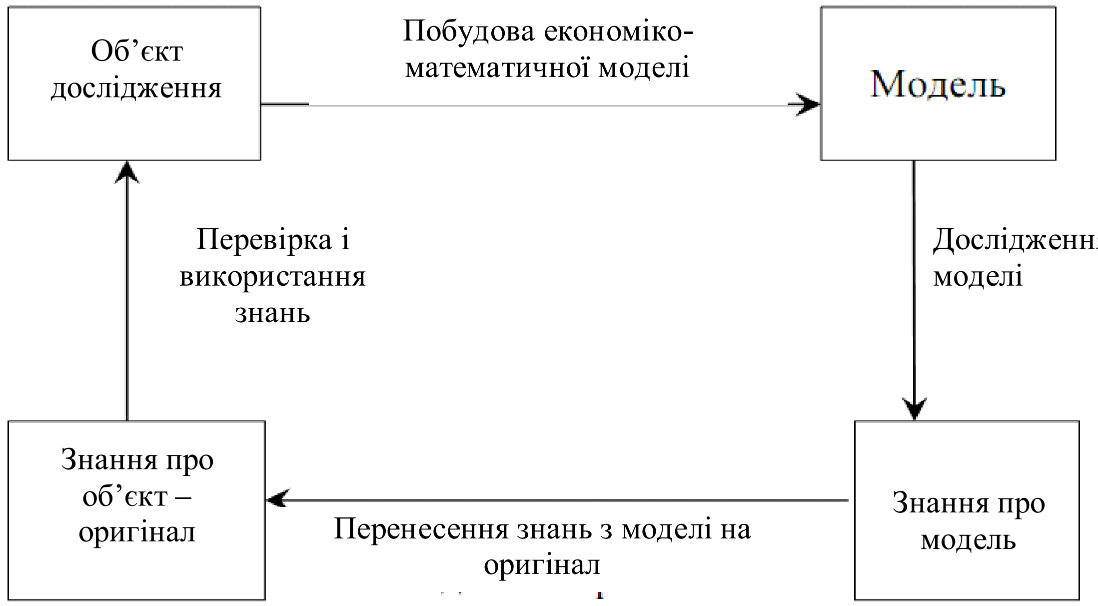


Рисунок 2 – Складові ЕММ

При побудові економіко-математичної моделі використовується наступна послідовність етапів:

1. Формулювання мети дослідження. Передбачає комплексний аналіз функціонування об'єкта дослідження, виявлення проблемних місць, опис найбільш характерних його властивостей, вивчення структури і взаємозв'язків, формулювання гіпотез і, в кінцевому підсумку, мети дослідження.
2. Словесний опис взаємозв'язків між елементами моделі.
3. Формування інформаційної бази моделі.
4. Введення символічних позначень для врахування характеристик економічного об'єкта і встановлення кількісних співвідношень між ними. Тим самим формується математична модель.
5. Числове рішення задачі. Передбачає проведення розрахунків за моделлю.
6. Аналіз отриманих результатів і прийняття рішень. Передбачає оцінку правильності і повноти отриманих результатів, розробку рекомендацій щодо їх практичного використання або удосконалення економіко-математичної моделі.

Питання для самоконтролю:

1. Що таке модель, які основні межі та призначення її використання в економіці?
2. Перерахуйте основні складові економіко математичного моделювання.

Рекомендована література: основна: [1, 2, 4, 5, 6, 9]; додаткова: [3, 7, 8, 10-21].

Тема 2. ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ

Розрізняють такі основні класи економіко-математичних моделей:

1. За ступенем агрегування об'єктів:

- *макроекономічні* моделі розглядають економіку як єдине ціле, пов'язуючи між собою укрупнені матеріальні та фінансові показники: ВВП, ВНП, споживання, інвестиції, зайнятість тощо. Ці моделі, абстрагуючись від поведінки окремих економічних елементів (домашні господарства і фірми), а також від відмінностей між окремими ринками, використовуються для аналізу і прогнозування цілісної економічної системи;
- *мікроекономічні* моделі описують поведінку основних структурних та функціональних елементів економічної системи і різні форми взаємодії цих елементів при заданих умовах.

2. За обліком фактора часу:

- *статичні* моделі описують деякий об'єкт у фіксований момент часу;
- *динамічні* моделі визначають взаємозв'язок змінних у часі.

3. Залежно від обліку фактора невизначеності:

- *детерміновані* моделі припускають жорсткі функціональні зв'язки між змінними моделі;
- *стохастичні* моделі допускають наявність випадкових впливів на досліджувані показники і використовують інструментарій теорії ймовірностей, математичної статистики, економетрії.

4. За характером математичного апарату:

- *моделі лінійного та нелінійного програмування;*
- *кореляційно-регресійні моделі;*
- *моделі масового обслуговування;*
- *моделі мережного планування;*
- *моделі* теорії ігор і т.д.

5. За призначенням:

- *балансові* (висловлюють вимоги відповідності наявності ресурсів і їх використання);
- *трендові* (розвиток економічної системи відбивається через тенденцію її основних показників);
- *імітаційні* (використовуються в процесі машинної імітації досліджуваних процесів або систем);
- *оптимізаційні* (призначені для вибору найкращого варіанта з певного числа варіантів виробництва, розподілу чи споживання).

Одними з найбільш поширених економіко-математичних моделей є оптимізаційні, які, як правило, використовуються на мікрорівні.

Відмінними ознаками оптимізаційних моделей є:

- наявність одного або декількох критеріїв оптимальності; найбільш типовими критеріями в економічних оптимізаційних задачах є: максимум доходу або прибутку, мінімум витрат, мінімальний час для виконання завдання та інші;
- система обмежень, яка формується, виходячи зі змістовної постановки задачі, і являє собою систему рівнянь або нерівностей.

<u>Оптимізаційна задача в загальному вигляді:</u>

Знайти значення змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які задовольняють системі нерівностей (рівнянь):

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i, \quad i = 1,2,\ldots,m, \tag{1}$$

і приводять до максимуму (або мінімуму) цільову функцію:

$$F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max\ (\min). \tag{2}$$

Умови невід'ємності змінних, якщо вони є, входять в обмеження (1).

У задачі математичного програмування функцію $F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називають цільовою функцією; систему нерівностей (1) – обмеженнями завдання.

Для розв’язання завдання (1) – (2) застосовуються методи математичного програмування.

Якщо цільова функція (2) та обмеження (1) представлені лінійними функціями, то така задача є задачею *лінійного програмування*.

Якщо, виходячи зі змістовного сенсу, її рішення має бути виражене цілими числами, то це завдання *цілочисельного лінійного програмування*.

Якщо цільова функція (2) і (або) обмеження (1) задаються нелінійними функціями, то маємо задачу *нелінійного програмування*.

Якщо функції f і (або) gi у виразах (2) і (1) залежать від параметрів, то отримуємо задачу *параметричного програмування*, якщо ці функції носять випадковий характер, - задачу *стохастичного програмування*.

Якщо мова йде про процес поетапного прийняття рішень, що розгортається в часі, то маємо задачу *динамічного програмування*.

З перерахованих методів математичного програмування найбільш поширеним і розробленим є лінійне програмування.

Питання для самоконтролю:

1. У чому різниця між статичними і динамічними математичними моделями, що використовуються в економіці?
2. Що таке стохастичні моделі? Наведіть приклади.
3. Де застосовуються трендові моделі в економіці?

Рекомендована література: основна: [1, 2, 4, 5, 6, 9]; додаткова: [3, 7, 8, 10-21].

Тема 3. ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ І МЕТОДИ ЇЇ ВИРІШЕННЯ

1. *Постановка задач лінійного програмування та форми їх запису*
2. *Симплексний метод розв’язання задач лінійного програмування*

1. Постановка задач лінійного програмування і форми їх запису

При побудові економіко-математичної моделі лінійного програмування використовуються такі поняття:

1. *Критерій оптимальності* – це ознака, за якою безліч або одне рішення задачі визнається найкращим.

2. *Цільова функція* математично пов'язує між собою фактори моделі, її значення визначається значенням цих величин. Розуміння змісту цільової функції дає критерій оптимальності.

3. *Система обмежень* визначає межі існування області дійсних і допустимих рішень і характеризує основні зовнішні і внутрішні властивості об'єкта.

4. *Рівняння зв'язку* – це математична формалізація системи обмежень.

5. *Рішення економіко-математичної моделі* – набір значень змінних, які задовольняють її рівнянню зв'язку.

У загальному вигляді завдання лінійного програмування (ЗЛП) формулюється наступним так: потрібно знайти такі значення змінних $x_1, x_2 ... x_n$, при яких цільова функція

$$F(X) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{3}$$

досягає максимуму (або мінімуму), і які задовольняють обмеженням:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... a_{1n}x_n \{\le, =, \ge\} b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... a_{2n}x_n \{\le, =, \ge\} b_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... a_{mn}x_n \{\le, =, \ge\} b_m, \end{aligned} \tag{4}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0. \tag{5}$$

Функція (3) називається *цільовою функцією*, а система (4) - (5) – *системою обмежень* або *системою умов задачі*.

Будь-який набір змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, який задовольняє всім обмеженням завдання, називається *допустимим рішенням*, або *допустимим планом*. Сукупність усіх допустимих планів називається допустимим безліччю, або *областю допустимих рішень* задачі. Допустиме рішення, яке звертає в максимум або мінімум цільову функцію, називається оптимальним рішенням, або оптимальним планом. Оптимальний план є рішенням задачі лінійного програмування.

Залежно від наявності обмежень різного типу розрізняють наступні три основні форми ЗЛП.

Загальна задача лінійного програмування характеризується тим, що включає як обмеження-рівності, так і обмеження-нерівності, крім того, не на всі змінні накладається умова невід'ємності. ЗЛП записана в канонічній формі, якщо всі обмеження представлені у вигляді рівностей і на всі змінні накладається умова невід'ємності. Такою є модель (9) - (11).

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to extr \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{10}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{11}$$

Симетрична форма задачі лінійного програмування містить тільки обмеження-нерівності і часто використовується в одному з наступних видів:

1. $F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,m},$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

2. $F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i, \quad i = \overline{1,m},$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Перехід від однієї форми до іншої здійснюється на основі простих перетворень. Так, для переходу від обмеження-нерівності до рівності в ліву частину нерівності досить ввести додаткову невід'ємну змінну зі знаком (+), якщо нерівність типу «≤», і зі знаком (-), якщо нерівність типу «≥».

Від обмежень-рівностей можна перейти до нерівностей, замінюючи кожне рівняння

$$1.\ a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \dots a_{1n}x_n = b_1,$$

двома нерівностями протилежного типу:

$$2.\ a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \dots a_{1n}x_n \le b_1,$$

$$3.\ a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \dots a_{1n}x_n \ge b_1.$$

У багатьох випадках зручно розглядати інші форми запису ЗЛП. Так, канонічна задача в матричної формі запису має вигляд:

$$F(X) = CX \to \text{extr},$$

$$AX = B,\ X \ge 0,$$

де $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$ – вектор-рядок з коефіцієнтів при невідомих у цільовій функції;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$ – вектор-стовпчик правих частин обмежень;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор-стовпчик змінних задачі;

$0 = (0, 0, \dots, 0)^T$ – нульовий вектор-стовпчик, T – знак транспонування;

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матриця умов задачі.

Часто використовують векторну форму запису ЗЛП:

$$F(X) = CX \to \text{extr},$$

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = B,$$

$$X \ge 0,$$

де $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$, … , $A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$.

2. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування

Симплексний метод є універсальним методом розв’язання задач лінійного програмування. Свою назву метод бере від слова «симплекс» (найпростіші багатокутник, багатогранник). N-мірні симплекси розглядав американський вчений Дж. Данциг при розробці ним у 50-і рр. XX ст. даного методу рішення ЗЛП.

Сутність симплекс-методу полягає в тому, щоб, знайшовши будь-яким способом початкове дозволене базисне рішення (яку-небудь із вершин багатогранника ОДР), переходити до наступного, більш оптимального базисного рішення (наступної вершини ОДР), перевіряючи на кожному кроці виконання критерію оптимальності.

Застосовують симплекс-метод до задачі канонічного (стандартного) виду, в якій всі обмеження – рівності з невід'ємною правою частиною, і на всі змінні накладається умова невід'ємності.

Знаходження початкового допустимого базисного рішення і перехід до наступного опорного рішенням проводяться на основі методу Жордана-Гаусса для системи лінійних рівнянь канонічної форми ЗЛП. Алгоритм симплекс-методу складається з кількох етапів, які розглянемо на прикладі.

Приклад. На підприємстві є дві категорії робітників: основні і допоміжні. Норми витрат праці (в деяких одиницях виміру трудомісткості) на виробництво одиниці двох видів продукції, наявність трудових ресурсів на підприємстві та ціни одиниць продукції наведені в таблиці 1.

Таблиця 1 – Вихідні дані

Категорія персоналу	Норми витрат праці на виробництво одиниці продукції		Наявні трудові ресурси
	$П_1$	$П_2$	
Основні	1	3	300
Допоміжні	1	1	150

Ціна одиниці продукції становить відповідно 2 грн. і 3 грн. Необхідно скласти такий план виробництва продукції, при якому загальна виручка підприємства від її реалізації буде найбільшою.

У розглянутому прикладі цільова функція, що виражає вимогу максимізації прибутку, має вигляд:

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max.$$

Обмеження визначають залежність між величинами необхідних і наявних ресурсів і можуть бути записані так:

$$\begin{cases} 1x_1 + 3x_2 \le 300; \\ x_1 + x_2 \le 150. \end{cases}$$

Граничні умови показують, в яких межах можуть бути знайдені величини. Оскільки жодних вимог щодо кількості вироблених продуктів в прикладі не висувається, то граничні умови являють собою вимоги невід'ємності змінних, тобто: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Отже, математична модель задачі в симетричному вигляді представляється наступним чином:

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 1x_1 + 3x_2 \le 300; \\ x_1 + x_2 \le 150. \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Для приведення її до канонічної (стандартної) форми в ліву частину кожної з нерівностей введемо додаткову змінну. Отримаємо:

$$F = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 300; \\ x_1 + x_2 + x_4 = 150. \\ x_j \ge 0 \qquad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Очевидно, додаткові змінні x_3, x_4, які дорівнюють різниці між правою і лівою частинами обмежень, являють собою можливий резерв відповідного ресурсу.

Матрична форма запису моделі:

$$F(X) = CX \to \max \tag{6}$$

$$AX = B \qquad (7)$$
$$X \geq 0, \qquad (8)$$

де

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{m1} \end{bmatrix}$$ - Матриця умов завдання.

1. Визначення початкового (опорного) плану ЗЛП.

Перепишемо систему обмежень у вигляді:

$$\begin{cases} x_3 = 300 - (x_1 + 3x_2); \\ x_4 = 150 - (x_1 + x_2). \end{cases}$$

В отриманій системі змінні, що знаходяться у правій частині (x_1, x_2), називаються *вільними (неосновними)*. А змінні, розташовані зліва (тобто додаткові змінні x_3, x_4), називаються *базисними*. Дорівнюючи вільні змінні нулю, отримаємо базисне рішення. вважаючи $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, отримаємо значення базисних змінних $x_3 = 300$, $x_4 = 150$.

Таким чином, отримано початковий опорний план: $X_0 = (0; 0; 300; 150)$.

При цьому цільова функція F, очевидно, дорівнює нулю.

2. Побудова симплексної таблиці.

Отримане рішення внесемо до таблиці:

Базис	**c_i** (цільов. ф-ція)	**План (b_i)**	2	3	0	0	α
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	300	1	3	1	0	
x_4	0	150	1	1	0	1	
$\Delta_j = z_j - c_j$		0					

3. Перевірка опорного плану.

Умова оптимальності: опорне рішення ЗЛП на максимум (мінімум) цільової функції є оптимальним тоді і тільки тоді, коли всі Δ_j ненегативні (непозитивні): $\Delta_j = z_j - c_j \geq 0$. Обчислимо величину оцінок для розглянутого прикладу:

$$\Delta_1 = z_1 - c_1 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) - 2 = -2;$$
$$\Delta_2 = z_2 - c_2 = (0 \cdot 3 + 0 \cdot 1) - 3 = -3;$$
$$\Delta_3 = z_3 - c_3 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) - 0 = 0;$$
$$\Delta_4 = z_4 - c_4 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1) - 0 = 0.$$

Базис	**c_i** (цільоев. ф-ція)	**План (b_i)**	2	3	0	0	α
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	300	1	3	1	0	
x_4	0	150	1	1	0	1	
$\Delta_j = z_j - c_j$		0	-2	-3	0	0	

Елементи цільового рядка не відповідають умові оптимальності, оскільки серед них є негативні величини. Це свідчить про можливість збільшення цільової функції, отже, опорне рішення не є оптимальним.

4. Перехід до нового опорного плану.

Перехід до нового опорного плану здійснюється шляхом заміни базисних змінних. При цьому обрана для введення в число базисних вільна змінна називається *введеною*, а видалена в розряд вільних базисна змінна – *виведеною*.

1. Вибір тієї, що вводиться до числа базисних змінних визначається умовою оптимальності: *вводима до числа базисних змінна визначається максимальною за абсолютною величиною негативною оцінкою при розв'язанні задачі на максимум цільової функції і найбільшою позитивною оцінкою – при розв'язанні задачі на мінімум. Відповідний стовпчик коефіцієнтів у симплекс-таблице називається ключовим*.

У цільовому рядку є негативні оцінки, максимально по модулю з яких - Δ_2 = -3, тому, слідуючи правилу в якості *введеної* змінної треба взяти x_2.

2. Вибір тієї, що виводиться з числа базисних (в розряд вільних) змінної здійснюється наступним чином. Змінна, що виводиться з числа базисних, незалежно від спрямованості оптимізації, визначається за мінімальним симплекс-відношенням. Симплекс-відношення являє собою відношення елементів підсумкового стовпця «Опорний план» симплекс-таблиці до відповідних позитивних елементів ключового стовпця. Якщо елемент ключового стовпця ≤ 0, то симплекс-відношення не розраховується (ставиться прочерк або знак ∞). Якщо в ключовому стовпці всі елементи ≤ 0, це свідчить про те, що ЗЛП не має рішення виходячи з необмеженості цільової функції.

Відповідний виведеній змінній рядок в симплекс-таблице називається *ключовим*.

Так, у нульовій симплексній таблиці розв'язуваної задачі симплекс-відношення для базисної змінної x_3 дорівнює 300: 3 = 100, а для базисної змінної x_4 – 150: 1 = 150. Ці значення записуються в останній графі симплексної таблиці. Мінімальне з симплекс-відношень визначає ключовий рядок і *виведену* з числа базисних змінну – це x_3.

Елемент, що знаходиться на перетині ключовий рядка і ключового стовпця (число 3), називається *ключовим елементом* і буде використаним для перерахунку елементів симплекс-таблиці.

Базис	**c_i** (цільов.ф-ція)	**План (b_i)**	2	3	0	0	α
			x_1	x_2	x_3	x_4	
$\leftarrow x_3$	0	300	1	$\boxed{3}$	1	0	100
x_4	0	150	1	1	0	1	150
$\Delta_j = z_j - c_j$		0	-2	-3	0	0	

Наступний крок на етапі переходу до нового опорного плану – перерахунок всіх елементів таблиці, який виконується за правилом, що складається з двох частин.

1) *елементи ключового рядка діляться на ключовий елемент*. Отримані таким чином величини поміщають в нову таблицю. Так в першій симплексній таблиці елементи рядка x_2 дорівнюють:

$$\frac{1}{3} = 1/3; \quad \frac{3}{3} = 1; \quad \frac{1}{3} = 1/3; \quad \frac{0}{3} = 0.$$

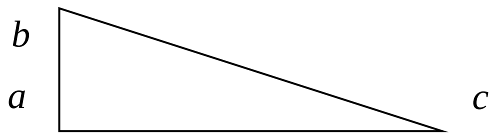
2) *всі інші елементи, включаючи цільовий рядок, перераховуються за правилом «прямокутного трикутника»:*

Базис	c_i (цільов.ф-ція)	План (b_i)	2	3	0	0	α
			x_1	x_2	x_3	x_4	
←x_3	0	300	1	$\boxed{3}$	1	0	100
x_4	0	150	1	1	0	1	150
$\Delta_j = z_j - c_j$		0	-2	-3	0	0	
→x_2	3	100	1/3	1	1/3	0	
x_4	0						
$\Delta_j = z_j - c_j$							

а) *до стовпчика β записуються відношення елементів ключового стовпця до ключового елементу*: $\frac{3}{3}=1$; $\frac{1}{3}=1/3$.

б) *перерахунок елементів виконується відповідно до схеми:*

$$\boxed{a^{\text{нове}} = a^{\text{старе}} - b \cdot c}$$



де b – елемент, що знаходиться на перехресті стовпчика, що містить число, що перераховується, та ключового рядка;

c – елемент, що знаходиться на перехресті рядка, що містить число, що перераховується, та стовпчика β.

150-300·1/3=50; 1-1·1/3=2/3; 1-3·1/3=0; 0-1·1/3=-1/3; 1-0·1/3=1.

Базис	c_i (цільов.ф-ція)	План (b_i)	2	3	0	0	α	β
			x_1	x_2	x_3	x_4		
←x_3	0	300	1	$\boxed{3}$	1	0	100	1
x_4	0	150	1	1	0	1	150	1/3
$\Delta_j = z_j - c_j$		0	-2	-3	0	0		
→x_2	3	100	1/3	1	1/3	0		
x_4	0							
$\Delta_j = z_j - c_j$								

Отримані значення заносяться до нової симплекс таблиці:

Базис	c_i (цільов.ф-ція)	План (b_i)	2	3	0	0	α	β
			x_1	x_2	x_3	x_4		
x_3	0	300	1	$\boxed{3}$	1	0	100	1
x_4	0	150	1	1	0	1	150	1/3
$\Delta_j = z_j - c_j$		0	-2	-3	0	0		
x_2	3	100	1/3	1	1/3	0		
x_4	0	50	2/3	0	-1/3	1		
$\Delta_j = z_j - c_j$								

Розрахуємо величини оцінок:

$$\Delta_1 = z_1 - c_1 = (3 \cdot 1/3 + 0 \cdot 2/3) - 2 = -1;$$
$$\Delta_2 = z_2 - c_2 = (3 \cdot 1 + 0 \cdot 0) - 3 = 0;$$
$$\Delta_3 = z_3 - c_3 = (3 \cdot 1/3 + 0 \cdot -1/3) - 0 = 1;$$
$$\Delta_4 = z_4 - c_4 = (3 \cdot 0 + 0 \cdot 1) - 0 = 0.$$

Результати заносимо до таблиці:

Базис	c_i (цільов.ф-ція)	**План** (b_i)	2	3	0	0	α	β
			x_1	x_2	x_3	x_4		
x_3	0	300	1	3	1	0	100	1
x_4	0	150	1	1	0	1	150	1/3
$\Delta_j = z_j - c_j$		0	-2	-3	0	0		
x_2	3	100	1/3	1	1/3	0	300	
$\leftarrow x_4$	0	50	$\boxed{2/3}$	0	-1/3	1	75	
$\Delta_j = z_j - c_j$		300	-1	0	1	0		

Оскільки серед оцінок ще є негативна $\Delta_1 = -1$, то робимо висновок про те, що нове рішення не є оптимальним. Змінна x_1 тепер буде вводитися, x_4 – виводитися (мінімальне симплекс-відношення дорівнює 75).

Виконавши перерахунок, приходимо до наступної симплексної таблиці.

$100-50 \cdot 1/2=75$; $1/3-2/3 \cdot 1/2=0$; $1-0 \cdot 1/2=1$; $1/3-(-1/3 \cdot 1/2)=1/2$; $0-1 \cdot 1/2=-1/2$.

Розрахуємо оцінки:

$$\Delta_1 = z_1 - c_1 = (3 \cdot 0 + 2 \cdot 1) - 2 = 0;$$
$$\Delta_2 = z_2 - c_2 = (3 \cdot 1 + 2 \cdot 0) - 3 = 0;$$
$$\Delta_3 = z_3 - c_3 = (3 \cdot 1/2 + 2 \cdot (-1/2)) - 0 = 1/2;$$
$$\Delta_4 = z_4 - c_4 = (3 \cdot (-1/2) + 2 \cdot 3/2) - 0 = 3/2.$$

Базис	c_i (цільов.ф-ція)	**План** (b_i)	2	3	0	0	α	β
			x_1	x_2	x_3	x_4		
$\leftarrow x_3$	0	300	1	3	1	0	100	1
x_4	0	150	1	1	0	1	150	1/3
$\Delta_j = z_j - c_j$		0	-2	-3	0	0		
$\rightarrow x_2$	3	100	1/3	1	1/3	0	300	1/2
$\leftarrow x_4$	0	50	**2/3**	0	-1/3	1	75	1
$\Delta_j = z_j - c_j$		300	-1	0	1	0		
x_2	3	75	0	1	1/2	-1/2		
$\rightarrow x_1$	2	75	1	0	-1/2	3/2		
$\Delta_j = z_j - c_j$		375	0	0	1/2	3/2		

У рядку оцінок симплексної таблиці виконується умова невід'ємності, що свідчить про досягнення оптимального рішення. Якщо в отриманому оптимальному плані оцінки всіх вільних змінних строго більше нуля, то оптимальний план є єдиним. Наявність нульових оцінок деяких вільних змінних в оптимальному плані свідчить про те, що він неєдиний.

Питання для самоконтролю:

1. Яким чином формується система обмежень задачі? Що таке рівняння зв’язку?
2. Які практичні задачі дозволяє розв’язати симплексний метод?

Рекомендована література: основна: [1, 2, 4, 5, 6, 9]; додаткова: [3, 7, 8, 10-21].

Тема 4. ТЕОРІЯ ПОДВІЙНОСТІ І АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

1. *Формулювання двоїстої задачі лінійного програмування, її економічної інтерпретації Основні теореми подвійності*
2. *Властивості двоїстих оцінок*
3. *Використання теорем двоїстості для аналізу оптимальних рішень у задачах економіки праці*

1. Формулювання двоїстої задачі лінійного програмування, її економічна інтерпретація

Якщо деяку економічну проблему зведено до розгляду задачі математичного програмування, то її рішення містить два істотно різних набори економічних величин. В один з них (так зване «пряме рішення») входять всі об'ємні та структурні показники, що характеризують випуск продукції і використання виробничих ресурсів. Інший набір («двоїсте рішення») складається з величин, що характеризують вплив можливих збільшень кожного продукту і ресурсу на досягнення мети рішення задачі. Ці величини називаються *оцінками оптимального плану* (подвійними оцінками). Вони являють собою важливий засіб економіко-математичного аналізу господарських рішень.

Оцінки дозволяють визначати напрям зміни оптимального плану у разі зміни початкових умов (обмежень). При не надто великому варіюванні цих умов оцінки дають можливість безпосередньо судити про нову величину критерію оптимальності (величину цільової функції), дозволяючи тим самим досліджувати стійкість оптимуму по відношенню до змін початкових умов і полегшуючи вірне рішення низки економічних питань, від яких залежать вихідні передумови розглянутої задачі.

Значна роль оптимальних оцінок і при визначенні доцільності застосування нових способів використання ресурсів, невідомих при початковій постановці завдання. На основі отриманих оптимальних оцінок визначають прибутковість або збитковість (з погляду поставленої мети) нового способу. І якщо останній виявляється прибутковим, то раніше складений оптимальний план вже не вважається оптимальним – застосування нового способу доцільно.

Розглянемо модель виробничої системи з погляду цінності наявних у підприємства ресурсів. Ресурси, які в оптимальному плані не використовуються повністю, не має сенсу нарощувати навіть при порівняно невеликих витратах на збільшення їх запасів, тому говорять, що вони мають для виробничої системи низьку цінність. Найбільшу цінність матимуть ті ресурси, які повністю витрачаються в оптимальному плані і тому обмежують випуск продукції, а, отже, і дохід; на збільшення запасу цих ресурсів підприємство згідно нести значні витрати. У зв'язку з цим можна вважати, що кожен вид ресурсу має певну «тіньову ціну», яка визначає цінність відповідного ресурсу для підприємства з погляду доходу від реалізації продукції, що випускається і залежить від наявного запасу цього ресурсу і потреби в ньому для випуску продукції. Оптимальному стану виробничої системи відповідає вектор оптимальних тіньових цін наявного запасу ресурсів. Оптимальні тіньові ціни називають *об'єктивно зумовленими оцінками*, або *оптимальними двоїстими оцінками ресурсів*.

Для визначення оптимальних двоїстих оцінок ресурсів (оптимальних оцінок) складається задача лінійного програмування, яка має назву *двоїстої*; первісна задача називається *вихідною*, або *прямою*. Змінні двоїстої задачі і є двоїстими оцінками, або тіньовими цінами.

Моделі вихідної (прямої) і двоїстої задач в загальному вигляді можуть бути записані таким чином:

Вихідна (пряма) задача

$$F(X)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\rightarrow\max \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i,\quad i=\overline{1,m} \quad (2)$$

$$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,n} \quad (3)$$

Двоїста задача

$$L(Y)=\sum_{i=1}^{m}b_iy_i\rightarrow\min \quad (4)$$

$$y_i\ge 0,\quad i=\overline{1,m} \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\ge c_j,\quad j=\overline{1,n} \quad (6)$$

Симетричні:

$$Z=c_0+c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n(\max),\quad z^*=c_0+b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_my_m(\min),$$

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\le b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\le b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\le b_m,\\ x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,n}.\end{cases}\qquad \begin{cases}a_{11}y_1+a_{21}y_2+\ldots+a_{m1}y_m\ge c_1,\\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{m2}y_m\ge c_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\ldots+a_{mn}y_m\ge c_n,\\ y_i\ge 0,\quad i=\overline{1,m}.\end{cases}$$

$$Z=c_0+c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n(\min),\quad z^*=c_0+b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_my_m(\max),$$

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\ge b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\ge b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\ge b_m,\\ x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,n}.\end{cases}\qquad \begin{cases}a_{11}y_1+a_{21}y_2+\ldots+a_{m1}y_m\le c_1,\\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{m2}y_m\le c_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\ldots+a_{mn}y_m\le c_n,\\ y_i\ge 0,\quad i=\overline{1,m}.\end{cases}$$

Несиметричні:

$$Z=c_0+c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n(\max),\quad z^*=c_0+b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_my_m(\min),$$

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m,\\ x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,n}.\end{cases}\qquad \begin{cases}a_{11}y_1+a_{21}y_2+\ldots+a_{m1}y_m\ge c_1,\\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{m2}y_m\ge c_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\ldots+a_{mn}y_m\ge c_n,\\ y_i\in]-\infty;+\infty[.\end{cases}$$

$$Z=c_0+c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n(\min),\quad z^*=c_0+b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_my_m(\max),$$

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m,\\ x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,n}.\end{cases}\qquad \begin{cases}a_{11}y_1+a_{21}y_2+\ldots+a_{m1}y_m\le c_1,\\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{m2}y_m\le c_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\ldots+a_{mn}y_m\le c_n,\\ y_i\in]-\infty;+\infty[.\end{cases}$$

Виходячи з моделі розподілу ресурсів, пряме завдання відображає процес виробництва n видів продукції з використанням m видів ресурсів. Коефіцієнт цільової функції c_j являє собою дохід (прибуток) на одиницю продукції j-го виду;

коефіцієнти a_{ij} з обмежень задачі – це витрата ресурсів i-го виду на випуск одиниці j-ї продукції; права частина обмежень b_i характеризує запас i-го ресурсу.

Ліва частина кожного обмеження (2) прямої задачі показує, скільки відповідного ресурсу необхідно на випуск продукції в кількості (x_1, x_2, ..., x_n), а права – скільки ресурсу можна використовувати виходячи з наявного запасу.

Цільова функція виражає вимогу максимізації доходу від реалізації продукції в припущенні, що вся випущена продукція буде реалізованою.

Змінні двоїстої задачі y_i представляють собою оцінку одиниці ресурсу i-го виду (сенс цих оцінок визначається їх властивостями, про які йтиметься далі). Величини y_i мають бути такими, щоб сума тіньових цін ресурсів, що витрачаються на випуск одиниці будь-якого виду продукції, була не менша величини доходу c_j:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j = \overline{1,n}.$$

Отже, ліва частина обмеження двоїстої задачі (6) містить оцінку всіх ресурсів, що використовуються для виробництва одиниці продукції j-го виду, а права – прибуток від реалізації одиниці продукції j-го виду, тобто результат використання ресурсів.

Розмір цільової функції являє собою сумарну оцінку всіх наявних ресурсів:

$$L(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min .$$

Економічна інтерпретація двоїстої задачі:

Припустимо, що з певних причин підприємство відмовляється від виробництва даної продукції і вирішує продати свої ресурси іншій організації. Виникає проблема встановлення об'єктивно обумовлених цін на ці ресурси. Якщо ціни позначити через y_i, то цільова функція буде виражати інтереси фірми, що купує ресурси (найменша вартість ресурсів), а функціональні обмеження – інтереси підприємства. Підприємство не стане продавати ресурси, якщо прибуток від цього продажу буде менше прибутку від реалізації продукції, виробленої за допомогою цих ресурсів.

Пряма і двоїста задачі лінійного програмування тісно пов'язані між собою. Цей зв'язок полягає, в наступному:

1) якщо цільова функція вихідної задачі формулюється на максимум, то цільова функція двоїстої задачі – на мінімум і навпаки;

2) в задачі на максимум всі нерівності в функціональних обмеженнях мають вигляд (≤), в задачі на мінімум – вид (≥), і навпаки;

3) коефіцієнтами при невідомих у цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени з системи обмежень вихідної задачі в стандартній формі;

4) правими частинами в обмеженнях двоїстої задачі служать коефіцієнти при невідомих із цільової функції вихідної задачі;

5) матриця A, складена з коефіцієнтів при невідомих в системі обмежень вихідної задачі, і аналогічна матриця A^T в двоїстій задачі виходять одна з одної транспонуванням;

6) число змінних в двоїстій задачі дорівнює числу функціональних обмежень вихідної задачі, а число обмежень у системі двоїстої задачі – числу змінних у вихідній;

7) кожному обмеженню однієї задачі відповідає змінна іншого завдання,

номер змінної збігається з номером обмеження; знаки нерівностей в системі обмежень прямої задачі змінюються на протилежні в системі обмежень двоїстої задачі. При цьому обмеженню, записаному у вигляді нерівності, відповідає змінна, пов'язана умовою невід'ємності. Якщо функціональне обмеження вихідної задачі є рівністю, то відповідна змінна двоїстої задачі може приймати як позитивні, так і негативні значення.

Дві наведені задачі (1) - (3) і (4) - (6) утворюють пару симетричних двоїстих задач. Рішення однієї з них може бути отримано безпосередньо з рішення іншої.

Встановимо зв'язок між рішеннями прямої і двоїстої задач лінійного програмування.

Наведемо завдання до канонічного виду шляхом введення в ліву частину кожного обмеження додаткових змінних:

$$\begin{aligned}&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1,\\&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2,\\&...\\&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m,\\&x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n+m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ...a_{m1}y_m + y_{m+1} = c_1,\\&a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ...a_{m2}y_m + y_{m+2} = c_2,\\&...\\&a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ...a_{mn}y_m + y_{m+n} = c_n,\\&y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m+n}\end{aligned}$$

Кожна змінна x_j (або y_i) відповідає j-му (i-му) обмеженню в двоїстій для даній задачі, а отже, і додатковій змінній, введеної в це обмеження з метою перетворення його на рівність. Таким чином, встановлюється така відповідність між змінними:

$$\begin{aligned}&x_j \leftrightarrow y_{m+j} \quad (j = 1,2,...,n)\\&x_{n+i} \leftrightarrow y_i \quad (i = 1,2,...,m)\end{aligned}.$$

Говорять, що змінні прямої і двоїстої задач групуються у взаємозалежні пари (x_j, y_{m+j}) і (x_{n+i}, y_i), що мають назву *пари двоїстих змінних*.

У двоїстій парі якщо одна змінна є базисною для одного із завдань, то відповідна їй інша змінна є вільною в двоїстому завданні. Економічний сенс додаткових змінних представимо у вигляді наступної таблиці (табл. 1).

Таблиця 1 – Економічний зміст додаткових змінних

Задача	Ліва частина обмеження	Права частина обмеження	Різниця
Вихідна	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq$ кількість ресурсу i-го виду	b_i кількість наявного ресурсу i-го виду	$x_{n+i}, \quad i = \overline{1, m}$ резерв ресурсу i-го виду (якщо ресурсу більше, ніж необхідно)
Двоїста	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geq$ оцінка ресурсів, що витрачаються на випуск одиниці j-го продукту	c_j результат виготовлення одиниці j-го продукту (витрат ресурсів)	$y_{m+j}, \quad j = \overline{1, n}$ можливий збиток від виробництва одиниці j-го продукту (якщо витрати більше результату)

2. Основні теореми подвійності

Основним теоретичним результатом лінійного програмування є теореми подвійності, інтерпретація яких у термінах різних економічних завдань виявляється ефективним засобом економічного аналізу, спрямованим на найкраще використання ресурсів.

Перша теорема подвійності:

Для двох взаємно двоїстих ЗЛП має місце один з взаємовиключних випадків:

1. Якщо одна із задач двоїстої пари має рішення, то й інша вирішувана. При цьому оптимальні значення цільових функцій обох завдань збігаються:

$$F(X^*) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = L(Y^*). \tag{7}$$

2. Якщо в одній із задач цільова функція на допустимій безлічі не обмежена зверху, то допустима безліч другого завдання порожня (тобто друга задача взагалі не має рішення).

3. Області визначення обох завдань є порожні множини.

Друга теорема подвійності (теорема рівноваги):

Для того, щоб X = ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) і Y =($y_1, y_2, \ldots, y_m$) – припустимі рішення відповідно вихідної та двоїстої задач – були їх оптимальними рішеннями, необхідно і достатньо виконання таких умов «доповнюючої не жорсткості»:

$$y^*_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^*_j - b_i \right) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \tag{8}$$

$$x^*_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y^*_i - c_j \right) = 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{9}$$

Іншими словами, допустимі плани X і Y пари двоїстих задач оптимальні тоді і тільки тоді, коли вони задовольняють таким умовам:

1) якщо $x_j > 0$, то $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y^*_i - c_j = 0$,

2) якщо $y_i > 0$, то $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^*_j - b_i = 0$,

3) якщо $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y^*_i > c_j$, то $x_j = 0$,

4) якщо $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^*_j < b_i$, то $y_i = 0$.

Умови (8)-(9) дозволяють по оптимальному рішенню однієї з взаємно двоїстих задач, знайти оптимальне рішення іншої задачі. Тому для розв'язання певної ЗЛП можна спочатку розв'язати двоїсту задачу, а потім визначити рішення вихідної задачі.

Третя теорема подвійності (теорема про оцінки):

Значення змінних y_i в оптимальному рішенні двоїстої задачі являють собою оцінки впливу вільних членів b_i системи обмежень (нерівностей) прямої задачі на величину цільової функції вихідної задачі, вони рівні:

$$y_i = \frac{\partial F}{\partial b_i}. \tag{10}$$

Звідси випливає, що приріст цільової функції ΔF визначається добутком приросту запасу ресурсів Δb_i на величину оптимальної оцінки y_i. Рівність справедлива, якщо величина Δb_i є відносно невеликою (межі зміни встановлюються на основі теорії стійкості оптимальних рішень ЛП).

Розглянемо економічну інтерпретацію теорем подвійності і сформулюємо властивості оптимальних оцінок, що випливають з цих теорем.

3. Властивості двоїстих оцінок

Співвідношення (7) дає підстави рахувати, що двоїсті змінні (тіньові ціни) мають вартісне походження. Дійсно, значення $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*$ вимірюється у грошових одиницях, тому природно вимірювати значення $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$ також у грошових одиницях. Так як b_i – кількість ресурсу, то величина y_i має інтерпретуватися як вартісна оцінка одиниці відповідного ресурсу.

Співвідношення (7) показує, що в оптимальному плані сумарний випуск підприємства (величина доходу) збігається з витратами виробничих ресурсів, обчисленими в їх тіньових цінах. Звідси перша властивість оптимальних оцінок: *оцінки виступають як інструмент балансування витрат і результатів*.

Економічний сенс першої теореми подвійності такий. План виробництва X і набір оцінок ресурсів Y виявляються оптимальними тоді і тільки тоді, коли прибуток від реалізації продукції, визначений при відомих заздалегідь цінах продукції, дорівнює витратам на ресурси по «внутрішнім» цінам ресурсів.

Співвідношення (8) показує, що якщо і-ий виробничий ресурс є недефіцитним (тобто вираз в круглих дужках не дорівнює нулю), то його тіньова ціна дорівнює нулю; дефіцитний же ресурс має позитивну оцінку. Чим гостріше дефіцитність ресурсу, тим вище його оцінка. Це співвідношення породжує другу властивість оптимальних оцінок: *оцінки виступають як міра дефіцитності ресурсів і продукції*.

Дійсно, ресурс, запаси якого перевищують потреби в ньому (з погляду оптимального плану), не представляє цінності для виробництва: деяке скорочення запасів такого ресурсу не зменшить можливості виробництва. Тому оцінку такого ресурсу природно прийняти рівною нулю.

Співвідношення (9) показує, що якщо j-й продукт є беззбитковим, тобто $x_j > 0$, то величина результату від його виробництва збігається з витратами виробничих ресурсів, обчисленими в тіньових цінах ресурсів:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y^*_i - c_j .$$

В іншому випадку, тобто якщо результат випуску продукції менше оцінки витрачених ресурсів, виробництво цього продукту оптимальним планом не передбачається. Звідси третя властивість оптимальних оцінок: *оцінки виступають як інструмент визначення ефективності випуску продукції (технологій)*.

Роль оптимальних оцінок не обмежується тим, що вони можуть трактуватися як оцінки, що дозволяють зіставити витрати з результатом. Якщо задача розв’язана, то цікаво і важливо знати, як вплинуть на величину оптимуму збільшення (або зменшення) запасу того чи іншого ресурсу. Відповідь на це питання дозволяє отримати четверта властивість оптимальних оцінок: *оцінки виступають як міра впливу зміни правих частин обмежень (обсягу ресурсу) на величину оптимуму (максимального доходу)*. Ця властивість випливає з третьої теореми подвійності і дозволяє оцінити внесок кожної додаткової одиниці ресурсів у досягнення спільної мети. Оцінка y_i, обумовлена співвідношенням (10), показує приріст величини цільової функції (макс. доходу) при збільшенні запасу i-го ресурсу на одиницю.

Слід зауважити, що мова йде про досить малий приріст ресурсів, так як зміна величини b_i в деякий момент викликає зміну базисного набору змінних вихідної задачі, що тягне за собою зміну величини оцінки y_i.

Властивості оптимальних оцінок широко використовуються при економічному аналізі результатів розв’язання задач лінійного програмування і при розробці відповідних рекомендацій.

4. Застосування теорем подвійності для аналізу оптимальних рішень в задачах економіки праці

Розглянемо економічну інтерпретацію прямої і двоїстої задач і використання властивостей оптимальних оцінок для аналізу результатів на прикладі задачі найкращого використання ресурсів (про випуск продукції).

<u>Приклад</u>. Підприємство випускає чотири види продукції $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$, використовуючи три типи трудових ресурсів (за професіями). Обсяги ресурсів, норми трудомісткості одиниці продукції і прибуток від реалізації одиниці продукції наведено в табл. 2.

Таблиця 2 – Вихідні дані

Тип трудових ресурсів	Трудомісткість одиниці продукції, люд.-год.				Наявність трудових ресурсів
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	
Токарі	1	1	1	1	16
Слюсарі	4	6	10	13	100
Фрезерувальники	6	5	4	3	110
Прибуток, грн./од.	60	70	120	130	
Випуск, од.	x_1	x_2	x_3	x_4	

Потрібно: 1) знайти оптимальний план випуску продукції за критерієм максимального прибутку (вважаємо, що ринок збуту не обмежений); 2) знайти рішення двоїстої задачі і навести його економічну інтерпретацію; 3) виконати аналіз рішення на основі властивостей оптимальних оцінок.

Для сформульованої задачі оптимізації виробничої програми складемо моделі прямої та двоїстої задач:

Вихідна задача	Двоїста задача
$F = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \rightarrow \max$ $1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 \le 16$ $4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \le 100$ $6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 110$ $x_1 \ge 0$ $x_2 \ge 0$ $x_3 \ge 0$ $x_4 \ge 0$	$L = 16\,y_1 + 100\,y_2 + 110\,y_3 \rightarrow \min$ (урахування интересу покупця) $y_1 \ge 0$ $y_2 \ge 0$ $y_3 \ge 0$ $\left.\begin{array}{l} 1\,y_1 + 4\,y_2 + 6\,y_3 \ge 60 \\ 1\,y_1 + 6\,y_2 + 5\,y_3 \ge 70 \\ 1\,y_1 + 10\,y_2 + 4\,y_3 \ge 120 \\ 1\,y_1 + 13\,y_2 + 3\,y_3 \ge 130 \end{array}\right\}$ (урахування інтересів продавця)

Перетворимо моделі до канонічного виду:

Вихідна задача	Двоїста задача
$F=60x_1+70x_2+120x_3+130x_4+0(x_5+x_6+x_7)\to max$ $1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 + x_5 = 16$ $4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 + x_6 = 100$ $6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_7 = 110$ $x_j \geq 0$, $j = 1, 2,\ldots,7$	$L=16y_1+100y_2+110y_3+0(y_4+y_5+y_6+y_7)\to min$ $1y_1 + 4y_2 + 6y_3 - y_4 = 60$ $1y_1 + 6y_2 + 5y_3 - y_5 = 70$ $1y_1 + 10y_2 + 4y_3 - y_6 = 120$ $1y_1 + 13y_2 + 3y_3 - y_7 = 130$ $y_i \geq 0$, $i = 1, 2,\ldots,7$

Додаткові змінні x_j ($j = 5, 6, 7$) вихідної задачі демонструють можливий резерв відповідного ресурсу. Додаткові змінні y_i ($i = 4,5,6,7$) двоїстої задачі характеризують можливий збиток (з точки зору поставленої мети) при випуску одиниці відповідного продукту. Рішення завдання виконано симплекс-методом. Оптимальний план представлено в табл. 3.

Таблиця 3 – Оптимальний план випуску продукції

Cj	Базис	B	60	70	120	130	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
60	x_1	10	1	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0
120	x_3	6	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0
0	x_7	26	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{22}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
$\Delta_j=z_j - c_j$		1320	0	10	0	20	20	10	0
			y_4	y_5	y_6	y_7	y_1	y_2	y_3

Оптимальне рішення задач:

вихідної – у підсумковому стовпчику B:

$x_1 = 10$, $x_2 = 0$, $x_3 = 6$, $x_4 = 0$; $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, $x_7 = 26$; $F_{max} = 1320$;

двоїстої – у цільовому рядку $\Delta_j=z_j - c_j$:

$y_1 = 20$, $y_2 = 10$, $y_3 = 0$; $y_4 = 0$, $y_5 = 10$, $y_6 = 0$, $y_7 = 20$; $L_{min} = 1320$.

Як виходить з умов задачі, значення основних змінних x_1, x_2, x_3, x_4 представляють собою випуск продукції в оптимальному плані. З рішення задачі видно, що оптимальний план включає випуск 10 одиниць продукції $П_1$ та 6 одиниць $П_3$, що забезпечує отримання максимального прибутку у розмірі 1320 грн. Випуск продукції $П_2$ і $П_4$ планом не передбачено, тобто $x_2 = x_4 = 0$.

Величина додаткових змінних вихідної задачі говорить про те, що в оптимальному плані перший і другий ресурси дефіцитні (відповідні додаткові змінні $x_5=x_6=0$), тобто повністю витрачені, а ресурс третього виду («фрезерувальники») не є дефіцитним, невикористаний залишок складає 26 люд.-год. (додаткова змінна x_7 є базисною і дорівнює 26 люд.-год).

Виконаємо аналіз рішення задачі на основі використання властивостей оптимальних оцінок. Перша властивість оптимальних оцінок дозволяє зробити висновок про те, що отримані рішення дійсно оптимальні, оскільки оцінка ресурсів (мінімум витрат) дорівнює максимальному результату (загальна сума прибутку):

$$L_{min} = 16\,y_1 + 100\,y_2 + 110\,y_3 = 16 \cdot 20 + 100 \cdot 10 + 110 \cdot 0 = 1320 = F_{max}.$$

Оптимальні оцінки (відповідно до другої властивості) підтверджують висновок про дефіцитність трудових ресурсів: «токарі» і «слюсарі» використані повністю, їх оцінки позитивні ($y_1=20$, $y_2=10$), а ресурс «фрезерувальники» недовикористано ($y_3 = 0$).

Тут двоїста оцінка ресурсу третього виду y_3 відповідає змінній x_7 – додаткової змінної в обмеженні за кількістю третього ресурсу вихідної задачі. В оптимальному плані виробництва змінна x_7 є базисною (табл. 3, де x_7=26) і показує, що ресурс «фрезерувальники» недовикористано, резерв складає 26 люд.-год.), а у оптимальному плані двоїстої задачі $y_3 = 0$ характеризує, що цінність кожної додаткової одиниці цього ресурсу дорівнює нулю.

Слід зазначити, що відповідність, яка встановлюється між змінними двоїстих пар, за якою базисним змінним однієї з пари двоїстих задач відповідають вільні змінні іншої задачі, мають змістовну інтерпретацію:

$$\underbrace{\overbrace{\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_7 \end{matrix}}^{\text{основні змінні вихідної задачі}}}_{\text{додаткові змінні двоїстої задачі}} \quad \underbrace{\overbrace{\begin{matrix} x_5 & x_6 & x_7 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix}}^{\text{додаткові змінні вихідної задачі}}}_{\text{основні змінні двоїстої задачі}} .$$

Вільним же змінним x_5, x_6 відповідають базисні y_1, y_2, що свідчать про дефіцитність відповідних ресурсів і характеризують вклад, який вносить кожна додаткова одиниця цих ресурсів у досягнення мети (максимізацію прибутку).

Третя властивість оптимальних оцінок дозволяє зробити висновок про те, що виготовлення продукції першого і третього видів є рентабельним (вигідним). Для цих продуктів обмеження двоїстої задачі виконуються як рівності, тобто оцінка ресурсів, витрачених на виробництво продукції, збігається з доходом від її реалізації:

$$1\,y_1 + 4\,y_2 + 6\,y_3 = 1\cdot 20 + 4\cdot 10 + 6\cdot 0 = 60,$$
$$1\,y_1 + 10\,y_2 + 4\,y_3 = 1\cdot 20 + 10\cdot 10 + 4\cdot 0 = 120.$$

Випуск продукції другого і четвертого видів є збитковим (сприяє зменшенню загальної суми прибутку), і тому оптимальним планом не передбачений. Відповідні обмеження двоїстої задачі виконуються як строгі нерівності (витрати перевищують результат):

$$1\,y_1 + 6\,y_2 + 5\,y_3 = 1\cdot 20 + 6\cdot 10 + 5\cdot 0 = 80 > 70,$$
$$y_5 = 80 - 70 = 10,$$
$$1\,y_1 + 13\,y_2 + 3\,y_3 = 1\cdot 20 + 13\cdot 10 + 3\cdot 0 = 150 > 130,$$
$$y_7 = 150 - 130 = 20.$$

Додаткові змінні y_5 і y_7 показують, наскільки зменшиться загальна сума прибутку (1320 грн.) при виготовленні одиниці продукції відповідно $П_2$ та $П_4$.

Зменшення величини цільової функції відбувається за рахунок змін в оптимальному плані, викликаних перерозподілом ресурсів із метою їх часткового вивільнення у зв'язку з необхідністю примусового виготовлення невигідної продукції.

Коефіцієнти a_{ij} стовпців основних змінних (x_1, x_2, x_3, x_4) (табл. 3) – так звані *коефіцієнти заміщення* – показують, наскільки зміниться (збільшиться при $a_{ij} < 0$ і зменшиться при $a_{ij} > 0$) величина і-ї базисної змінної при введені до базису j-ї вільної змінної в кількості 1. Так, при необхідності виробництва не потрапившої до оптимального плану одиниці продукції $П_2$ бачимо (стовпчик x_2 табл. 3), що випуск першого продукту скоротився на $\frac{2}{3}$, третього продукту – на $\frac{1}{3}$, невикористаний залишок третього ресурсу збільшиться на $\frac{1}{3}$. Простежимо за перерозподілом ресурсів.

За рахунок скорочення випуску $П_1$ і $П_3$ вивільняться ресурси у кількості:

$$\text{1-й ресурс: } 1 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 1;$$

$$\text{2-й ресурс: } 6 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} = 5\frac{1}{3};$$

$$\text{3-й ресурс: } 4 \cdot \frac{2}{3} + 10 \cdot \frac{1}{3} = 6.$$

Cj	Базис	B	60	70	120	130	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
60	x_1	10	1	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0
120	x_3	6	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0
0	x_7	26	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{22}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
$\Delta_j=z_j - c_j$		1320	0	10	0	20	20	10	0
			y_4	y_5	y_6	y_7	y_1	y_2	y_3

На один виріб $П_2$ необхідно 1, 5 і 6 одиниць ресурсів відповідно 1, 2 та 3 виду. Таким чином, ресурси, що було вивільнено, достатньо як раз на один виріб $П_2$. При цьому прибуток зміниться таким чином:

- з-за скорочення випуску $П_1$ загальна сума прибутку зменшиться на:

$$60 \cdot 2/3 = 40,$$

- з-за скорочення випуску $П_3$ загальна сума прибутку зменшиться на:

$$120 \cdot 1/3 = 40,$$

- випуск одиниці продукту $П_2$ відповідає тому, що загальна сума прибутку збільшиться на 70 грн.

Загальна зміна прибутку складе: – 40 – 40 + 70 = -10 грн., що співпадає зі значенням відповідної додаткової двоїстої змінної y_5. Аналогічні висновки можна виконати і для інших видів продукції.

Четверта властивість оптимальних оцінок як заходи впливу обмежень на цільову функцію вказує напрям заходів щодо «розшивки вузьких місць», які забезпечують отримання найбільшого економічного ефекту, а також доцільні зміни в структурі випуску продукції з позицій загального оптимуму.

Так, для отримання доходу, більшого 1320 грн., необхідно збільшити обсяги дефіцитних ресурсів. Так, слід домогтися збільшення кількості ресурсу «токарі», так як в розрахунку на додаткову одиницю цього ресурсу буде отримано додатковий прибуток у розмірі 20 грн. (y_1 = 20), що вдвічі перевищує величину додаткового доходу у розрахунку на додаткову одиницю ресурсу «слюсарі» (y_2 = 10). Таким чином, в даному прикладі ресурс «токарі» є більш цінним ресурсом, ніж «слюсарі».

Слід мати на увазі, що при збільшенні дефіцитного ресурсу на одиницю, приріст цільової функції досягається за рахунок перерозподілу всіх ресурсів за видами продукції, що веде до кількісних змін в оптимальному плані. Ці зміни можуть бути визначені безпосередньо з останньої симплекс таблиці, яка містить оптимальний план.

Так, коефіцієнти, що містяться в стовпцях додаткових змінних (x_5, x_6, x_7) табл. 3 являють собою двоїсті оцінки відповідних базисних змінних, тобто вони показують зміну базисних змінних при збільшенні відповідного ресурсу на одиницю. Розглянемо вплив трудового ресурсу, якому в табл. 3 відповідає x_5.

Так, при збільшенні ресурсу «токарі» на одиницу, випуск продукції $П_1$ (змінна x_1) збільшиться на 5/3, продукту $П_3$ (змінна x_3) – зменшиться на 2/3, резерв по ресурсу «фрезерувальники» (змінна x_7) зменшиться на 22/3 люд.-год. Отже, при збільшенні ресурсу «токарі» виявляється більш вигідним зменшити випуск продукції $П_3$, а вивільнені ресурси і додану одиницю ресурсу використовувати для додаткового випуску продукції $П_1$. При цьому за рахунок зменшення випуску продукції $П_3$ дохід зменшиться на величину 120 х 2/3 = 80 грн., а за рахунок збільшення випуску $П_1$ збільшиться на 60 х 5/3 = 100 грн. Загальний приріст доходу складе при цьому 100 – 80 = 20 грн., що відповідає оптимальній оцінці ресурсу «токарі» (y_1 = 20). Аналогічні міркування можна провести і для інших ресурсів.

Таким чином, оцінка ресурсу показує, наскільки зміниться величина критерію оптимальності при зміні кількості даного ресурсу на одиницю. Збільшення ресурсу збільшує значення цільової функції (прибутку), що максимізується, зменшення – зменшує (для недефіцитного ресурсу – не змінює).

Аналіз додаткових умов

Припустимо, додатково до продукції, випуск якої спочатку передбачався, з'явилася можливість випускати продукцію $П_5$ з такими характеристиками:

Трудові ресурси	$П_5$
Токарі	1
Слюсарі	8
Фрезерувальники	6
Прибуток за 1 од.	70

При цьому загальна кількість наявних ресурсів не змінилася. Чи доцільно включати випуск продукції $П_5$ до оптимального плану, тобто чи забезпечить випуск продукції $П_5$ збільшення цільової функції, отриманої в табл. 3?

Для відповіді на поставлене питання складемо обмеження двоїстої задачі по додатковій продукції:

$$1y_1 + 8y_2 + 6y_3 \geq 70. \tag{11}$$

Підставимо у це обмеження відомі значення оптимальних оцінок, отримаємо:

$$1 \cdot 20 + 8 \cdot 10 + 6 \cdot 0 = 100 > 70.$$

Отже, включення продукції $П_5$ до оптимального плану є недоцільним, оскільки це призвело б до збитку на 30 грн. з 1 од. продукції та зменшило б максимальне значення цільової функції.

Обмеження (11) можна також використовувати для визначення об'єктивно обґрунтованої ціни продукції, що підлягає випуску. Якщо потрібно забезпечити випуск продукції $П_5$ із заданими нормами витрат трудових ресурсів, то для того, щоб ця продукція була рентабельною і не знижувала досягнутого показника ефективності (прибутку), її питомий прибуток має бути не меншим ніж100 грн.

Післяоптимізаційний аналіз

У реальному виробничому процесі обсяги ресурсів можуть не відповідати плановим, тому в цьому випадку логічно досліджувати варіації запасів ресурсів, щоб оптимальний план залишився без змін. Така задача називається *проблемою стійкості оптимального плану*.

Аналіз чутливості виконується після отримання оптимального рішення задачі лінійного програмування. Його мета – визначити, чи приведе зміна коефіцієнтів вихідної задачі до зміни поточного оптимального рішення, і якщо так, то як знайти нове оптимальне рішення (якщо воно існує). Досліджується чутливість рішення при зміні коефіцієнтів цільової функції (прибуток, випуск, витрати і т.д.); обмежень за ресурсами (трудовими, сировинними, фінансовими та ін.); коефіцієнтів при змінних в обмеженнях задачі (норми витрати ресурсів); граничних умов (планових завдань на випуск).

Дамо ресурсу «Токарі» прирощення у розмірі Δb_1. Тоді відповідне обмеження в моделі прийме вигляд: $1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 \le 16 + \Delta b_1$.

Розв’язавши задачу отримаємо симплекс табл. 4.

Порівнявши табл. 4 з табл. 3, бачимо, що змінився тільки підсумковий стовпець, його елементи дорівнюють сумі значень базисних змінних з помноженням відповідного елемента стовпця додаткової змінної x_5 на прирощення ресурсу Δb_1.

Таблиця 4 – Оптимальний план випуску продукції з урахуванням приросту ресурсу «Токарі»

Cj	**Базис**	**B**	60	70	120	130	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
60	x_1	$10 + \frac{5}{3}\Delta b_1$	1	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0
120	x_3	$6 - \frac{2}{3}\Delta b_1$	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0
0	x_7	$26 - \frac{22}{3}\Delta b_1$	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{22}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
$\Delta_j = z_j - c_j$		$1320 + 20\cdot\Delta b_1$	0	10	0	20	20	10	0
			y_4	y_5	y_6	y_7	y_1	y_2	y_3

Щоб рішення, представлене в табл. 4, залишалося опорним, необхідно виконання умов невід'ємності значень базисних змінних:

$$\begin{cases} 10 + \frac{5}{3}\Delta b_1 \ge 0 \\ 6 - \frac{2}{3}\Delta b_1 \ge 0 \\ 26 - \frac{22}{3}\Delta b_1 \ge 0. \end{cases}$$

Звідси знаходимо межі зміни Δb_1:

$$\begin{cases} \Delta b_1 \geq \dfrac{-10}{\frac{5}{3}} = -6; \\ \Delta b_1 \leq \dfrac{-6}{-\frac{2}{3}} = 9; \\ \Delta b_1 \leq \dfrac{-26}{-\frac{22}{3}} = 3\dfrac{6}{11}. \end{cases}$$

Тоді для збереження структури оптимального плану зміна приросту ресурсу «Токарі» може перебувати в межах $-6 \leq \Delta b_1 \leq 3\dfrac{6}{11}$.

Перехід від Δb_1 до b_1 здійснюється за залежностями:

$$\min\, b_1 = b_1 + \min\, \Delta b_1 = 16 - 6 = 10,$$

$$\max b_1 = b_1 + \max \Delta b_1 = 16 + 3\frac{6}{11} = 19\frac{6}{11},$$

$$\min\, b_1 \leq b_1 \leq \max b_1.$$

Таким чином, якщо зміна запасу трудових ресурсів буде здійснюватися у межах $10 \leq b_1 \leq 19\dfrac{6}{11}$, то структура базису оптимального плану (номенклатура продукції) збережеться, і величина оптимальних оцінок залишиться без зміни. При цьому кількість продукції буде іншою. Підставивши конкретні значення збільшення ресурсу в наступні співвідношення:

$$x_3 = 10 + \frac{5}{3}\Delta b_1;$$

$$x_6 = 6 - \frac{2}{3}\Delta b_1;$$

$$x_7 = 26 - \frac{22}{3}\Delta b_1,$$

отримаємо нові значення базисних змінних. При цьому цільова функція досягає розміру $F = 1320 + 20\Delta b_1$.

Наприклад, якщо відвернути шість одиниць ресурсу «Токарі» на інші роботи, то оптимальним планом з урахуванням $\Delta b_1 = -6$ будуть наступні показники:

$$x^*_1 = 10 + 5/3\cdot(-6) = 10 - 9{,}9999996 = 0{,}0000004 = 0;$$

$$x^*_3 = 6 - 2/3\cdot(-6) = 6 + 3{,}99999 = 9{,}4;$$

$$F^* = 1320 + 20\cdot(-6) = 1200.$$

Таким чином, зменшення обсягу ресурсу «Токарі» на 6 люд.-год., або на 37,5%, веде до скорочення цільової функції на 9,09%.

Якщо ж зміна ресурсу «Токарі» вийде за встановлені межі, то умова допустимості порушиться, і рішення перестане бути оптимальним. Новий варіант оптимального рішення тоді можна знайти за допомогою двоїстого симплекс-методу.

Аналогічно можна отримати межі зміни ресурсу «Слюсарі»: $-36 \leq \Delta b_2 \leq 60$.

Структура оптимального плану збережеться в межах $64 \le b_2 \le 160$ (табл. 5).

Таблиця 5 – Оптимальний план випуску продукції з урахуванням приросту ресурсу «Слюсарі»

Cj	Базис	B	60	70	120	130	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
60	x_1	$10 - 1/6 \cdot \Delta b_2$	1	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0
120	x_3	$6 + 1/6 \cdot \Delta b_2$	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0
0	x_7	$26 + 1/3 \cdot \Delta b_2$	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{22}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
$\Delta_j = z_j - c_j$		$1320 + 10 \cdot \Delta b_2$	0	10	0	20	20	10	0
			y_4	y_5	y_6	y_7	y_1	y_2	y_3

На базі цих залежностей можна отримати відповідь на питання: «Скільки необхідно випустити продукції для забезпечення максимального прибутку при збільшенні запасу ресурсу «Слюсарі» на 10 або 15 одиниць?».

Припустимо, що відхилення в запасі ресурсу «Фрезерувальники» складе Δb_3, тоді в математичній моделі обмеження для сировини має вигляд:

$$6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 110 + \Delta b_3.$$

Після знаходження рішення з урахуванням Δb_3 отримаємо симплекс-таблицю.

Таблиця 6 – Оптимальний план випуску продукції з урахуванням приросту ресурсу «Фрезерувальники»

Cj	Базис	B	60	70	120	130	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
60	x_1	10	1	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0
120	x_3	6	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0
0	x_7	$26 + 1 \cdot \Delta b_3$	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{22}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
$\Delta_j = z_j - c_j$		$1320 + 0 \cdot \Delta b_3$	0	10	0	20	20	10	0
			y_4	y_5	y_6	y_7	y_1	y_2	y_3

Рішення буде залишатися оптимальним за умови:

$$26 + 1 \cdot \Delta b_3 \ge 0.$$

Тому $-26 \le \Delta b_3 \le \infty$;

$$\min b_3 = b_3 + \min \Delta b_3 = 110 - 26 = 84,$$

$$\max b_3 = b_3 + \max \Delta b_3 = 110 + \infty = \infty,$$

$$\min b_3 \le b_3 \le \max b_3.$$

Остаточно отримаємо $84 \le b_3 < \infty$. Таким чином, при зміні ресурсу «Фрезерувальники» в цих межах зберігається оптимальний план. Єдина змінювана величина – додаткова змінна по цьому ресурсу, тобто резерв даного ресурсу.

Аналіз показує, що двоїсті оцінки зберігають своє значення в тому ж самому інтервалі зміни ресурсів, при якому зберігається структура оптимального плану. Отже, в нашому випадку для ресурсу «Токарі» двоїсті оцінки справедливі при зміні ресурсу в інтервалі $10 \le b_1 \le 19\frac{6}{11}$.

Аналогічно аналізу впливу ресурсів можна також встановити ступінь впливу коефіцієнтів c_j у цільовій функції, а також норм витрати трудових ресурсів a_{ij}.

У цілому, найбільш результативною процедурою проведення аналізу завдань на етапах як попереднього планування, так і оперативного управління є пошук і вибір найбільш прийнятних рішень у кожній з ситуацій, що складаються.

Питання для самоконтролю:

1. У чому різниця між прямим та двоїстим рішенням задачі?
2. У чому різниця між симметричним і несиметричним представленням задачі?
3. Охарактеризуйте основні теореми двоїстостію

Рекомендована література: основна: [1, 2, 4, 5, 6, 9]; додаткова: [3, 7, 8, 10-21].

ТЕМА 5. ЦІЛОЧИСЕЛЬНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

1. *Постановка задачі*
2. *Побудова початкового опорного плану*
3. *Розв'язання транспортної задачі методом потенціалів*
4. *Модель формування штатного розкладу фірми. Задача про призначення*

1 Постановка транспортної задачі

Транспортні моделі (задачі) – спеціальний клас задач лінійного програмування, які часто описують переміщення певного продукту. Призначення транспортної задачі – визначення обсягів перевезень з пунктів виробництва або зберігання до пунктів споживання з мінімальними сумарними витратами. У транспортній моделі передбачається, що вартість перевезення прямо пропорційна обсягу перевезеного продукту.

У загальному випадку транспортну модель можна застосовувати для опису ситуацій, пов'язаних з управлінням запасами, управлінням рухом капіталів, складанням розкладів, призначенням персоналу і т.д.

Класична модель транспортної задачі формулюється наступним чином: є m відправників A_1, A_2, ..., A_m (постачальники), у яких зосереджено відповідно a_1, a_2, ..., a_m одиниць однорідної продукції. Цю продукцію слід доставити в n пунктів споживання B_1, B_2, ..., B_n (споживачі), попит яких відповідно дорівнює b_1, b_2, ..., b_n одиниць.

Відома вартість перевезення одиниці вантажу c_{ij} від кожного i-го постачальника j-му споживачеві $(i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n})$. Потрібно скласти план перевезень, тобто вказати такі значення x_{ij} $(i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n})$ - кількість вантажу, що перевозиться від постачальника A_i до споживача B_j, при яких загальна вартість перевезень буде мінімальною.

Передбачається, що споживачам все одно, від яких пунктів виробництва (постачальників) постачається продукція, аби її обсяг був відповідним.

Математичне формулювання поставленого завдання має наступний вигляд.

Цільова функція – загальна вартість всіх перевезень мінімальна:

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (1)$$

При <u>обмеженнях:</u>

- всі запаси мають бути вивезеними:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1,m}); \qquad (2)$$

- всі потреби мають бути задоволеними:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1,n}); \qquad (3)$$

При <u>граничних умовах:</u>

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}) \qquad (4)$$

У моделі (1)-(4) обумовлюється, що

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \qquad (5)$$

тобто сума пропозиції і попиту збігається. Така задача називається <u>закритою</u> або <u>збалансованою</u>.

В іншому випадку мають справу з <u>відкритою</u> задачею. При цьому для розв'язання транспортної задачі її зводять до закритого типу наступним чином:

1) якщо пропозиція перевищує попит $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводиться «фіктивний споживач» $B_ф$, якому приписується фіктивна заявка:

$$b_ф = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Вартість перевезень від усіх постачальників до фіктивного споживача приймається рівною нулю, тобто $c_{iф} = 0 \quad (i = \overline{1,m})$.

Отримане в результаті рішення задачі значення x_{ij} буде означати, що у постачальника A_i залишилося не затребуваним x_{ij} одиниць продукції.

2) якщо пропозиція менше попиту $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводиться «фіктивний постачальник» $A_ф$, якому приписується фіктивний запас:

$$a_ф = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Вартість перевезень від фіктивного постачальника до всіх споживачів приймається рівною нулю, тобто $c_{фj} = 0 \quad (j = \overline{1,n})$. Отримане у результаті рішення задачі значення покаже, що заявка споживача B_j залишається не задоволеною на x_{ij} одиниць продукції.

До <u>методів розв'язання транспортної задачі</u> відносяться:

а) спеціальні методи розв'язання транспортної задачі;

б) симплексний метод.

Транспортна задача є задачею лінійного програмування, яку можна розв'язати симплексним методом, однак при цьому виходять симплекс-таблиці великих розмірів. Тому для реалізації даного завдання ручним способом (при невеликій кількості постачальників і споживачів) застосовуються спеціальні методи.

Як і при розв'язанні задачі симплексним методом, рішення транспортної задачі спеціальними методами складається із знаходження опорного і оптимального рішення. Для знаходження опорного рішення найбільш часто використовуються методи: (діагональний) північно-західного кута і мінімального елемента. Для знаходження оптимального рішення розроблено розподільний метод, модифікований симплекс-метод (метод МОДІ), метод потенціалів, угорський метод і ряд ін.

2 Побудова початкового опорного плану

2.1 Метод північно-західного кута

Розглянемо алгоритм побудови початкового опорного плану транспортної задачі методом *північно-західного кута*:

1. Перевірка транспортної задачі на закритість. Якщо вона відкрита, то приводимо її до задачі закритого типу.

2. Першою заповнюємо верхню ліву клітинку. Заповнення клітинки A_iB_j таблиці здійснюється за правилами:

а) якщо $a_i<b_j$, тобто запаси менше потреб, то в цю клітину записуємо весь обсяг запасу продукції a_i, перераховуємо потребу споживача B_j, постачальника A_i виключаємо з розгляду (наприклад, проставив у всіх клітинках рядка, крім заповненої, прочерки) і переходимо до заповнення наступної клітинки $A_{i+1}B_j$;

б) якщо $a_i>b_j$, тобто запаси більше потреб, то у цю клітинку записуємо весь обсяг потреби у продукції b_j, перераховуємо запаси постачальника A_i, виключаємо з розгляду споживача B_j (ставимо у всіх клітинках стовпчика, крім заповненої, прочерки) і переходимо до заповнення наступної клітинки A_iB_{j+1};

в) якщо $a_i=b_j$, тобто запаси дорівнюють потребам, то у цю клітинку записуємо весь обсяг потреб або запасів, виключаємо із розгляду постачальника A_i та споживача B_j (ставимо у всіх клітинках стовпчика та рядка, крім заповнених, прочерки) и переходимо до заповнення наступної клітинки $A_{i+1}B_{j+1}$.

3. Серед незаповнених клітинок (без обсягу продукції і прочерків) знову вибираємо верхню ліву клітинку таблиці і заповнюємо її за правилами, описаним у п. 2. Так продовжуємо до тих пір, поки не заповнимо всі клітинки таблиці.

4. З отриманої таблиці виписуємо початковий опорний план транспортної задачі і обчислюємо значення цільової функції при цьому плані.

<u>Приклад 1.</u> Методом північно-західного кута (діагональним) знайти початковий опорний план перевезення однорідної продукції від постачальників A_1, A_2, A_3 із запасами $a_1=200$, $a_2=150$, $a_3=175$ до споживачів B_1, B_2, B_3, B_4 із потребами в цій продукції $b_1=140$, $b_2=125$, $b_3=90$, $b_4=170$, якщо відома вартість перевезень одиниці продукції від постачальників до споживачів:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 2 \\ 4 & 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

<u>Рішення.</u>

Перевіримо, чи являється транспортна задача закритою. Вичислимо:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 200 + 150 + 175 = 525; \qquad \sum_{j=1}^{4} b_j = 140 + 125 + 90 + 170 = 525.$$

Так як $\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j$, то задача є закритого типу. Отримано таку таблицю:

Постача-льники	Споживачі / Потреби / Запаси	B_1	B_2	B_3	B_4
		140	*125*	*90*	*170*
A_1	*200*	2 **140**	8 **60**	6 –	1 –
A_2	*150*	3 –	7 **65**	5 **85**	2 –
A_3	*175*	4 –	9 –	3 **5**	6 **170**

Начальний опорний план має вид:

$$X_{опорн.} = \begin{pmatrix} 140 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 65 & 85 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 170 \end{pmatrix}.$$

Щоб дізнатися, якою буде вартість перевезення продукції за таким планом, потрібно перемножити вартість перевезення одиниці продукції на обсяг, який перевозиться, для всіх заповнених (де немає прочерків) клітинок таблиці і знайти їх суму, а саме: Z = 2·140+8·60+7·65+5·85+3·5+6·170=280+480+455+425+15+1020=2675.

2.2 Метод найменшої вартості

Правила знаходження початкового опорного плану транспортної задачі методом найменшої вартості відрізняються від правил знаходження такого плану діагональним методом тільки послідовністю вибору клітинки, яку потрібно заповнювати. Згідно з методом найменшої вартості, першою вибирається клітинка з найменшою вартістю перевезення одиниці вантажу від постачальника до споживача. Якщо таких клітинок кілька, то вибираємо ту, для якої кількість продукції, яку можна перевезти, найбільша.

Алгоритм методу найменшої вартості побудови початкового опорного плану транспортної задачі розглянемо на попередньому прикладі 1.

Отримана наступна підсумкова таблиця:

Постача-льники	Споживачі / Потреби / Запаси	B_1	B_2	B_3	B_4
		140	*125*	*90*	*170*
A_1	*200*	2 **30**	8 –	6 –	1 **170**
A_2	*150*	3 **110**	7 **40**	5 –	2 –
A_3	*175*	4 –	9 **85**	3 **90**	6 –

Начальний опорний план має вид:

$$x_{опорн.} = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 170 \\ 110 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 85 & 90 & 0 \end{pmatrix}$$

Сумарна вартість перевезень всієї продукції при цьому складе:

$$Z = 2\cdot30+1\cdot170+3\cdot110+7\cdot40+9\cdot85+3\cdot90=60+170+330+280+765+270=1875.$$

Після побудови начального опорного плану кожним з методів у таблиці має бути заповнено (m+n-1) клітинок, де m – кількість постачальників, n – кількість споживачів. Заповнені клітинки називаються базисними, а незаповнені – вільними (небазисними).

Для того щоб з'ясувати, який метод знаходження початкового опорного плану транспортної задачі є найбільш ефективним, порівняємо загальну вартість перевезення за опорними планами, знайденими кожним з методів. Бачимо, що найменша вартість отримана за допомогою методу найменшої вартості (Z=1875). Значно більшу вартість перевезень (Z=2675) всієї продукції дає діагональний метод побудови начального опорного плану. Тобто, найбільш ефективним методом побудови начального опорного плану транспортної задачі є метод найменшої вартості.

3 Рішення транспортної задачі методом потенціалів

Початковий опорний план перевіряють на оптимальність за допомогою потенціалів. Відповідно кожному постачальнику A_i ставимо потенціал u_i, а кожному споживачеві B_j – v_j.

Критерій оптимальності опорного плану транспортної задачі: якщо для деякого опорного плану (x_{ij}) транспортної задачі існують такі числа-потенціали u_i і v_j, що для базисних клітинок виконуються рівності $u_i+v_j=c_{ij}$, а для небазисних - $u_i+v_j \le c_{ij}$ для всіх $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$, то такий опорний план є оптимальним.

Потенціали опорного плану визначаються з системи $u_i+v_j=c_{ij}$, які записують для всіх заповнених клітинок таблиці транспортної задачі. За допомогою розрахованих потенціалів перевіряють умову оптимальності $u_i+v_j \le c_{ij}$ для незаповнених клітинок таблиці. Якщо хоча б для однієї небазисної клітинки ця умова не виконується, тобто $u_i+v_j > c_{ij}$, то поточний план не є оптимальним і переходимо до нового опорного плану.

Перехід від одного опорного плану до іншого виконують заповненням небазисної клітинки, для якої порушено умову оптимальності. Якщо таких клітинок кілька, то для заповнення вибирають таку, яка має найбільше порушення, тобто $\max\{\Delta_{ij}=(u_i+v_j)-c_{ij}\}$. Для обраної порожньої клітинки будують цикл перерахунку.

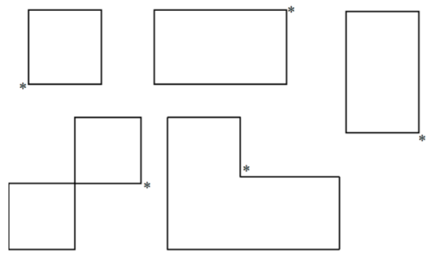
Циклом в транспортній задачі називають замкнуту ламану лінію, сторони якої проходять уздовж рядків і стовпчиків таблиці, і одна з вершин якої знаходиться в небазисній клітинці, для якої порушено умову оптимальності, а всі інші вершини – базисні клітинки.

Перерозподіл продукції в межах циклу здійснюють за такими правилами:

а) кожній вершині циклу приписують певний знак, причому незаповненій клітинці знак "+", а всім іншим почергово "–" і "+";

б) у пусту клітинку заносять менше з чисел, що стоять у клітинках зі знаком "–". Одночасно це число прибавляють до відповідних чисел, що стоять у клітинках зі знаком "+" і віднімають від клітинок, що розміщені у клітинках зі знаком "–".

Отже, клітинка, яка була вільною, стала заповненою, а відповідна клітинка, де знаходилося найменше число (у вершині з "-") стала незаповненою. У результаті такого перерозподілу продукції ми отримаємо новий опорний план транспортної задачі, який знову перевіряємо на оптимальність. Якщо рішення оптимальне, то обчислюємо мінімальне значення цільової функції (мінімальну вартість перевезення всієї продукції), а якщо неоптимальне, то знову будуємо цикл перерахунку і за допомогою зсуву по циклу переходимо до нового опорного плану. Процес повторюють до тих пір, поки не буде отримано оптимальне рішення транспортної задачі. Значення базисних клітинок, які не брали участі в циклі перерахунку, в новій таблиці залишаються без змін. Можуть зустрітися такі види циклів:



Приклад 2. Найти оптимальний план перевезень однорідного вантажу від постачальників A_1, A_2, A_3, A_4 із запасами a_1=90, a_2=85, a_3=125, a_4=I05 до споживачів B_1, B_2, B_3 з потребами у цьому вантажі b_1=110, b_2=155, b_3=140, який забезпечить мінімальну вартість перевезень вантажу, якщо відома вартість перевезень одиниці вантажу від постачальників до споживачів:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 9 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, чи є транспортна задача закритою. Обрахуємо:

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 90 + 85 + 125 + 105 = 405; \qquad \sum_{j=1}^{3} b_j = 110 + 155 + 140 = 405.$$

Так як $\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j$, то транспортна задача закритого типу.

Побудуємо початковий опорний план транспортної задачі діагональним методом:

Постача-льники	Споживачі / Потреби / Запаси	B_1	B_2	B_3	u_i
		110	*155*	*140*	
A_1	*90*	3 – **90**	6 (1) –	2 (6) + * –	u_1=0
A_2	*85*	1 + **20**	5 – **65**	7 –	u_2=–2
A_3	*125*	9 –	7 + **90**	8 – **35**	u_3=0
A_4	*105*	4 –	3 (1) –	5 **105**	u_4=–3
v_j		v_1=3	v_2=7	v_3=8	

$$x_{опорн.} = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 0 \\ 20 & 65 & 0 \\ 0 & 90 & 35 \\ 0 & 0 & 105 \end{pmatrix}.$$

Вартість перевезень за даним опорним планом буде складати: $Z_1=3\cdot90+1\cdot20+5\cdot65+7\cdot90+8\cdot35+5\cdot105=270+20+325+630+280+525=2050$ гр. од.

Перевіримо, чи є знайдений опорний план оптимальним. Для базисних клітинок мають виконуватися рівності $u_i+v_j=c_{ij}$:

$$\begin{cases} v_1+u_1=3, \\ v_1+u_2=1, \\ v_2+u_2=5, \\ v_2+u_3=7, \\ v_3+u_3=8, \\ v_3+u_4=5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1=0, \\ v_1=3-u_1=3-0=3, \\ u_2=1-v_1=1-3=-2, \\ v_2=5-u_2=5-(-2)=7, \\ u_3=7-v_2=7-7=0, \\ v_3=8-u_3=8-0=8, \\ u_4=5-v_3=5-8=-3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1=0, \\ v_1=3, \\ u_2-2, \\ v_2=7, \\ u_3=0, \\ v_3=8, \\ u_4-3. \end{cases}$$

Ми маємо систему з 6 рівностей з 7 невідомими. Ця система має багато рішень. Візьмемо однин з невідомих, що дорівнює любому числу, наприклад, $u_1=0$, і знайдемо всі інші потенціали. Знайдені значення потенціалів запишемо до таблиці. Тепер виповнимо перевірку другої умови критерію оптимальності транспортної задачі, а саме: чи виконується для небазисних (незаповнених) кліток нерівності $u_i+v_j \le c_{ij}$.

Для клітинки (A_1B_2): $v_2+u_1\le6$; $7+0>6$, отже нерівність не виконується;

Для клітинки (A_1B_3): $v_3+u_1\le2$; $8+0>2$, отже нерівність не виконується;

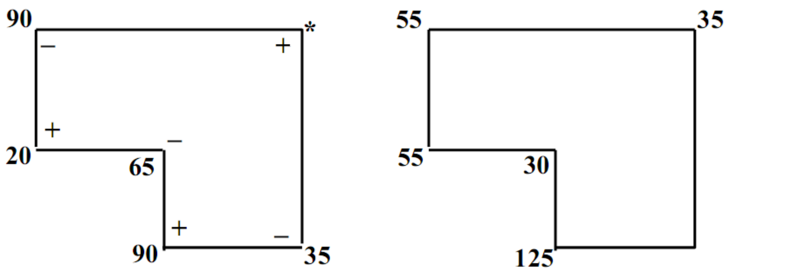
Для клітинки (A_2B_3): $v_3+u_2\le7$; $8+(-2)\le7$, отже нерівність виконується;

Для клітинки (A_3B_1): $v_1+u_3\le9$; $3+0\le9$, отже нерівність виконується;

Для клітинки (A_4B_1): $v_1+u_4\le4$; $3+(-3)\le4$, отже нерівність виконується;

Для клітинки (A_4B_2): $v_2+u_4\le3$; $7+(-3)>3$, отже нерівність не виконується.

Маємо три клітинки (A_1B_2), (A_1B_3) та (A_4B_2), для яких не виконується нерівність $u_i+v_j\le c_{ij}$, а це означає, що опорний план не є оптимальним. У клітинках (A_1B_2), (A_1B_3) та (A_4B_2) у правому верхньому куті клітинки записуємо у скобках різницю між сумою потенціалів і вартістю перевезення одиниці вантажу окреслених клітинок та обираємо клітинку, для якої ця різниця є найбільшою, так обираємо клітинку (A_1B_3) і у ній ставимо зірочку (*). Для цієї клітинки будуємо цикл перерахунку на величину θ = min (90; 65; 35) = 35, тобто до чисел, які знаходяться у позитивних вершинах, додаємо 35, а від чисел, що знаходяться у негативних вершинах, віднімаємо 35:



а) до перерахунку б) після перерахунку

Всі інші клітинки залишаємо без змін.

Постача-льники	Споживачі / Потреби / Запаси	B_1	B_2	B_3	u_i
		110	*155*	*140*	
A_1	*90*	3 − **55**	6 *(1)* *	2 + **35**	u_1=0
A_2	*85*	1 + **55**	5 − **30**	7	u_2=–2
A_3	*125*	9	7 **125**	8	u_3=0
A_4	*105*	4 *(2)* *	3 (7) + *	5 − **105**	u_4=3
v_j		v_1=3	v_2=7	v_3=2	

Отримано новий опорний план:

$$x_{опорн.} = \begin{pmatrix} 55 & 0 & 35 \\ 55 & 30 & 0 \\ 0 & 125 & 35 \\ 0 & 0 & 105 \end{pmatrix}$$

Вартість перевезень складе при даному плані:

$$Z_2 = 3\cdot55+2\cdot35+1\cdot55+5\cdot30+7\cdot125+5\cdot105=1840.$$

Перевіряємо план на оптимальність: знову записуємо систему рівнянь, знаходимо все потенціали, заносимо їх значення до таблиці і дивимося, чи виконуються нерівності $u_i+v_j \le c_{ij}$ для небазисних клітинок:

$v_2+u_1 = 7 + 0 = 7 \quad >6$ нерівність не виконується;
$v_3+u_2 = 2 – 2 = 0 \quad <7;$
$v_1+u_3 = 3 + 0 = 3 \quad <9$
$v_1+u_4 = 3 + 3 = 6 \quad >4$ нерівність не виконується;
$v_2+u_4 = 7 + 3 = 10 \quad >3$ нерівність не виконується.

Таким чином, є ще три клітинки, а саме (A_1B_2), (A_4B_1) та (A_4B_2), для яких ці нерівності не виконуються. Будуємо цикл перерахунку на розмір Θ = min (55; 30; 105) = 30 для клітинок (A_4B_2), так як різниця між сумою потенціалів та вартістю перевезень вантажів для неї є найбільшою (дорівнює 7). Переходимо до наступної таблиці.

Новий опорний план:

$$x_{опорн.} = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 65 \\ 85 & 0 & 0 \\ 0 & 125 & 0 \\ 0 & 30 & 75 \end{pmatrix}.$$

Вартість перевезень становить при даному плані:

$$Z_3 = 3\cdot25+2\cdot65+1\cdot85+7\cdot125+3\cdot30+5\cdot75=1630.$$

Постачальники	Споживачі / Потреби / Запаси	B_1	B_2	B_3	u_i
		110	*155*	*140*	
A_1	*90*	3 + **25**	6 *	2 – **65**	$u_1=0$
A_2	*85*	1 **85**	5	7	$u_2=-2$
A_3	*125*	9 *(1)* *	7 **125**	8 *(1)*	$u_3=7$
A_4	*105*	4 *(2)* – *	3 **30**	5 + **75**	$u_4=3$
v_j		$v_1=3$	$v_2=0$	$v_3=2$	

Ще є небазисні клітинки (A_3B_1), (A_3B_3) і (A_4B_1), для яких не виконуються нерівності $u_i+v_j \le c_{ij}$. Тому будуємо цикл перерахунку на величину Θ = min (25; 75) = 25 для клітинки (A_4B_1), так як різниця між сумою потенціалів та вартістю перевезень одиниці вантажу для неї дорівнює 2 (найбільша). Отримаємо таблицю:

Постачальники	Споживачі / Потреби / Запаси	B_1	B_2	B_3	u_i
		110	*155*	*140*	
A_1	*90*	3	6	2 **90**	$u_1=0$
A_2	*85*	1 **85**	5	7	$u_2=0$
A_3	*125*	9	7 – **125**	8 +	$u_3=7$
A_4	*105*	4 **25**	3 + **30**	5 – **50**	$u_4=3$
v_j		$v_1=1$	$v_2=0$	$v_3=2$	

Новий опорний план:

$$x_{опорн.} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 85 & 0 & 0 \\ 0 & 125 & 0 \\ 25 & 30 & 50 \end{pmatrix}.$$

Загальна вартість перевезень складе:

$$Z_4=2\cdot 90+1\cdot 85+7\cdot 125+4\cdot 25+3\cdot 30+5\cdot 50=1580.$$

Так як у клітинці (A_3B_3) ще порушується друга умова критерію оптимальності транспортної задачі, а саме $u_3+v_3>c_{33}$ (7+2>9), то для цієї клітинки робимо цикл перерахунку на величину Θ = min (125; 50) = 50. У результаті отримаємо:

Постача-льники	Споживачі	B_1	B_2	B_3	u_i
	Потреби / Запаси	*110*	*155*	*140*	
A_1	*90*	3	6	2 **90**	$u_1=0$
A_2	*85*	1 **85**	5	7	$u_2=-2$
A_3	*125*	9	7 **75**	8 **50**	$u_3=6$
A_4	*105*	4 **25**	3 **80**	5	$u_4=2$
v_j		$v_1=2$	$v_2=1$	$v_3=2$	

Знову обраховуємо всі потенціали та записуємо їх значення до таблиці. Для всіх небазисних клітинок останньої таблиці виконується нерівність $u_i+v_j \le c_{ij}$, а це означає, що отримано оптимальний план перевезення вантажу:

$$x_{опт.} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 85 & 0 & 0 \\ 0 & 75 & 50 \\ 25 & 80 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мінімальна вартість перевезення вантажу складе:

$$Z_{min}=2\cdot 90+1\cdot 85+7\cdot 75+8\cdot 50+4\cdot 25+2\cdot 80=1530 \text{ гр. од.}$$

4 Модель формування штатного розкладу фірми. Задача про призначення

4.1 Модель формування штатного розкладу фірми

Припустимо, що деяка фірма здійснює процедуру формування штатного розкладу. позначимо: j – індекс посад, $j=\overline{1,m}$, i – індекс групи кандидатів на займані посади, $i=\overline{1,n}$. Зараз фірма має n груп різних посад, у кожній з яких є b_j вільних. Претенденти на вакансії проходять тестування, за результатами якого їх ділять на n груп по a_i кандидатів у кожній. Для кожного кандидата з i-тої групи необхідні певні витрати c_{ij} на навчання для призначення його на j-ту посаду. Тут можливі випадки, коли кандидат повністю відповідає посаді, якщо $c_{ij}=0$; кандидат зовсім не може займати посаду, якщо $c_{ij} = \infty$.

Ставиться завдання про оптимальний розподіл кандидатів на відповідні посади за умови мінімальних фінансових витрат на їх навчання.

Для знаходження оптимальної стратегії дій припустимо, що число претендентів відповідає числу запропонованих вакансій. У цьому випадку отримуємо транспортну задачу закритого типу. В іншому випадку маємо справу з транспортною задачею відкритого типу. Тут постачальником виступає група претендентів на вакансії, а в ролі споживача виступають групи вакантних посад. Витрати на навчання кандидатам c_{ij} будуть служити тарифами на перевезення.

Невідомими величинами задачі будуть x_{ij} – кількість кандидатів i-тої групи, які призначаються на j-ту посаду. З урахуванням введених позначень, економіко-математична модель задачі буде мати вигляд:

Знайти таке рішення x_{ij}, яке забезпечить: $Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\cdot x_{ij} \to min$, при виконанні умов:

1) всі кандидати на посади мають бути працевлаштованими:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, \; i = \overline{1,n};$$

2) всі вакантні посади мають бути заповненими:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \; j = \overline{1,m};$$

3) рівновага попиту та пропозиції:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j \,.$$

4.2 Задача про призначення

Розглянута задача є типовою задачею економіки праці, тому з її допомогою можна отримати відповіді на питання: «Як розподілити робітників по верстатах, щоб спільне вироблення було найбільшим або витрати на заробітну плату найменшими?», «Як призначити людей на різні посади?», «Як розподілити автомашини на маршрути / водіїв на машини / групи по аудиторіям / наукові теми по науково-дослідним лабораторіям?» і т.д.

У загальному вигляді закриту задачу про призначення можна сформулювати таким чином. Нехай є n робіт і n працівників – кандидатів для їх виконання. Кожному призначенню i-го працівника ($i = \overline{1,n}$) на j-ю роботу ($j = \overline{1,n}$) відповідає або певна кількісна ефективність (прибуток, продуктивність, якість робіт), або витрати будь-якого ресурсу (наприклад, час виконання робіт). Позначимо ці величини як c_{ij}. Потрібно знайти такі призначення працівників на всі роботи, які забезпечать найбільшу ефективність (або максимум сумарного позитивного ефекту, або мінімум сумарних витрат). За такого призначення необхідно враховувати, що кожного працівника можна призначити тільки на одну з робіт і кожна робота може виконуватися тільки одним працівником. Тобто ресурси неподільні між роботами, а роботи неподільні між ресурсами.

Математична модель задачі має вигляд:

$$F = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \max(\min) \;,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1; \quad i = \overline{1,n};$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1; \quad j = \overline{1,n};$$

$$x_{ij} \in \{0;1\}; \quad i, j = \overline{1,n}.$$

Якщо цільова функція буде прагнути до мінімуму, то дану задачу можна розглядати як окремий випадок транспортної задачі, де кожен працівник – постачальник з потужністю 1, а кожна робота – споживач з тією ж потужністю. При такому підході задачу про призначення можна вирішувати за допомогою алгоритмів розв’язання закритої (або відкритої) транспортної задачі.

Для знаходження оптимального варіанту розв’язання задачі про призначення вручну ефективним є так званий *угорський метод*.

Приклад. Фірма «Бетта» отримала замовлення на розробку п'яти програмних продуктів. Виконання замовлення було доручене п'яти найбільш досвідченим програмістам. Кожен з них повинен написати одну програму. Час виконання кожної роботи кожним з фахівців наведено в таблиці.

Спеціаліст	Час виконання, дн.				
	Програма 1	Програма 2	Програма 3	Програма 4	Програма 5
Рюмін	2	4	1	3	3
Глухов	1	5	4	1	2
Зайцев	3	5	2	2	4
Коваленко	1	4	3	1	4
Іванов	3	2	5	3	5

Необхідно розподілити роботи між програмістами, щоб загальний час виконання заказу був мінімальним.

Рішення. Етап 1. У кожному рядку шукаємо мінімальний елемент (виділено жирним в таблиці) і віднімаємо від всіх елементів рядка. Отримаємо:

2	4	**1**	3	3
1	5	4	**1**	2
3	5	**2**	**2**	4
1	4	3	**1**	4
3	**2**	5	3	5

1	3	0	2	2
0	4	3	0	1
1	3	0	0	2
0	3	2	0	3
1	0	3	1	3

Тепер проводимо аналогічну процедуру для всіх стовпців: шукаємо найменший елемент по стовпцю і віднімаємо його з усіх елементів стовпця. Отримаємо:

1	3	**0**	2	2
0	4	3	**0**	**1**
1	3	**0**	**0**	2
0	3	2	**0**	3
1	**0**	3	1	3

1	3	0	2	1
0	4	3	0	0
1	3	0	0	1
0	3	2	0	2
1	0	3	1	2

Етап 2. Вибираємо рядок з одним нулем (рядок №1), виділяємо нуль жирним і закреслюємо (виділено сірим) наявні нульові значення цього стовпця (стовпця №3).

Вибираємо рядок з одним нульовим значенням (рядок №5), виділяємо нуль.

Вибираємо рядок з одним нулем (рядок №3), виділяємо нуль жирним і закреслюємо (виділено сірим) наявні нульові значення цього стовпця (стовпця №4).

Вибираємо рядок з одним нулем (рядок №4), виділяємо нуль жирним і закреслюємо (виділено сірим) наявні нульові значення цього стовпця (стовпця №1).

Вибираємо рядок з одним нульовим значенням (рядок №2), виділяємо нуль.

1	3	**0**	2	1
0	4	3	0	**0**
1	3	0	**0**	1
0	3	2	0	2
1	**0**	3	1	2

Отримаємо оптимальну матрицю призначень:

		1		
				1
			1	
1				
	1			

Мінімальне значення цільової функції складе: 1+2+2+1+2=8.

Алгоритм рішення задачі про призначення

Етап 1.

1. Формалізація проблеми у вигляді транспортної таблиці за аналогією з рішенням транспортної задачі.

2. У кожному рядку таблиці знайти найменший елемент і відняти його з усіх елементів цього рядка.

3. Повторити ту ж саму процедуру для стовпців.

Етап 2.

Якщо деяке рішення є допустимим, то кожному рядку і кожному стовпцю відповідає тільки один елемент.

1. Знайти рядок, що містить тільки одне нульове значення вартості, і в клітку, відповідну даному значенню, помістити один елемент. Якщо такі рядки відсутні, допустимо розпочати з будь-якого нульового значення вартості.

2. Закреслити інші нульові значення даного стовпця.

3. Пункти 1 і 2 повторювати до тих пір, поки продовження описаної процедури виявиться неможливим.

Якщо на даному етапі виявиться, що є кілька нулів, яким не відповідають призначення і які є незакреслені, то необхідно:

4. Знайти стовпець, що містить тільки одне нульове значення, і у відповідну клітку помістити один елемент.

5. Закреслити інші нулі в цьому рядку.

6. Повторювати пункти 4 і 5 до тих пір, поки подальша їх реалізація виявиться неможливою.

Якщо виявиться, що таблиця містить невраховані нулі, повторити операції 1-6. Якщо рішення є допустимим, тобто всі елементи розподілені в клітини, яким відповідає нульова вартість, то отримане рішення одночасно є оптимальним. Якщо рішення є неприпустимим, здійснюється перехід до третього етапу.

Етап 3.

1. Провести мінімальне число прямих через рядки і стовпці матриці (але не по діагоналях) таким чином, щоб вони проходили через всі нулі, що містяться в таблиці.

2. Знайти найменший серед елементів, через які не проходить жодна з проведених прямих.

3. Відняти його з усіх елементів, через які не проходять прямі.

4. Додати знайдений елемент до всіх елементів таблиці, які лежать на перетині проведених раніше прямих.

5. Всі елементи матриці, через які проходить лише одна пряма, залишити без зміни.

У результаті застосування даної процедури в таблиці з'являється принаймні один новий нуль. Необхідно повернутися до етапу 2 і повторювати алгоритм до тих пір, поки не буде отримано оптимальне рішення.

Приклад. Чотири верстатника можуть виконувати роботу на чотирьох верстатах. При цьому кожен з верстатників може працювати лише на одному верстаті. Продуктивність праці кожного верстатника задається матрицею:

Таблиця – Ефективність роботи верстатників

Верстатники	*I*	*II*	*III*	*IV*
A	68	72	75	83
B	56	60	58	63
C	38	40	35	45
D	47	42	40	45

Як слід розподілити верстатників, щоб загальна продуктивність була максимальною?

Рішення.

Етап 1. Виходячи з того, що завдання вирішується на максимум, то елементи вихідної матриці множаться на (-1). У кожному рядку знаходиться найменший елемент. Найменший елемент віднімається з усіх елементів відповідного рядка.

У кожному стовпці знаходиться найменший елемент. Знайдений найменший елемент віднімається з усіх елементів відповідного стовпця. отримаємо:

15	8	3	0
7	0	0	0
7	2	5	0
0	2	2	2

Етап 2. Знайдене рішення є неприпустимим:

			0
	0	**0**	0
			0
0			

Етап 3. Проводимо найменше число прямих, що проходять через всі нулі таблиці.

15	8	3	0
~~7~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
7	2	5	0
~~0~~	~~2~~	~~2~~	~~2~~

Найменшим елементом, через який не проходить жодна з прямих, є число 2. Скорегуємо таблицю так, як це описано вище відповідно до етапу 3, тобто віднімемо 2 з кожного елемента, через який не проходить жодна пряма, і додамо 2 до всіх елементів, що лежать на перетині двох прямих, залишивши без зміни всі інші елементи, через які проходить лише одна пряма. Тепер перерозподілимо відповідні призначення верстатників. отримаємо:

13	6	1	0
7	0	0	2
5	0	3	0
0	2	2	4

Знайдено таке рішення задачі:

		1	**0**
		0	
	0		
0			

Максимальна продуктивність праці складе: 47+40+58+83=228.

Питання для самоконтролю:

1. У чому зміст транспортної моделі, які її основні характеристики?
2. Охарактеризуйте зміст класичної транспортної моделі.
3. Які методи можуть бути використаними для розв’язання транспортної задачі?
4. У чому зміст та особливості використання методу найменшої вартості?
5. У чому зміст та особливості методу потенціалів?
6. Що таке модель формування штатного розкладу фірми?
7. Охарактеризуйте зміст та особливості використання задачі про призначення.

Рекомендована література: основна: [1, 2, 4, 5, 6, 9]; додаткова: [3, 7, 8, 10-21].

ТЕМА 6. НЕЛІНІЙНІ ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ

1. *Постановка задачі нелінійного програмування*
2. *Метод множників Лагранжа*
3. *Практичне використання методу множників Лагранжа*

1 Постановка задачі нелінійного програмування

Взаємозв'язки між економічними показниками досить часто носять нелінійний характер і побудована лінійна модель у такому разі буде неадекватною реальної дійсності. Тому доцільно досліджувати певні економічні процеси за допомогою нелінійних моделей, математичним інструментом яких є нелінійне програмування.

У загальному випадку завдання нелінійного програмування має вигляд:

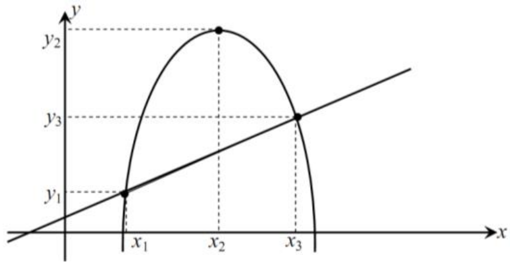
$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad \max(\min),$$

$$\begin{cases} q_1(x_1, x_2, ..., x_n)\{\le, =, \ge\}b_1, \\ q_2(x_1, x_2, ..., x_n)\{\le, =, \ge\}b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_m(x_1, x_2, ..., x_n)\{\le, =, \ge\}b_m, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}, \end{cases}$$

де $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ та $q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ - нелінійні функції.

Часто задачу нелінійного програмування намагаються привести до лінійного вигляду. Наприклад, якщо функція задається у вигляді $z = a + b\frac{1}{x}$, *то заміною* $y = \frac{1}{x}$ *отримаємо лінійну функцію* $z = a + by$. *При такій заміні похибки немає, проте заміна функції* $z = -ax^2 + bx + c$ *лінійною* $z = c + dy$ *веде до значних погрішностей. У точках* x_1 *та* x_3 *значення обох функцій співпадає, а у точці* x_2 *значно відрізняється.*

Таким чином, лінеаризація нелінійних процесів не завжди себе виправдовує.



Для задач нелінійного програмування не існує універсального методу рішення, тому кожного разу потрібно доводити існування рішення задачі, а також його єдиність. При розв'язанні нелінійних задач використовують наближені методи, більшість з яких дають можливість знаходити локальні оптимуми, а, знайшовши всі локальні оптимуми, методом порівняння значень цільової функції в кожній з точок локального оптимуму можна знайти глобальний.

2 Метод множників Лагранжа

Для розв'язання задач нелінійного програмування не існує універсального методу, а тому доводиться застосовувати багато методів і обчислювальних алгоритмів, які в основному ґрунтуються на теорії диференціального числення.

Оптимізаційні задачі, на змінні яких накладаються обмеження, вирішуються методами класичної математики. Оптимізацію з обмеженнями-рівностями можна виконати, наприклад, методом множників Лагранжа.

Розглянемо метод множників Лагранжа на прикладі такої задачі нелінійного програмування:

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad \max(\min),$$

$$q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, \qquad i = \overline{1, m},$$

де $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $q_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – диференційовані.

Ідея методу Лагранжа полягає в заміні даної задачі більш простою – знаходження екстремуму більш складної функції, але без обмежень. Ця функція називається *функцією Лагранжа* і записується у вигляді:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - b_i],$$

де λ_i – невизначені поки що величини, так звані *множники Лагранжа*.

Необхідною умовою екстремуму функції багатьох змінних є рівність нулю приватних похідних щодо всіх змінних функції. Обчислимо ці приватні похідні і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0, & j = \overline{1, n}, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0, & i = \overline{1, m}, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial q_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} = 0, & j = \overline{1, n}, \\ q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - b_i = 0 & i = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Вирішивши систему рівнянь, знайдемо $X^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $\lambda_0 = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ – стаціонарні точки. Оскільки вони знайдені з необхідної умови екстремуму, то в них можливий максимум або мінімум. Іноді стаціонарна точка є точкою перегибу графіка функції.

Теорема. Нехай навкруги критичної точки (x_0; y_0) функція F (x, y) має безперервні приватні похідні до другого порядку включно.

Складемо матрицю такого виду:

$$H(x,y)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{bmatrix}.$$

Обчислимо $H_1(x,y)=\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$ та визначник матриці H(x, y):

$$H_2(x,y)=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{vmatrix}=\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}\cdot\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

Якщо $H_2(x_0,y_0)$>0, то у точці (x_0, y_0) досліджувана функція має екстремум.

Якщо при цьому $H_1(x_0,y_0)>0$, то у заданій точці функція досягає мінімального значення; якщо $H_1(x_0,y_0)<0$, то – максимального значення.

3 *Практичне застосування методу множників Лагранжа*

Розглянемо економічний зміст множників Лагранжа. Для цього розглянемо задачу нелінійного програмування з визначення оптимального плану виробництва продукції при обмежених ресурсах:

$$\begin{gathered} Z=f(x_1,x_2,\dots,x_n)\to\max \\ q_i(x_1,x_2,\dots,x_n)\le b_i,\quad i=\overline{1,m}, \\ x_j\ge 0,\qquad j=\overline{1,n}. \end{gathered}$$

Головною метою виробництва продукції є отримання найбільшого прибутку від її реалізації, тому цільовою функцією Z завдання є прибуток від реалізації продукції обсягом X=(x_1, x_2,...,x_n) одиниць. При цьому функція f(x_1, x_2,...x_n) – нелінійна.

Запишемо систему обмежень $q_i(x_1,x_2,\dots,x_n)\le b_i,\ \ (i=\overline{1,m})$

у вигляді $d_i(X)=b_i-q_i(x_1,x_2,\dots,x_n)\ge 0,\ \ (i=\overline{1,m}).$

Якщо $q_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$ – обсяг сировини i-го виду, який використовується для виробництва всієї продукції, то d_i(X) – залишок цього ресурсу після її виробництва. Якщо d_i(X)=0, то сировину використано повністю; якщо d_i(X)>0, то на виробництво продукції використано не всю сировину; якщо d_i(X) <0, то наявної сировини не вистачить на виробництво продукції.

Розглянемо функцію Лагранжа для даної задачі:

$$L(x,\lambda,b)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(q_i(x)-b_i).$$

Отже, $\frac{\partial L(x,\lambda,b)}{\partial b_i}=\lambda_i,$ тобто ця похідна показує, як змінюється значення цільової функції залежно від обмежень. Множники Лагранжа є подвійними змінними задачі про використання ресурсів. Вони можуть бути ціною, за яку на ринку продається або купується одиниця i-го виду сировини. Якщо $\lambda_i\ge 0$ і

$d_i(X)>0$, то можна продати залишки сировини і отримати додатковий прибуток у розмірі $\lambda_i d_i(X)$. Якщо ж $d_i(X)<0$, то можна купувати потрібну кількість, витратив $\lambda_i d_i(X)$ грошових одиниць і забезпечити виробництво продукції обсягом $X=(x_1, x_2,...,x_n)$. Функцію Лагранжа можна трактувати як загальний прибуток від виробництва, який містить прибуток від реалізації виготовленої продукції f (x) і прибуток від продажу залишків сировини (або витрати на придбання потрібної кількості сировини) $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i d_i(X)$.

Приклад. Фірма планує витратити 20000 грн. на рекламу. Одна хвилина реклами на телебаченні коштує 1000 грн., а на радіо – 500 грн. Аналітики фірми прогнозують збільшення приросту доходу фірми від використання рекламних засобів за функцією:

$$Z(x,y) = -x^2 - y^2 + xy + 10x + 5y,$$

де Z(x,y) – приріст доходу фірми (тис. грн.) від реклами;

x – тривалість (хв.) рекламного ролика на телебаченні;

y – тривалість (хв.) рекламного ролика на радіо.

Яким чином потрібно з'єднати рекламу на телебаченні і радіо, щоб отримати максимальне значення приросту доходу фірми, економно використавши при цьому наявні грошові кошти на рекламу?

Рішення. Цільова функція – це максимум приросту доходу фірми.

$$Z(x,y) = -x^2 - y^2 + xy + 10x + 5y \to \max$$

при виконанні таких умов:

а) за наявністю грошових коштів на рекламу: 1000 x + 500 y = 20000;

б) відносно невід'ємності змінних: $x \ge 0, y \ge 0$.

Оптимальне рішення знаходимо за допомогою методу множників Лагранжа.

Функція Лагранжа набуває вигляду:

$$L(x,y,\lambda) = -x^2 - y^2 + xy + 10x + 5y + \lambda \cdot (20000 - 1000x - 500y)$$

Приватні похідні прирівнюємо до нуля:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2x + y + 10 - 1000\lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -2y + x + 5 - 500\lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 20000 - 1000x - 500y = 0.$$

Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -2x + y + 10 - 1000\lambda = 0, \\ -2y + x + 5 - 500\lambda = 0, \\ 20000 - 1000x - 500y = 0. \end{cases}$$

Зробимо відповідні перетворення:

$$\begin{cases} -2x + y - 1000\lambda = -10, \\ -2y + x - 500\lambda = -5, \\ -1000x - 500y = -20000. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y - 1000\lambda & = -10 \\ x - 2y - 500\lambda & = -5 \\ -2x - y & = -40 \end{cases} \Bigg| \times -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x + y - 1000\lambda & = -10, \\ -2x + 4y + 1000\lambda & = 10, \\ -2x - y & = -40. \end{cases}$$

Складемо перші рівняння останньої системи та отримаємо:

$$-4x+5y=0 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{4}{5}x. \qquad -2x-\frac{4}{5}x=-40 \Rightarrow x=\frac{100}{7}=14\frac{2}{7}.$$

$$y=\frac{4}{5}\cdot\frac{100}{7}=\frac{80}{7}=11\frac{3}{7}. \qquad \lambda=\frac{x-2y+5}{500}=\frac{\frac{100}{7}-2\cdot\frac{80}{7}+5}{500}=\frac{-\frac{25}{7}}{500}=-\frac{1}{140}.$$

Рішення систему рівнянь: $x=14\frac{2}{7}; \qquad y=11\frac{3}{7}; \qquad \lambda=-\frac{1}{140}.$

Переконаємося, чи досягає наша функція екстремального значення в знайденій точці. Для цього на основі вищезгаданої теореми знайдемо приватні похідні першого порядку заданої функції:

$$Z(x,y)=-x^2-y^2+xy+10x+5y.$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=-2x+y+10;$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=-2y+x+5.$$

Знайдемо приватні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=-2; \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}=-2; \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial x}=1.$$

Отже

$$H(x,y)=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}, \qquad H_1(x,y)=-2<0,$$

$$H_2(x,y)=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}-2\cdot(-2)-1\cdot 1=3>0.$$

Згідно з умовою теореми стверджуємо, що точка з координатами $\left(14\frac{2}{7};11\frac{3}{7}\right)$ буде точкою максимуму функції. Максимальне значення функції:

$$Z_{\max}=Z\left(14\frac{2}{7};11\frac{3}{7}\right)=-\left(\frac{100}{7}\right)^2-\left(\frac{80}{7}\right)^2+\frac{100}{7}\cdot\frac{80}{7}+10\cdot\frac{100}{7}+5\cdot\frac{80}{7}=$$

$$=-\frac{10000}{49}-\frac{6400}{49}+\frac{8000}{49}+\frac{1000}{7}+\frac{400}{7}=\frac{-16400+8000+9800}{49}=$$

$$=\frac{1400}{49}=\frac{200}{7}=28\frac{4}{7}.$$

Фірма отримає додатковий дохід від використання реклами у розмірі 28 4/7 тис. грн. якщо гроші, призначені на рекламу, будуть використані на 14 2/7 хв. реклами на телебаченні та 11 3/7 хв. – на радіо.

Питання для самоконтролю:

1. Які задачі відносяться до задач нелінійного програмування?
2. Охарактеризуйте економічну сутність методу множників Логранжа.
3. Наведіть практичні аспекти застосування методу множників Логранжа.

Рекомендована література: основна: [1, 2, 4, 5, 6, 9]; додаткова: [3, 7, 8, 10-21].

ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

Завдання 1
Використання графічного методу для розв'язання задач лінійного програмування

Підприємство «Метал» виробляє у чотирьох цехах два види продукції за ціною реалізації $П_1$ і $П_2$ відповідно. Для виробництва одиниці продукції необхідні витрати робочого часу у відповідних цехах у розмірі *a, b, c, d*. Підприємство має обмежений ресурс часу для виконання певних видів робіт, тому витрати робочого часу у цехах не можуть перевищувати N_i (i=1...4) тис. люд.-год. на місяць.

Цех	Витрати робочого часу на виробництво одиниці продукції, люд.-год.		Максимальний рівень витрат робочого часу, тис. люд.-год.
	продукція 1	продукція 2	
Ливарний цех	*a*	*b*	N_1
Прокатний цех	*c*	*d*	N_2
Зварювальний цех	*c*	*b*	N_3
Пакувальний цех	*a*	*d*	N_4

Необхідно за допомогою графічного методу визначити оптимальний план випуску продукції, який забезпечує підприємству максимальний дохід від реалізації усієї продукції. Вихідні дані за варіантами наведені у таблиці.

Варіант	a	b	c	d	N_1	N_2	N_3	N_4	$П_1$	$П_2$
1	1	2	3	4	12	8	6	12	2	3
2	4	3	2	1	10	9	8	11	3	2
3	2	1	3	4	8	12	7	10	4	5
4	4	3	1	2	9	10	9	9	5	4
5	3	2	4	1	12	8	10	8	1	2
6	2	4	1	3	11	9	11	7	2	1
7	1	3	2	4	10	10	12	6	3	4
8	2	4	1	3	9	11	10	5	2	1
9	3	2	4	1	8	12	11	11	1	3
10	1	3	2	4	8	12	9	12	4	3
11	1	4	3	2	9	11	8	9	2	4
12	3	1	2	4	12	10	7	8	1	2
13	2	4	1	3	11	8	6	7	4	3
14	4	2	1	3	10	10	8	12	3	2
15	4	1	3	2	10	12	9	10	2	4
16	4	2	2	3	9	10	12	8	3	1
17	1	2	3	4	8	6	11	9	2	3
18	4	1	2	3	12	10	8	6	2	4
19	4	3	1	2	12	8	10	6	3	2
20	2	3	1	4	11	8	6	10	5	4
21	4	2	4	3	10	9	12	12	3	4
22	2	3	4	4	8	10	12	8	2	4
23	1	3	1	2	9	12	9	7	4	2
24	2	3	4	4	12	10	11	6	3	2
25	4	4	2	3	10	12	8	10	3	4

Завдання 2
Використання симплексного методу для розв’язання задач лінійного програмування

Підприємство «Омега» випускає два види продукції – *A* (тис. од.) і *B* (тис. од.), використовуючи при цьому послідовно працю трьох категорій робітників – основних, допоміжних і обслуговуючий персонал. Вихідні дані щодо технологічного процесу випуску продукції наведено у таблиці.

Категорія робітників	Трудомісткість на одиницю продукції, год.		Фонд робочого часу, тис. год.
	A	B	
Основні робітники	a	b	T_1
Допоміжні робітники	b	c	T_2
Обслуговуючий персонал	d	a	T_3
Прибуток на одиницю продукції, грн.	$П_1$	$П_2$	

Необхідно за допомогою симплексного методу скласти такий план випуску продукції, який забезпечить підприємству «Омега» найбільший прибуток. Вихідні дані за варіантами наведено у таблиці.

Варіант	**a**	**b**	**c**	**d**	**T_1**	**T_2**	**T_3**	**$П_1$**	**$П_2$**
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
1	3	2	4	1	15	18	16	5	5
2	6	4	4	5	20	19	22	6	5
3	3	2	1	4	12	16	18	10	12
4	3	4	0	6	15	18	24	12	11
5	2	3	1	2	21	16	14	7	5
6	2	2	1	1	20	14	16	6	8
7	0	4	3	5	18	17	10	3	2
8	6	4	2	4	17	15	22	2	3
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
9	2	4	4	6	18	13	25	6	4
10	2	3	1	4	15	18	12	4	6
11	6	2	6	5	16	19	10	7	8
12	0	3	5	5	13	14	15	9	6
13	1	2	4	1	18	20	16	10	15
14	4	2	3	3	15	24	22	15	10
15	2	1	4	4	13	21	10	9	13
16	2	3	6	5	10	15	13	12	15
17	2	1	0	3	19	14	22	16	18
18	4	4	3	6	18	16	19	20	18
19	1	2	0	3	22	15	17	10	12
20	3	4	2	0	18	16	15	16	18
21	4	2	5	4	17	19	20	15	13
22	2	0	3	1	24	15	12	2	3
23	4	2	6	3	21	14	16	4	6
24	3	0	1	4	13	25	18	3	4
25	2	1	2	3	19	16	10	10	9

Завдання 3
Використання двоїстого методу для розв'язання задач лінійного програмування

Використовуючи вихідні дані до розрахункової роботи 2 та оптимальний план, який було отримано при розв'язанні задачі, необхідно:

1) виписати оптимальний план двоїстої задачі;
2) визначити межі зміни обсягу ресурсу *R*, за яких зберігається стійкість оптимального плану;
3) припустимо, що у підприємства з'явилася можливість додатково виробляти продукцію *C* з наступними характеристиками:

Трудові ресурси	Трудомісткість на одиницю продукції, годин
Основні робітники	*d*
Допоміжні робітники	*0,5d*
Обслуговуючий персонал	*2d*

Прибуток на одиницю продукції складає $П_3$ грн. Загальна кількість ресурсів не змінилася. Визначити, чи доцільно включати продукцію *C* до оптимального плану. Вихідні дані наведено у таблиці.

Варіант	**d**	**$П_3$**	**R**
1	1	6	Основні робітники
2	5	5	Допоміжні робітники
3	4	8	Обслуговуючий персонал
4	6	10	Основні робітники
5	2	8	Допоміжні робітники
6	1	9	Обслуговуючий персонал
7	5	4	Основні робітники
8	4	5	Допоміжні робітники
9	6	7	Обслуговуючий персонал
10	4	3	Основні робітники
11	5	9	Допоміжні робітники
12	5	8	Обслуговуючий персонал
13	1	11	Основні робітники
14	3	12	Допоміжні робітники
15	4	7	Обслуговуючий персонал
16	5	10	Основні робітники
17	3	14	Допоміжні робітники
18	6	16	Обслуговуючий персонал
19	3	14	Основні робітники
20	0	15	Допоміжні робітники
21	4	12	Обслуговуючий персонал
22	1	6	Основні робітники
23	3	4	Допоміжні робітники
24	4	3	Обслуговуючий персонал
25	3	10	Основні робітники

Завдання 4
Розв'язання транспортної задачі методами північно-західного кута та найменшої вартості

Методами північно-західного кута та найменшої вартості знайти початкові опорні плани перевезення однорідної продукції від постачальників A_1, A_2, A_3 із запасами a_1, a_2, a_3 до споживачів B_1, B_2, B_3, B_4 із потребами в цій продукції b_1, b_2, b_3, b_4.

Варіант	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	b_4
1	215	145	170	170	140	120	100
2	65	60	95	55	55	65	45
3	50	25	30	10	30	35	30
4	70	110	85	80	60	75	50
5	60	45	105	70	55	20	65
6	185	95	105	115	100	95	75
7	70	75	115	75	80	55	50
8	80	95	85	40	85	75	60
9	95	200	115	75	140	95	100
10	125	50	65	65	70	55	50
11	105	50	45	50	60	50	40
12	100	115	80	40	60	95	100
13	75	160	85	100	70	90	60
14	140	135	215	125	85	185	95
15	95	155	100	105	85	95	65
16	55	90	35	45	45	50	40
17	50	40	90	35	45	60	40
18	125	130	145	70	120	130	80
19	65	70	50	45	55	45	40
20	35	60	90	40	65	50	30
21	120	110	100	30	75	125	100
22	100	175	110	120	70	115	80
23	50	80	65	40	65	70	20
24	225	115	140	110	175	95	100
25	40	55	95	55	40	50	45

Вартість перевезень одиниці продукції від постачальників до споживачів:

Варіант	Матриця вартості	Варіант	Матриця вартості
1, 5, 12, 20	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 9 & 1 \\ 8 & 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$	3, 7, 10, 17, 22	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 9 & 2 \\ 5 & 7 & 9 & 3 \\ 7 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
Варіант	Матриця вартості	Варіант	Матриця вартості
2, 6, 11, 15	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 8 & 7 \\ 4 & 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}$	4, 16, 21, 25	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 & 2 \\ 7 & 9 & 4 & 2 \\ 5 & 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
Варіант	Матриця вартості	Варіант	Матриця вартості
9, 14, 19, 24	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 9 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$	8, 13, 18, 23	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & 9 \\ 8 & 5 & 1 & 4 \\ 6 & 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Завдання 5
Розв'язання транспортної задачі методом потенціалів

Найти оптимальний план перевезень однорідного вантажу від постачальників A_1, A_2, A_3, A_4 із запасами a_1, a_2, a_3, a_4 до споживачів B_1, B_2, B_3 з потребами у цьому вантажі b_1, b_2, b_3, який забезпечить мінімальну вартість перевезень вантажу.

Варіант	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3
1	70	110	100	50	130	75	125
2	95	80	115	120	175	140	95
3	125	130	50	95	150	120	130
4	100	90	110	85	120	150	115
5	25	50	45	80	50	60	90
6	100	60	80	55	140	60	95
7	75	65	85	95	160	70	90
8	120	145	170	95	170	140	220
9	140	135	120	95	125	180	185
10	75	95	105	110	115	175	95
11	95	75	100	80	170	85	95
12	55	40	35	50	85	45	50
13	15	25	30	35	40	30	35
14	40	55	35	60	100	40	50
15	70	60	85	50	80	110	75
16	50	40	30	60	75	45	60
17	25	70	50	40	45	55	85
18	80	90	55	25	90	85	75
19	60	45	35	70	70	120	20
20	55	50	65	70	65	70	105
21	35	60	25	65	70	65	50
22	50	45	65	35	60	65	70
23	65	60	40	55	55	100	65
24	70	75	55	60	75	80	105
25	90	115	140	135	110	275	95

Вартість перевезень одиниці вантажу від постачальників до споживачів:

Варіант	Матриця вартості	Варіант	Матриця вартості
1, 12, 20	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 6 \\ 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}$	3, 7, 17,	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 6 & 8 & 2 \\ 8 & 6 & 1 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$
Варіант	Матриця вартості	Варіант	Матриця вартості
2, 11, 15	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ 5 & 10 & 4 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$	4, 16, 21	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \\ 7 & 3 & 8 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$
Варіант	Матриця вартості	Варіант	Матриця вартості
14, 19, 24	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 5 & 2 & 9 \\ 8 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$	8, 13, 23	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 3 & 7 & 11 \\ 2 & 4 & 8 \\ 9 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
Варіант	Матриця вартості	Варіант	Матриця вартості
5, 10, 25	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 6 \\ 5 & 8 & 2 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$	6, 9, 18, 22	$c_{ij} = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 9 \\ 9 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

Завдання 6
Використання угорського методу для розв'язання задач лінійного програмування

Для непарних варіантів.

У розпорядженні компанії «Перемога» є 5 торгівельних точок та 5 продавців. З попереднього досвіду відомо, що ефективність роботи продавців у різних торгових точках неоднакова. Комерційний директор компанії здійснив оцінку діяльності кожного продавця в кожній торгівельній точці. Результати такої оцінки представлені в табл. 1. Необхідно визначити, як комерційний директор повинен здійснити призначення продавців за торгівельними точками, щоб досягти максимальної ефективності праці?

Таблиця 1 – Обсяги продажів у різних торгівельних точках для різних продавців

	Продавець	Ефективність праці продавця в торгівельній точці				
Варіант 1.		*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
	A	68	72	75	83	75
	B	56	60	58	63	61
	C	35	38	40	45	25
	D	40	42	47	45	53
	E	62	70	68	67	69
Варіант 3.	Продавець	Ефективність праці продавця в торгівельній точці				
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
	A	73	26	40	60	54
	B	56	86	86	37	63
	C	93	66	33	86	39
	D	55	37	79	50	90
	E	64	79	63	36	78
Варіант 5.	Продавець	Ефективність праці продавця в торгівельній точці				
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
	A	56	29	79	46	48
	B	78	86	64	59	96
	C	94	43	58	93	67
	D	29	79	26	38	78
	E	36	91	18	86	55
Варіант 7.	Продавець	Ефективність праці продавця в торгівельній точці				
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
	A	54	29	46	79	91
	B	96	86	69	85	86
	C	63	55	79	49	43
	D	37	79	73	29	72
	E	82	46	46	73	49
Варіант 9.	Продавець	Ефективність праці продавця в торгівельній точці				
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
	A	50	83	70	46	66
	B	86	60	29	89	32
	C	91	49	83	73	81
	D	43	73	46	29	49
	E	73	29	95	81	76

Варіант 11.	Продавець	Ефективність праці продавця в торгівельній точці				
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
	A	80	90	95	20	68
	B	63	26	63	79	45
	C	29	84	84	88	53
	D	73	59	19	61	29
	E	64	77	50	43	89

Варіант 13.	Продавець	Ефективність праці продавця в торгівельній точці				
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
	A	96	70	46	50	94
	B	82	83	19	46	99
	C	53	29	88	92	40
	D	44	88	23	19	65
	E	79	60	33	73	49

Варіант 15.	Продавець	Ефективність праці продавця в торгівельній точці				
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
	A	50	60	40	76	99
	B	46	49	47	43	64
	C	92	73	72	82	72
	D	17	23	81	19	80
	E	83	66	60	80	53

Варіант 17.	Продавець	Ефективність праці продавця в торгівельній точці				
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
	A	40	60	30	82	83
	B	93	50	68	91	94
	C	29	99	49	73	72
	D	86	73	73	42	66
	E	17	28	19	60	80

Варіант 19.	Продавець	Ефективність праці продавця в торгівельній точці				
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
	A	80	60	70	85	93
	B	46	49	89	77	26
	C	93	73	64	86	84
	D	79	29	19	50	70
	E	88	81	73	19	99

Варіант 21.	Продавець	Ефективність праці продавця в торгівельній точці				
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
	A	29	49	37	74	70
	B	73	83	84	49	93
	C	46	26	46	82	66
	D	80	55	20	51	48
	E	19	70	39	60	22

Варіант 23.	Продавець	Ефективність праці продавця в торгівельній точці				
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
	A	50	40	49	49	90
	B	49	88	76	73	83
	C	76	63	19	91	64
	D	31	15	83	43	79
	E	98	29	50	26	50

Варіант 25.	Продавець	Ефективність праці продавця в торгівельній точці				
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
	A	70	89	91	49	94
	B	49	41	58	73	83
	C	83	66	73	68	61
	D	61	59	69	95	57
	E	59	73	19	43	49

Для парних варіантів.

Фірма «Сінергія» отримала замовлення на розробку п'яти програмних продуктів. Для цього вирішено залучити п'ять найбільш досвідчених програмістів. Кожний з них повинен написати одну програму. У табл. 2 наведено оцінки часу, необхідного програмістам для виконання кожної з робіт. Необхідно визначити, як слід розподілити роботи між програмістами, щоб загальна кількість тижнів, витрачених на виконання всіх замовлень, була мінімальною?

Таблиця 2 – Час, необхідний на виконання замовлення кожним з програмістів

	Програміст	Час виконання кожного замовлення, тижнів				
Варіант 2.		*I*	*II*	*III*	*IV*	*V*
	Іваненко	2	4	1	3	3
	Петренко	1	5	4	1	2
	Іващенко	3	5	2	2	4
	Сідоренко	1	4	3	1	4
	Василенко	3	2	5	3	5
Варіант 4.	Програміст	Час виконання кожного замовлення, тижнів				
		I	*II*	*III*	*IV*	*V*
	Іваненко	2	2	1	4	5
	Петренко	4	4	2	3	3
	Іващенко	1	4	3	2	4
	Сідоренко	5	1	3	1	4
	Василенко	3	3	2	1	1
Варіант 6.	Програміст	Час виконання кожного замовлення, тижнів				
		I	*II*	*III*	*IV*	*V*
	Іваненко	4	5	4	3	5
	Петренко	1	1	2	3	4
	Іващенко	3	3	1	2	4
	Сідоренко	3	3	1	5	3
	Василенко	2	2	3	4	2
Варіант 8.	Програміст	Час виконання кожного замовлення, тижнів				
		I	*II*	*III*	*IV*	*V*
	Іваненко	1	4	5	4	4
	Петренко	2	3	5	3	5
	Іващенко	2	2	3	3	3
	Сідоренко	3	1	3	1	3
	Василенко	4	1	1	4	3
Варіант 10.	Програміст	Час виконання кожного замовлення, тижнів				
		I	*II*	*III*	*IV*	*V*
	Іваненко	4	3	5	4	4
	Петренко	2	5	3	3	1
	Іващенко	1	5	3	3	1
	Сідоренко	1	4	1	2	1
	Василенко	3	1	1	1	2
Варіант 12.	Програміст	Час виконання кожного замовлення, тижнів				
		I	*II*	*III*	*IV*	*V*
	Іваненко	3	4	1	1	1
	Петренко	1	3	3	3	3
	Іващенко	5	3	3	4	1
	Сідоренко	2	2	2	2	5
	Василенко	2	5	4	1	1
Варіант 14.	Програміст	Час виконання кожного замовлення, тижнів				
		I	*II*	*III*	*IV*	*V*
	Іваненко	1	2	1	1	2
	Петренко	3	5	3	3	3
	Іващенко	3	4	5	3	3
	Сідоренко	4	4	4	4	4
	Василенко	5	5	2	5	1
Варіант 16.	Програміст	Час виконання кожного замовлення, тижнів				
		I	*II*	*III*	*IV*	*V*
	Іваненко	2	1	1	2	4
	Петренко	3	5	3	4	2
	Іващенко	3	5	4	3	3
	Сідоренко	4	4	4	5	1
	Василенко	1	2	5	1	5

	Програміст	Час виконання кожного замовлення, тижнів				
Варіант 18.		*I*	*II*	*III*	*IV*	*V*
	Іваненко	1	1	2	5	1
	Петренко	3	3	1	1	5
	Іващенко	4	3	3	6	2
	Сідоренко	2	4	3	3	2
	Василенко	2	5	2	2	2

	Програміст	Час виконання кожного замовлення, тижнів				
Варіант 20.		*I*	*II*	*III*	*IV*	*V*
	Іваненко	1	2	4	1	1
	Петренко	3	4	2	3	1
	Іващенко	3	4	5	2	2
	Сідоренко	4	3	5	2	4
	Василенко	5	2	1	4	5

	Програміст	Час виконання кожного замовлення, тижнів				
Варіант 22.		*I*	*II*	*III*	*IV*	*V*
	Іваненко	2	2	1	2	3
	Петренко	3	2	1	1	3
	Іващенко	4	4	3	1	2
	Сідоренко	1	3	4	4	1
	Василенко	5	5	5	3	4

	Програміст	Час виконання кожного замовлення, тижнів				
Варіант 24.		*I*	*II*	*III*	*IV*	*V*
	Іваненко	3	2	1	3	2
	Петренко	2	3	2	2	1
	Іващенко	4	3	5	4	4
	Сідоренко	4	4	4	4	3
	Василенко	1	5	4	1	3

Завдання 7
Розв’язання задач нелінійного програмування

Підприємству «Кванта» необхідно провести навчання *К* працівників за двома напрямами. При навчанні одного працівника за першим напрямом вартість навчання дорівнює ($T+x_1$), а за другим напрямом – ($A+x_2$), де x_1, x_2 – чисельність працівників, що навчаються за відповідним напрямом. Необхідно визначити, скільки працівників треба навчити за кожним напрямом, щоб загальна вартість навчання працівників для підприємства була мінімальною. Вихідні дані за варіантами наведено у таблиці.

Варіант	**К**	**Т**	**А**
1, 13	200	6	2
2, 14	210	7	3
3, 15	220	8	4
4, 16	190	5	2
5, 17	240	8	4
6, 18	180	4	2
7, 19	260	10	6
8, 20	230	7	4
9, 21	160	3	2
10, 22	400	18	10
11, 23	300	12	6
12, 24	280	10	6

КОНТРОЛЬНА ЧАСТИНА

ЗАВДАННЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Таблиця вибору завдань контрольної роботи відповідно до варіанту
(номер варіанту відповідає номеру студента у списку групи)

Варіант	Теоретичні питання	Практичне завдання 1	Практичне завдання 2
1	1, 11	10	1
2	2, 12	9	2
3	3, 13	8	3
4	4, 14	7	4
5	5, 15	6	1
6	6, 16	5	2
7	7, 17	4	3
8	8, 18	3	4
9	9, 19	2	1
10	10, 20	1	2
11	11, 21	2	3
12	12, 22	3	4
13	13, 23	4	1
14	14, 24	5	2
15	15, 25	6	3
16	16, 26	7	4
17	17, 27	8	1
18	18, 28	9	2
19	19, 29	10	3
20	20, 30	9	4
21	1, 21	8	1
22	2, 22	7	2
23	3, 23	6	3
24	4, 24	5	4
25	5, 25	4	1
26	6, 26	3	2
27	7, 27	2	3
28	8, 28	1	4
29	9, 29	2	1
30	10, 30	3	2

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ

1. Сутність економіко-математичного моделювання.
2. Принципи та етапи економіко-математичного моделювання.
3. Сутність та класифікація економіко-математичних моделей. Оптимізаційні моделі.
4. Постановка задач лінійного програмування та форми їх запису.
5. Приклади моделей лінійного програмування.
6. Графічний метод вирішення задач лінійного програмування.
7. Симплексний метод вирішення задач лінійного програмування. Аналіз результатів рішення задач лінійного програмування на основі матриці ефективності.

8. Формулювання двоїстої задачі лінійного програмування, її економічна інтерпретація.
9. Основні теореми двоїстості.
10. Властивості двоїстих оцінок.
11. Застосування теорем двоїстості для аналізу оптимальних рішень у задачах економіки праці.
12. Постановка транспортної задачі.
13. Рішення транспортної задачі методом північно-західного кута.
14. Рішення транспортної задачі методом потенціалів.
15. Задача о призначеннях.
16. Постановка задачі цілочислового лінійного програмування.
17. Рішення задач цілочислового лінійного програмування методом Гомори.
18. Формулювання задачі динамічного програмування.
19. Алгоритм рішення задач динамічного програмування.
20. Постановка задачі нелінійного програмування.
21. Метод множників Лагранжа.
22. Практичне використання методу множників Лагранжа.
23. Балансовий метод в економіці.
24. Економічна модель міжгалузевого балансу.
25. Балансові моделі в задачах економіки праці.
26. Особливості імітаційного моделювання.
27. Використання імітаційного моделювання систем масового обслуговування ігор в задачах організації праці.
28. Сутність та основні поняття теорії ігор.
29. Практичне використання елементів теорії ігор в задачах економіки праці.
30. Сутність економетрічної моделі та етапи економетрічного моделювання.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ №1

Задача 1

Компанія «Норд» виробляє холодильники і кондиціонери. Для виробництва продукції необхідний труд двох категорій робітників: основних і допоміжних. У табл. 1 наведено дані щодо витрат робочого часу на виробництво одиниці продукції.

Таблиця 1 – Вихідні дані

Категорії працівників	Витрати робочого часу, люд.-год.		Максимально можливі щоденні витрати робочого часу, люд.-год.
	холодильник	кондиціонер	
Основні робітники	6	4	24
Допоміжні робітники	1	2	6
Дохід, тис. грн.	5	4	

Відділ маркетингу компанії обмежив щоденне виробництво кондиціонерів до 2 (внаслідок відсутності попиту), а також висунув вимогу, щоб щоденне виробництво кондиціонерів не перевищувало більш ніж на 1 аналогічний показник виробництва холодильників. Компанія бажає визначити оптимальне (найкраще) співвідношення між виробництвом холодильників і кондиціонерів для максимізації загального щоденного доходу. Розв'язати задачу за допомогою графічного методу.

Задача 2

Компанія виробляє різні види меблів для кабінетів (комплекти A, B, C). Обсяг робіт, необхідний для кожної операції, наведено у табл. 2.

Таблиця 2 – Дані щодо обсягу робіт для виробництва комплектів меблів

Операції	Обсяг робіт, люд.-год./комплект		
	A	B	C
Виробництво частин	2	3	2
Зборка	1	2	3
Поліровка, перевірка	1	1	2

Максимальний обсяг робіт на тиждень дорівнює 360 люд.-год. на зборку і 180 люд.-год. на поліровку. Ринок збуту розширюється, однак можливість зберігання обмежує виробництво 170-ма комплектами на тиждень. Прибуток від продажу комплектів дорівнює відповідно 15, 22, 19 грн. Побудувати модель, знайти рішення задачі максимізації прибутку за допомогою симплексного методу.

Задача 3

Компанія з виробництва будівельних матеріалів випускає два види матеріалів: фарбу і клей. Трудовитрати на виробництво 1 т фарби становлять 20 год., клею – 10 год. В компанії 10 робітників працюють по 40 год. на тиждень. Обладнання дозволяє виробляти не більше 15 т фарби і 30 т клею на тиждень. Прибуток від реалізації 1 т фарби складає 50 грн.; 1 т клею – 40 грн. Визначити за допомогою графічного методу, скільки будівельних матеріалів кожного виду треба випускати компанії для отримання максимального прибутку.

Задача 4

Для виготовлення двох видів продукції А та Б використовується праця трьох категорій працівників. Запаси робочого часу, норми витрат часу на виготовлення одиниці продукції кожного виду і дохід від одиниці продукції наведено у табл. 3.

Таблиця 3 – Вихідні дані

Категорія працівників	Фонд робочого часу, год.	Витрати праці на виготовлення одиниці продукції, год.	
		А	Б
Фрезерувальники	275	4	5
Шліфувальники	680	13	8
Складальники	60	1	1
Дохід від одиниці продукції, грн.		9	6

Необхідно знайти за допомогою симплексного методу такий план виробництва, який забезпечить найбільший сумарний дохід.

Задача 5

Для виготовлення двох видів продукції А і Б використовується праця чотирьох типів трудових ресурсів. Запас ресурсів, норми витрат ресурсів на виготовлення одиниці продукції кожного виду і ціну реалізації одиниці продукції кожного виду наведено у табл. 4.

Таблиця 4 – Вихідні дані

Вид трудового ресурсу	Наявність ресурсів	Трудомісткість виготовлення одиниці продукції, люд.-год.	
		А	Б
Токарі	200	2	4
Слюсарі	100	2	-
Фрезерувальники	100	-	1
Шліфувальники	50	1	1
Ціна реалізації одиниці продукції, грн.		50	100

Визначити за допомогою графічного методу оптимальний асортимент продукції, який забезпечить максимальну виручку.

Задача 6

Для виготовлення чотирьох видів продукції $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$ підприємство використовує три види ресурсів: трудові, сировина, обладнання. Запас ресурсів, норми витрат ресурсів на виготовлення одиниці продукції кожного виду і прибуток з продажу одиниці продукції кожного виду наведено у табл. 5.

Таблиця 5 – Вихідні дані

Вид витрат	Максимальний обсяг витрат, грн.	Витрати на виготовлення одиниці продукції, грн.			
		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
Заробітна плата	16	1	1	1	1
Витрати сировини	110	6	5	4	3
Амортизація	100	4	6	10	13
Прибуток з продажу одиниці, грн.		60	70	120	130

Необхідно знайти симплексним методом варіант оптимального плану виробництва за критерієм максимуму прибутку.

Задача 7

Підприємство планує випустити два види костюмів – чоловічі і жіночі. На жіночій костюм необхідно 1 м вовни, 2 м лавсану і 1 люд./день трудовитрат. На чоловічій костюм – 3,5 м вовни, 0,5 м лавсану і 1 люд./день трудовитрат. Всього підприємство має 350 м вовни, 240 м лавсану і 150 люд./день трудовитрат. Необхідно визначити за допомогою графічного методу, скільки костюмів кожного виду необхідно зшити для забезпечення максимального прибутку, якщо прибуток від реалізації жіночого костюму дорівнює 10 грошових одиниць, чоловічого костюму – 20 грошових одиниць. При цьому слід мати на увазі, що необхідно зшити не менш ніж 60 чоловічих костюмів.

Задача 8

Для виготовлення двох видів продукції А і В використовуються чотири види робіт. Максимальний обсяг робіт, витрати часу у межах певного виду роботи на виготовлення одиниці продукції кожного виду і прибуток від реалізації одиниці продукції наведені у табл. 6.

Таблиця 6 – Вихідні дані

Види робіт	Максимальний обсяг робіт, год.	Витрати часу на виготовлення одиниці продукції, год.	
		А	В
Сортування	18	1	3
Комплектування	16	2	1
Складання	5	-	1
Транспортування	21	3	-
Прибуток від реалізації одиниці продукції, грн.		2	3

Необхідно знайти симплексним методом такий план виробництва, який забезпечить найбільший прибуток від реалізації продукції.

Задача 9

З метою підвищення кваліфікації працівників двох відділів А і Б підприємство використовує навчання за трьома програмами. Максимально можливі витрати, витрати на навчання одного працівника певного відділу і додатковий прибуток від підвищення кваліфікації персоналу наведено у табл. 7.

Таблиця 7 – Вихідні дані

Вид навчання	Максимально можливі витрати, тис. грн.	Витрати на навчання одного працівника відділу, тис. грн.	
		А	Б
Внутрішнє	300	12	4
Зовнішнє	120	4	4
Змішане	252	3	12
Додатковий прибуток від підвищення кваліфікації працівників, тис. грн.		30	40

Необхідно за допомогою графічного методу скласти такий план навчання персоналу відділів А і Б, за яким підприємство отримало б максимальний додатковий прибуток.

Задача 10

Для виготовлення трьох видів продукції А, В і С підприємство використовує працю трьох категорій працівників. Фонд робочого часу, норми витрат на виготовлення одиниці продукції кожного виду і ціну реалізації одиниці продукції кожного виду наведено у табл. 8.

Таблиця 8 – Вихідні дані

Категорія працівників	Фонд робочого часу, год.	Витрати часу на виготовлення одиниці продукції, год.		
		А	В	С
Сортувальники	360	18	15	12
Комплектувальники	192	6	4	8
Водії	180	5	3	3
Ціна одиниці продукції, грн.		9	10	16

Необхідно скласти за допомогою симплексного методу такий план виготовлення продукції А, В та С, за яким загальна виручка від продажу всієї виготовленої підприємством продукції буде максимальною.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ №2

Задача 1

П'ять верстатників можуть виконувати п'ять операцій з обробки деталей. При цьому за кожним із верстатників може бути закріплена лише одна операція і одна і та ж операція може виконуватись тільки одним верстатником. Враховуючи час виконування кожної з операції кожним верстатником, який задається матрицею:

$$C = \begin{matrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 7 & 2 & 4 & 5 & 8 \\ 9 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{matrix}$$

Скласти такий розподіл операцій між верстатниками, за яким загальні витрати часу на обробку деталі були б мінімальними.

Задача 2

Аудиторська фірма, що має чотири підрозділи, які знаходяться у різних частинах міста, надають аудиторські послуги п'яти підприємствам $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$, $П_5$. При цьому керівництво усіх підприємств повинно приїжджати у фірму для надання послуг. Чисельність працівників фірми, витрати на проїзд від підприємства до фірми і назад, а також необхідну кількість відвідувань у кварталі наведено у табл. 9.

Таблиця 9 – Вихідні дані

Підрозділи фірми	Чисельність працівників, осіб	Витрати на проїзд, грн.				
		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
1	15	10	17	9	20	30
2	15	13	4	24	26	26
3	19	22	24	30	27	29
4	11	25	12	11	24	23
Необхідна кількість відвідувань		9	24	9	9	9

Необхідно визначити за допомогою методу потенціалів, яка кількість відвідувань повинна бути від кожного підприємства в кожний підрозділ аудиторської фірми, щоб сумарні витрати на проїзд були мінімальними. При знаходженні початкового опорного плану задачі використати метод північно-західного кута.

Задача 3

Аудиторська фірма, що має чотири підрозділи, які знаходяться у різних частинах міста, надають аудиторські послуги п'яти підприємствам $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$, $П_5$. При цьому керівництво усіх підприємств повинно приїжджати в фірму для надання послуг. Чисельність працівників фірми, витрати на проїзд від підприємства до фірми й назад, а також необхідну кількість відвідувань у кварталі наведено у табл. 10.

Таблиця 10 – Вихідні дані

Підрозділи фірми	Чисельність працівників, осіб	Витрати на проїзд, грн.				
		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
1	15	10	17	9	20	30
2	15	13	4	24	26	26
3	19	22	24	30	27	29
4	11	25	12	11	24	23
Необхідна кількість відвідувань		9	24	9	9	9

Необхідно визначити за допомогою методу потенціалів, яка кількість відвідувань повинна бути від кожного підприємства в кожний підрозділ аудиторської фірми, щоб сумарні витрати на проїзд були мінімальними. При знаходженні початкового опорного плану задачі використати метод найменшої вартості.

Задача 4

Фірма «Бетта» отримала замовлення на розробку п’яти програмних продуктів. Виконання замовлення було доручено п’яти найбільш досвідченим програмістам. Кожний з них повинен написати одну програму. Час виконання кожної роботи для кожного спеціаліста наведено у табл. 11.

Таблиця 11 – Вихідні дані щодо часу виконання кожної роботи

Спеціаліст	Час виконання, днів				
	Програма 1	Програма 2	Програма 3	Програма 4	Програма 5
Рюмін	2	4	1	3	3
Глухов	1	5	4	1	2
Зайцев	3	5	2	2	4
Коваленко	1	4	3	1	4
Іванов	3	2	5	3	5

Необхідно розподілити роботи між програмістами, щоб загальний час розробки усіх програмних продуктів був мінімальний.

ПЕРЕЛІК ЛІТЕРАТУРИ

1. Баранкевич М.М., Антонів В.Б. Вступ до математичної економіки. Фундаментальні моделі. – Дрогобич: Коло, 2009. – 348 с.
2. Бахрушин В.Є. Математичне моделювання: Навч. посіб. – Запоріжжя: ГУ «ЗІДМУ», 2004. – 140 с.
3. Башун М. Економіко-математичне моделювання процесу управління запасами підприємства // Схід. – №2. – 2008. – С.43-45.
4. Економіко-математичне моделювання: Навч. посіб. / За ред. О.Т. Іващука. – Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. – 704 с.
5. Економіко-математичне моделювання: Навч. посіб. / За заг. ред. В.В. Вітлінського. – К.: КНЕУ, 2008. – 536 с.
6. Економіко-математичне моделювання: Навч. посіб. / За ред. О. Т. Іващука. – Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. – 704 с.
7. Жильцов О.Б. Математичне програмування (з елементами інформаційних технологій): Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О.Б. Жильцов, В.Р. Кулян, О.О. Юнькова; За ред. О.О. Юнькової. – К.: МАУП, 2006. – 184 с.
8. Казарєзов А.Я., Ципліцька О.О. Економіко-математичне моделювання: Навч. посіб. для самостійного вивчення. – Миколаїв: Вид-во ЧДУ ім. Петра Могили, 2009. – 248 с.
9. Кундышева Е.С. Экономико-математическое моделирование: Учебник для вузов / под ред. Б.А. Суслакова. – М.: Изд.-торг. корпорация «Дашков и К», 2010. – 424с.
10. Лугінін О.Є. Економетрія: Навч. посіб. – К.: Центр учбової літератури, 2008. – 278 с.
11. Мамонов К.А. Економіко-математичне моделювання. – Харків: ХНАМГ, 2009. – 86 с.
12. Невежин В.П., Кружилов С.И. Сборник задач по курсу «Экономико-математическое моделирование». – М.: ОАО «Издательский дом «Городец», 2005. – 320 с.
13. Орлова И.В. Экономико-математическое моделирование: Практическое пособие по решению задач. – М.: Вузовский учебник, 2005. – 144 с.
14. Пелих А.С. Экономико-математические методы и модели в управлении производством / А.С. Пелих, Л.Л. Терехов, Л.А. Терехова. – Ростов н/Д: «Феникс», 2005. – 248 с.
15. Стеценко І.В. Моделювання систем: навч. посіб. / І.В. Стеценко; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси: ЧДТУ, 2010. – 399 с.
16. Стеценко І.В., Бойко О.В. Система імітаційного моделювання засобами сіток Петрі // Математичні машини і системи. – К., 2009. – №1. – С.117-124.
17. Федосеев В.В. Математическое моделирование в экономике и социологии труда. Методы, модели, задачи. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 167 с.
18. Шелобаев С.И. Экономико-математические методы и модели: Учеб. пособ. для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 287 с.
19. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособ. для вузов / Под ред. В.В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 391 с.
20. Kelton W.D., R.P. Sadowski, and D.A. Sadowski: Simulation with Arena, McGraw-Hill, New York (1998).
21. Systems Modeling Corporation: Arena User’s Guide, Version 4.0, Sewickly, Pennsylvania (1999).