

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**О. О. Ситник, К. М. Ключка, В. В. Палагін, О. С. Гавриш,  
І. Б. Семко**

**ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗРАХУНОК НЕЛІНІЙНИХ  
ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ**

**Навчальний посібник**

Черкаси  
2019

УДК 621.3.011.7(075.8)  
Ч 66

*Рекомендовано до друку  
Вченою радою Черкаського державного  
технологічного університету,  
протокол № 4 від 21.10.2019 р.*

***Автори:***

**Ситник Олександр Олександрович,  
Ключка Костянтин Миколайович,  
Палагін Володимир Васильович,  
Гавриш Олександр Степанович,  
Семко Інга Борисівна**

***Рецензенти:***

*Задорожний І. С.*, доктор технічних наук, професор Східноєвропейського університету економіки і менеджменту;

*Поздєєв С. В.*, доктор технічних наук, професор Черкаського інституту пожежної безпеки НУЦЗ України.

Ч – 66 Чисельний розрахунок нелінійних електричних кіл: навч. посібник/  
О. О. Ситник, К. М. Ключка, В. В. Палагін, О. С. Гавриш, І. Б. Семко; М-  
во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси : ЧДТУ,  
2019. – 140 с.

Матеріал навчального посібника включає питання, що входять до навчальних програм обов'язкових дисциплін «Промислова електроніка», «Математичне моделювання технічних систем» та «Методи моделювання систем і складних об'єктів», що читають здобувачам вищої освіти, які навчаються за спеціальностями 122 «Комп'ютерні науки», 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», 172 «Телекомунікації та радіотехніка» та інші.

Структурно навчальний посібник розділено на 4 розділи, в яких описуються сучасні методи розв'язку задач аналізу нелінійних електричних кіл. Розглянуто моделі і методи розв'язку задач аналізу, які характеризуються меншими затратами часу на розрахунок кола, дозволяють прискорити збіжність обчислювального процесу. На основі запропонованих моделей та методів в середовищі MatLab розроблені засоби комп'ютерного аналізу електричних кіл і наведено результати їх використання для різних практичних схем. Проведено порівняльний аналіз показників розрахунків, проведених різними запропонованими методами. В кінці кожного подано список контрольних питань для самоперевірки.

Видання розраховане на здобувачів та аспірантів технічних спеціальностей ЗВО України, а також широке коло фахівців, пов'язаних зі сферою моделювання електричних кіл.

## ЗМІСТ

Вступ	5
1. РІВНЯННЯ ОПИСУ НЕЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ	8
1.1 Сутність завдання аналізу електричних кіл	8
1.2 Вибір моделей нелінійних елементів електричних кіл	10
1.2.1 Моделювання біполярного транзистора	10
1.2.2 Моделювання діода і стабілітрона	13
1.2.3 Моделювання багатоємітерного транзистора	14
1.3 Формування рівнянь кола	16
1.4 Методи розв'язання рівнянь кола при розрахунку статичного режиму	18
1.5 Методи чисельного інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь	22
1.6 Метод підсумовування кінцевих збільшень	24
1.7 Способи підвищення ефективності програм аналізу електричних кіл	26
Контрольні питання для самоперевірки	27
2. ВУЗЛОВІ МЕТОДИ	28
2.1 Суть методу вузлових потенціалів	28
2.2 Використання вузлових рівнянь при розрахунку статичного режиму	30
2.3 Комбіновані алгоритми, що використовують інформацію про становище точки наближення	34
2.4 Розрахунок перехідних процесів	46
2.5 Упорядкування вузлових рівнянь при $LU$ – перетворенні	50
Контрольні питання для самоперевірки	52
3. МЕТОД ВИДІЛЕННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ЧАСТИНИ СХЕМИ	53
3.1 Метод поділу електричного кола на лінійну і нелінійну частини	53
3.2 Умова існування і єдиності розв'язку систем алгебраїчних рівнянь	56
3.3 Алгоритм формування системи нелінійних рівнянь	61
3.4 Розв'язування систем нелінійних рівнянь в нормальній формі	69
3.4.1 Реалізація методів Ньютона, Бройде, Давиденка, підсумовування кінцевих збільшень	69
3.4.2 Введення обмежень на область пошуку коренів рівнянь	70
3.4.3 Рух по нормі скороченого вектору нев'язок	77
3.5 Скорочення порядку розв'язуваної системи рівнянь	80
3.6 Аналіз динамічного режиму електричних кіл	86
3.6.1 Формування рівнянь електричного кола	86
3.6.2 Розв'язок рівнянь	89
Контрольні питання для самоперевірки	92
4. АЛГОРИТМИ РЕАЛІЗАЦІЇ МЕТОДІВ	93
4.1 Метод хорд і його модифікація	93

4.2 Реалізація модифікованого методу хорд і дослідження його збіжності	102
4.3 Застосування модифікованого методу хорд для розв'язання вузлових рівнянь	115
4.4 Комбінований алгоритм I	120
4.5 Комбінований алгоритм II	122
4.6 Розв'язання систем рівнянь методами випадкового пошуку	126
4.6.1 Алгоритм з перерахунком при невдалому кроці	126
4.6.2 Алгоритм випадкового пошуку з покоординатним навчанням	128
Контрольні питання для самоперевірки	131
Висновки	132
Список використаної літератури	135
Додаток А. КОМПЛЕКС КОМП'ЮТЕРНИХ ПРОГРАМ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ	136

## ВСТУП

Проектування і аналіз сучасних електричних пристроїв супроводжується розв'язком таких практичних проблем, як всебічний аналіз статичних і динамічних режимів роботи, проведення різних випробувань, розв'язання складних обчислювальних задач синтезу і аналізу режимів роботи кола. Впродовж багатьох десятиріч традиційним вважався підхід, заснований на поєднанні використання експериментальних і розрахункових методів.

При використанні експериментальних методів дослідження виникає проблема, пов'язана з виготовленням макету реального пристрою. Такий підхід потребує значних часових і матеріальних затрат і дає точні результати лише для конкретної натурної моделі, оскільки складно врахувати розкид параметрів елементів, вплив зовнішніх факторів на роботу електричного кола тощо.

Для ефективного моделювання схем запропонована велика кількість моделей елементів і методів їх дослідження, які постійно поповнюються і вдосконалюються. Так, для опису лінійних елементів і кіл в якості простих математичних моделей використовують системи лінійних алгебраїчних рівнянь, більш складними моделями лінійних кіл є моделі, що описуються диференційними рівняннями. Моделі нелінійних елементів вимагають застосування більш складного математичного апарату порівняно з лінійними і можуть описуватися нелінійними алгебраїчними, диференціальними або інтегральними рівняннями.

Для дослідження режимів роботи електричного кола по постійному струму або напрузі використовуються статичні моделі, в той час як для аналізу частотних характеристик або розрахунку перехідних процесів застосовуються динамічні моделі. Залежно від рівня деталізації електричного пристрою, для його опису можуть застосовуватися як мікро- так і макромоделі, які відповідно описують або одиничний елемент кола (резистор, діод, транзистор тощо) або її окремий вузол чи блок.

Сучасні підходи до аналізу складних електричних кіл засновані на використанні математичного моделювання. Для ефективного розв'язку цієї задачі необхідно оперувати математичними моделями, які, як можна більш точно, описують реальні фізичні процеси, що відбуваються в електричній апаратурі. Із-за наявності в електричних колах нелінійних елементів, їх аналіз практично виключає застосування простих аналітичних розрахунків, а на перший план виходять методи математичного та комп'ютерного моделювання.

При математичному моделюванні завжди виникає задача отримання чисельного розв'язку рівнянь, ефективність вирішення якої залежить від правильності вибору чисельного методу. Отже кінцевий результат залежить не лише від повноти і точності самої математичної моделі, що описує електричне коло, а і від методу розрахунку, який повинен забезпечити оптимальну швидкодію розрахунків і їх точність.

Чисельний розв'язок задач аналізу електричних кіл дозволяє дослідити пристрій практично будь-якої складності, представити результати наочно і при

необхідності здійснити оптимізацію параметрів моделі. На ринку програмних продуктів існує достатньо велика кількість як універсальних так і спеціалізованих (що використовуються для вузького класу кіл) програм, здатних розв'язати задачу, яка сформульована в технічному завданні. Застосування потужних програм моделювання електричних кіл може мати обмеження, обумовлене тим, що їх ліцензійні версії коштують достатньо дорого, а закладені в них моделі та методи обчислень розраховані на дуже широкий клас схем, тому для конкретного випадку не завжди вдається отримати оптимальний результат.

Як альтернатива комерційним пакетам аналізу електричних кіл є програми, самостійно реалізовані розробником з використанням власних синтезованих моделей і запропонованих методів в різних середовищах програмування. Вибір мови визначається більшою мірою смаком, звичками і освіченістю розробника. Особливої популярності останнім часом набули середовища комп'ютерної математики MathCAD, MatLAB, Mathematica, LabView NI та ін. Такі програми володіють гарною швидкістю, гарантують збіжність обчислювального процесу та єдиність розв'язку для певного кола задач, не вимагають багато часу на написання і налагодження. Але головним достоїнством цих програм є те, що вони можуть враховувати всі тонкощі і особливості розв'язуваної задачі.

Навчальний посібник призначений для здобувачів закладів вищої освіти України, які навчаються за спеціальностями 122 «Комп'ютерні науки», 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», 172 «Телекомунікації та радіотехніка» та інші. Для здобувачів цих спеціальностей вміння правильно обирати моделі і методи аналізу електричних кіл є базовою навичкою, що служить основою для розуміння складних фізичних процесів, що протікають в електричній апаратурі. Зміст посібника висвітлює питання, що містяться в навчальних програмах обов'язкових дисциплін «Промислова електроніка», «Математичне моделювання технічних систем» та «Методи моделювання систем і складних об'єктів», які читають здобувачам вищої освіти, згаданих спеціальностей.

Пропонований навчальний посібник розраховано на студентів, які вже мають достатню математичну підготовку з основ диференціального, інтегрального та операційного числення, теорії матриць, алгебри комплексних чисел, методів розв'язку диференціальних рівнянь, мають загальне уявлення про чисельні методами розв'язку рівнянь і їх систем.

У першому розділі розглянуто принципи вибору математичних моделей нелінійних елементів електричних кіл, вимоги до них. Відзначено особливості формування рівнянь електричного кола і описано методи розв'язку рівнянь кола при розрахунку статичного режиму. При аналізі динамічного режиму роботи електричного кола зосереджено увагу на методах чисельного інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь. Викладено метод підсумовування кінцевих збільшень, який може розглядатися як модифікація методу продовження розв'язку по параметру, а також перераховані способи

підвищення ефективності програм аналізу електричних кіл. В другому розділі розглянуто та досліджено методи розв'язку вузлових рівнянь, що описують нелінійні електричні кола. Наведено швидкодіючий алгоритм формування рівнянь кола з виділеною лінійною частиною, записаних щодо струмів нелінійних елементів. У третьому розділі досліджені питання існування та єдиності розв'язку рівнянь. Описані та досліджені алгоритми розв'язку нелінійних рівнянь в нормальній формі, тісно пов'язані з обраною системою незалежних змінних. Розглянуто алгоритми аналізу динамічного режиму електричних кіл, в основу яких покладено метод підсумовування кінцевих збільшень. В четвертому розділі досліджено збіжність методу розв'язку нелінійних алгебраїчних рівнянь, що отримав назву модифікованого методу хорд. Реалізовано запропонований метод при розв'язку вузлових рівнянь і рівнянь кола з виділеною лінійною частиною. В кінці кожного розділу подано перелік контрольних питань для самоперевірки, який дозволяє правильно організувати самостійну роботу здобувача вищої освіти і впевнитись в засвоєнні опрацьованого матеріалу.

# 1. РІВНЯННЯ ОПИСУ НЕЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

## 1.1 Сутність завдання аналізу електричних кіл

Аналіз електричних кіл ставить собі за мету розрахунок вихідних параметрів кола (струмів, напруг, коефіцієнтів підсилення, к.к.д тощо) шляхом заміни реальних схемних компонентів деякими математичними моделями, опис поведінки кола системою рівнянь і розв'язок отриманої системи.

Аналіз кіл є як самостійною задачею, результат розв'язку якої представляє безумовний інтерес для проектувальника радіоелектронної апаратури, дозволяючи більш глибоко вивчити механізм роботи кола на математичній моделі, так і основою для розв'язку завдань аналізу чутливості, статистичного проектування, оптимізації електричних кіл і т.п. [1].

Методи аналізу електричних кіл можуть бути розділені на дві групи: чисельні та символічні. Незважаючи на багато переваг символічних методів, в програмах машинного проектування електричних кіл більш широкого поширення набули чисельні методи аналізу. Понад 75% програм проектування за допомогою комп'ютера реалізують чисельні методи. Для нелінійних електричних кіл характерним є аналіз статичного режиму (розрахунок значень вихідних параметрів при постійних струмах і напругах) і аналіз динамічного режиму (розрахунок перехідних процесів, аналіз у часовій області). Причому, як правило, аналізу динамічного режиму передує розрахунок усталеного до моменту початку перехідного процесу режиму по постійному струму.

Необхідно відзначити, що клас схем, поведінку яких доцільно оцінювати в режимі статички, досить широкий. Цей клас умовно можна поділити на три типи схем:

а) схеми, що працюють на постійному струмі, такі як операційні підсилювачі, вторинні джерела живлення безперервного типу і т.п.;

б) схеми, які можуть бути поділені на дві частини: одна – працює на постійному струмі, друга – на змінному, причому нелінійні елементи містяться тільки в першій частині;

в) схеми розроблені для режиму малого сигналу і аналізовані в частотній області. Однак реальне моделювання напівпровідникових приладів вимагає внесення змін до параметрів малосигнальної моделі для різних робочих точок. Якщо зсув схем змінюється випадково, то в аналізі розкиду на змінному струмі повинен бути використаний і нелінійний аналіз на постійному струмі.

Існують два способи розрахунку статичного режиму. Перший з них передбачає формування систем нелінійних алгебро-трансцендентних рівнянь з подальшим розв'язком будь-яким чисельним методом. Основним недоліком такого способу є відсутність методів розв'язку нелінійних рівнянь, що гарантують збіжність в загальному випадку. Крім того, швидкість збіжності сильно залежить від вибору початкового наближення для змінних.

Відповідно до другого способу статичний режим представляється як



результат перехідного процесу при  $t \rightarrow \infty$ , де  $t$  – час перехідного процесу. Проблема збіжності обчислень відсутня, проте досягається це ціною відносно значних витрат комп'ютерного часу, причому час, що вимагається для розрахунку статичного режиму, може виявитися більшим, ніж час, що витрачається на розрахунок безпосередньо перехідного процесу.

Розвиток чисельних методів дозволив розробити програми аналізу кіл, в яких збіжність при розв'язку алгебро-трансцендентних рівнянь забезпечується в більшості практичних випадків. З цієї причини перший спосіб розрахунку статички виглядає краще.

У загальному випадку задача аналізу нелінійних кіл може бути розділена на наступні три етапи:

1) вибір або розробка моделей елементів, що входять в кола розглянутого класу;

2) вибір методу і розробка алгоритму формування системи нелінійних алгебраїчних або диференціальних рівнянь;

3) вибір методу та розробка алгоритму розв'язку сформульованих систем рівнянь.

До найбільшого успіху приводить розв'язок задач всіх трьох типів в тісній взаємодії.

## 1.2 Вибір моделей нелінійних елементів електричних кіл

Одним з основних питань комп'ютерного проектування електричних кіл є математичне моделювання компонентів кола. Точність математичного опису схемних елементів, найбільшою мірою визначає точність розрахунку всього кола. Таким чином, першою і основною вимогою, що пред'являється до моделей схемних елементів є достатня близькість характеристик моделі і реальних схемних елементів.

Крім цього, як правило, до моделей пред'являються вимоги економічності, універсальності, обумовленості [1]. Бажано, також, щоб модель описувалася параметрами, які можуть бути визначені (розрахунковим або експериментальним шляхом) досить точно.

Для аналізу нелінійних електричних кіл застосовуються частково-лінійні і нелінійні моделі. Використання безперервної нелінійної моделі, справедливою для всіх областей роботи приладу значно простіше ніж частково-лінійної, що є однією з основних причин широкого поширення перших в універсальних програмах аналізу.

При виборі моделей напівпровідникових елементів повинен бути знайдений певний компромісний варіант, що враховує в тій чи іншій мірі вищезазначені вимоги.

**1.2.1 Моделювання біполярного транзистора.** При розробці неперервної моделі струм визначається дрейфовими і дифузійними компонентами, рівняннями безперервності, результуючим об'ємним зарядом і електричним полем. На цьому принципі засновані чотири найбільш поширені моделі біполярних транзисторів: модель Еберса-Молла, керована зарядом модель Гуммеля-Пуна, модель Лінвіла з зосередженими параметрами і локальні Т та П-подібні моделі нелінійних приростів Джіаколлео [2, 3].

Порівняльний аналіз цих моделей неодноразово проводився в літературі. У більшості випадків перевага віддається моделі Еберса-Молла, оскільки, при практично однаковій точності з моделлю Гуммеля-Пуна і односекційною моделлю Лінвіла, модель Еберса-Молла відображає зв'язок зовнішніх струмів з напругою на переходах, що надзвичайно зручно при внутрішньо-схемних розрахунках.

Модель Еберса-Молла використовується в популярних програмах моделювання електричних кіл, наприклад в Micro-Cap.

Вирази для емітерного і колекторного струмів транзистора в моделі Еберса-Молла мають вигляд:

$$\begin{aligned} i_e &= I_{01} \cdot (\exp(u_e / \varphi_T) - 1) - \alpha_I \cdot I_{02} \cdot (\exp(u_e / \varphi_T) - 1) \\ i_k &= \alpha_N \cdot I_{01} \cdot (\exp(u_e / \varphi_T) - 1) + I_{02} \cdot (\exp(u_e / \varphi_T) - 1) \end{aligned} \quad (1.1)$$

де  $I_{01}, I_{02}$  – зворотні струми насичення діодів, що представляють емітерний і

колекторний перехід;

$\varphi_T$  – температурний потенціал;

$\alpha_N$ ,  $\alpha_T$  – коефіцієнт підсилення по струму кола із загальною базою відповідно для прямих та інверсних активних областей.

Ідеальна модель Еберса-Молла зазвичай доповнюється наступним:

1) вводяться об'ємні опори емітерної, колекторної та базової областей;

2) паралельно до емітерного і колекторного діодів включається  $V$  опір витоків  $p$ - $n$  переходів;

3) вводять виправні коефіцієнти  $m(1 < m < 2)$ , що враховують відміну температурного потенціалу  $\varphi_T$  від теоретичного;

4) параметри моделі розглядаються залежними від режиму.

Залежність від режиму найчастіше вводиться для коефіцієнта підсилення по струму  $\alpha_N$ . Зазвичай використовується залежність від режиму коефіцієнта підсилення по струму кола з загальним емітером  $\beta_N$ , що пояснюється зручністю вимірювання, а  $\alpha_N$  потім розраховується за відомим співвідношенням. Отримання теоретичного виразу, що описує залежність  $\beta(i, u)$ , де  $u$  та  $i$  відповідно напруга та струм  $p$ - $n$  переходу, який забезпечував би достатнє співпадіння з експериментом, є складним завданням. Тому в моделях використовують різні вирази для залежності  $\beta(i, u)$ , що апроксимують експериментальні характеристики.

Для розрахунку нелінійних електричних кіл у статичному режимі можуть бути застосовані моделі, які як і модель Еберса-Молла отримані з одновимірної теорії транзистора. Моделі, що враховують двовимірний характер процесів в транзисторі, широкого застосування при розрахунку кіл не знайшли.

Інерційність процесів в транзисторі враховується введенням дифузійних і бар'єрних ємностей  $p$ - $n$  переходів, розраховується як

$$C_{ge(k)} = \tau_{\alpha N(I)} \cdot \Pi_{e(k)}, \quad (1.2)$$

$$C_{\delta e(k)} = \frac{R_{1(2)}}{(V_{ze(k)} - u_{e(k)})^{N_{e(k)}}} \quad (1.3)$$

$de_{e(k)}$  – динамічна провідність емітерного (колекторного) переходу;

$\tau_{\alpha N(I)}$  – постійні часу передачі струму емітера (колектора);

$R_{1(2)}$  – коефіцієнт пропорційності;

$V_{ze(k)}$  – контактні потенціали переходів;

$N_{e(k)}$  – показники, що залежать від градієнта розподілу домішок в переходах транзистора.

Модифікована модель Еберса-Молла з урахуванням реактивних елементів

представлена на рис.1.1. Еквівалентні кола більш високого порядку можуть бути отримані, наприклад, двополюсною апроксимацією коефіцієнтів підсилення  $\alpha_N(p)$  и  $\alpha_1(p)$ .

У програмах аналізу статичного режиму застосовані два варіанти моделі транзистора. Перший варіант представляє собою ідеальну модель Еберса-Молла, доповнену об'ємними опорами областей транзистора і опорами витоків  $p$ - $n$  переходів.

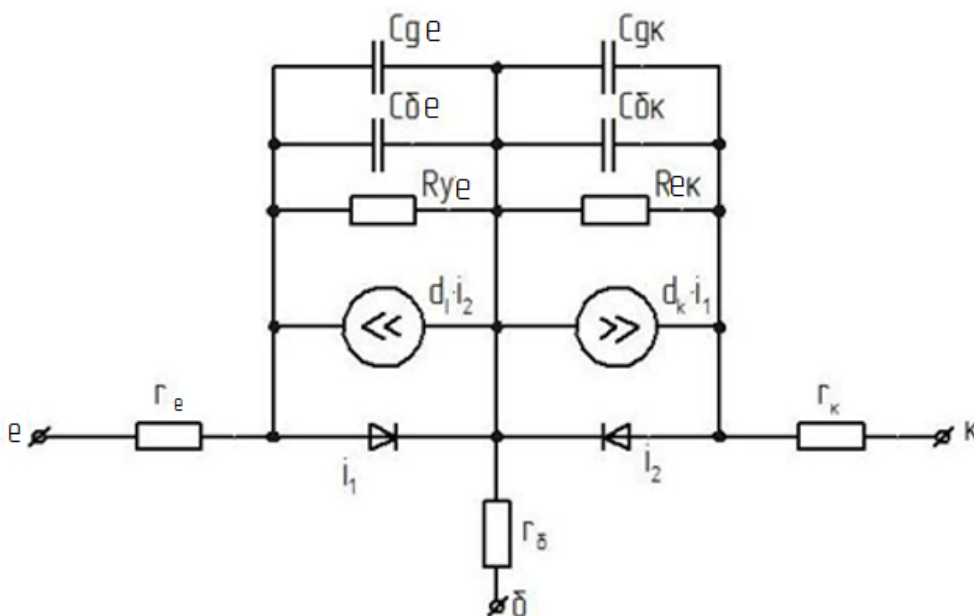


Рисунок 1.1 – Узагальнена модель транзистора

У другому варіанті додатково вводиться залежність коефіцієнта підсилення по струму  $\beta_N$  від режиму. Як апроксимація цієї залежності обраний поліном [4], який дозволяє забезпечити близькість результатів моделювання до результатів експерименту, а коефіцієнти поліному можуть бути отримані спільно з іншими параметрами прийнятої моделі транзистору.

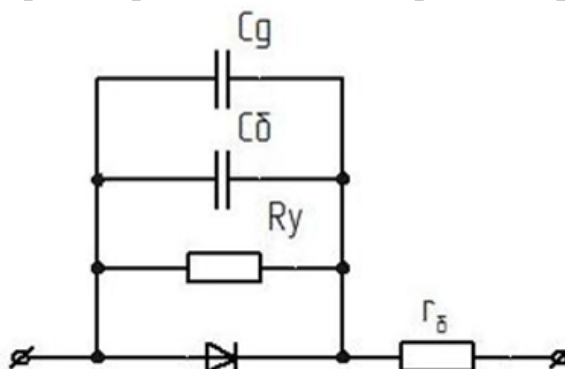


Рисунок 1.2 – Модель діода

У програмах аналізу електричних кіл в якості підсхеми розглядається транзистор, представлений ідеальною моделлю Еберса-Молла. Об'ємні опори

областей транзистора і опори витоків  $p-n$  переходів враховуються як зовнішні по відношенню до власного транзистора. Об'ємні опори включаються за бажанням користувача. Наявність опорів витоків обов'язково, що визначається побудовою програм. Так як вони включені паралельно  $p-n$  переходам, додаткові вузли в еквівалентній схемі не з'являються. У той же час введення опорів витоків дозволяє в деякій мірі врахувати нахил вихідних характеристик транзистора, а також у багатьох випадках покращує умови збіжності процесу розв'язку рівнянь кола.

У програмах аналізу динамічного режиму використана модель, наведена на рис.1.1, причому  $N_{e(k)}$  для виразів (1.3) прийнято рівним  $1/2$ .

Незважаючи на те, що обрані моделі не враховують ряд явищ, що відбуваються в транзисторах, точність їх в більшості випадків достатня для аналізу електричних кіл.

**1.2.2 Моделювання діода і стабілітрона.** В якості нелінійних моделей діодів можуть бути використані модель Еберса-Молла і модель Лінвіла. Які при моделюванні біполярного транзистора, більш поширена модель Еберса-Молла. Еквівалентна схема напівпровідникового діода з урахуванням об'ємного опору бази, опору витоків  $p-n$  переходу, дифузійної та бар'єрної ємностей представлена на рис.1.2. Розрахунок ємностей  $C_d$  і  $C_b$  здійснюється відповідно до виразів, аналогічних (1.2) і (1.3).

Іноді в моделі діода враховують модуляцію об'ємного опору бази. Як і для біполярного транзистора, при моделюванні діода можуть використовуватися моделі більш високого порядку.

У програмах моделювання електричних кіл діоди замінюються еквівалентними схемами, наведених на рис.1.2. Як і раніше наявність опору витоків обов'язкова, а об'ємні опори включаються в розгляд за бажанням користувача програмою.

Еквівалентна схема стабілітрона має вигляд, подібний еквівалентній схемі діода, проте рівняння вольт-амперної характеристики має бути справедливим для області пробою  $p-n$  переходу. Найбільш зручно використовувати нелінійні апроксимації вольт-амперної характеристики стабілітрона.

$$I = I_{\square} + u \int R_y + I_{\square}$$

де

$$I_{\square} = I_{T1} \cdot (\exp(u \int (m\phi_{T1})) - 1),$$

$$I_{\square} = I_{T2} \cdot \exp[(u' - u) \int (m\phi_{T2})].$$

Недолік такої апроксимації – наявність в рівнянні двох експоненційних функцій. Більш зручним апроксимаційним виразом є

$$u = d \cdot \arctg(a \cdot i + b) + c. \quad (1.4)$$

Коефіцієнти  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  визначаються програмним шляхом. Вихідною інформацією для програми розрахунку коефіцієнтів служить експериментально знята вольт-амперна характеристика, представлена в табличній формі.

Похибка апроксимації не перевищує 3%.

**1.2.3 Моделювання багатоемітерного транзистора.** Моделі багатоемітерного транзистора (БЕТ) як правило засновані на розповсюдженні моделі Еберса-Молла на багатоперехідні транзисторні структури. При цьому враховуються не тільки транзисторні структури, утворені кожним емітером, базою і колектором, а й структури, утворені кожною парою емітерів і базою.

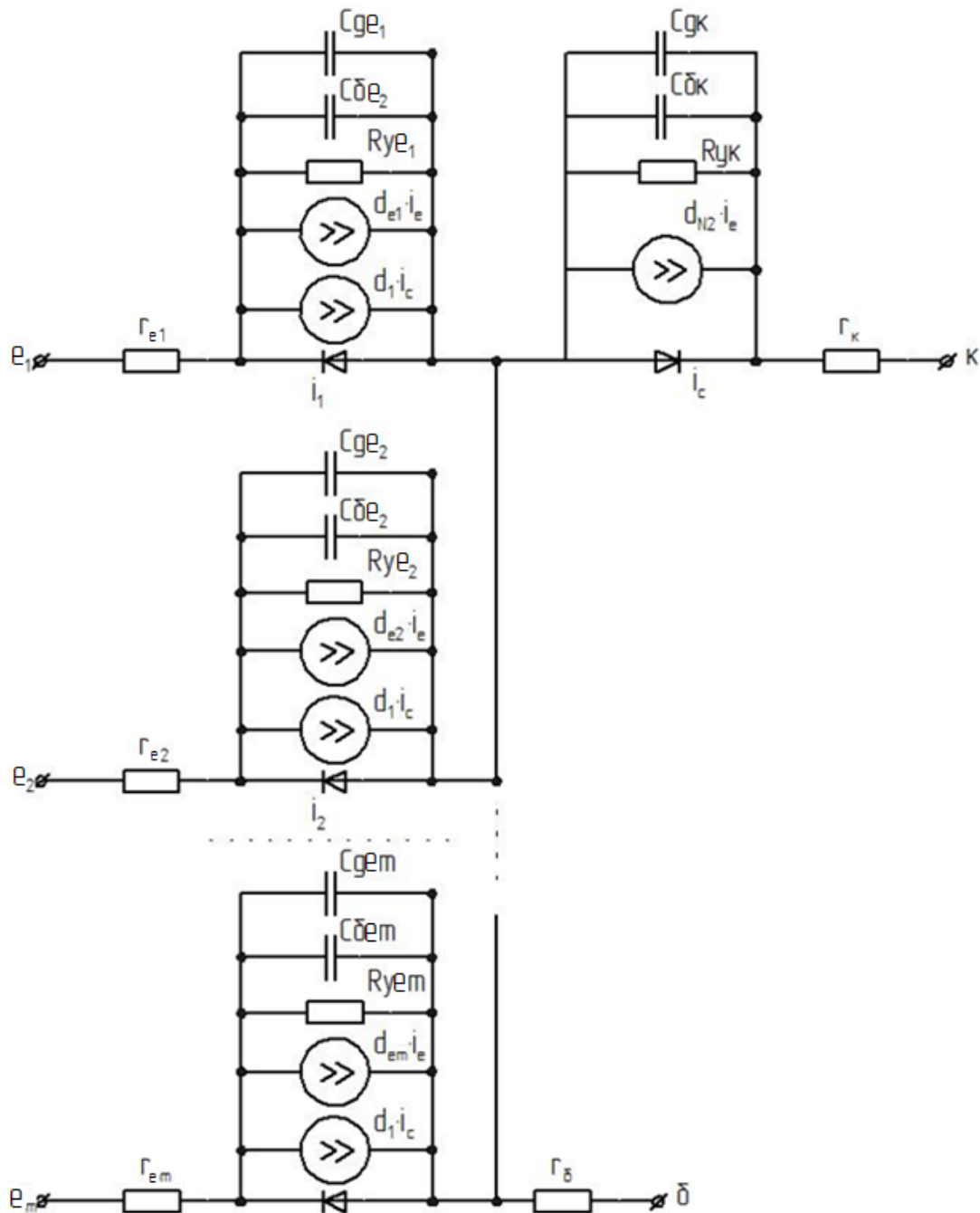


Рисунок 1.3 – Досліджувана модель БЕТ

Розглянута еквівалентна схема БЕТ, в якій модель доповнена об'ємними опорами базової, колекторної та емітерної областей, колами, що враховують вплив підкладки, а також ємності  $p-n$  переходів.

На підставі теоретичної та експериментальної оцінок зроблено висновок, що коефіцієнт передачі струму навіть для двох емітерів які знаходяться поруч не перевищує 0,001. Отже, транзисторним ефектом між емітерами в більшості випадків можна знехтувати.

Іноді при розрахунку кіл з БЕТ допускають, що всі емітери є симетричними, тобто параметри всіх емітерних переходів рівні один одному. Таке припущення, не вносячи великої похибки, дозволяє значно скоротити обсяг вихідної інформації.

В програмах моделювання електричних кіл, призначених для аналізу кіл з БЕТ, використовується два варіанти моделей. Перший варіант враховує взаємний вплив між емітером, а в другому – цей вплив вважається дуже незначним. Обидва варіанти моделі нехтують впливом підкладки. Паралельно  $p-n$  переходам включаються опір витоків  $i$ , при розрахунку динамічного режиму, бар'єрні і дифузійні ємності. За бажанням користувача в розгляд можуть включатися об'ємні опори базової, колекторної і емітерної областей. У спрощеному варіанті прийнято, що всі емітери є симетричними. Бар'єрні і дифузійні ємності розраховуються також, як і для біполярного транзистора. Перший варіант моделі БЕТ наведено на рис.1.3.

### 1.3 Формування рівнянь кола

Для розрахунку лінійних електричних кіл з постійними параметрами розроблені різні методи, в основі яких лежать закони Кірхгофа і Ома. При деяких доповненнях багато з цих методів можуть бути застосовані і для розрахунку нелінійних кіл.

При виборі методу формування рівнянь кола необхідно враховувати наступні міркування.

По-перше, метод повинен дозволити розробити швидкодіючий алгоритм формування рівнянь, що описують поведінку кола. Ця вимога особливо важлива для програм багатоваріантного аналізу.

По-друге, формована система рівнянь повинна мати по можливості найменший порядок. Це дозволяє отримати економію часу розрахунку на етапі розв'язку систем рівнянь за рахунок виконання математичних операцій над масивами чисел меншої розмірності і веде до зменшення використовуваної пам'яті комп'ютера. Виграш комп'ютерного часу особливо істотний при аналізі нелінійних кіл.

Крім цього, до формованої системі рівнянь повинні бути легко застосовані різні чисельні методи розв'язку систем нелінійних рівнянь. Від виконання цієї вимоги залежить простота написання та налагодження програми аналізу, полегшується внесення змін до програми.

В основі алгоритмів формування систем рівнянь, які використовуються в більшості сучасних програм аналізу, лежать методи, які відносяться до групи так званих методів визначальних координат. В основі даних методів лежать ідеї про можливість виділення з усіх струмів і напруг, які повинні бути визначені, деякої групи змінних, щодо яких складаються і розв'язуються незалежні рівняння. Отримавши значення змінних, що відносяться до такої групи, інші струми і напруги знаходяться за допомогою досить простих співвідношень.

До методів визначальних координат, відносяться метод контурних струмів, метод вузлових потенціалів, метод поділу кола на лінійну і нелінійну частини, метод напруг зв'язків і метод змінних стану.

Переважає більшість сучасних програм аналізу нелінійних електричних кіл використовують для формування рівнянь кола метод вузлових потенціалів і метод змінних стану.

Основною перевагою першого з них є виняткова простота формування рівнянь. При використанні даного методу не виникає необхідність в матричних перетвореннях, які потребують, як правило, значних витрат комп'ютерного часу і його оперативної пам'яті.

Недоліки методу вузлових потенціалів пов'язані, по-перше, з обмеженням, властивими однорідному координатному базису (наприклад, в аналізованих колах можуть бути залежні джерела розташовані поблизу тільки одного типу), і, по-друге, з неможливістю використовувати для розрахунку перехідних процесів добре розвинені явні методи чисельного інтегрування.

Обмеженість однорідного координатного базису можна подолати



розширюючи систему координат спеціальними процедурами. Крім цього, обмеженість не суттєва для кіл, що містять діоди, стабілітрони, біполярні, багатоємні і польові транзистори і метод вузлових потенціалів може успішно використовуватися для розрахунку кіл з перерахованими вище елементами.

Найбільш поширений в програмах аналізу кіл метод зміни стану дозволяє інтегро-диференціальне рівняння  $n$ -ого порядку, що описує поведінку електричного кола, звести до системи з  $n$  рівнянь першого порядку в формі Коші, необхідної для явних методів чисельного інтегрування, які широко використовувалися в перших вітчизняних і зарубіжних універсальних програмах аналізу. Метод застосовується до кіл, що містять всі чотири види залежних джерел. При аналізі нелінійних кіл рівняння змінних стану записуються у вигляді:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= A_1 \cdot X + A_2 U + A_3 \cdot X_H, \\ U_B &= A_4 \cdot X + A_5 \cdot U + A_6 \cdot X_H, \\ V(X_H) &= A_7 \cdot X + A_8 \cdot U + A_9 \cdot X_H,\end{aligned}\tag{1.5}$$

де  $A_1 - A_9$  – коефіцієнтні матриці;

$X$  і  $\dot{X}$  – вектори відповідно змінних стану і похідних змінних стану за часом;

$X_H$  – вектор струмів або напруг нелінійних двополюсників;

$V(X_H)$  – вектор-функція вольт-амперних характеристик нелінійних елементів;

$U$  – вектор незалежних джерел;

$U_B$  – вектор вихідних параметрів.

Отримання матриць  $A_1 - A_9$  – одна з основних проблем методу змінних стану. Відомо досить багато алгоритмів формування рівнянь виду (1.5). В таких випадках процедура формування викликає великі матричні перетворення, що вимагають значну кількість оперативної пам'яті. Контури з ємностей і джерел напруги і перетину індуктивностей і джерел струму усуваються додатковими перетвореннями рівнянь стану.

Розрахунок статичного режиму резистивних кіл метод змінних стану призводить до системи рівнянь в нормальній формі, яка збігається з рівняннями кола з виділеною лінійною частиною. Рівняння в нормальній формі найбільш практичні для схем малого і середнього розміру з великим числом резисторів. Для кіл, що містять велику кількість  $p$ - $n$  переходів, більш ефективними можуть бути вузлові рівняння. Вочевидь, доцільність застосування методу змінних стану або методів вузлових потенціалів для аналізу кіл повинна визначатися в кожному конкретному випадку.

Метод вузлових потенціалів використовується в багатьох програмах моделювання електричних кіл, наприклад в САПР DesignLab, в склад якої входить програма PSpice. Метод змінних стану реалізований в програмах Or-

CAD, P-CAD багатьох інших.

## 1.4 Методи розв'язання рівнянь кола при розрахунку статичного режиму

При аналізі електричних кіл в режимі великого сигналу з'являється завдання розв'язку систем нелінійних алгебраїчних рівнянь, що описують сталий стан кіл. Як відомо, отримати точний розв'язок таких рівнянь загальному вигляді неможливо і для пошуку коренів використовуються різні чисельні методи, які пов'язані з виконанням послідовних наближень для рівнянь нев'язок.

$$F(X) = 0 \quad (1.6)$$

де  $F(X) = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t$ ,  $F(X) = [f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)]^t$ ,  $t$  – означає транспонування.

Всі чисельні методи можуть бути розділені на дві великі групи [7]:

- 1) ітераційні методи;
- 2) методи мінімізації.

В основі ітераційних методів лежить ідея вибору певного початкового наближення коренів системи нелінійних рівнянь і уточнення їх за якоюсь ітераційною схемою, наприклад

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - C^{(k)} \cdot G^{(k)} \cdot F(X)^{(k)} \quad (1.7)$$

де  $C^{(k)}$  – числовий множник;

$G^{(k)}$  – деяка матриця;

$F(X)^{(k)}$  – вектор нев'язок;

$K$  – номер ітерації.

Застосування ітераційних методів пов'язане з двома основними труднощами. По-перше, процес обчислень може бути розбіжним і, по-друге, збіжність може бути настільки повільною, що практично неможливо досягти задовільної близькості до розв'язку.

Різні методи мінімізації засновані на переході від розв'язку системи рівнянь до пошуку мінімуму деякої функції

$$Q = Q(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1.8)$$

яка перетворюється в нуль при рівності всіх нев'язок  $f_i(X)$  нулю.

Найбільш поширеною є мінімізація функції якості, представленої як сума квадратів нев'язок

$$Q = \sum_{i=1}^n [f_i(X)]^2. \quad (1.9)$$

З методів мінімізації при розв'язанні систем лінійних і нелінійних рівнянь виду (1.6) найбільш часто використовуються детерміновані методи оптимізації першого і другого порядків, які мають низку вельми істотних недоліків.

Останнім часом дуже багато уваги привертають методи випадкового пошуку. Гарна збіжність, простота реалізації і налагодження робить застосування цих методів в багатьох випадках дуже перспективним. Можливий варіант, коли алгоритм випадкового пошуку, що застосовується для розв'язання деяких систем нелінійних рівнянь, в деяких випадках застосування методів мінімізації виявляється єдиною можливим шляхом розв'язання систем нелінійних алгебраїчних рівнянь, оскільки використання ітераційних методів для цих же систем рівнянь, не дозволяло знайти корні.

Алгоритми випадкового пошуку можуть використовуватися при аналізі статичного режиму. Показано, що алгоритм випадкового пошуку з навчанням може успішно використовуватися для обчислення початкового наближення більш вдало, ніж нульове.

У більшості сучасних програм аналізу нелінійних електричних кіл для розв'язання систем алгебраїчних рівнянь використовуються алгоритми, в основі яких лежить метод Ньютона або його модифікації [4,7]. Відомо, що це один з найбільш потужних ітераційних методів, що володіє квадратичною швидкістю збіжності в околі розв'язку.

Ітераційна схема, відповідна методу Ньютона, для системи рівнянь (1.6) має вигляд

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - W^{-1}(X^{(k+3)}) \cdot F(X)^{(k)} \quad (1.10)$$

де  $W(X)$  – якобіан системи рівнянь (1.6).

Процес ітерації триває до тих пір, поки вектор збільшень незалежних змінних і/або вектор нев'язок не стануть досить близькі до нуля. Як міра близькості до нуля використовується норма відповідного вектору.

Основний недолік методу Ньютона полягає в тому, що метод збігається тільки при наявності гарного початкового наближення. Так як при аналізі електричних кіл достовірні відомості про такі наближення, як правило, відсутні і процес розв'язку починається з точки  $X^{(0)} = [0, 0, \dots, 0]^t$ , то для запобігання розбіжностей ітераційного процесу доводиться застосовувати різні додаткові прийоми.

Так, відомою модифікацією методу Ньютона є метод Матвеева-Бройде, сенс якої полягає в тому, що норма вектора нев'язок, яка повинна прагнути до нуля при підході до розв'язку, ніколи не передбачається наростаючою. З цією

метою в ітераційну формулу (1.10) перед вектором збільшень незалежних змінних, що визначається з розв'язку лінійної системи рівнянь

$$W(X^{(k)}) \cdot X^{(k)} = -F(X^{(k)}) \quad (1.11)$$

вводиться коефіцієнту ( $0 < \gamma < 1$ ), що обирається на кожній ітерації або з умови мінімуму норми нев'язок, або з умови, щоб норма нев'язок на кожному наступному кроці розв'язку була б принаймні не більше величини норми нев'язок на попередньому кроці.

При виборі з умови отримання мінімуму норми нев'язок на кожній ітерації може використовуватися будь-який з методів пошуку мінімуму функції однієї змінної. Найбільш ефективні алгоритми прямого пошуку коефіцієнта ґрунтуються на методі чисел Фібоначчі або методі золотого перетину.

При виборі величини  $\gamma$  з умови незбільшення норми нев'язок зазвичай використовується метод половинного ділення [8].

Хоча метод Матвєєва-Бройде виключає розбіжність ітераційного процесу, збіжність досягається не у всіх випадках. Розвиток даного методу в поєднанні з приватною формою методу Давиденка може збігатися більш швидко.

Ідея методу продовження розв'язку по параметру (методу Давиденка) полягає в тому, що система нелінійних рівнянь (1.6) замінюється системою

$$G(X, \theta) = 0,$$

де  $\theta$  – скалярний параметр, що вводиться таким чином, що  $G(X, \theta) = F(X)$ , а при  $\theta = 1$  рівняння  $G(X, 1) = 0$  має відомий розв'язок.

Змінюючи ступінчасто  $\theta$  від 1 до 0, з'являється ряд проміжних задач, які для малих збільшень  $\theta$  можуть бути розв'язані легше (з точки зору збіжності), ніж вихідна задача.

Можуть бути різні способи такої заміни рівнянь. Найбільш поширена реалізація методу продовження розв'язку по параметру при аналізі електричних кіл полягає в ступінчастому включенні джерел в колі від нуля до їх дійсного значення. Це викликано тим, що при аналізі електричних кіл, апріорно відомо, що елементи вектору  $X$  дорівнюють нулю, коли незалежні джерела також дорівнюють нулю.

Поєднання методів Ньютона, Матвєєва-Бройде і Давиденка дозволяє отримати розв'язок в переважній більшості випадків, однак витрати комп'ютерного часу при цьому можуть виявитися достатньо значними.

До найбільшого успіху з точки зору швидкості збіжності та надійності призводять модифікації методу Ньютона, що враховують характер нелінійності вольт-амперних характеристик. З точки зору збіжності методу Ньютона розв'язок повинен здійснюватися щодо напруг для характеристик, які з ростом струму або напруги стають все більш паралельними вісі напруг і щодо струмів,

якщо характеристика з ростом струму або напруги стає все більш паралельною вісі струмів. Різноманітні алгоритми, в основу яких покладено дане міркування, реалізовано в програмах моделювання електричних кіл, причому подібні модифікації дозволяють отримувати розв'язок з будь-яких початкових умов.

Крім поліпшення збіжності обчислювального процесу дані модифікації методу Ньютона дозволяють, як правило, подолати наступні труднощі, пов'язані з експоненціальним характером нелінійності рівнянь, що описують електричні кола розглянутого класу.

Хід розв'язку методом Ньютона рівняння, що описує діодну схему рис.1.4, графічно представлений на рис.1.5. З рис.1.5 ясно, що необхідно вживати заходів проти можливої зупинки обчислювального процесу при вираховуванні експоненційної функції, якщо  $E \gg 0$ .

Хоча, як уже зазначалося вище, в переважній більшості програм аналізу статичного режиму використовуються комбінації відомих методів, в які обов'язково входить метод Ньютона. Проте спроби розробити нові методи та алгоритми розв'язання рівнянь статички електричних кіл не припиняються.

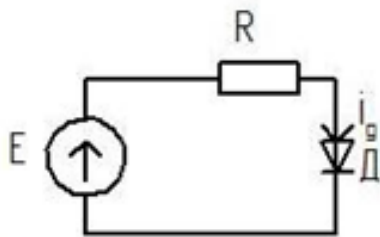


Рисунок 1.4 – Діодна схема

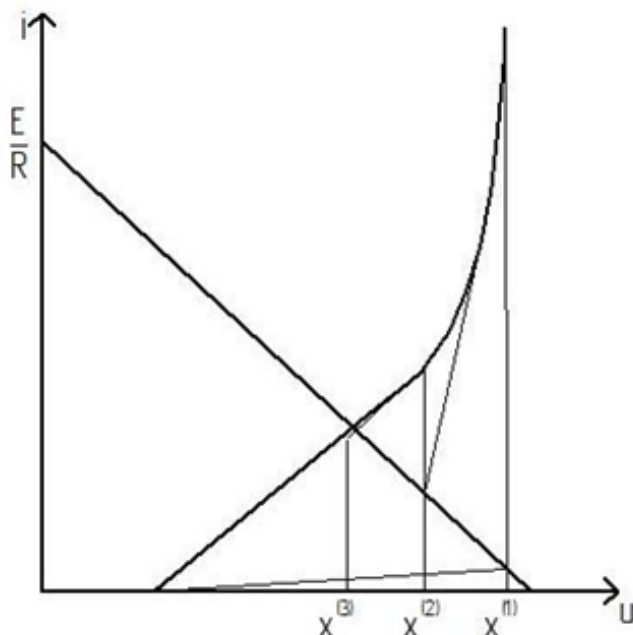


Рисунок 1.5 – Розв'язок рівняння  $f(x) = -R_x + E - u(x)$  згідно методу Ньютона

## 1.5 Методи чисельного інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь

У загальному випадку задача аналізу динамічного режиму нелінійних електричних кіл пов'язана з розв'язком нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь, методи розв'язання яких в даний час розвинені відносно слабо. У перших програмах комп'ютерного проектування використовувалися явні методи чисельного інтегрування, які вимагали приведення інтегро-диференціальних рівнянь до систем диференціальних рівнянь у формі Коші. Найбільшого поширення набули метод Ейлера, метод Рунге-Кутти, методу передбачення і корекції [8].

У більшості більш пізніх програм при чисельному інтегруванні реалізовані неявні методи. Це положення пояснюється перш за все тим, що застосування неявних методів інтегрування дозволяє подолати проблему малих постійних часу і тим самим значно прискорити розрахунок перехідних процесів за рахунок використання більшого кроку інтегрування. Інша перевага неявних методів інтегрування перед явними полягає в тому, що вони не вимагають обов'язкового приведення диференціальних рівнянь до форми Коші і формування рівнянь кола може здійснюватися згідно з методом вузлових потенціалів.

Формули неявного інтегрування використовуються в багатьох сучасних програмах моделювання електричних кіл.

Найбільш поширеними є обернений метод Ейлера [8], що володіє абсолютною стійкістю і є методом першого порядку і формалізується виразом

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \Delta t \cdot \dot{x}^{(k+1)} \quad (1.12)$$

де  $\dot{x}^{(k+1)}$  позначає похідну функцій  $x(t)$  за часом в момент  $t^{(k+1)}$ , і метод другого порядку – метод трапеції [8], згідно з яким значення змінної на  $(K + 1)$ -му кроці інтегрування розраховується відповідно до виразу

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \Delta t \cdot \frac{\dot{x}^{(k)} + \dot{x}^{(k+1)}}{2}. \quad (1.13)$$

Формула неявного інтегрування другого порядку

$$X^{(k+1)} = -\frac{1}{3}X^{(k-1)} + \frac{4}{3}X^{(k)} + \frac{2}{3}X^{(k+1)} \quad (1.14)$$

дозволяє витратити на розрахунок перехідного процесу помітно менше часу.

Останнім часом багато уваги приділяється багатокроковим методам неявного інтегрування, що визначається загальним виразом

$$X^{(k+1)} = \sum_{i=0}^3 d_i x^{k-i} + \Delta t \cdot \sum_{i=-1}^p \beta_i \cdot \dot{x}^{(k-i)}.$$

Недолік неявних методів – необхідність на кожному кроці при переході від моменту часу  $t(k)$  і  $t(k + 1)$  розв'язувати систему нелінійних алгебраїчних рівнянь, що призводить до значних обчислювальних затрат. У зв'язку з цим, для кіл з невеликим розкидом постійних часу, явні методи можуть виявитися більш ефективними.

Застосування методів інтегрування високого порядку дозволяє підвищити точність розв'язку, однак призводить до зниження стійкості процесу інтегрування через зростання числа паразитних розв'язків. При використанні формули неявного інтегрування третього і більш високих порядків стійкість процесу значно знижується. Обмеження на допустимий крок інтегрування при цьому дещо зростають.

Один з найбільш ефективних способів підвищення швидкодії програм розрахунку перехідних режимів є введення змінного кроку інтегрування.

Виходячи з усього сказаного вище, можна зробити висновок, що для розрахунку динамічного режиму нелінійних електричних кіл найбільш доцільним виявляється застосування неявних методів інтегрування. Для підвищення точності і скорочення часу розрахунку крок інтегрування диференціальних рівнянь повинен бути змінним.



## 1.6 Метод підсумовування кінцевих збільшень

Метод підсумовування кінцевих збільшень (ПКЗ), розроблений В.М. Бондаренком, є подальшим розвитком аналога методу накладання для нелінійних кіл. Суть методу ПКЗ при аналізі статичного режиму полягає в тому, що повний розв'язок системи нелінійних рівнянь знаходиться як сума деяких частинних розв'язків. Частинний розв'язок отримується з розрахунку лінеаризованого кола, в якому кожне джерело напруги дорівнює деякій частині  $\Delta E(k)_i$  від повної величини відповідного джерела  $E_i$ , а нелінійні елементи замінюються динамічними провідностями і джерелами, які визначені нев'язками, отриманими на попередніх кроках. Отже, процедуру розрахунку можна розглядати як поетапне включення за кінцеве число кроків джерел живлення від нуля до їх повного значення. Після виведення джерел до повного значення метод ПКЗ переходить в метод Ньютона.

Необхідно відзначити, що з точки зору обчислювальної математики метод ПКЗ може розглядатися як модифікація методу продовження розв'язання по параметру. На відміну від методу Давиденка, в методі ПКЗ точний розв'язок при проміжних значеннях джерел живлення не знаходиться, а нев'язка враховується на кожному наступному кроці.

Метод ПКЗ не гарантує збіжність обчислювального процесу при аналізі статичного режиму нелінійних електричних кіл у загальному випадку, однак при використанні методу ПКЗ спільно з розв'язанням рівнянь щодо комбінованого вектору незалежних змінних для розрахунку великого числа схем різних класів обчислювальний процес завжди є збіжним.

Графічно хід розрахунку кола, наведеного на рис.1.4, з використанням методу ПКЗ представлений на рис.1.6.

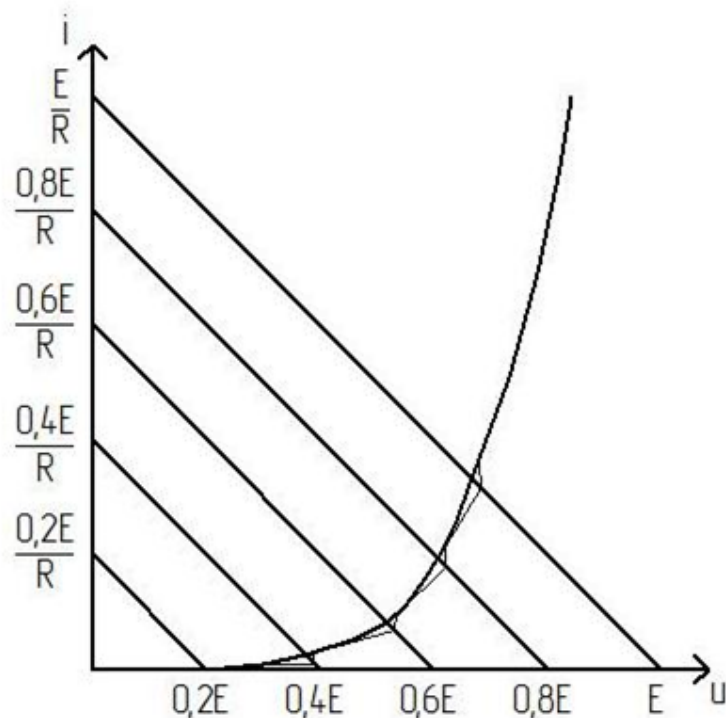


Рисунок 1.6 – Метод підсумовування кінцевих збільшень

Метод ПКЗ виявляється надзвичайно ефективним не тільки при аналізі статичного режиму, але і для розрахунку перехідних процесів. Електротехнічне трактування деяких неявних методів інтегрування дозволяє вважати, що інерційним елементам відповідає наближена схема заміщення, що представляє собою паралельне включення деякої провідності і джерела струму. Вирази для розрахунку параметрів наближених схем заміщення залежать від типу інерційного елемента і реалізованого методу інтегрування. Подібно аналізу статички на кожному часовому інтервалі проводиться одноразовий розрахунок лінеаризованого кола, тобто коло вважається лінійним. Точний розв'язок нелінійних рівнянь не шукають, а нев'язки враховуються на наступному кроці розв'язку у вигляді додаткових джерел.

Результати порівняння методу ПКЗ з методом Рунге-Кутти четвертого порядку, показують, що, хоча при рівному кроці інтегрування метод Рунге-Кутти виявляється точніше методу ПКЗ, останній дозволяє здійснювати розв'язок з набагато більшим кроком інтегрування при цілком прийнятній точності розв'язку.

При аналізі динамічного режиму метод ПКЗ дозволяє значно спростити алгоритм визначення внутрішніх змінних моделей нелінійних елементів.

## 1.7 Способи підвищення ефективності програм аналізу електричних кіл

Необхідність в розрахунку складних кіл спонукала до розробки методів аналізу та прийомів програмування, спрямованих на економію пам'яті комп'ютера і скорочення числа обчислювальних операцій. У сучасних програмах аналізу великих кіл використовуються різні алгоритми, в основу яких покладені метод підсхем і методи розріджених матриць. Суть методу підсхем полягає в розбитті схеми, що описується системою рівнянь  $m$ -ого порядку, на  $n$  частин (підсхем), що представляють собою пов'язану сукупність елементів схеми, поетапним розв'язанням  $n+1$  системи рівнянь, що описують кожну підсхему і зв'язки між ними. Не дивлячись на збільшення числа розрахункових змінних, такий перехід дозволяє значно скоротити обчислювальні витрати і необхідний для розрахунку обсяг пам'яті за рахунок виконання операцій з матрицями меншого порядку. Порівнюючи обчислювальні витрати одного з варіантів методу підсхем з методом Гауса, відзначається, що при аналізі 100-вузлової схеми метод підсхем дає можливість отримати 30-кратний вииграш.

Ще більш ефективні методи, що враховують розрідженість матриці провідності кола і виконують обчислювальні операції тільки з ненульовими елементами. Основу цих методів складає алгоритм  $LU$  – перетворення, ефективність якого при організації операцій тільки з ненульовими елементами сильно залежить від системи рівнянь. Дослідженню різних кіл квазіоптимального упорядкування рівнянь з точки зору як мінімізації обчислювальних витрат, так і збереження обчислювальної стійкості, присвячено досить багато робіт. Найбільшою популярністю користуються схеми впорядкування з використанням  $LU$  – перетворення.

При розв'язку системи рівнянь  $m$ -ого порядку з використанням  $LU$  – перетворення обчислювальні витрати оцінюються як  $10:20 m$  операцій типу множення-додавання, що дає 300-кратний вииграш в порівнянні з методом Гауса при розрахунку 100-вузлового кола.

Організація зберігання тільки ненульових елементів матриці провідності дозволяє значно скоротити витрати пам'яті комп'ютера, так як для зберігання тільки ненульових елементів потрібно приблизно  $5m$  комірок, в той час як повна матриця провідності має  $m^2$  елементів.

Отже, найбільш перспективним способом підвищення ефективності (з точки зору швидкодії і витрат пам'яті комп'ютера) програм аналізу електричних кіл є облік розрідженості матриці вузлових провідностей і організація зберігання та проведення обчислювальних операцій тільки з ненульовими елементами. У деяких випадках рекомендується застосування методу розріджених матриць спільно з методом підсхем.

### *Контрольні питання для самоперевірки*

1. На які етапи може бути розділена задача аналізу нелінійних кіл?
2. Які вимоги пред'являються до математичних моделей?
3. Які моделі біполярних транзисторів найчастіше використовуються на практиці?
4. Як в моделях транзисторів враховується інерційність процесів?
5. Які особливості має модель багатомітерного транзистора порівняно з моделлю одиничного транзистора?
6. Які фактори необхідно враховувати при виборі методу формування рівнянь кола?
7. Назвіть переваги і недоліки методу вузлових потенціалів.
8. В чому полягає сутність методу змінних стану?
9. Які труднощі виникають при застосування ітераційних методів?
10. Які переваги і недоліки методу Ньютона для розв'язку систем алгебраїчних рівнянь?
11. Які існують методи чисельного інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь, що використовуються при аналізі динамічних режимів?
12. В чому полягає сутність методу підсумовування кінцевих збільшень?
13. Завдяки чому можна підвищити ефективність програм аналізу електричних кіл?

## 2. ВУЗЛОВІ МЕТОДИ

### 2.1 Суть методу вузлових потенціалів

Переваги методу вузлових потенціалів привертають в останній час велику увагу з боку розробників програм комп'ютерного аналізу електричних кіл. В значній мірі, цьому сприяє розвиток методів оперування з розрідженими матрицями і неявних методів інтегрування.

Відповідно до даного методу система рівнянь записується відносно вектора потенціалів вузлів кола –  $\varphi$ . Для формування вузлових рівнянь застосовується топологічна матриця  $\Pi$ , звана матрицею інциденцій віток і вузлів [3]. Стовпці матриці  $\Pi$  відповідають віткам кола, а рядки – вузлам, і елемент матриці  $\Pi$ , що знаходиться на перетині  $i$ -ого рядка та  $j$ -ого стовпця, дорівнює  $+1$ , якщо  $j$ -а вітка інцидента  $i$ -му вузлу і цей вузол є початком вітки, дорівнює  $-1$ , якщо вузол є кінцем вітки, і нулю, якщо  $j$ -а вітка не з'єднана з  $i$ -им вузлом.

Система вузлових рівнянь для лінійного кола, що містить пасивні двополюсники і незалежні джерела напруги і струму записується у вигляді:

$$Y \cdot \varphi = J \quad (2.1)$$

де  $Y$  – матриця провідності;

$J$  – вектор струмів.

Розрахунок  $Y$  і  $J$  має здійснюватися відповідно до виразу

$$\begin{aligned} Y &= \Pi \cdot Y_b \cdot \Pi^t \\ J &= \Pi \cdot (J_b - Y_b \cdot E_b). \end{aligned} \quad (2.2)$$

У виразах (2.2) використовуються позначення:  $Y_b$  – діагональна матриця провідностей віток,  $J_b$  – вектор джерел струму;  $E_b$  – вектор джерел ЕРС.

Визначивши з рівняння (2.1) вектор вузлових потенціалів, струми і напруги віток розраховуються за відомими співвідношеннями [3].

Слід підкреслити, що для формування вузлових рівнянь немає необхідності в явному використанні матриці інциденцій  $\Pi$ , дані про топологію кола можуть бути надані у вигляді деяких інформаційних масивів чисел. При цьому для розрахунку матриці провідності  $Y$  і вектору струмів  $J$  використовується алгоритм, зручний як при «ручних» розрахунках, так і при розрахунку на комп'ютері. Так, наприклад, інформація про лінійні резистори може вводиться у вигляді двох масивів, припустимо, позначених  $R$  і  $P_y$ . Перший – масив дійсних чисел, що містить відомості про номінальні значення

резисторів. Розмірність масиву  $R - [i:K_i]$ , де  $K_i$  – кількість лінійних резисторів в аналізованому колі. Масив  $P_y$  – масив цілих чисел розмірністю  $[i:K_i, i:2]$ . Кожному резистору в  $P_y$  відповідають два числа, які вказують на номери вузлів підключення резистора в колі, що розраховується.

При введених позначеннях матриця провідності формується за наступним алгоритмом. Нехай  $K$ -му резистору, номінальне значення якого дорівнює  $R[K]$  в масиві  $P_y$  відповідає пара чисел  $m, n$ . Тоді

$$\begin{aligned} Y[m,m] &:= Y[m,m] + 1/R[K], \\ Y[n,n] &:= Y[n,n] + 1/R[K], \\ Y[m,n] &:= Y[n,m] := Y[m,n] + 1/R[K], \end{aligned} \quad (2.3)$$

Якщо коло, що розраховується, крім джерел напруги і струму містить тільки резистори, то після розрахунку виразів (2.3)  $K_i$  раз (з відповідною вибіркою чисел  $m, n$  і  $R[K]$ , з масивів  $R$  і  $P_y$ ) матриця  $Y$  виявляється сформованою. Подібним чином розраховується і вектор зі струмів  $J$ .

Можливість використання для формування вузлових рівнянь такого алгоритму в значній мірі визначає ефективність методу вузлових потенціалів, так як немає необхідності у виконанні будь-яких операцій з топологічними матрицями. Формування зводиться до мінімального числа арифметичних операцій, що виконуються згідно з простим логічним правилом.

Вузлові рівняння для нелінійних кіл можуть бути записані у вигляді:

$$\Pi \cdot I_n(\Pi^H \cdot \varphi) - J = 0, \quad (2.4)$$

де  $I_n(\Pi^H \cdot \varphi)$  – струми елементів, виражені в функції вузлових потенціалів.

Метод вузлових потенціалів допускає наявність у колі залежних джерел тільки одного виду – джерела струму, керовані напругою. Отже, нелінійні елементи повинні бути залежними від напруги. Для кіл, що містять діоди, біполярні і багатомітерні транзистори, це обмеження несуттєве.

## 2.2 Використання вузлових рівнянь при розрахунку статичного режиму

Як зазначалося в розділі 1.6, згідно з методом підсумовування кінцевих збільшень повний розв'язок рівнянь шукається як сума частинних розв'язків для лінеаризованих кіл.

Розглянемо хід обчислень в разі, коли рівняння лінеаризованих кіл формуються відповідно методу вузлових потенціалів, а для розрахунку параметрів лінеаризованих кіл заміщення нелінійних елементів, використовується метод Ньютона.

Представимо систему рівнянь (2.4) у вигляді

$$F(\varphi) = \Pi \cdot I_n(\Pi^t \cdot \varphi) - J = 0, \quad (2.5)$$

де  $F(\varphi) = [f_1(\varphi), f_2(\varphi), \dots, f_p(\varphi)]^t$  – вектор струмових нев'язок для вузлів кола;  
 $p$  – кількість вузлів у колі.

Вираз для матриці Якобі  $W(\varphi)$  рівнянь (2.5) записується як

$$F'(\varphi) = W(\varphi) = \Pi \cdot Y_d(\varphi) \cdot \Pi^t,$$

де  $Y_d(\varphi)$  – діагональна матриця динамічних провідностей віток кола.

Позначимо вектор збільшень вузлових потенціалів через  $\Delta\varphi$ . Вектор  $\Delta\varphi$  визначається розв'язком системи лінійних рівнянь

$$\Pi \cdot Y_d(\varphi) \cdot \Pi^t \cdot \Delta\varphi = -F(\varphi),$$

або, використовуючи уявлення про матрицю провідності лінеаризованого кола

$$Y(\varphi) \cdot \Delta\varphi = -F(\varphi). \quad (2.6)$$

Вектор вузлових потенціалів на  $K$ -ому кроці розв'язку розраховується як

$$\varphi^{(K)} = \varphi^{(K-1)} + \Delta\varphi^{(K)}.$$

Процес розв'язання припиняється, коли норма вектору  $\Delta\varphi$  стає менше деякого наперед заданого малого числа  $\varepsilon$  при виведених до повного значення незалежних джерелах струму і напруги.

Нелінійні двополюсники в схемі лінеаризованого кола представлені на

рис.2.1, де  $g_d^{(K)}$  і  $j^{(K)}$  – відповідно динамічна провідність двополюсника і нев'язка по струму на  $K$ -ому кроці розв'язку.

Після розрахунку вектора  $\Delta\varphi$  можуть бути визначені збільшення напруг на лінійних двополюсниках і потім, з розгляду схеми заміщення рис.2.1, збільшення для струмів нелінійних двополюсників

$$\Delta i_l^{(K)} = g_d^{(K)} \cdot \Delta u_l^{(K)} - j^{(K)}.$$

Нижній індекс при  $\Delta u_l^{(K)}$  і  $\Delta i_l^{(K)}$  вказує, що значення збільшень напруги і струму знайдені з розрахунку лінеаризованого (наближаючого) кола. Повні значення напруг і струмів визначаються як

$$\begin{aligned} u_l^{(K)} &= u_l^{(K-1)} + \Delta u_l^{(K)}, \\ i_l^{(K)} &= i_l^{(K-1)} + \Delta i_l^{(K)}, \end{aligned}$$

позначивши

$$\begin{aligned} i_n &= v(u_l), \\ u_n &= v^{-1}(i_n), \end{aligned}$$

де  $v(u)$  – залежність струму нелінійного двополюсника від прикладеної напруги, запишемо вираз для струмової нев'язки

$$j^{(K)} = i_l^{(K)} - i_n^{(K)}. \quad (2.7)$$

Такий розрахунок нев'язки  $j^{(K)}$  відповідає переходу до точки чергового наближення паралельно вісі струмів. При цьому для  $g_d^{(K)}$  справедливо

$$g_d^{(K)} = v'(u_l^{(K)}), \quad (2.8)$$

де штрих позначає диференціювання за напругою.

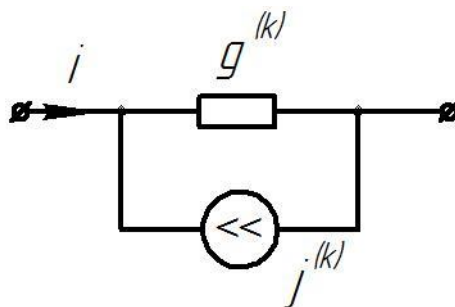




Рисунок 2.1– Лінеаризована схема заміщення

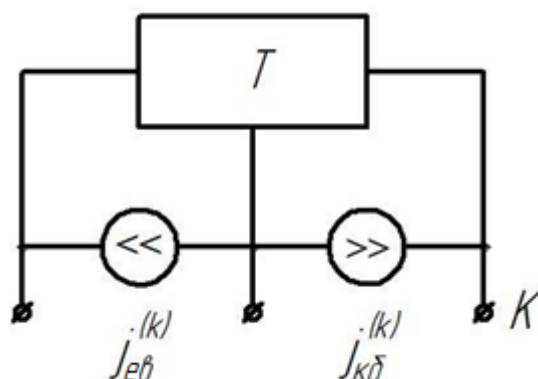


Рисунок 2.2–Представлення транзистора лінеаризованого кола

Транзистор в лінеаризованому колі замінюється лінійною підсхемою, наведеною на рис.2.2, укорочена матриця провідності якої при використанні ідеальної моделі Еберса-Молла має вигляд

$$G_T^{(K)} = \begin{bmatrix} g_e^{(K)} & -\alpha_i \cdot g_K^{(K)} \\ -\alpha_N \cdot g_e^{(K)} & g_K^{(K)} \end{bmatrix}.$$

$g_e^{(K)}$  і  $g_K^{(K)}$  – динамічні провідності емітерного і колекторного діодів.

Джерела  $j_{eб}^{(K)}$  і  $j_{кб}^{(K)}$  визначаються:

$$\begin{aligned} j_{eб}^{(K)} &= j_e^{(K)} - \alpha_1 \cdot j_K^{(K)}, \\ j_{кб}^{(K)} &= j_K^{(K)} - \alpha_N \cdot j_e^{(K)} \end{aligned}$$

і  $j_e^{(K)}$ ,  $j_K^{(K)}$  – струмові нев'язки відповідно для емітерного і колекторного діодів еквівалентної схеми транзистора.

Для формування матриці провідності лінеаризованого кола використовуються алгоритм, викладений в 2.1. Крім лінійних резисторів, в матрицю увійдуть також провідності лінеаризованих схем заміщення нелінійних елементів.

Незалежні джерела струму і напруги представляються у вигляді кусково-лінійних функцій умовного часу  $t$  (умовного, так як ведеться розрахунок статички). Задаючись фронтом наростання значень джерел і кроком по часу  $\Delta t$ , визначається кількість кроків, за яке джерела виводяться від нуля до свого повного значення. Очевидною вимогою є, щоб тривалості фронтів наростання

всіх незалежних джерел були кратні кроку  $\Delta t$ .

Незважаючи на деяке ускладнення вихідної інформації, такий підхід має ряд переваг. Так, можливість роздільного включення джерел живлення полегшує завдання аналізу кіл з декількома стійкими станами. Ставлячи для вхідного сигналу різні значення, можна отримати статичну передавальну характеристику.

Програми побудовані таким чином, що якщо в певний момент часу збільшення незалежних джерел виявилися рівними нулю, то шукається розв'язок рівнянь методом Ньютона, а потім здійснюється перехід до початку нового фронту джерел.

Застосування методу ПКЗ дозволяє проводити аналіз кіл у багатьох випадках, коли «чистий» метод Ньютона виявляється неспроможним. Однак часто для отримання розв'язку потрібно задавати надзвичайно велике число кроків, за яке джерела виводяться до повного значення, що призводить до значних витрат комп'ютерного часу.

Значно прискорити процес розв'язку можна шляхом реалізації для розрахунку параметрів лінеаризованих кіл заміщення нелінійних елементів модифікацій методу Ньютона, що використовують для поліпшення збіжності характерні особливості вольт-амперної характеристики нелінійних елементів.

## 2.3 Комбіновані алгоритми, що використовують інформацію про становище точки наближення

Як зазначалося в розділі 1.4 в ряді вітчизняних і зарубіжних програм аналізу нелінійних електричних кіл реалізовані модифікації методу Ньютона, згідно з якими перехід до нелінійної характеристики здійснюється в залежності від значень  $i_l^{(K)}$  і  $u_l^{(K)}$  паралельно вісі напруг або паралельно вісі струмів.

Так, одна з відомих програм аналізу електричних кіл, що використовує метод змінних стану, і програма, заснована на методі вузлових потенціалів, здійснює розв'язок по методу Ньютона щодо напруг в третьому квадранті і щодо струмів – в першому квадранті нелінійної вольт-амперної характеристики  $p-n$  переходу. Існує програма аналізу електричних кіл, що дає розв'язок щодо струмів для переходів, зміщених в прямому напрямі, коли напруга зростає і щодо напруг, коли вона зменшується.

Розглянемо наступний алгоритм розв'язку рівнянь. В розгляд вводиться деякий масив граничних (максимальних) значень напруг на  $p-n$  переходах. Граничне значення вибирається таким чином, щоб справжній розв'язок свідомо знаходився ліворуч від  $u_{zp}$ . Перехід здійснюється паралельно вісі напруг, якщо чергове із наближень, обчислене з лінеаризованого кола, задовольняє нерівностям

$$\begin{aligned} u_l^{(K)} &> u_{zp} \\ i_l^{(K)} &> -I_0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

При цьому для розрахунку параметрів схем заміщення нелінійних двополюсників використовуються вирази

$$g_d^{(K)} = (i_l^{(K)} + I_0) / (m \cdot \varphi_T), \quad (2.10)$$

$$j^{(K)} = g_d^{(K)} \cdot (u_l^{(K)} - u_n^{(K)}). \quad (2.11)$$

Якщо перша з нерівностей (2.9) не виконується, то перехід здійснюється паралельно вісі струмів.

Звернемося тепер до випадку, коли справедливо

$$\begin{aligned} u_l^{(K)} &> u_{zp}, \\ i_l^{(K)} &\leq -I_0. \end{aligned}$$

Вираз (2.11) при виникненні такої ситуації використаний бути не може, тому що  $u_n^{(K)} = v^{-1}(i_l^{(K)})$  не визначене при  $i_l^{(K)} \leq -I_0$ . Розрахунок нев'язки

відповідно до виразу (2.7) може привести до зупинки обчислювального процесу при розрахунку  $i_n^{(K)}$ .

В даному випадку для подолання цієї проблеми використаний наступний прийом. Оскільки граничні значення напруги відомі, то розрахунок параметрів схеми нелінійного двополюсника може бути виконаний

$$j^{(K)} = i_l^{(K)} - I_0 \cdot (\exp(u_{zp} / (m \cdot \varphi_T)) - 1), \quad (2.12)$$

$$g^{(K)} = I_0 \cdot \exp(u_{zp} / (m \cdot \varphi_T)) / (m \cdot \varphi_T). \quad (2.13)$$

Такий підхід до лінеаризації нелінійного двополюсника при попаданні робочої точки в четвертий квадрант гарантує відсутність переповнення при розв'язку вузлових рівнянь.

В даному випадку розв'язується рівняння змінних стану, в якості яких обрані напруги на  $p$ - $n$  переходах. Якщо на  $K$ -ому кроці розв'язку значення змінної перевищила  $u_{zp}$ , то даній змінній присвоюється граничне значення, тобто робоча точка переноситься в точку, координата якої за напругою дорівнює  $u_{zp}$ . При відповідному розрахунку масиву граничних значень змінних стану з'являється можливість, описаним вище шляхом, значно прискорити процес розв'язку.

У вузловому аналізі таке перенесення робочої точки не змінює значення змінних (вузлових потенціалів), і якщо  $u_l^{(K)}$  досить велике, процес розв'язку буде здійснюватися надзвичайно повільно.

Значного прискорення обчислювального процесу можна досягти якщо в якості лінеаризації нелінійної характеристики використовувати не динамічну провідність, відповідну  $u_{zp}$ , а статичну, тобто лінеаризацію характеристики здійснювати прямою лінією, що проходить через початок координат і точку з координатами  $(u_l^{(K)}, i_n^{(K)})$  де,

$$i_n^{(K)} = I_0 \cdot (\exp(u_{zp} / (m \cdot \varphi_T)) - 1).$$

Для розрахунку нев'язки також використовується вираз (2.12).

Ітераційний процес, відповідний двом розглянутим варіантам алгоритму, графічно представлений на рис.2.3. Розв'язується рівняння для діодного кола рис.1.4. Початкове наближення позначено  $X^0$ .

Використання статичної провідності замість динамічної при розрахунку параметрів лінеаризованої схеми заміщення дозволило в багатьох випадках скоротити час аналізу еола в кілька разів. Кількість ітерацій, необхідна для розв'язку системи вузлових рівнянь при аналізі деяких конкретних схем,

наведено в таблиці 2.1, де перший рядок відповідає розв'язку з використанням динамічної провідності, а другий - статичної. Точність розв'язку в обох випадках однакова.

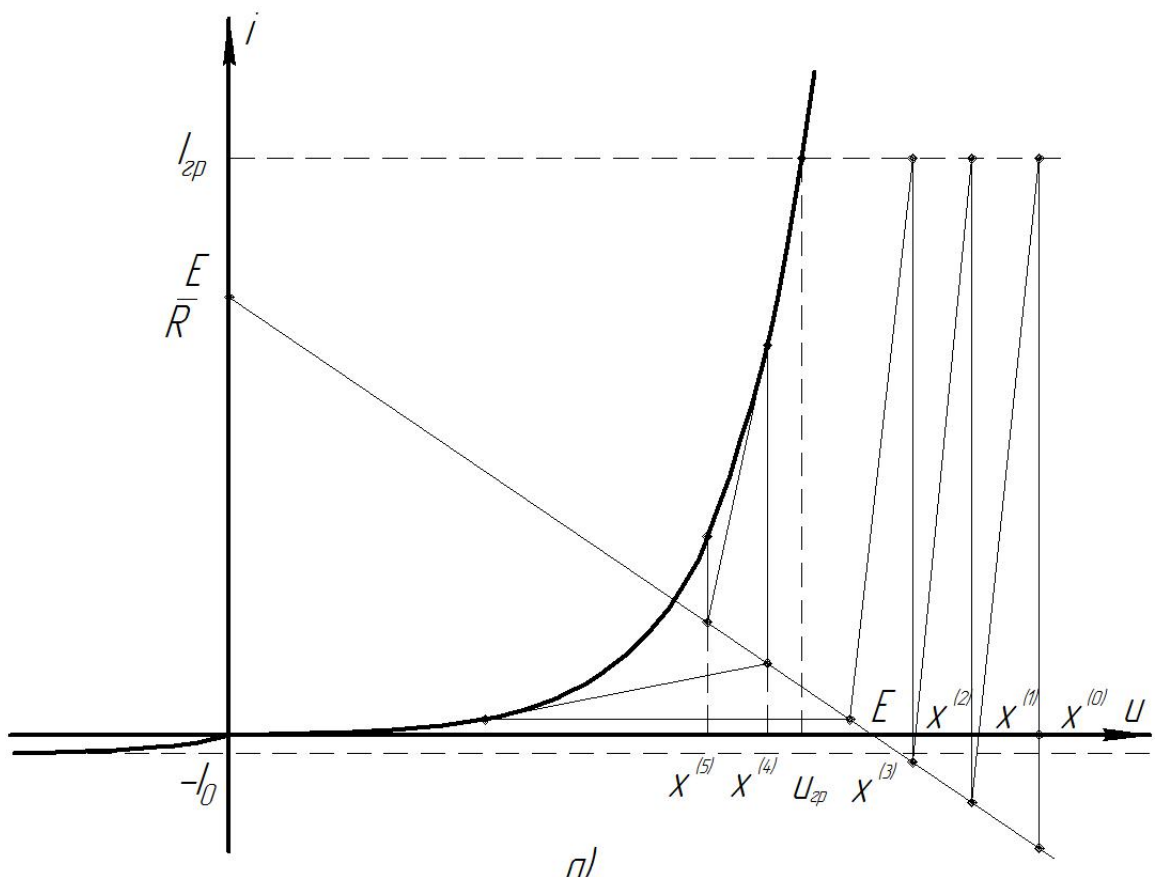
Таблиця 2.1

приклад алгоритму	схема рис.2.4	схема рис.2.5	схема рис.2.7	схема рис.2.8		схема рис.2.9		схема рис.2.11	
				1	2	1	2	1	2
Варіант 1	> 300	> 300	15	> 300	16	> 300	6	5	11
Варіант 2	18	18	15	22	16	20	6	5	11

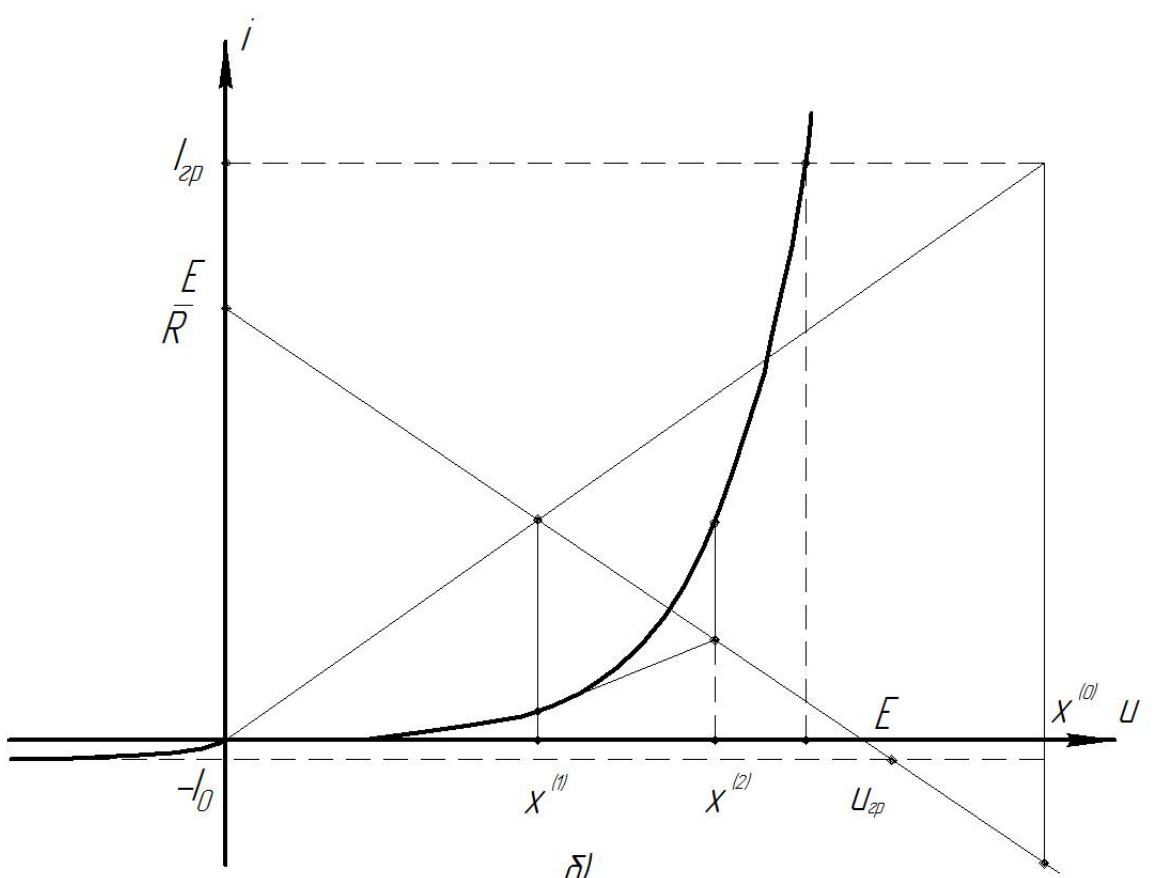
Слід зазначити, що на відміну від алгоритму, який вимагає, щоб значення  $u_{zp}$  були по можливості найменшими, в даному випадку величина  $u_{zp}$  не має настільки принципового значення. Використання замість дотичної січної дозволяє досить швидко повернути робочу точку з області великих позитивних напруг в околицю істинного розв'язку. З цієї причини оцінка  $u_{zp}$  може здійснюватися вкрай наближено і немає необхідності у використанні досить складного алгоритму. Зокрема, в програмі, реалізованій в середовищі MatLab, результати розрахунків по якій наведено в таблиці 2.1,  $u_{zp}$  розраховується, як напруга, відповідна струму через перехід  $I_{zp}$ , рівному 100 А. Очевидно, що реальний струм, що протікає через  $p-n$  перехід, буде завжди менше даного і, отже,  $u_{zp}$  завжди буде більше напруги на  $p-n$  переході, можливої в реальних схемах.

Якщо до початку аналізу є інформація про можливі граничні значення струмів, що протікають, в колі, яке розраховується, то, вводячи більш близьке до дійсності значення  $I_{zp}$ , можна в більшості випадків дещо скоротити потрібну для розв'язку кількість ітерацій. Результати розрахунку кіл по програмі, що реалізує описаний вище алгоритм (в таблиці 2.1 названий варіантом 2) при деяких значеннях  $I_{zp}$  зведені в таблиці 2.2. Як і раніше, точність розв'язку для кожного варіанта при різних значеннях  $I_{zp}$  однакова.

Зменшення величини  $I_{zp}$  відчутно впливає на роботу першого варіанта алгоритму, коли для лінеаризації нелінійної характеристики при попаданні точки наближення в четвертий квадрант використовується дотична, відповідна  $u_{zp}$ . Так, при  $I_{zp}$  дорівнює 1А отримуємо розв'язок для схеми, приведеній на рис.2.8 ( $u_{ex} = 3V$ ) за 15 ітерацій, а для схеми тригера Шмітта (рис.2.9) при  $R_2 = 2000k\Omega$  – за 33 ітерації. Порівняння розглянутих вище двох варіантів алгоритму розв'язку вузлових рівнянь на прикладах розрахунку електричних кіл показує, що використання січної в більшості випадків дозволяє значно скоротити потрібне для розв'язку число ітерацій, а, отже, і час рахунку.



a)



b)

Рисунок 2.3 – Ітераційний процес, що відповідає двом варіантам алгоритму

Таблиця 2.2

приклад значення	схема рис.2.4	схема рис.2.5	схема рис.2.7	схема рис.2.8		схема рис.2.9		схема рис.2.10	схема рис.2.11	
				1	2	1	2		1	2
$I_{zp} = 100 A$	18	18	15	22	16	20	6	20	5	11
$I_{zp} = 10 A$	12	14	15	15	16	18	6	22	5	11
$I_{zp} = 1 A$	10	14	15	12	10	16	6	12	5	11

Як вже зазначалося вище, підвищити надійність програм аналізу можна шляхом реалізації методу підсумовування кінцевих збільшень, який дозволяє поліпшити умови збіжності обчислювального процесу. Причому в багатьох випадках застосування методу ПКЗ або майже не збільшує число ітерацій, що витрачається на розв'язок, або навіть скорочує його.

У таблиці 2.3 наведені результати розрахунку деяких схем при заданих різних числах кроків, за які джерела напруги виводяться від нуля до їх повного значення.

Таблиця 2.3

приклад кількість кроків	схема рис.2.4	схема рис.2.5	схема рис.2.7	схема рис.2.8		схема рис.2.9		схема рис.2.10	схема рис.2.11	
				I	II	I	II		I	II
1	10	14	13	12	10	16	6	12	5	11
5	16	14	14	13	9	19	6	26	11	13
10	21	14	12	21	13	15	12	23	12	12

Підводячи підсумок викладеному в цьому параграфі, можна зробити висновок, що при одноразовому аналізі будь-якої конкретної схеми може бути використана програма, яка реалізує другий варіант алгоритму, якщо заданий струм  $I_{zp} = 100 A$  і кількість кроків на фронт збільшення джерел дорівнює 5-10. При багатоваріантному аналізі може виявитися більш доцільно спочатку вибирати оптимальні значення  $I_{zp}$  і кількість кроків, що в багатьох випадках дозволить скоротити потрібний для розрахунку час (наприклад, схема рис.2.4 або рис.2.9 при  $R_2 = 50 k\Omega$ ).

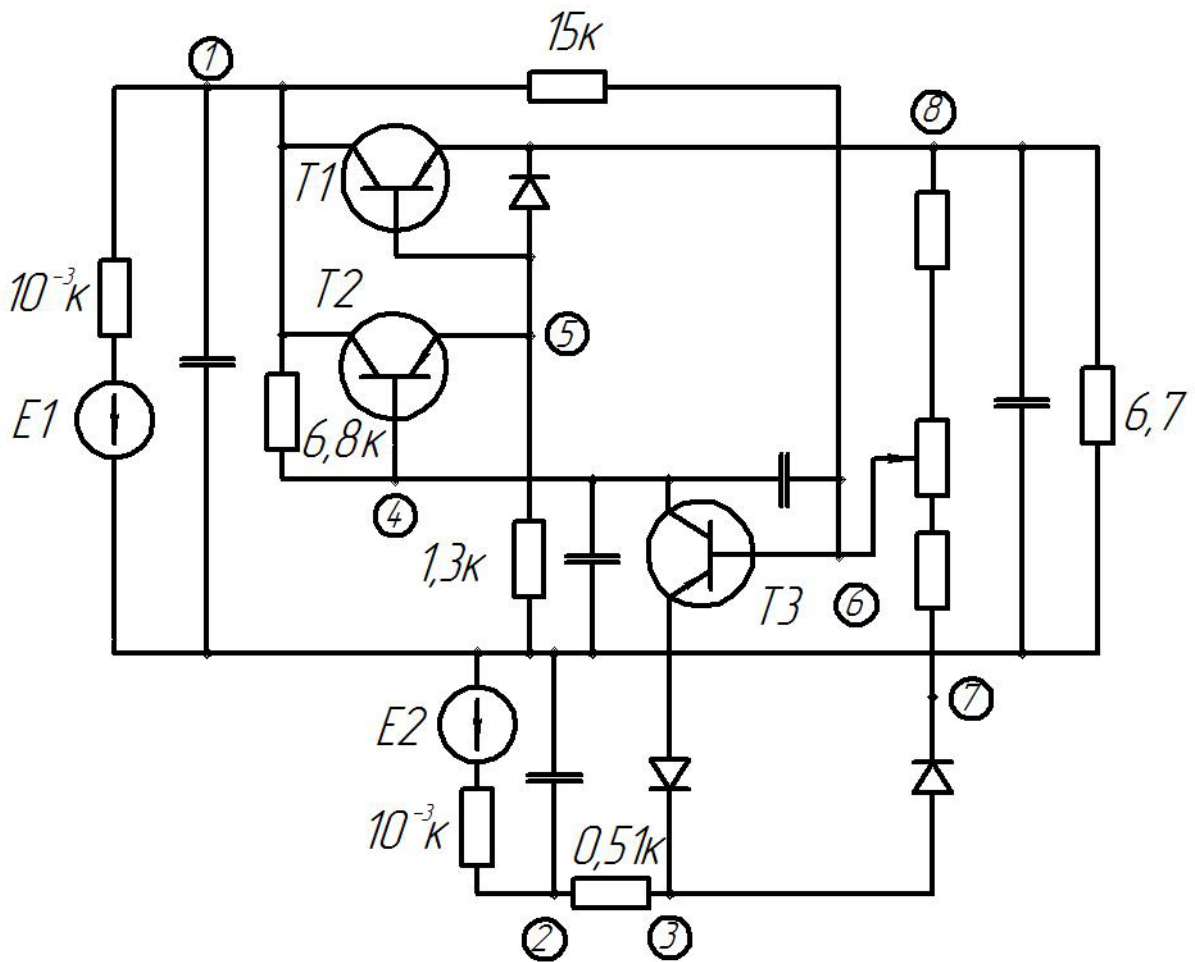


Рисунок 2.4 – Стабілізоване джерело живлення,  $E1 = 3V$ ;  $E2 = 16V$

Результати розрахунку (в вольтах), для обох методів формування рівнянь:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -7,74699; & \varphi_2 &= 15,9845; & \varphi_3 &= 8,05412; \\ \varphi_4 &= -2,14502; & \varphi_5 &= -1,91432; & \varphi_6 &= -0,14782; \\ \varphi_7 &= 7,4071; & \varphi_8 &= -1,6213. \end{aligned}$$



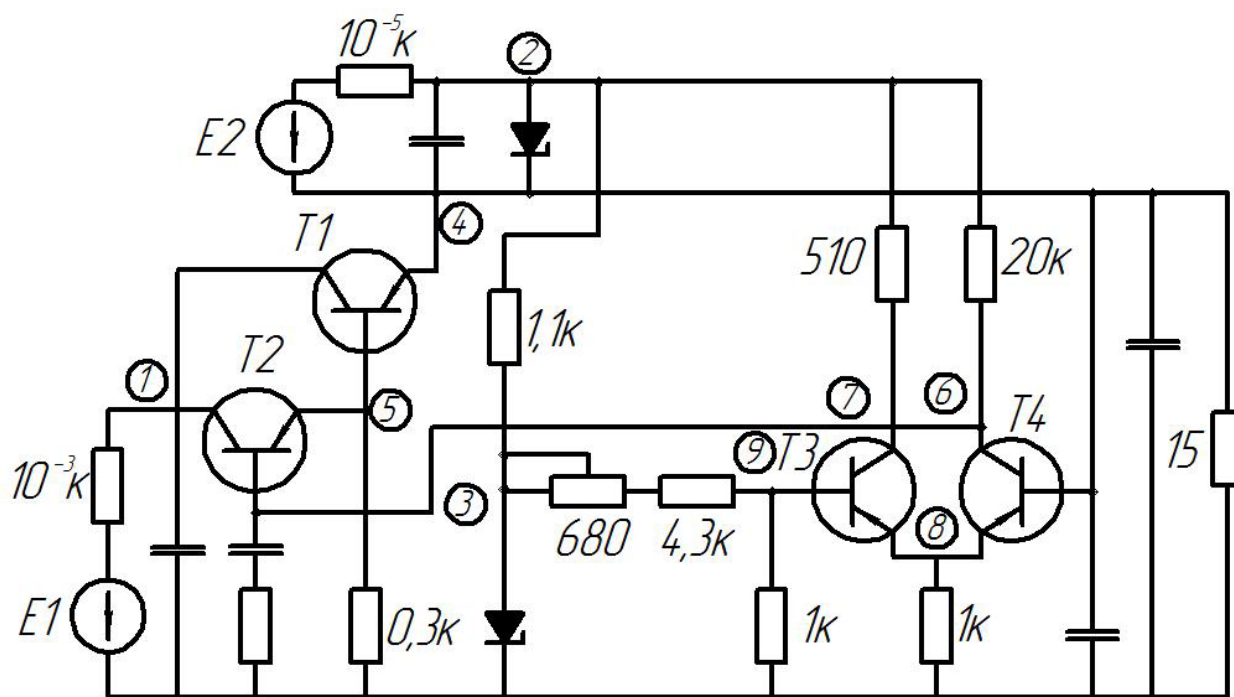


Рисунок 2.5 – Транзисторний стабілізатор напруги  $E1 = 4\text{ В}$ ;  $E2 = 16\text{ В}$

Результати розрахунку (в вольтах), для обох методів формування рівнянь:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -3,98792; \quad \varphi_2 = -17,4704; \quad \varphi_3 = -8,105; \quad \varphi_4 = -1,56490; \\ \varphi_5 &= -1,83308; \quad \varphi_6 = -2,0657; \quad \varphi_7 = -17,0808; \quad \varphi_8 = -1,42589; \\ \varphi_9 &= -1,56986. \end{aligned}$$

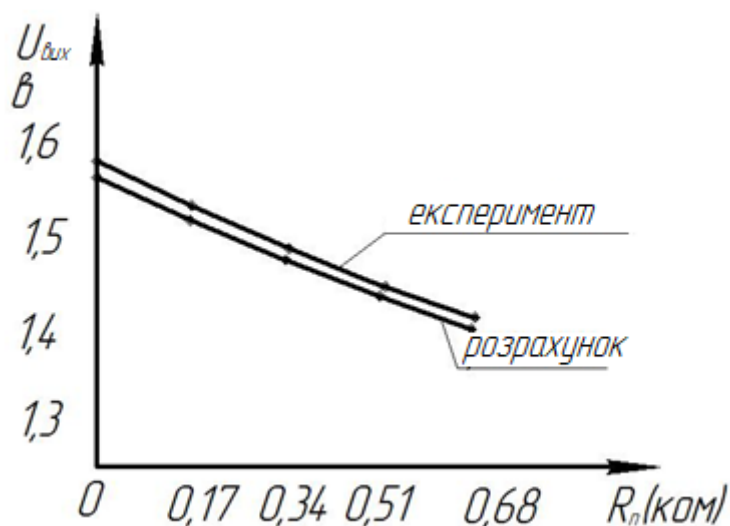


Рисунок 2.6– Регульовальна характеристика для схеми рис.2.5

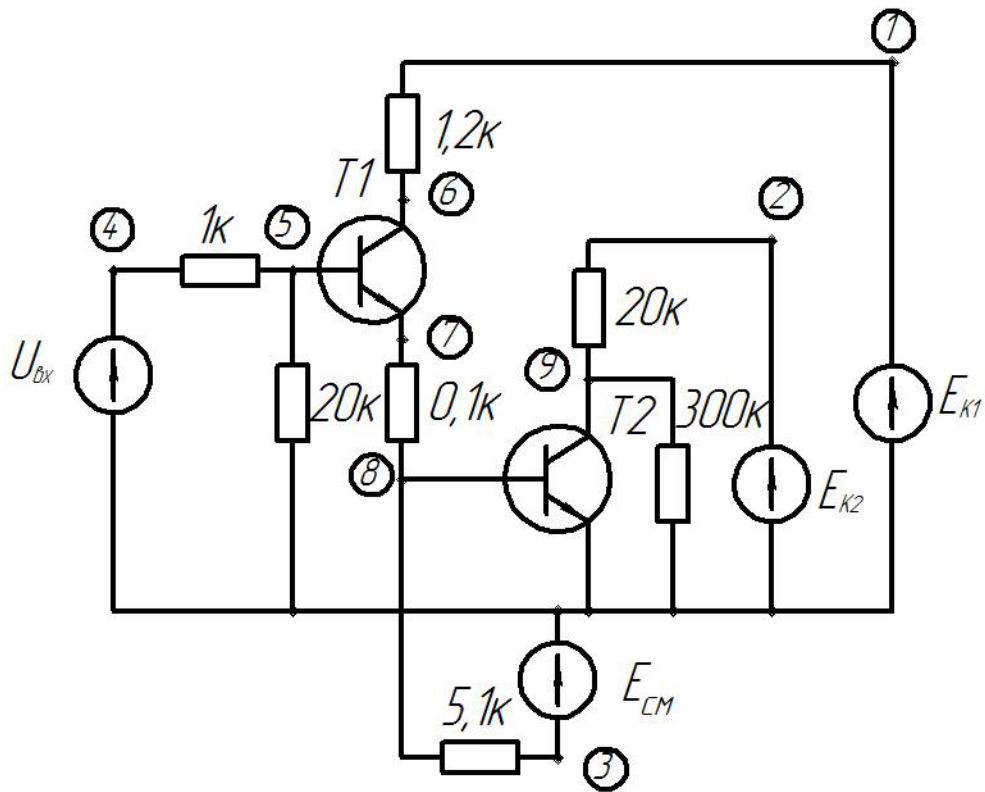


Рисунок 2.7 – Логічний модуль МС-2

$$E_{K1} = 5 B; E_{K2} = 30 B; E_{CM} = -1,4 B.$$

Результати розрахунку (в вольтах), для обох методів формування рівнянь:

$$1) U_{BX} = 2,5 B; \varphi_1 = 5; \quad \varphi_2 = 30; \quad \varphi_3 = -1,4;$$

$$\varphi_4 = 2,5; \varphi_5 = 1,34939; \varphi_6 = 1,1601;$$

$$\varphi_7 = 0,9173; \varphi_8 = 0; \quad \varphi_9 = 0,25479.$$

$$2) U_{BX} = 0,1 B; \varphi_1 = 5; \quad \varphi_2 = 30; \quad \varphi_3 = -1,4;$$

$$\varphi_4 = 0,1; \quad \varphi_5 = 0,1005; \varphi_6 = 4,81617;$$

$$\varphi_7 = -0,18783; \varphi_8 = -0,202; \quad \varphi_9 = 29,7623.$$

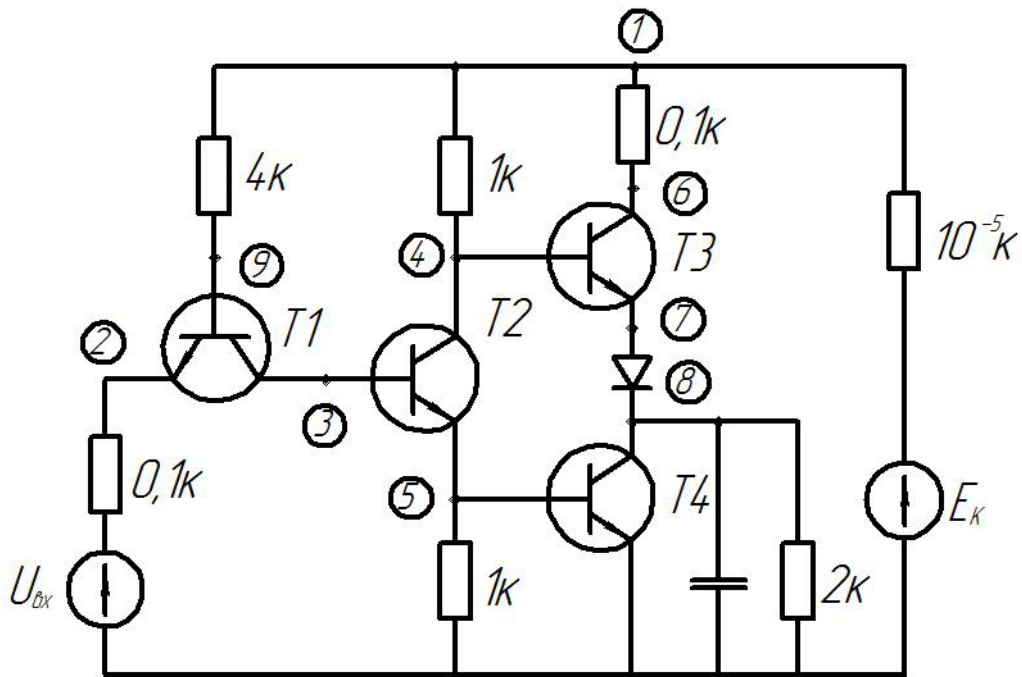


Рисунок 2.8 – Схема типового ТТЛ-елемента

$$E_K = 5 B;$$

Результати розрахунку (в вольтах), для обох методів формування рівнянь:

$$1) U_{BX} = 3 B; \varphi_1 = 4,99995; \varphi_2 = 2,99634; \varphi_3 = 1,74829;$$

$$\varphi_4 = 1,12265; \varphi_5 = 0,943625; \varphi_6 = 4,99813;$$

$$\varphi_7 = 0,62183; \varphi_8 = 0,09332.$$

$$2) U_{BX} = 0,5 B; \varphi_1 = 4,99997; \varphi_2 = 0,5922581; \varphi_3 = 0,686897;$$

$$\varphi_4 = 4,84727; \varphi_5 = 0,084037; \varphi_6 = 4,83894;$$

$$\varphi_7 = 4,11377; \varphi_8 = 3,33954.$$

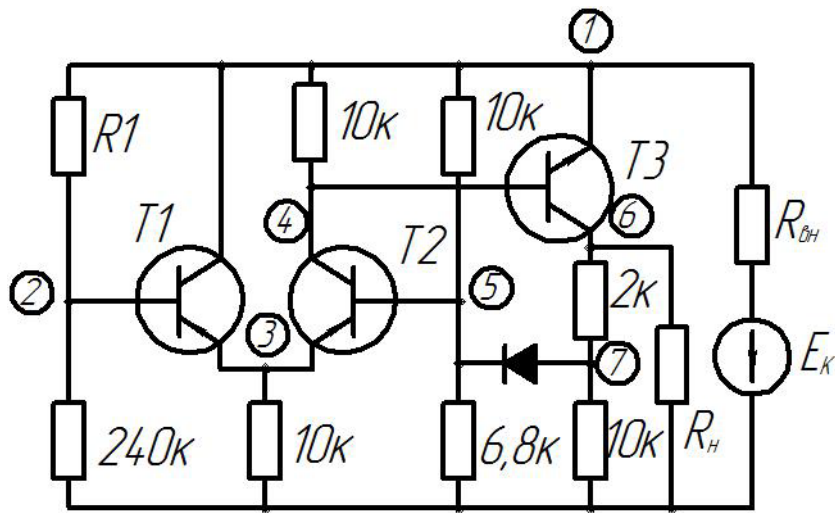


Рисунок 2.9 – Тригер Шмітта

$$E_K = 12,6 \text{ В};$$

Результати розрахунку (в вольтах) для обох методів формування рівнянь:

- 1)  $R_1 = 2000 \text{ К}; \varphi_1 = -12,6; \varphi_2 = -2,37595; \varphi_3 = -4,91927;$   
 $\varphi_4 = 11,9418; \varphi_5 = -5,0404; \varphi_6 = -12,5492; \varphi_7 = -10,4576.$
- 2)  $R_1 = 50 \text{ К}; \varphi_1 = 12,6; \varphi_2 = -9,2211; \varphi_3 = -9,08383;$   
 $\varphi_4 = -12,5677; \varphi_5 = -3,743; \varphi_6 = -3,4469; \varphi_7 = -3,4436.$

значення $R_1$	2000 К	750 К	400 К	200 К	50 До
напруга $U_H$	-12,549	-12,549	-12,547	-3,435	-4,026
розрахунок $U_H$	-12,5492	-12,5491	-12,5478	-3,4356	-3,447

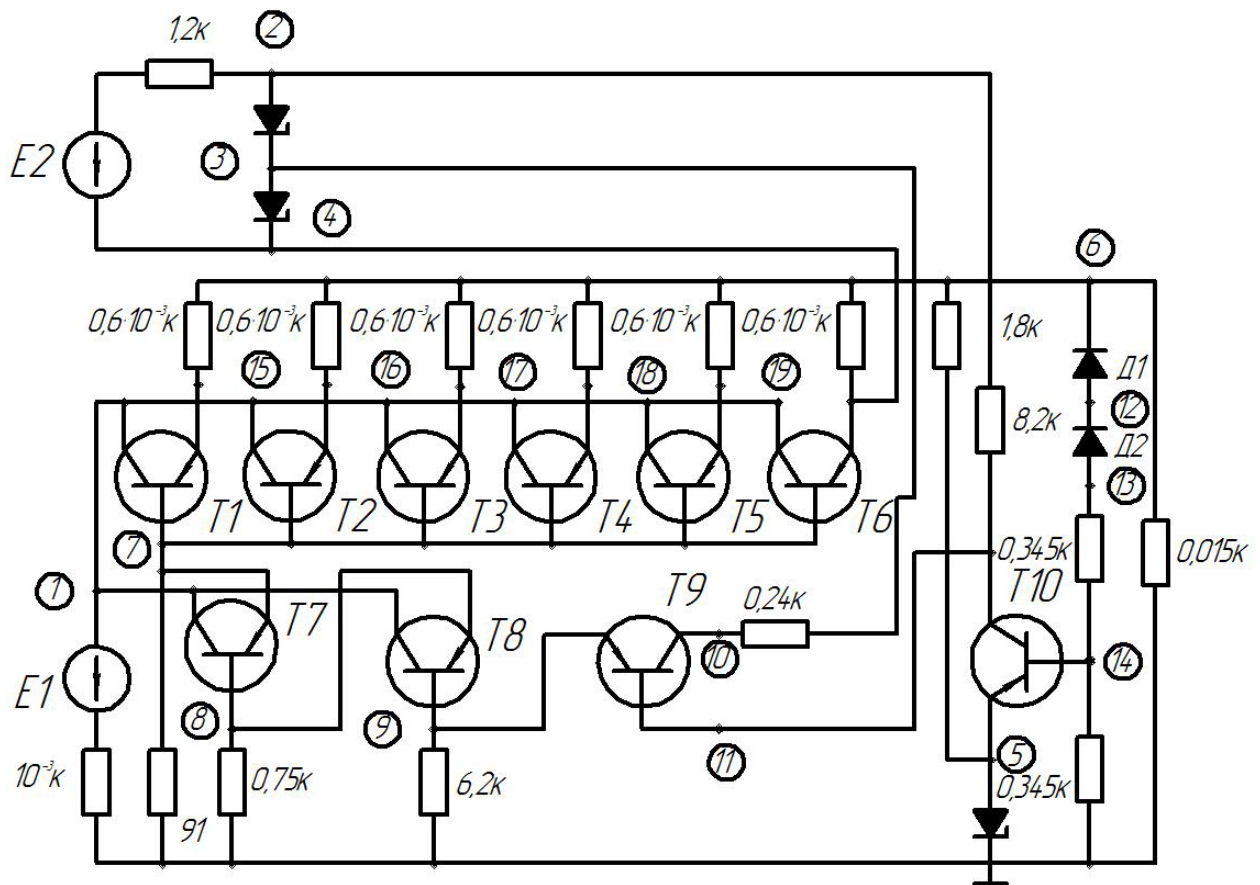


Рисунок 2.10 – Стабілізатор напруги на транзисторах

$$E_1 = 27 \text{ В}; \quad E_2 = 35 \text{ В};$$

Результати розрахунку (в вольтах) для обох методів формування рівнянь:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 26,01315; \quad \varphi_2 = -31,4778; \quad \varphi_3 = -23,889; \\ \varphi_4 &= -16,3197; \quad \varphi_5 = -7,5392; \quad \varphi_6 = -16,2097; \\ \varphi_7 &= -16,50927; \quad \varphi_8 = -16,70536; \quad \varphi_9 = -16,8551; \\ \varphi_{10} &= -23,1253; \quad \varphi_{11} = -17,0013; \quad \varphi_{12} = -15,7775; \\ \varphi_{13} &= -15,3453; \quad \varphi_{14} = -7,6636; \quad \varphi_{15} = -16,321; \\ \varphi_{16} \div \varphi_{19} &= -16,3206. \end{aligned}$$

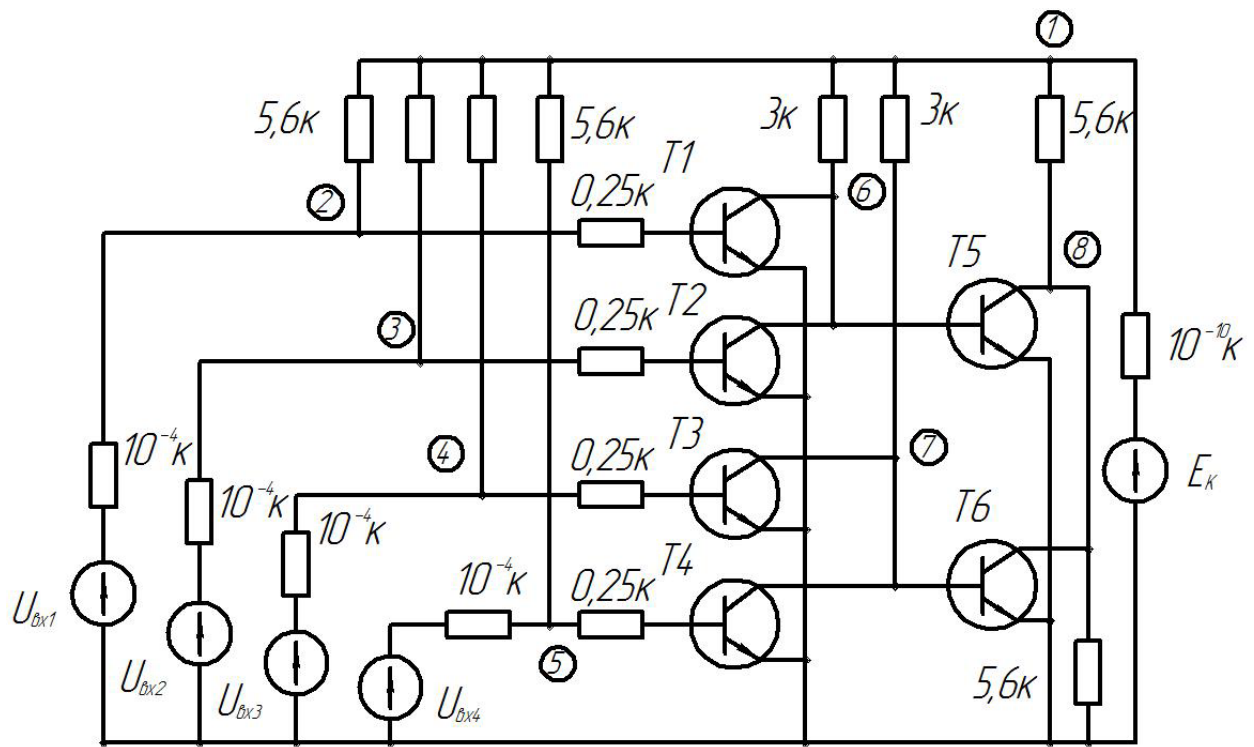


Рисунок 2.11 – Логічний модуль 1МДЗ.

$$E_K = 4 \text{ В};$$

Результати розрахунку (в вольтах) для обох методів формування рівнянь:

$$1) U_{BX1} \div U_{BX4} = -0,9 \text{ В};$$

$$\varphi_8 = 0,0266;$$

$$2) U_{BX1} = U_{BX8} = +0,9 \text{ В};$$

$$U_{BX2} = U_{BX4} = +0,9 \text{ В};$$

$$\varphi_8 = 2,03411.$$

## 2.4 Розрахунок перехідних процесів

В основу розроблених алгоритмів і програм аналізу динамічного режиму покладено метод підсумовування кінцевих збільшень, що використовує формули неявного інтегрування зворотного методу Ейлера і методу трапеції. В цьому випадку реактивні елементи перехідного процесу зводяться до розрахунку в кожен момент часу чисто резистивного лінеаризованого кола.

Відомі вирази для параметрів лінеаризованих схем заміщення ємностей і індуктивностей в разі, якщо розв'язування ведеться або методом Ейлера, або методом трапеції відносно приросту незалежних змінних.

Також отримано вирази, які використовуються при розрахунку параметрів лінеаризованих схем для лінійних ємностей і індуктивностей, якщо розв'язок проводиться відповідно до оберненого методу Ейлера для ємності і методом трапеції – для індуктивності.

Метод трапеції, застосований до лінійної ємності, призводить до наступних виразів для розрахунку лінеаризованої схеми

$$g_C^{(K)} = \frac{2C}{\Delta t}, \quad j_C^{(K)} = u_C^{(K)} \cdot g_C^{(K)} + i_C^{(K)} \quad (2.14)$$

причому оцінка  $j_C^{(K)}$  може проводитися також згідно виразу

$$j_C^{(K)} = -j_C^{(K-1)} + 2u_C^{(K)} \cdot g_C^{(K)}.$$

При розрахунку нелінійних ємностей вираз (1.13) може бути записано у вигляді

$$u_C^{(K+1)} = u_C^{(K)} + \frac{\Delta t^{(K+1)}}{2} \cdot \left( \frac{i_C^{(K)}}{C^{(K)}} + \frac{i_C^{(K+1)}}{C^{(K+1)}} \right) \quad (2.15)$$

визначаючи звідси  $i_C^{(K+1)}$ , отримуємо

$$i_C^{(K+1)} = u_C^{(K+1)} \cdot \frac{2 \cdot C^{(K+1)}}{\Delta t^{(K+1)}} - u_C^{(K)} \cdot \frac{2 \cdot C^{(K+1)}}{\Delta t^{(K+1)}} - \frac{C^{(K+1)}}{C^{(K)}} \cdot i_C^{(K)}$$

і

$$g_C^{(K)} = \frac{2 \cdot C^{(K+1)}}{\Delta t^{(K+1)}}, \quad j_C^{(K)} = g_C^{(K)} \cdot u_C^{(K)} + \frac{C^{(K+1)}}{C^{(K)}} \cdot i_C^{(K)}. \quad (2.16)$$

При розрахунку параметрів лінеаризованих схем заміщення нелінійних ємностей на  $K$ -ому кроці розв'язання повинно використовуватися значення

$C^{(K+1)}$ , яке, взагалі кажучи, ще має бути отримане і на  $K$ -ому кроці є невідомим. Існує три основних прийому для подолання цих труднощів. Найпростіший з них ґрунтується на припущенні, що

$$C^{(K+1)} \approx C^{(K)}.$$

При цьому, однак, можлива досить значна похибка інтегрування.

Одним із шляхів підвищення точності розрахунку є організація в кожен момент часу процесу ітерації щодо величин  $u_C$  і  $i_L$ . Недолік – значне підвищення кількості обчислювальних операцій.

Найбільш перспективним, мабуть, є оцінка  $C^{(K+1)}$  шляхом екстраполяції. Використовується припущення, що

$$u_C^{(K+1)} \approx u_C^{(K)} + \Delta u_C^{(K)} \quad (2.17)$$

передбачене значення  $C_{\Pi}^{(K+1)}$  визначається як величина ємності, відповідна напрузі

$$u_{C_{\Pi}}^{(K+1)} = u_C^{(K)} + 0,5 \cdot \Delta u_C^{(K)} \quad (2.18)$$

причому параметр  $g_C^{(K)}$  розраховується як

$$g_C^{(K)} = \frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{C^{(K)} + C_{\Pi}^{(K+1)}}{2}.$$

Можуть бути запропоновані екстраполяційні вирази більш високого порядку.

При такому підході розрахунок перехідних процесів відрізняється від аналізу статичного режиму тільки тим, що додатково враховуються провідності і джерела струму лінеаризованих схем заміщення реактивних елементів. Завдяки цьому, розрахунок статичного і динамічного режимів може бути дуже просто суміщений в одній програмі, що є вельми важливим показником ефективності методу аналізу.

Для прискорення часу розрахунку перехідних характеристик може бути використана процедура, відповідно до якої в кожній нелінійній гілці виділяється постійна і змінна складові. При цьому постійна складова утворює деяку провідність лінеаризованої схеми нелінійної вітки, а змінна – відповідне джерело струму або напруги.

Уявімо

$$C^{(K)} = C_0 + \Delta C^{(K)},$$



$$\Delta t^{(K)} = \Delta t_0 \cdot q(t^{(K)})$$

де  $C_0$  – значення нелінійної ємності в момент часу  $t^{(0)}$ ,  $q(t^{(0)}) = 1$ .

Використовуючи введені позначення, перепишемо вираз (2.15)

$$i_C^{(K+1)} = u_C^{(K+1)} \cdot \frac{2 \cdot (C_0 + \Delta C^{(K+1)})}{\Delta t_0 \cdot q(t^{(K+1)})} - u_C^{(K)} \cdot \frac{2 \cdot (C_0 + \Delta C^{(K+1)})}{\Delta t_0 \cdot q(t^{(K+1)})} - \frac{C^{(K+1)}}{C^{(K)}} \cdot i_C^{(K)}. \quad (2.19)$$

Шляхом нескладних перетворень вираз (2.19) можна представити у вигляді

$$i_C^{(K+1)} = u_C^{(K+1)} \cdot g_{C_0} + 2\Delta u_C^{(K+1)} \cdot \frac{C_0 \cdot (1 - q(t^{(K+1)})) + \Delta C^{(K+1)}}{\Delta t_0 \cdot q(t^{(K+1)})} - u_C^{(K)} \cdot g_{C_0} - \frac{C^{(K+1)}}{C^{(K)}} \cdot i_C^{(K)},$$

а

$$g_{C_0} = \frac{2C_0}{\Delta t_0}.$$

Записуючи за аналогією з (2.16)

$$j_C^{(K)} = u_C^{(K)} \cdot g_{C_0} + \frac{C^{(K+1)}}{C^{(K)}} \cdot i_C^{(K)}.$$

І додатково

$$j_{C_1}^{(K)} = -2\Delta u_C^{(K+1)} \cdot \frac{C_0 \cdot (1 - q(t^{(K+1)})) + \Delta C^{(K+1)}}{\Delta t_0 \cdot q(t^{(K+1)})}. \quad (2.20)$$

Таким чином, ємність моделюється провідністю  $g_{C_0}$  і двома джерелами струму  $j_C$  і  $j_{C_1}$  (рис.2.12).

Якщо інтегрування ведеться з постійним кроком  $\Delta t$ , тобто  $q(t) = 1$ , то вираз для  $j_{C_1}^{(K)}$  зводиться до

$$j_{C_1}^{(K)} = -2\Delta u_C^{(K+1)} \cdot \frac{\Delta C^{(K+1)}}{\Delta t}. \quad (2.21)$$

подібні вирази без складнощів можуть бути отримані і для нелінійної індуктивності.

Так, використовуючи

$$L^{(K)} = L_0 + \Delta L^{(K)},$$

$$g_{L_0} = \frac{\Delta t_0}{2L_0},$$

можна записати

$$j_L^{(K)} = -u_L^{(K)} \cdot g_{L_0} - i_2^{(L)},$$

$$j_{L_1}^{(K)} = (2u_L^{(K)} + \Delta u_L^{(K+1)}) \cdot (g_{L_0} - g_L^{(K+1)}) + \frac{1}{2} u_L^{(K)} \cdot \Delta t^{(K+1)} \cdot \frac{L^{(K)} - L^{(K+1)}}{L^{(K)} \cdot L^{(K+1)}}. \quad (2.22)$$

Застосування даної процедури призводить до того, що матриця провідності кола буде включати в себе тільки лінійні елементи, тобто немає необхідності в переформуванні й оберненні її на кожному кроці інтегрування.

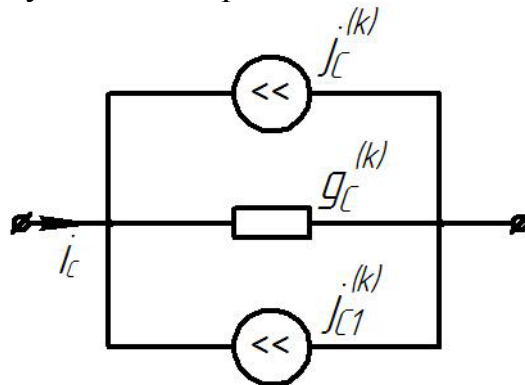


Рисунок 2.12 – Наближена схема заміщення нелінійної ємності

Можливість реалізації для обернення матриці провідності вискоєфективних алгоритмів, що враховують сильну розрідженість матриці, знижує привабливість розглянутої вище процедури, так як виграш комп'ютерного часу виявиться незначним, в той час як похибка інтегрування може бути вельми великою, що викликано сильною нелінійністю бар'єрної і дифузійної ємностей напівпровідникових приладів. Але, як буде показано в наступному розділі, розглянута процедура може бути дуже корисною при реалізації методу поділу колана лінійну і нелінійну частини.

## 2.5 Упорядкування вузлових рівнянь при $LU$ – перетворенні

Швидкодія програм аналізу, що використовують для опису кіл вузлові рівняння, значно зростає в разі розв'язування рівнянь для лінеаризованого кола шляхом розкладання матриці на трикутні множники і організації обчислень тільки з ненульовими елементами. Число ненульових елементів, що виникають в процесі  $LU$  – перетворення залежить від порядку, в якому виключаються змінні. Три найбільш відомі схеми впорядкування, в подальшому позначаються  $C-1, C-2, C-3$ , досліджувалися багатьма авторами і зазначалося, що схеми  $C-2$  і  $C-3$ , як правило, призводять до появи майже однакової кількості нових ненульових елементів. Схеми  $C-2$  і  $C-3$  значно ефективніше  $C-1$  з точки зору появи нових ненульових елементів, однак вимагають моделювання  $LU$  – перетворення. У більшості джерел відзначається, що в даний момент не існує методу, який приводив би до абсолютно оптимального порядку рівнянь, крім повного перебору, що неприпустимо через трудомісткість.

У деяких програмах використовувалися алгоритми впорядкування, які подібно схемі  $C-1$  не вимагають моделювання розкладання матриці провідності на трикутні множники. Підвищення ефективності в порівнянні зі схемою  $C-1$  досягається за рахунок додаткового аналізу структури матриці провідності. В результаті такого аналізу кожній змінній ставиться у відповідність деякий ваговий коефіцієнт і рівняння упорядковуються таким чином, щоб виключення змінних здійснювалося в порядку зростання величини вагових коефіцієнтів. У разі рівного розподілу вагових коефіцієнтів у двох або більше змінних вибирається будь-яка з них.

Відповідно до першого алгоритму, позначеному  $A-1$ , розрахунок вагових коефіцієнтів здійснюється наступним чином. Припустимо вузли кола пронумеровані  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ . У відповідності зі схемою  $C-1$  підраховується кількість ненульових елементів в кожному рядку матриці провідності поза діагоналлю і проводиться перенумерація вузлів  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$  в порядку зростання числа ненульових елементів в рядку. Безліч вузлів розбивається на підмножини. Спочатку у підмножину увійдуть номери вузлів, відповідні рядкам матриці провідності з одним ненульовим елементом поза діагоналлю, в другу - з двома ненульовими елементами і так далі:

$$V_1 = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}, \\ V_2 = \{\beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \dots, \beta_l\}, \dots, V_K = \{\beta_{l+1}, \beta_{l+2}, \dots, \beta_p\}.$$

де  $V_K$  – підмножина номерів вузлів, рівняння яких мають максимальне число ненульових коефіцієнтів.

Підмножини  $V_i$  ( $i=1, 2, \dots, K-1$ ) можуть бути порожніми,  $V_K$  завжди має хоча б один елемент. значення індексу  $K$  в різних схемах також може бути

різним. Ваговий коефіцієнт  $i$ -ої змінної  $d_i$  ( $i \in \beta$ ) розраховується як

$$d_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p \gamma_{ij} [1 + q_j],$$

де  $\gamma_{ij} = 1$ , якщо на перетині  $i$ -ого рядка і  $j$ -ого стовпця ( $j \in B_r, > 1$ ) матриці провідності знаходиться не нульовий елемент, і 0 – в іншому випадку,

$$\delta_j = \lambda \cdot (K - r), \\ 0 < \lambda < 1.$$

Другий алгоритм (А-2) відрізняється від А-1 тільки способом розрахунку величини  $\delta_j$ . Використовуються такі вирази:

а)  $K$  – непарне

$$\delta_j = \lambda \cdot \left( \frac{K+1}{2} - \left| \frac{K+1}{2} - r \right| \right),$$

б)  $K$  – парне

$$\delta_j = \begin{cases} \lambda \cdot r, & \text{якщо } 1 < r \leq \frac{K}{2}, \\ \lambda \cdot (K - r), & \text{якщо } r \geq \frac{K}{2} + 1. \end{cases}$$

В обох алгоритмах при  $r = 1$  величині  $\delta_j$  присвоюється значення  $-1$ .

Перенумерація змінних в порядку зростання вагових коефіцієнтів, що розраховуються розглянутими вище способами, в більшості випадків призводить до появи нових ненульових елементів на більш пізніх етапах  $LU$  – розкладу в порівнянні з довільним розміщенням номерів вузлів  $\beta_i$  всередині відповідних підмножин  $B_r$ , що впливає зі схеми С-1. За рахунок такої, досить простої модифікації схеми С-1 вдається в багатьох випадках істотно скоротити кількість нових ненульових елементів, що з'являються при  $LU$  – розкладанні, в порівнянні зі схемою С-1.

Кількість пар нових ненульових елементів, що виникають при  $LU$  – розкладі матриць провідності деяких електричних кіл при використанні різних способів упорядкування, наведено в таблиці 2.4.

У таблиці введено такі позначення і скорочення:

$K_0$  – кількість пар ненульових елементів в матриці провідності до  $LU$  – перетворення;

$БУ$  – без упорядкування;  $ППС$  – підсилювач постійного струму;

$ПП$  – підсилювач потужності;  $СН$  – стабілізатор напруги.

Таблиця 2.4

приклад	P	K <sub>0</sub>	спосіб упорядкування				
			БУ	C-1	C-2	A-1	A-2
Схема рис.2.4	11	14	13	4	4	4	4
Схема рис.2.5	13	17	22	9	7	8	7
Схема рис.2.8	13	15	12	9	8	8	8
Схема рис.2.10	29	45	126	31	24	26	28
JK – тригер	19	28	57	11	10	10	10
ППС	27	37	62	38	26	30	30
ПП	26	37	81	50	32	39	37
СН	33	48	131	44	37	41	42

### ***Контрольні питання для самоперевірки***

1. В чому полягає сутність методу вузлових потенціалів?
2. Для чого використовується матриця інциденцій в методі вузлових потенціалів?
3. Яким чином формується матриця провідності в методі вузлових потенціалів?
4. Наведіть схему заміщення нелінійного двополюсника в схемі лінеаризованого кола.
5. Яка вимога пред'являється до тривалості фронтів наростання всіх незалежних джерел?
6. В чому полягає сутність комбінованих алгоритмів, що використовують інформацію про становище точки наближення?
7. До чого приводить використання статичної провідності замість динамічної при розрахунку параметрів лінеаризованої схеми заміщення?
8. Який з двох варіантів алгоритму розв'язку вузлових рівнянь забезпечує меншу кількість ітерацій і чому?
9. Як змінюється число ітерацій при застосуванні методу підсумовування кінцевих збільшень?
10. Яким чином розраховуються реактивні елементи перехідного процесу при застосуванні методу підсумовування кінцевих збільшень?
11. Які використовуються прийоми для знаходження значення  $C^{(K+1)}$  при розрахунку параметрів лінеаризованих схем заміщення нелінійних ємностей?
12. Яка процедура використовується для прискорення часу розрахунку перехідних характеристик?
13. Від чого залежить число ненульових елементів, що виникають в процесі  $LU$  – перетворення?

### 3. МЕТОД ВИДІЛЕННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ЧАСТИНИ СХЕМИ

#### 3.1 Метод поділ електричного кола на лінійну і нелінійну частини

При розрахунку статичного режиму нелінійних резистивних кіл метод змінних стану призводить до системи нелінійних рівнянь в нормальній формі, що збігається з рівняннями кола з виділеною лінійною частиною. Відповідно до даного методу лінійна частина кола представляється у вигляді багатополосника, до зовнішніх полюсів якого підключені нелінійні елементи.

Система нелінійних рівнянь в нормальній формі, що описує поведінку резистивного кола в статичному режимі, може бути представлена у вигляді

$$F(X) = A \cdot X + V_0 - V(X) = 0, \quad (3.1)$$

де  $F(X) = [f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)]^t$  – вектор-функція нев'язок;

$X$  – вектор незалежних змінних, значення яких повинні бути визначені;

$A$  – коефіцієнтна матриця, отримана з розгляду частини кола;

$V_0$  – вектор-стовпець вільних членів;

$f_1(X)$  – вектор-функція, що залежить від нелінійних властивостей кола.

Відомо, що рівняння в нормальній формі можуть складатися щодо:

а) вектора напруг нелінійних двополосників;

б) вектора струмів нелінійних двополосників;

в) комбінованого вектора змінних, в який входять напруги для одних двополосників і струми для інших.

У загальному випадку вектор  $X$  може бути записаний

$$X = [i_1, i_2, \dots, i_K, u_{K+1}, u_{K+2}, \dots, u_n]^t \quad (3.2)$$

де  $i_j$  і  $u_j$  – відповідно струм і напруга нелінійного двополосника.

До вектору  $V_0$  входять напруги холостого ходу або струми короткого замикання для пар полюсів, до яких підключені нелінійні двополосники. Причому напруги холостого ходу знаходяться в рядках вектору  $V_0$ , які відповідають струмовим змінним, а в решті рядків – струми короткого замикання.

Вектор-функція  $V(X)$  для системи змінних, представлена у вигляді (3.2), формується як

$$V(X) = [v_1^{-1}(i_1), v_2^{-1}(i_2), \dots, v_K^{-1}(u_K), v_{K+1}(u_{K+1}), v_{K+2}(u_{K+2}), \dots, v_n(u_n)]^t$$

де  $v_j^{-1}(i_j)$  і  $v_j(u_j)$  – залежності напруги від струму і струму від напруги для  $j$ -го нелінійного двополюсника.

Розв'язання системи рівнянь (3.1) не дозволяє знайти струми і напруги для елементів, що знаходяться всередині лінійного багатополісника. Отже, після отримання системи нелінійних рівнянь, повинна бути сформована інша система рівнянь, яка зв'яже знайдений вектор  $X$  і вектор незалежних джерел з шуканими напругами і струмами лінійної частини кола.

Як і при розв'язанні вузлових рівнянь, з точки зору збіжності обчислювального процесу, оптимальним є розв'язок щодо струмів, якщо робоча точка знаходиться в першому квадранті вольт-амперної характеристики, і щодо напруг – в третьому. Відомий ряд програм, що реалізують такий підхід, який, однак, не позбавлений досить істотних недоліків. Це перш за все значне ускладнення програми формування системи керувань. Крім цього, не завжди відомо, в якому квадраті лежить розв'язок по кожній змінній. Робоча точка в процесі розв'язання може переходити з одного квадранта вольт-амперної характеристики в інший. В цьому випадку система рівнянь повинна переформуватися, що призводить до значних витрат комп'ютерного часу.

Більшість відомих програм, що використовують нормальні рівняння при аналізі статичного режиму, здійснюють розв'язання відносно напруг. Для усунення небезпеки переповнення при обчисленні експоненційної залежності в першому квадраті нелінійної характеристики, крім відомих методів Бройде і пропозиції розв'язання по параметру, використовуються різні технічні прийоми. Так, можуть розраховуватися граничні значення змінних, які гарантують неможливість переповнення при обчисленні функції  $\exp(x)$ . Відомо нелінійне скалярне перетворення змінних, яке спільно з методом Давиденка дозволяє уникнути багатьох труднощів і досить швидко знаходити розв'язок системи рівнянь.

Порівняно мало уваги приділено розв'язанню нормальних рівнянь, складених відносно струмів нелінійних елементів. Викликано таке становище труднощами розв'язання при попаданні робочої точки в третій квадрант вольт-амперної характеристики. У розроблених програмах в процесі розв'язання використовується апріорно відома обмеженість області визначення функції  $v^{-1}(i)$  величиною  $-I_0$ . Це дозволило реалізувати алгоритм, що поєднує метод Ньютона з методом зигзагоподібного руху вздовж границі.

Розрахунок великого числа прикладів реальних електричних схем показав високу ефективність запропонованого алгоритму.

Питання про формування рівнянь в нормальній формі багаторазово обговорювалося в літературі [9]. Наприклад, запропоновано швидкодіючий алгоритм для розрахунку матриці коефіцієнтів  $A$  і вектору  $V_0$  при формуванні системи рівнянь щодо напруг нелінійних елементів. Алгоритм робить вибір дерева схеми з урахуванням визначених пріоритетів на включення віток кола в

дерево і доповнення. Формується система основних контурів. В алгоритмі використано властивість розсіювання матриці основних контурів і реалізовані блокові методи обернення матриць.

В алгоритмі формування системи нормальних рівнянь, складеної щодо комбінованого вектора змінних, також використовується дерево схеми, яке вибирається автоматично, будується система головних перетинів і основних контурів.

Більшість розроблених алгоритмів формування нормальних рівнянь засновані на розв'язку повної системи рівнянь лінійного кола щодо струмів або напруг полюсів, до яких підключені нелінійні елементи. Відомий метод, що дозволяє розраховувати елементи матриці  $A$  по окремих стовпцях шляхом підключення на місце відповідного нелінійного двополюсника одиничного джерела ЕРС, закорочування пар полюсів, до яких підключені нелінійні елементи, що залишилися, і розрахунком струмів закорочених віток, якщо рівняння формуються щодо напруг. Для розрахунку коефіцієнтів рівнянь, що складаються відносно струмів, замість джерела ЕРС підключається одиничне джерело струму. У деяких випадках такий метод виявляється найбільш раціональним.

Алгоритм формування системи нормальних рівнянь, які використовуються в розроблених програмах аналізу нелінійних електричних кіл, заснований, як і розглянуті раніше алгоритми, на розв'язанні повної системи рівнянь для лінійної частини кола і буде викладено в розділі 3.4. Безперечною перевагою пропонованого алгоритму є відсутність необхідності вибору дерева схеми, побудови системи незалежних контурів або/і перетинів і всіх пов'язаних з цим процесом труднощів.

При аналізі методу поділу кола на лінійну і нелінійну частини зазвичай відзначають наступні переваги рівнянь в нормальній формі [9]:

- 1) виходить зменшена система рівнянь, яка розв'язується ітеративно, ефективно розділяючи лінійні і нелінійні аспекти проблеми;
- 2) виконання різних методик розв'язку для рівнянь в нормальній формі є прямим;
- 3) нормальна форма рівнянь може бути отримана досить швидко.

Застосування даного методу формування рівнянь кола особливо ефективно, коли кількість нелінійних елементів в колі мала в порівнянні з кількістю лінійних резисторів, включаючи і резистори моделей напівпровідникових елементів.





простір на себе, має єдиний розв'язок для будь-якого  $V_{OK}^*$  тоді і тільки тоді, якщо матриця коефіцієнтів  $A^*$  належить до класу матриць, що позначається  $P_0$  і визначається наступною групою еквівалентних властивостей:

а) всі основні мінори матриці  $A^*$  невід'ємні;

б) для кожного вектора  $Z \neq \Theta$  існує індекс  $K$  такий, що  $Z_K \neq 0$  і  $Z_K U_K \geq 0$ , де  $U = A^* \cdot Z$  і  $\Theta$  позначає початок координат в евклідовому просторі;

в) для кожного вектора  $Z \neq \Theta$  існує діагональна матриця  $D_z \geq 0$  така, що  $(Z, D_z \cdot Z) > 0$  і  $(A^* \cdot Z, D_z \cdot Z) \geq 0$ , де  $D_z \geq 0$  означає, що кожен діагональний елемент матриці  $D_z$  невід'ємний;

г) кожне дійсне власне значення матриці  $A^*$  також, як і кожна основна підматриця  $A^*$ , невід'ємні.

Для зручності користування зведемо систему рівнянь (3.3) до форми, подібної (3.4), тобто представимо у вигляді

$$LN(Z) + A^* \cdot Z = V_0^*, \quad (3.5)$$

де  $LN(Z) = [\ln z_1, \ln z_2, \dots, \ln z_n]^t$ ,

$$z_i = x_i / x_{0i} + 1.$$

Система рівнянь (3.5) може бути отримана з (3.3) за таким алгоритмом:

а) елемент матриці  $A^*$ , що знаходиться на перетину  $i$ -го рядка  $j$ -го стовпчика, визначається як

$$\alpha_{ij}^* = -(\alpha_{ij} \cdot x_{0i}) / b_i,$$

б) елементи вектору  $V_0^*$  рівні

$$v_{0i}^* = (v_{0i} - \sum_{j=1}^n (a_{ij} \cdot x_{0j})) / b_i.$$

Функція  $\ln z$  задовольняє вимогам, що пред'являються в умовах теореми Сандберга-Уілсона до функцій  $v_i^*(z_i)$ . Отже, зазначена теорема справедлива по відношенню до системи рівнянь (3.5) і забезпечує достатню умову існування і єдиності розв'язку. Однак, обмежуючись розглядом функцій  $v(z) = \ln z$  умови теореми дещо змінюються. Виникає питання, чи не дозволить таке звуження

класу функцій  $V(Z)$  розширити клас матриць, приналежність до якого матриці  $A^*$  гарантує існування і єдиність розв'язку системи рівнянь (3.5) при будь-якому значенні  $V_0^*$ , тобто умова

$$A^* \in P_0 \quad (3.6)$$

не тільки достатня, а й необхідна. Відповідно до цього доведемо наступну теорему.

Теорема. Система нелінійних алгебраїчних рівнянь виду (3.5) має єдиний розв'язок при будь-якому  $V_0^*$  тільки в тому випадку, якщо матриця коефіцієнтів даної системи рівнянь  $A^*$  належить до класу  $P_0$ , тобто умова (3.6) є не тільки достатньою, а й необхідною.

Доведення.

Доказ даної теореми проведемо від супротивного. Припустимо, що  $A^* \in P_0$ , тоді знайдеться така діагональна матриця  $D > 0$ , що

$$\det(D + A^*) = 0.$$

У цьому випадку рівняння

$$(D + A^*) \cdot H = 0 \quad (3.7)$$

має розв'язок  $H \neq 0$ .

Визначимо вектор  $S$ , для якого виконується рівність

$$S = D \cdot H, \quad (3.8)$$

або, переходячи від векторної форми до скалярної, маємо

$$s_i = d_i \cdot h_i,$$

де  $d_i$  – елемент матриці  $D$ , що знаходиться на перетині  $i$ -их рядка і стовпця.

Виходячи з безперервності і строгої умови монотонності функції  $\ln z$  можна стверджувати, що знайдуться такі  $z_i^*$  і  $z_i^{**}$ , для яких виконується

$$\ln z_i^* - \ln z_i^{**} = d_i \cdot (z_i^* - z_i^{**}).$$

Знаходимо  $z_i^*$  і  $z_i^{**}$  як розв'язок системи рівнянь

$$\ln z_i^* - \ln z_i^{**} = S_i, \quad (3.9)$$

$$z_i^* - z_i^{**} = h_i,$$

або, представляючи в векторній формі

$$LN(Z^*) - LN(Z^{**}) = S,$$

$$Z^* - Z^{**} = H.$$

Легко показати, що вектор  $Z^*$  є монотонно зростаючою функцією  $H$ . Дійсно, з виразів (3.9) знаходимо

$$z_i^* = \frac{h_i}{1 - \exp(-d_i \cdot h_i)}. \quad (3.10)$$

Функція (3.10) має розрив в точці  $h_i = 0$ , який може бути усунутий до визначенням функції  $z^*(h)$  шляхом введення

$$z_i^*(h_i) = 1 / d_i \text{ при } h_i = 0.$$

Досліджуючи вираз (3.10), можна отримати, що при зміні  $h_i$  від  $-\infty$  до  $+\infty$   $z_i^*$  змінюється від 0 до  $+\infty$ , тобто незалежно від вибору  $h \neq 0$   $z_i^*$  знаходиться в області визначення функції  $\ln z^*$  і  $z_i^* \neq z_i^{**}$ .

Для визначеного таким чином вектору  $Z^*$  знайдеться такий вектор  $V_0^*$ , для якого  $Z^*$  буде розв'язком рівнянь (3.5). Покажемо, що при  $V_0^* = V_{0K}^*$ ,  $Z^{**}$  також є розв'язком рівняння (3.5).

Віднімемо від обох частин рівняння

$$V_{OK}^* = LN(Z^*) + A^* \cdot Z^*$$

вектор  $A^* \cdot Z^{**}$ , тобто представимо його у вигляді

$$V_{OK}^* - A^* \cdot Z^{**} = LN(Z^*) + A^* \cdot Z^* - A^* \cdot Z^{**}$$

і, з огляду на те, що

$$A^* \cdot Z^* - A^* \cdot Z^{**} = A^* \cdot H,$$

отримуємо

$$V_{OK}^* - A^* \cdot Z^{**} = LN(Z^*) + A^* \cdot H.$$

Перетворюючи вираз (3.7) до виду

$$A^* \cdot H = -D \cdot H,$$

і, беручи до уваги вираз (3.8), знаходимо

$$V_{OK}^* - A^* \cdot Z^{**} = LN(Z^*) - S.$$

Однак

$$LN(Z^*) - S = LN(Z^{**}),$$

отже,

$$V_{OK}^* - A^* \cdot Z^{**} = LN(Z^{**}),$$

або

$$V_{OK}^* = LN(Z^{**}) + A^* \cdot Z^{**},$$

тобто вектор  $Z^{**}$  також є розв'язком рівняння (3.5) при  $V_0^* = V_{OK}^*$ , що й потрібно було довести.

На підставі даної теореми можна зробити висновок, що звуження класу функцій  $V(Z)$  до  $LN(Z)$  не дозволяє розширити клас матриць, приналежність до якого матриці  $A^*$  гарантує наявність єдиного розв'язку рівняння (3.5) при будь-якому значенні вектору  $V_0^*$ . Таким чином, умова (3.6) є не тільки достатньою, але і необхідною для існування і єдиності розв'язку системи нелінійних алгебраїчних рівнянь в нормальній формі, складеної щодо струмів нелінійних двополюсників, при довільному значенні джерел струму і напруги.

### 3.3 Алгоритм формування системи нелінійних рівнянь

Кінцева система нелінійних рівнянь, складена щодо вектору струмів нелінійних двополюсників  $X$  і представлена в матричній формі, може бути записана в наступному вигляді

$$F(X) = A \cdot X + B \cdot X_B - V(X) = 0, \quad (3.11)$$

де додатково до (3.1) використані наступні позначення:

$X_B$  – вектор струмів незалежних джерел (програма допускає наявність лише неідеальних джерел напруги, тобто джерел, що мають ненульовий внутрішній опір, які завжди можуть бути замінені еквівалентними джерелами струму);

$B$  – коефіцієнтна матриця, що отримується як  $iA$ , з розгляду лінійної частини кола;  $i$  функція  $v_i(x_i)$  має вигляд

$$v_i(x_i) = m\varphi_{T_i} \cdot \ln(x_i / I_{0i} + 1), \quad (3.12)$$

де  $m\varphi_{T_i}$  і  $I_{0i}$  – відповідно температурний потенціал і зворотний струм насичення  $i$ -го  $p - n$  переходу.

Таким чином, для формування системи нелінійних рівнянь (3.11) необхідно розробити алгоритм для розрахунку коефіцієнтних матриць  $A$  і  $B$ . Пропонований алгоритм заснований на розв'язку повної системи вузлових рівнянь лінійної частини кола щодо полюсів, до яких підключені нелінійні двополюсники. При викладі алгоритму будуть використані наступні позначення:

$p$  – кількість вузлів у колі, включаючи і внутрішні вузли моделей напівпровідникових приладів;

$K$  – кількість віток в дереві схеми;

$K_1$  – кількість віток, відповідних лінійним резисторам;

$K_2$  – кількість незалежних джерел напруги і струму;

$t, d$  – відповідно, число транзисторів і діодів в розглянутій схемі.

Порядок системи рівнянь (3.11) в цьому випадку дорівнює

$$n = 2 \cdot t + d.$$

Топологія кола задається матрицею вузлів  $\Pi$  розмірністю  $[p \times K]$ , яка формується за правилом, викладеному в розділі 2.1.

Відповідною нумерацією віток впорядкуємо матрицю  $\Pi$  наступним чином. Нехай перші  $n$  стовпців даної топологічної матриці відповідають віткам нелінійних двополюсників в такому порядку

$$D_{e1}, D_{K1}, D_{e2}, D_{K2}, \dots, D_{et}, D_{Kt}, D_{g1}, D_{g2}, \dots, D_{gd}, (3.13)$$

де  $D_{ej}$ ,  $D_{Kj}$  – емітерна і колекторна модель  $j$ -го транзистора;  
 $D_{gj}$  – ідеальний діод моделі  $j$ -го нелінійного двополюсника.

Номеруючи потім вітки залежних джерел струму моделей транзисторів

$$I'_{K1}, I'_{e1}, I'_{K2}, I'_{e2}, \dots, I'_{Kt}, I'_{et},$$

де

$$I'_{Kj} = d_{Nj} \cdot x_{2 \cdot j-1},$$

$$I'_{ej} = d_{Ij} \cdot x_{2 \cdot j}, (3.14)$$

і змінні вектору впорядковані відповідно до (3.13), отримуємо такі  $2t$  стовпці матриці  $\Pi$ . Після цього нумеруються вітки незалежних джерел струму. Останні  $K_1$  стовпці матриці  $\Pi$  відповідають резистивним віткам кола.

Сформовану таким чином топологічну матрицю вузлів можна розбити на дві субматриці

$$\Pi = \Pi_I \Pi_Y,$$

перша з яких  $\Pi_I$  – субматриця розмірністю  $[p \times (4t + d + K_2)]$ .

Стовпці даної субматриці відповідають віткам ідеальних діодів моделей нелінійних елементів, залежних джерел струму моделей транзисторів і віткам зовнішніх джерел струму.  $\Pi_Y$  – субматриця розмірністю  $[p \times K_1]$ , що описує топологію лінійних резисторів кола.

Матрицю провідності лінійної частини кола розраховуємо згідно з методом вузлових потенціалів у вигляді, подібному (2.2)

$$Y = \Pi_Y \cdot Y_B \cdot \Pi_Y^t, (3.15)$$

причому використовується в даному випадку матриця  $Y_B$  є діагональною матрицею провідностей віток, відповідних тільки лінійним резисторам.

Для формування вектору правих частин системи вузлових рівнянь (2.1) проведемо ряд перетворень субматриці  $\Pi_I$ .

Розбиваючи  $\Pi_I$  на три субматриці

$$\Pi_I = \Pi_{I1} \Pi_{I2} \Pi_{I3}, (3.16)$$

де  $\Pi_{I1}$  задає топологію включення нелінійних двополюсників,  $\Pi_{I2}$  відповідає віткам залежних джерел струму моделей транзисторів,  $\Pi_{I3}$  – віткам зовнішніх джерел, виключимо субматрицю  $\Pi_{I2}$ , використовуючи співвідношення (3.14). При цьому сформуємо топологічну матрицю  $\Pi_{I4}$  розмірністю  $[p \times n]$  за наступним алгоритмом:

а)  $(2j - 1)$ -ий стовпець матриці  $\Pi_{I4}$ , де  $j = 1, 2, \dots, t$ , буде дорівнювати сумі  $(2j - 1)$ -го стовпця матриці  $\Pi_{I1}$  і  $(2j - 1)$ -го стовпця матриці  $\Pi_{I1}$ , помноженого на  $-d_{Nj}$ ;

б)  $(2j - 1)$ -ий стовпець матриці  $\Pi_{I4}$  дорівнює сумі  $(2j - 1)$ -го стовпця і  $(2j - 1)$ -го стовпця матриці  $\Pi_{I1}$ , помноженого на  $-d_{Ij}$ .

Останні  $d$  стовпців відповідають віткам діодів. Аналітично таке перетворення можна представити у вигляді добутків

$$\Pi_{I4} = \Pi_{I1} \cdot T$$

і

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -d_{11} & & & & \\ -d_{N1} & 1 & & & & \\ & & 1 & -d_{It} & & \\ & & -d_{Nt} & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

тобто  $T$  – квазідіагональна матриця розмірністю  $[n \times n]$ . Визначаючи матрицю  $\Pi_J$

$$\Pi_J = -[\Pi_{I4} \Pi_{I3}]$$

отримуємо вираз для шуканої правої частини рівняння (2.1):

$$J = \Pi_J \cdot X_R, \tag{3.17}$$

де

$$X_R = [X^t X_B^t]^t. \tag{3.18}$$

Вектор вузлових потенціалів  $\varphi$  знаходиться з розв'язку матричного рівняння (2.1) шляхом обернення матриці  $Y$ , а для визначення напруг між полюсами, до яких підключені нелінійні двополюсники, використовується відоме співвідношення



$$U_{\lambda} = \Pi_{I1}^t \cdot \varphi. \quad (3.19)$$

Вектор нев'язок отримуємо у вигляді

$$F(X) = \Pi_{I1}^t \cdot \varphi - V(X). \quad (3.20)$$

Підставивши в (3.20) вираз для вектору  $\varphi$  з урахуванням (3.17), знаходимо

$$F(X) = \Pi_{I1}^t \cdot Y^{-1} \cdot \Pi_J \cdot X_R - V(X).$$

Беручи до уваги (3.18), представимо (3.19) як

$$U_{\lambda} = -\Pi_{I1}^t \cdot Y^{-1} \cdot \Pi_{I4} \cdot X - \Pi_{I1}^t \cdot Y \cdot \Pi_{I3} \cdot X_B$$

звідки отримуємо остаточні вирази для розрахунку коефіцієнтних матриць системи рівнянь (3.11):

$$A = -\Pi_{I1}^t \cdot Y^{-1} \cdot \Pi_{I4}, \quad (3.21)$$

$$B = -\Pi_{I1}^t \cdot Y \cdot \Pi_{I3}. \quad (3.22)$$

Однак прямий розрахунок  $Y$ ,  $A$ ,  $B$  як результат добутку трьох відповідних матриць (вирази (2.2), (3.21), (3.22)) нераціональні, тому що більшість матриць, що входять в дані вирази як співмножники, зазвичай сильно розріджені (кількість елементів, відмінних від нуля, мала). Тому має сенс при розрахунку матриць  $Y$ ,  $A$ ,  $B$  перейти від операцій множення до операцій додавання, виконуваних згідно певних логічних правил. Швидкість виконання операцій додавання на комп'ютері значно вище, ніж множень.

З цих причин при формуванні рівнянь методу вузлових потенціалів, матриця  $\Pi$  в явному вигляді не використовується. Матриця провідності лінійної частини кола розраховується відповідно до алгоритму, викладеному в 2.1.

Для розрахунку  $A$ ,  $B$  також отримано алгоритм, зручний як при «ручному», так і автоматичному розрахунку даних матриць. Припустимо, інформація про вузли приєднання зовнішніх джерел задається масивом  $P_1$  розмірністю  $[K_2 \times 2]$ . Кожному джерелу ставиться у відповідність два числа. Перше з них визначає номер вузла, до якого джерело підключене негативним полюсом, а друге - підключення позитивного полюса. Подібним масивом задається інформація про вузли приєднання нелінійних двополюсників. Перше число - номер вузла, до якого підключений анод ідеального діода, друге - підключення катода, масив  $P_2$  повинен бути впорядкований відповідно до (3.13).

Так як еквівалентна схема заміщення транзистора містить два ідеальних діода, то, включення кожного транзистора задається чотирма числами масиву  $P_2$ . На перший погляд може здатися зайвим завдання триполюсного приладу чотирма числами, однак, надмірна інформація дозволяє задавати тип транзистора ( $n - p - n$  або  $p - n - p$ ) без введення додаткових ознак. Слід також зазначити, що при використаному в розроблених програмах аналізу підході до моделювання напівпровідникових приладів і джерел напруги, коли об'ємні опори витоків  $p-n$  переходів і внутрішні опори зовнішніх джерел включаються в масив лінійних резисторів, необхідність в масивах  $P_1$  і  $P_2$  відпадає. Дійсно, внутрішні опори незалежних джерел і опори витоків  $p-n$  переходів завжди підключені до тих же вузлів, що і еквівалентні джерела струму і ідеальні діоди моделей напівпровідникових елементів. Отже, інформація про топологію всього кола може бути задана одним масивом  $P_Y$ . Однак, для зручності викладу будемо вважати, що масиви  $P_1$  і  $P_2$  формуються окремо.

Введемо позначення  $Z = Y^{-1}$ .

При розрахунку елемента матриці  $B$ , що знаходиться на перетині  $m$ -го рядка і  $q$ -го стовбця, де  $m = 1, 2, \dots, K_2$  і  $q = 1, 2, \dots, n$ , розглядаються дві пари чисел  $i, j$  і  $r, K$  причому  $i$  і  $j$  вибираються з  $m$ -го рядка двовимірного масиву  $P_2$ , а  $r$  і  $K$  – із  $q$ -ї строки масиву  $P_1$ .

В цьому випадку

$$B[m, q] \cdot z[i, k] - z[i, r] + z[j, r] - z[j, k]. \quad (3.23)$$

При розрахунку елемента  $A[m, q]$  ( $m, q = 1, 2, \dots, n$ ) матриці коефіцієнтів  $A$  можливі два випадки:

- 1)  $q > 2t$ ,
- 2)  $q \leq 2t$ .

Якщо  $q > 2t$ , то вираз для  $A[m, q]$  збігається з (3.23) з тією різницею, що  $r$  і  $K$  вибираються з масиву  $P_2$ , а не  $P_1$ . В іншому необхідно розглядати три пари чисел:  $i$  та  $j$ ,  $r$  та  $K$ ,  $l$  та  $S$ . Перша пара визначається також, як описано вище. Числа  $r, K, l$  вибираються з масиву  $P_2$ , як два рядки, що йдуть поспіль, перший з яких задає включення емітерного діода, а другий – колекторного діода відповідного транзистора. Очевидно, що, згідно з прийнятим позначенням включення ідеальних діодів, для транзистора  $p - n - p$  типу  $K = S$ , а  $n - p - n$  типу  $r = l$ .

Визначимо величини

$$C := z[i, k] - z[i, r] + z[j, r] - z[j, k],$$

$$D := z[i, l] - z[i, s] + z[j, s] - z[j, l], \quad (3.24)$$

і вирази для розрахунку елементів матриці  $A$  можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} A[m, q] &:= C + AN \times D, \\ A[m, q + 1] &:= -D - AI \times C, \end{aligned} \quad (3.25)$$

де  $AN$  і  $AI$  – коефіцієнти підсилення по струму для прямого ( $\alpha_N$ ) і інверсного ( $\alpha_I$ ) режимів  $h$ -го транзистора  $h=(q+1)/2$ .

У разі рівності будь-якого з чисел  $i, j, r, K, l, S$  нулю, тобто при примиканні будь-якої вітки до нульового вузла, відповідні складові в виразах (3.23) і (3.24) не вимикаються. Наприклад, якщо  $i = 0$ , то (3.23) набуває вигляду

$$B[m, q] := z[j, r] - z[j, k].$$

Особливо повинен бути розглянутий випадок формування системи рівнянь (3.11) при аналізі кіл, що містять багатоемітерні транзистори. Додатково введемо позначення:

$K_3$  – кількість БЕТ в аналізованому колі;

$E$  – масив чисел, що задає кількість емітерів в кожному БЕТ.

Порядок системи нелінійних рівнянь буде дорівнювати (передбачається, що використовується модель БЕТ, розглянута в 1.2.3 і наведена на рис.1.3):

$$n = 2t + d + t_e,$$

$$t_e = \sum_{j=1}^{K_3} (l_j + 1).$$

Припустимо, що вітки  $p$ - $n$  переходів БЕТ пронумеровані в наступному порядку

$$D_{e11}, D_{e12}, \dots, D_{e1l1}, D_{K1}, D_{e21}, D_{e22}, \dots, D_{e2l2}, D_{K2}, \dots, D_{eK31}, D_{eK32}, \dots, D_{eK3lK3}, D_{KK3},$$

де  $D_{ejj}$  –  $j$ -ий емітерний діод схеми заміщення  $i$ -го БЕТ,

$D_{Ki}$  – колекторний діод  $i$ -го БЕТ.

Визначимо матрицю

$$\alpha^* = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_{12} & -\alpha_{1l} & -\alpha_{11} \\ -\alpha_{21} & 1 & -\alpha_{2l} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{l1} & -\alpha_{l2} & 1 & -\alpha_{ll} \\ -\alpha_{N1} & -\alpha_{N2} & -\alpha_{Nl} & 1 \end{bmatrix}$$

Вираз для матриці  $\Pi_{I4}$  може бути записаний аналогічно використуваному раніше як добуток топологічної матриці  $\Pi_{I1}$  на деяку матрицю  $T^*$  і

$$T^* = \begin{bmatrix} \alpha_1^* & & & \\ & \alpha_2^* & & \\ & & & \\ & & & \alpha_{K_3}^* \\ & & & & T \end{bmatrix}.$$

Використовуючи матрицю  $\Pi_{I4}$ , сформовану з урахуванням БЕТ, можна отримати вирази для розрахунку коефіцієнтних матриць А і В, які співпадають з (3.21) і (3.22). Очевидно, що при аналізі кіл з БЕТ розрахунок матриць А і В може проводитися відповідно до алгоритму, подібному викладеному вище для випадку кіл з біполярними транзисторами і діодами. Причому алгоритм розрахунку матриці В залишається без змін.

Щоб розрахувати елементи матриці А, що знаходяться на перетині  $m$ -го рядка і стовпців, відповідних змінним будь-якого БЕТ, необхідно розглядати числа  $i, j, r_1, K_1, r_2, K_2, \dots, r_l, K_l, l, S$ . Вибірка чисел проводиться як і раніше з масиву  $P_2$ , Індекс при  $r, K$  позначає номер емітерного діода. На відміну від біполярного транзистора для БЕТ розраховується масив  $C_1, C_2, \dots, C_l$  відповідно до виразу

$$C_p = z_{iK_p} - z_{ir_p} + z_{jr_p} - z_{jK_p}.$$

Для розрахунку  $D$  залишається справедливим вираз (3.24). Тоді елемент  $\alpha_{mq}$  буде дорівнювати

1) якщо  $q$  відповідає  $i$ -му емітерному діоду

$$a_{mq} = \sum_{j=1}^l \alpha_{ij} C_j + \alpha_{Ni} \cdot D,$$

- 2) якщо  $q$  відповідає змінній, що характеризує колекторний діод  
3)

$$a_{mq} = -D - \sum_{j=1}^l \alpha_{Ij} \cdot C_j.$$

Коефіцієнти  $\alpha_{ij}$ , що входять в (3.26), є коефіцієнтами передачі по струму транзисторної структури  $i$ -ий емітер-база –  $j$ -ий емітер.

Якщо для подання БЕТ використовується спрощена модель, яка не враховує взаємний зв'язок між емітером, то оскільки  $\alpha_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ , вираз (3.26) можна записати як

$$a_{mq} = C_i + \alpha_{Ni} \cdot D.$$

Таким чином, отримано алгоритм формування системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (3.11), який не вимагає використання будь-яких топологічних матриць, немає необхідності в побудові дерева графа електричного кола. Найбільш трудомісткою операцією в запропонованому алгоритмі є обернення матриці провідності лінійної частини кола. Значного прискорення процесу можна домогтися шляхом використання для обернення матриці  $Y$  ефективного алгоритму обернення квазіблочних матриць, оскільки сильна розрідженість матриці провідності лінійної частини кола в більшості випадків не викликає сумнівів.

### 3.4 Розв'язування систем нелінійних рівнянь в нормальній формі

**3.4.1 Реалізація методів Ньютона, Бройде, Давиденка, підсумовування кінцевих збільшень.** Однією з особливостей рівнянь в нормальній формі є можливість прямого застосування для їх розв'язування різних ітераційних методів і простота їх реалізації.

Так, розв'язок рівнянь (3.11) методом Ньютона здійснюється згідно ітераційної схеми (1.10). Якобіан розв'язуваної системи рівнянь може бути записаний у вигляді

$$W(X) = A - R_d(X), \quad (3.27)$$

де  $R_d(X)$  – діагональна матриця динамічних опорів нелінійних двополосників, для розрахунку яких використовується

$$r_{d_i} = m\varphi_{T_i} / (x_i + I_{0i}). \quad (3.28)$$

Критерієм зупинки обчислювального процесу служить виконання нерівності

$$\|X^{(K)}\| \leq \varepsilon,$$

де  $\|X^{(K)}\|$  – норма вектору  $\Delta X$ , отримана на  $K$ -му кроці розв'язку;

$\varepsilon$  – деяке мале додатне число.

Слід зазначити, що розв'язок системи рівнянь (3.11) може здійснюватися не тільки щодо вектора приростів незалежних змінних, а й щодо повного вектора змінних.

Представимо (1.11) як

$$W(X^{(K)}) \cdot (X^{(K+1)} - X^{(K)}) = -F(X^{(K)}).$$

Беручи до уваги (3.11) і (3.27) і проводячи деякі перетворення, отримуємо вираз

$$X^{(K+1)} = W^{-1}(X^{(K)}) \cdot \left[ V(X^{(K)}) - R_d(X^{(K)}) \cdot X^{(K)} - B \cdot X_B \right],$$

використання якого може бути більш зручним у порівнянні з (1.10).

Як і в разі розв'язку вузлових рівнянь, всі зовнішні джерела задаються у

вигляді кусково-лінійних функцій часу, як це описано в 2.2. Всі додаткові переваги такого представлення незалежних джерел при розв'язку нормальних рівнянь зберігаються. Крім цього, для розв'язання системи рівнянь (3.11) використовується і метод Бройде.

Розроблені програми аналізу, засновані на методиці поділу кола на лінійну і нелінійну частини, дозволяють вибрати один з наступних методів розв'язку системи рівнянь.

а) Метод Бройде з вибором коефіцієнта  $\gamma$  проводиться відповідно до методу Кіфера (методу Фібоначчі).

б) Метод Бройде з вибором  $\gamma$  з умови незбільшення норми нев'язок.

в) Поєднання методу продовження розв'язку по параметру з одним із попередніх методів.

г) Поєднання методу підсумовування кінцевих збільшень з будь-яким з перших двох методів.

Однак слід підкреслити, що жоден з перерахованих вище методів не дозволить знайти розв'язок навіть для найпростіших кіл, в яких є хоча б один зміщений в негативному напрямку  $p - n$  -перехід, якщо не будуть прийняті спеціальні заходи проти можливого зупину обчислювального процесу через переповнення розрядної сітки при  $x \rightarrow -I_0$  або через вихід аргументу логарифмічної функції за область визначення ( $x \leq -I_0$ ).

**3.4.2 Введення обмежень на область пошуку коренів рівнянь.** Для того, щоб уникнути зупинки процесу розв'язку при обчисленні виразу (3.13) або (3.28) в той момент, коли чергове наближення  $x_i^{(K)}$ , яке розраховується згідно (1.10), виявляється менше нуля, використовується прийом, де в розгляд вводиться масив граничних значень незалежних змінних. В даному випадку обмеження на величину змінних накладаються знизу, тобто передбачається

$$X^{(K)} \geq X_{\min}, \quad (3.29)$$

де  $X_{\min} = [x_{1\min}, x_{2\min}, \dots, x_{n\min}]^t$  і для розрахунку елементів вектора граничних значень використовується відома обмеженість області визначення функції натурального логарифма

$$-I_{oi} < x_{i\min} = -I_{oi} + \Delta.$$

У наведеному виразі  $\Delta$  - деяка досить мала позитивна величина, яка гарантує неможливість переповнення при розрахунку (3.12) і (3.28).

На кожній ітерації розв'язку методом Ньютона після розрахунку вектора збільшень  $\Delta x$ , для змінних, збільшення яких виявилися негативними, перевіряється виконання нерівності

$$x_i^{(K)} + \Delta x_i^{(K)} < x_{i\min}.$$

Якщо така нерівність виконується, то  $\Delta x_i^{(K)}$  присвоюється значення, рівне різниці між  $x_{imin}$  і  $x_i^{(K)}$ , тобто

$$\Delta x_i^{(K)} = x_{imin} - x_i^{(K)}. \quad (3.30)$$

Таким чином робочий крок здійснюється не за дійсним вектором  $\Delta x^{(K)}$ , розрахованим згідно виразу (1.11), а по вектору  $\tilde{\Delta x}^{(K)}$ , сформованому з урахуванням (3.30). Такий перехід для випадку двох змінних показаний на рис.3.1. Якщо приріст  $\Delta x_2^{(K+1)}$  виявиться знову негативним, то подальший рух буде відбуватися по межі.

Даний підхід багато в чому подібний до методу зигзагоподібного руху вздовж границі.

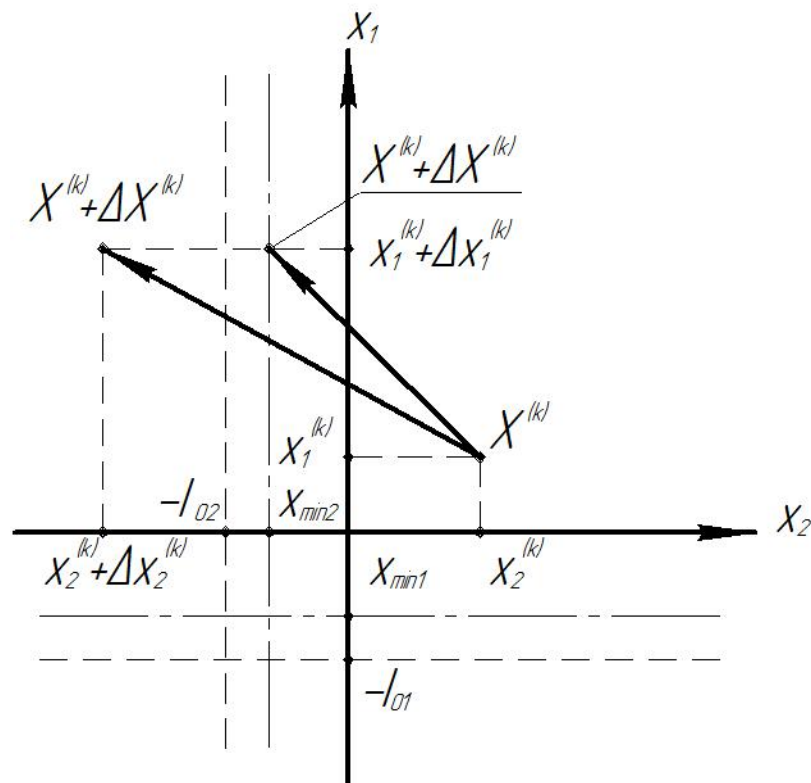


Рисунок 3.1 – Вибір робочого кроку

На відміну від випадку, коли розв'язання системи нелінійних рівнянь ведеться щодо напруг нелінійних двополосників і легко може бути знайдена величина, перевищити яку значення незалежної змінної не може, при розв'язанні відносно струмів нелінійних елементів розрахувати вектор так, щоб



для шуканого розв'язку виконувалася нерівність (3.29), не завжди можливо, тому що доводиться оперувати з величиною, що виходить за межі точності обчислення на комп'ютері. Необхідно величину задавати так, щоб виключати можливість зупинки через неминучість помилок округлення при проведенні обчислювальних операцій. Це призводить до того, що справжній розв'язок може виявитися поза областю, що обмежується  $x_{min}$  і значення  $x^*$  в принципі не може бути знайдено. Єдиним обґрунтуванням можливості такого підходу служить той факт, що чисельні методи, використовувані для розв'язку систем нелінійних алгебраїчних рівнянь, шукають не справжній розв'язок, а деяку точку, досить близьку до нього. Отже, вибираючи величину  $\Delta$  таку, щоб в області, обмеженою вектором  $x_{min}$  знайшлася б точка, відстань від якої до точки  $x^*$  була б меншою  $\varepsilon$ , завжди можна знайти розв'язок із заданою точністю.

Звернемося тепер до питання оцінки  $\Delta$  при заданій точності розв'язку  $\varepsilon$ . Розглянемо спочатку випадок, коли розв'язок по всім змінним лежить зліва від  $x_{imin}$ . Процес ітерацій зупиниться при цьому в точці  $x_{min}$ . Відстань  $r$  між цією точкою і  $x^*$  може бути оцінена як

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^n Q_i^2},$$

де  $Q_i$  – різниця між граничною точкою  $x_{imin}$  і істинним розв'язком по  $i$ -ій координаті.

Приймаючи до уваги, що

$$Q_i < \Delta. \quad (3.31)$$

Для  $r$  справедлива нерівність

$$r < \Delta \cdot \sqrt{n}.$$

Так як  $r$  має бути менше або дорівнює  $\varepsilon$ , вираз для оцінки величини  $\Delta$  може бути записаним у вигляді

$$\Delta \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}. \quad (3.32)$$

До більш складних виразів призводить оцінка величини  $\Delta$  в разі, коли по одній  $i$ -ій змінній розв'язок знаходиться всередині області, обмеженій вектором

$x_{min}$ , а по іншій (n-1)-ій змінній – поза нею. Позначимо матрицю, зворотну якобіану (3.27), через  $P(X)$ , тобто

$$P(X) = W^{-1}(X),$$

і запишемо вираз для  $\Delta x_i$

$$\Delta x_i = -p_{i1} \cdot f_1(X) - p_{i2} \cdot f_2(X) - \dots - p_{ii} \cdot f_i(X) - \dots - p_{in} \cdot f_n(X),$$

де  $p_{ij}$  – елементи матриці  $P(X)$ .

Через введення обмежень (3.29) нев'язки, відповідні змінним, розв'язок для яких лежить поза області пошуку коренів, ніколи не опиняться нульовими. Представимо приріст  $i$ -ої змінної, який визначається з (3.33) у вигляді такої суми

$$\Delta x_i = \Delta x_{i1} + \Delta x_{i2},$$

де  $\Delta x_{i1} = -p_{ii} \cdot f_i(X)$ ,

$$\Delta x_{i2} = -\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n p_{il} \cdot f_l(X).$$

У точці розв'язку  $\Delta x_i$  дорівнює нулю, тобто виконується

$$\Delta x_{i1} = -\Delta x_{i2},$$

або

$$-p_{ii} \cdot f_i(X) = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n p_{il} \cdot f_l(X).$$

Позначимо нев'язку для  $i$ -ої змінної, при якій приріст  $\Delta x_i = 0$ , через  $\delta f_i$ , для оцінки величини якої справедливо

$$\delta f_i = \frac{\sum_{l \neq i} p_{il} \cdot f_l(X)}{p_{ii}}$$

і, переходячи до модулів величин

$$|\delta f_i| \leq \frac{\sum_{l \neq i} |p_{il} \cdot f_l(X)|}{|p_{ii}|} > 0. \quad (3.34)$$

Таким чином при введенні обмежень на область пошуку коренів рівнянь (3.11), крім похибки визначення змінних, для яких розв'язок знаходиться на відрізку  $(-I_{oj}, x_{jmin})$ , виникає похибка і при розрахунку коренів рівнянь, що знаходяться всередині області пошуку. Ця похибка  $\delta x_i$  викликана тим, що  $x_i^*$  шукається як розв'язок рівняння

$$\tilde{f}_i(X) = f_i(X) + \delta f_i = 0.$$

Для оцінки величини модуля  $\delta f_i$  крім (3.34) може бути використано більш зручне

$$\delta f_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij} \cdot c_j|,$$

де  $a_{ij}$  - елементи коефіцієнтної матриці А, а сума береться по змінним, розв'язок для яких знаходиться за обмеженням.

Переходячи до оцінки  $|\delta f_i|$ , отримуємо

$$|\delta f_i| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij} \cdot c_j|,$$

а з урахуванням (3.30) вираз для  $|\delta f_i|$  можна представити у вигляді

$$|\delta f_i| < \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij} \cdot \Delta| = \Delta \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|.$$

припускаючи  $|\delta f_i|$  досить малим, запишемо

$$\delta f_i = \frac{\delta f_i(X)}{\delta x_i} \cdot \delta x_i.$$

Звідки

$$|\delta x_i| = \frac{|\delta f_i|}{f_i'(X)},$$

де

$$f_i'(X) = \frac{\delta f_i(X)}{\delta x_i}.$$

З (3.3) і (3.28) можна записати вираз для  $f_i'(X)$

$$f_i'(X) = a_{ii} - \frac{m\varphi_{Ti}}{x_i + I_{0i}}.$$

У розділі 3.2 було показано, що умовою існування і єдиності розв'язку системи рівнянь (3.3), при довільному значенні незалежних джерел, є приналежність матриці  $A^*$ , одержуваної з Ашляхом деяких перетворень, до класу  $P_0$ . Ця вимога означає, що діагональні елементи матриці  $A$  повинні бути негативними, тобто

$$a_{ii} < 0.$$

Оскільки

$$r_{di} > 0,$$

то

$$|f_i'(X)| > |a_{ii}|$$

і

$$|\delta x_i| < \frac{|\delta f_i|}{|a_{ii}|} < \Delta \cdot \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}|}.$$

Отже, можлива похибка визначення коренів системи рівнянь (3.11) пропорційна величині  $\Delta$ , тобто, задаючись необхідною точністю розв'язку  $\varepsilon$ , можна розрахувати  $\Delta$ , що гарантує, що похибка знайдених коренів не перевищуватиме заданої величини.

Припустимо, повинно виконуватися

$$\|\delta x_i\| \leq \varepsilon,$$

тобто

$$\Delta \cdot \left\| \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}|} \right\| \leq \varepsilon.$$

З цього виразу знаходимо

$$\Delta \leq \frac{\varepsilon}{\left\| \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}|} \right\|}.$$

Позначаючи

$$D = \max_i \left( \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}|} \right),$$

отримуємо остаточно

$$\Delta \leq \frac{\varepsilon}{D \cdot \sqrt{n}}. \quad (3.35)$$

Для систем рівнянь, матриця коефіцієнтів  $A$  яких задовольняє умові домінантності

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|,$$

виконується

$$|\delta x_i| \leq \Delta$$

і величина  $\Delta$  може бути знайдена з виразу (3.32).

Підводячи підсумок проведеному дослідженню похибки, що допускається при здійсненні розв'язку системи рівнянь (3.11) з використанням

обмежень на можливі значення змінних, можна зробити висновок:

- 1) можлива точність розв'язку  $\varepsilon$  обмежена в даному випадку допустимою величиною  $\Delta$ , тому що з (3.35)

$$\varepsilon \geq \Delta \cdot D \cdot \sqrt{n},$$

- 2) вибір  $\Delta$  повинен здійснюватися, виходячи з вимоги забезпечення неможливості переповнення при розрахунку (3.12) і (3.28);
- 3) в разі, якщо вибране  $\Delta$  не задовольняє нерівності (3.35), має бути збільшено, в іншому випадку, необхідна точність розв'язку може не досягатися і критерій зупинки обчислювального процесу ніколи не буде задоволений.

Практично, найбільш доцільно ставити  $\Delta = 10^{-10} \div 10^{-11}$ . Проведені розрахунки великого числа електричних кіл показали, що введення обмежень на область зміни змінних повністю гарантує неможливість зупинки обчислення (3.12) або (3.28) і засновані на пропонованому алгоритмі програми можуть використовуватися для аналізу електричних кіл широкого класу.

**3.4.3 Рух по нормі скороченого вектора нев'язок.** При проведенні розрахунків електричних кіл за програмою аналізу, який реалізує описаний в попередньому розділі алгоритм спільно з методом Бройде, коли коефіцієнт  $\gamma$  вибирається з умови мінімуму норми нев'язок за допомогою методу чисел Фібоначчі, було помічено наступне явище. При наближенні вектора  $X$  до розв'язку, коли змінні, відповідні струмам замкнених  $p - n$  - переходів, ставали рівним граничним значенням  $X_{imin}$ , процес розв'язку сповільнювався через швидке зростання нев'язок для закритих  $p - n$  - переходів, який не міг бути компенсований відповідною зміною  $x_i^{(K)}$  (подальшим зменшенням). З цієї причини коефіцієнт  $\gamma$  на кожному кроці приймав мінімальне значення і приводив до уповільнення руху до кореня рівняння. Пояснення цього слід шукати в **яружному** характері функції

$$Q(X) = f_i(X), \quad (3.36)$$

мінімум якої шукається на кожній ітерації згідно з методом чисел Фібоначчі. При цьому шукана в області, обмеженою нерівністю (3.29), точка, найменш віддалена від істинного розв'язку, може, взагалі кажучи, не збігатися з точкою, в якій функція (3.36) має мінімум. Для того, щоб уникнути такого уповільнення, використовувалася наступна процедура. Визначення вектора  $\Delta X$  здійснювалося так само, як і раніше, а при виборі коефіцієнта  $\gamma$  мінімізувалася функція виду

$$Q_1(X) = \|d_i \cdot f_i(X)\|, \quad (3.37)$$

де  $d_i = 0$ , якщо  $i$ -ий  $p$ - $n$ - перехід замкнений,  $d_i = 1$  при відкритому  $p$ - $n$  - переході. Тобто функція  $Q_1(X)$  надає норму нев'язок тільки для відкритих  $p$ - $n$  - переходів. Перевірка того, в якій області знаходиться наближення по кожній змінній, проводиться на кожній ітерації по напрузі, знайденій з лінійної частини рівнянь (3.11). Очевидно, що якщо всі  $p$ - $n$  - переходи в аналізованому колі відкриті, то функції (3.36) і (3.37) збігаються і розв'язок буде проводитися згідно з методом Бройде без будь-яких змін.

У таблиці 3.1 наведено кількість ітерацій, необхідна для розв'язку з однакою точністю систем нелінійних алгебраїчних рівнянь, що описують ряд електричних кіл.

Точність розв'язку однакова. Варіанти відрізняються тільки у функцією, що мінімізується, яка використовується на етапі вибору. Варіанту 1 відповідає функція (3.36), варіанту 2 – (3.37).

Таблиця 3.1

приклади варіант алгоритму	схема рис.2.4	схема рис.2.5	схема рис.2.7		схема рис.2.8		схема рис.2.9	схема рис.2.11		схема рис.3.2
			1	32	1 і 2	30		1 і 2		
1	19	30	15	32	29	30	16	8	12	55
2	10	28	15	18	23	15	10	8	12	33

Як видно з таблиці, для всіх наведених прикладів кількість ітерацій в варіанті 2 менша (виняток становить варіант схеми рис.2.7 при  $U_{ex} = 2,5B$ , в якому всі  $p$ - $n$  - переходи відкриті і схема рис.2.11). Скорочення числа ітерацій спостерігалось і при реалізації методу Бройде з визначенням  $\gamma$  з умови незбільшення норми нев'язок.

Результати розрахунку великого числа різних електричних схем дозволяють стверджувати, що процедура, яка полягає в переході від мінімізації функції (3.36) до (3.37), виявляється надзвичайно корисною при використанні описаного в попередньому розділі алгоритму розв'язку нелінійних рівнянь і призводить в більшості випадків до значного скорочення комп'ютерного часу необхідного для розрахунку.

Як і при аналізі кіл методом вузлових потенціалів, надійність програм аналізу, що реалізують метод поділу кола на лінійну і нелінійну частини, можна підвищити за рахунок використання для розв'язку рівнянь методу підсумовування кінцевих збільшень. Однак кількість ітерацій, що витрачається на розв'язок систем нелінійних алгебраїчних рівнянь, при цьому в більшості випадків дещо зростає, що впливає з результатів, наведених у таблиці 3.2.

Таким чином щодо доцільності застосування методу підсумовування кінцевих збільшень можуть бути зроблені ті ж висновки, що і при розв'язуванні вузлових рівнянь.

З порівняння варіантів методу Бройде, що використовують для вибору коефіцієнта  $\gamma$ . методу Кіфера і методу половинного ділення (таблиця 3.3), можна зробити висновок, що більш ефективним є другий з них.

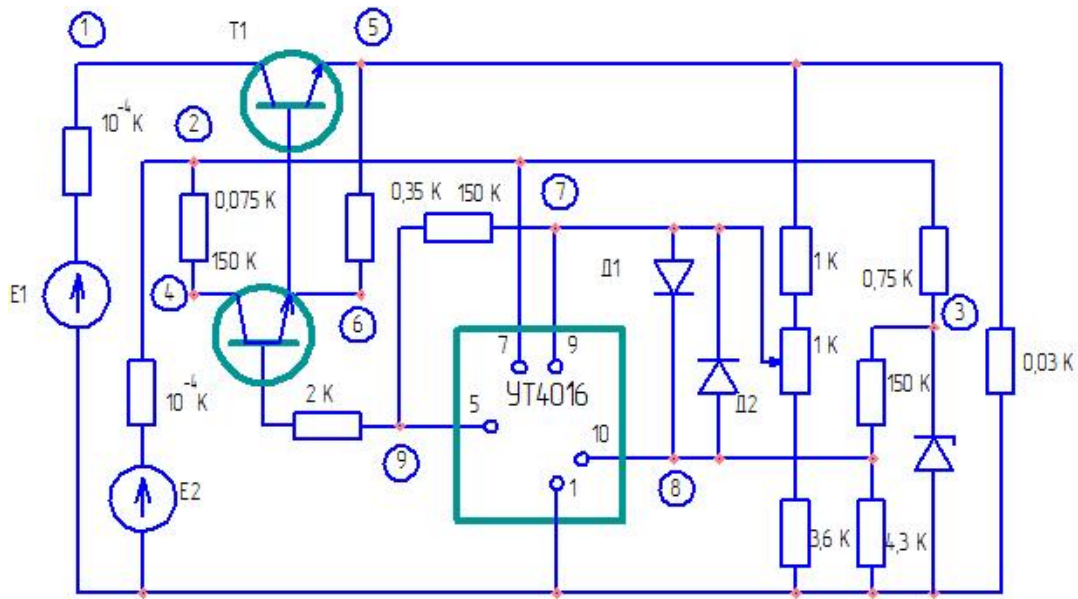


Рисунок 3.2 – Стабілізоване джерело живлення  
 $E_1 = 12,6V$ ;  $E_2 = 18V$

Результати розрахунку (в вольтах) для обох методів формування рівнянь  
 $\varphi_1 = 12,59972$ ;  $\varphi_2 = 17,99998$ ;  $\varphi_3 = 8,11886$ ;  
 $\varphi_4 = 10,96669$ ;  $\varphi_5 = 8,62589$ ;  $\varphi_6 = 9,41284$ ;  
 $\varphi_7 = 5,54521$ ;  $\varphi_8 = 5,54145$ ;  $\varphi_9 = 17,527312$ .

Таблиця 3.2

приклади	схема рис.2.4	схема рис.2.5	схема рис.2.8		схема рис.2.9	схема рис.2.11		схема рис.3.2
			I	II		I	II	
кількість кроків								
1	10	28	23	15	10	8	12	33
5	11	30	31	18	9	10	16	39
10	15	30	33	18	14	15	15	39

Таблиця 3.3

приклади	схема рис.2.4	схема рис.2.5	схема рис.2.8		схема рис.2.9	схема рис.2.11		схема рис.3.2
			I	II		I	II	
метод								
метод Кіфера	10	28	23	15	10	8	12	33
Метод половинного ділення	13	20	26	17	5	14	16	36

Хоча він вимагає в деяких випадках більшого числа ітерацій в порівнянні з методом Кіфера, але для оцінки  $\mathcal{U}$  на кожній ітерації проводиться в більшості випадків набагато менше розрахунків значення функції (3.37), що дозволяє скоротити час, що витрачається на аналіз.





$$|\Delta x_i| > \Delta,$$

то це є похибкою лінеаризації, тому що розв'язок не може бути менше  $-I_{oi}$ . Використання отриманого значення  $\Delta x_i$  при розрахунку збільшень інших змінних призводить до помилки, що не менше, ніж

$$|\delta_j| \geq \left| |\Delta x_i| - \Delta \right| \cdot |c_{ji}|.$$

У той же час, якщо покласти  $\Delta x_i = 0$ , максимальна похибка буде рівною

$$|\delta_j| \geq |\Delta| \cdot |c_{ji}|.$$

Якщо  $\Delta x_i = 0$ , то викреслюючи нульові елементи з (3.39), отримуємо

$$\Delta x_1 \cdot c_{12} \cdot \Delta x_2 + \dots + c_{1n-1} \cdot \Delta x_{n-1} = -c_{1n+1},$$

$$\Delta x_2 + \dots + c_{2n-1} \cdot \Delta x_{n-1} = -c_{2n+1},$$

$$\Delta x_{n-1} = -c_{n-1n+1},$$

що рівносильно розв'язку системи рівнянь  $(n-I)$ -ого порядку, отриманої з (3.38) шляхом відповідної перестановки рядків і стовпців і потім викреслюванням рядка і стовпця для  $i$ -ої змінної. Аналогічно, якщо  $I$  змінних рівні  $x_{i \min}$ , то буде вирішуватися система рівнянь  $(n-I)$ -ого порядку. Наприклад, для кола, в якому всі транзистори працюють в активному режимі, тобто всі колекторні переходи замкнені, порядок розв'язуваної системи рівнянь скорочується вдвічі (звичайно за умови, що діоди в колі відсутні).

Описана вище процедура зменшення порядку системи лінійних рівнянь може успішно використовуватися в разі, коли, наближення для змінних в процесі розв'язку не переходять з третього квадранта вольт-амперної характеристики в перший. Так як такий стан дотримується далеко не завжди, необхідно вживати заходів для того, щоб не виключати змінну, яка може змінити свій знак з мінуса на плюс, що може привести не тільки до уповільнення процесу розв'язку, а й до розбіжності.

Питання вибору змінних, рівняння для збільшень яких можуть бути скорочені в (3.38), є найбільш важливим в даному підході. Очевидно, що наближення за такими змінним повинні знаходитися в третьому квадранті вольт-амперної характеристики ( $U_{ли} < 0$ ,  $x_i < 0$ ).

Крім цього, в якості однієї з ознак слід використовувати знак нев'язки  $f_i(X)$ , який повинен бути негативним, що вказує на те, що точка розв'язку лежить зліва від точки наближення.

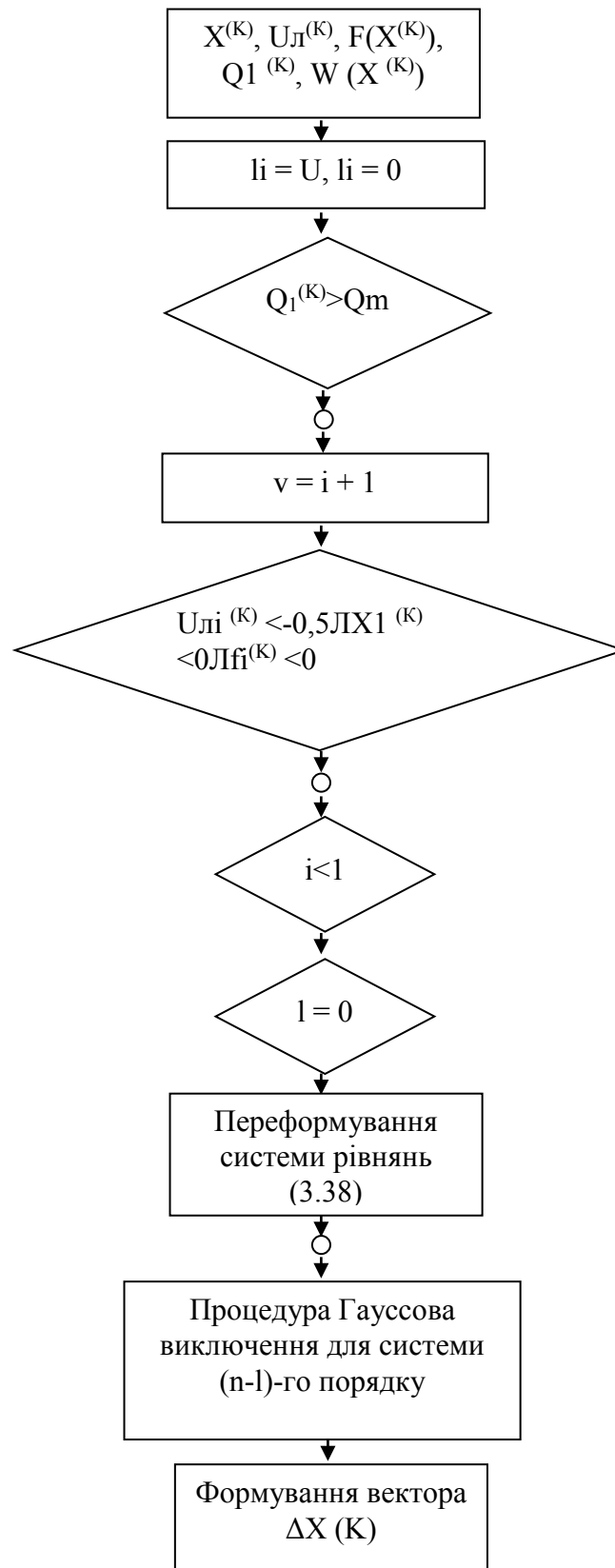


Рисунок 3.3 – Блок-схема розрахунку збільшень незалежних змінних зі скороченням порядку розв'язуваної системи лінійних рівнянь на кожній ітерації

Блок-схема алгоритму розрахунку вектору збільшень незалежних змінних зі скороченням порядку розв'язуваної на кожній ітерації системи лінійних рівнянь для лінеаризованого кола представлена на рис.3.3.

Перед початком розв'язку перевіряється близькість чергового наближення змінних до кореня рівняння (3.11). Як міра близькості використовується величина функції (3.37).

Виконання нерівності

$$Q_1(X^{(K)}) > Q_m$$

вказує на те, що  $K$ -е наближення «далеке» від коренів і щоб уникнути можливої розбіжності обчислювального процесу розв'язуватися повинна повна система (3.38). Для дослідження алгоритму величина  $Q_m$  вводилася в початковій інформації. Якщо задати  $Q_m = 0$ , то виключення змінних не відбувається, тому що  $Q_1(X^{(K)})$  завжди більше нуля. При  $Q_m$ , рівному  $\infty$  (числу, близькому до гранично максимального в комп'ютері), можливість скорочення змінних перевіряється з першого кроку розв'язку. Масив  $R$  служить для запам'ятовування номерів змінних, збільшення для яких можуть не розраховуватися. Він використовується в блоці переформування системи рівнянь (3.38) і потім при відновленні порядку елементів вектору  $\Delta X^{(K)}$ .

Переформування системи лінійних рівнянь полягає в такій перестановці рядків і стовпців, щоб змінні, номери яких зберігаються в масиві  $R$ , виявилися останніми в перетвореному векторі  $X_n$ . Згідно з методом Гаусса, отримуємо збільшення для  $n-l$  змінних, а решта елементів вектору  $\Delta X_n$  розраховуються як

$$\Delta x_i^{(K+1)} = -x_i^{(K)} + x_{i \min}.$$

Відповідно до викладеного алгоритму, була розроблена програма в середовищі MatLab, що входить в загальну програму аналізу електричних кіл (додаток А). Кількість ітерацій, що вимагається для отримання розв'язку при розрахунку деяких схем, наведено в таблиці 3.4, де  $n$  - порядок системи нелінійних рівнянь,  $C_0$  - кількість ітерацій, що витрачається на розв'язок при  $Q_m = 0$ ,  $C$  - число ітерацій при  $Q_m > 0$ ,  $n_1$  - порядок розв'язуваної системи рівнянь після скорочення,  $C_1$  - кількість ітерацій, на яких розв'язується скорочена система рівнянь.

Таблиця 3.4

приклади	$Q_m$	10	10	0,5	10	$10^{10}$
Сх.рис.2.4	$C$	10	10	10	10	9
$n = 7;$	$n_1$	4	4	4	4	4
$C_0 = 10;$	$C_1$	4	5	6	6	8
Сх.рис.2.5	$C$	28	27	28	28	
$n = 8;$	$n_1$	скорочено	5	5	6	розбіжна
$C_0 = 28$	$C_1$	немає	2	4	4	
Сх.рис.2.8	$C$	23	23	23	23	73

$n = 9;$	$n_1$	7	7	7	8: 7	8: 7
$C_0 = 23$	$C_1$	3	3	4	7: 4	19:53
Сх.рис.2.8	$C$	15	15	15	15	15
$n = 9;$	$n_1$	7	7	7	7	8: 7
$C_0 = 15$	$C_1$	6	8	9	10	4:10
Сх.рис.2.9	$C$	14	26	25	26	14
$n = 7;$	$n_1$	4: 3	4: 3	5: 4: 3	5: 4: 3	5: 4: 3
$C_0 = 14$	$C_1$	5: 1	10: 9	4: 9: 9	5: 10: 9	5: 6: 2
Сх.рис.2.9	$C$	10	10	10	9	7
$n = 7;$	$n_1$	3	5	3	3	4: 3
$C_0 = 10$	$C_1$	2	5	7	7	1: 3
Сх.рис.2.11	$C$	8	7	7	7	7
$n = 10;$	$n_1$	4	4	4	4	4
$C_0 = 8$	$C_1$	4	4	5	5	6
Сх.рис.2.11	$C$	12	12	12	12	12
$n = 10;$	$n_1$	6	6	6	6	8: 6
$C_0 = 12$	$C_1$	3	4	5	7	1: 7

Як видно з таблиці, розбіжність обчислень навіть при  $10^{10}$  спостерігалася тільки в одному випадку. У всіх інших випадках ефективність запропонованого алгоритму не викликає сумнівів. Це дозволяє стверджувати, що програма аналізу статичного режиму електричних кіл, що реалізує для розв'язку систем лінійних рівнянь лінеаризованого кола, описаний вище алгоритм, може успішно використовуватися для розрахунку кіл. Цікаво порівняти обчислювальні витрати на кожній ітерації в даному алгоритмі і витрати при розв'язку вузлових рівнянь з урахуванням розрідженості матриці провідності. Як зазначалося в розділі 1.7 кількість операцій множення – додавання при організації обчислювальних операцій тільки з ненульовими елементами матриці провідності лінійно зростає зі збільшенням числа вузлів  $p$  і коефіцієнт пропорційності дорівнює 10:20. Беручи середнє значення коефіцієнта, отримуємо

$$K_{y-c1} = 15p.$$

При розв'язку повної системи рівнянь (3.11) методом Гаусса обчислювальні витрати оцінюються

$$K_{y-c2} = \frac{n^3}{3}.$$

Припустимо, що в середньому половина  $p - n$  переходів в колах зміщені у зворотньому напрямку. У цьому випадку відповідно до розглянутого вище

алгоритму на кожній ітерації буде розв'язуватися система рівнянь порядку  $\frac{n}{2}$  і обчислювальні витрати дорівнюють

$$K_{y-c3} = \frac{n^3}{24}.$$

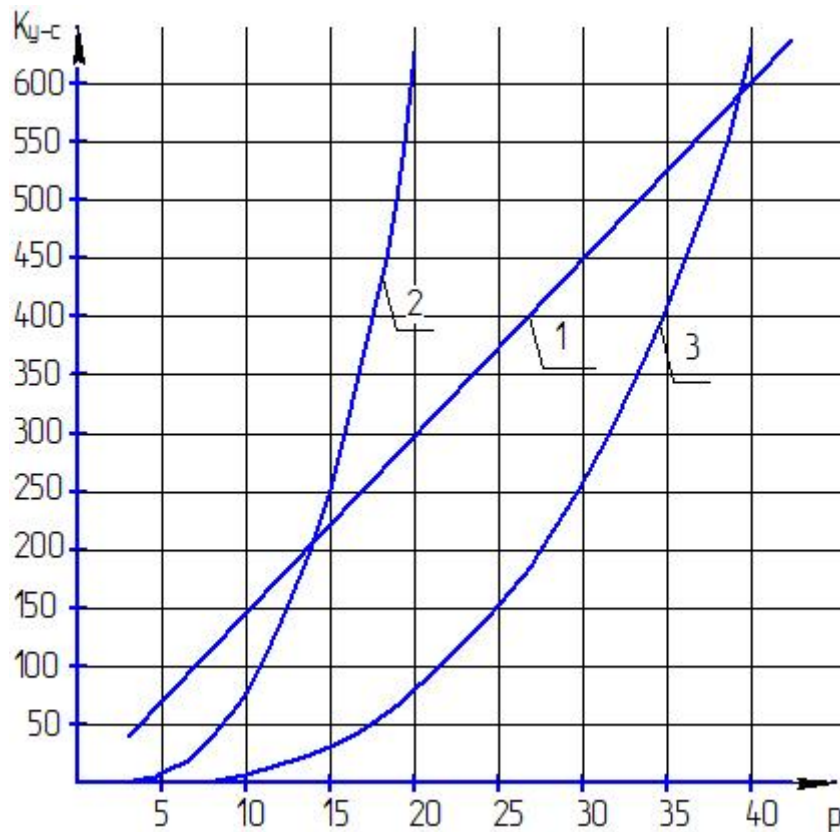


Рисунок 3.4 – Графіки залежностей  $K_{y-c1}(p)$ ,  $K_{y-c2}(p)$ ,  $K_{y-c3}(p)$

Для перерахунку числа  $p-n$  переходів в число вузлів скористаємося співвідношенням, яке справедливе для біполярних схем, що перемикаються

$$n \approx 0,62p.$$

Графіки залежностей  $K_{y-c1}(p)$ ,  $K_{y-c2}(p)$ ,  $K_{y-c3}(p)$  наведені на рис.3.4 (криві 1,2 і 3 відповідно). З рисунку видно, що вузлові рівняння більш ефективні рівнянь кола з виділеною лінійною частиною при розрахунку кіл, що містять більше 40 вузлів.

### 3.6 Аналіз динамічного режиму електричних кіл

У цьому розділі пропонується алгоритм розрахунку перехідних процесів нелінійних електричних кіл, що використовує для чисельного інтегрування диференціальних рівнянь неявні методи (обернений метод Ейлера і метод трапеції). Як і при аналізі методом вузлових потенціалів реалізована процедура, в якій інерційні елементи (ємності й індуктивності) моделюються за допомогою лінеаризованої схеми заміщення, що представлена на рис.1.7. Таким чином, у порівнянні з аналізом статичного режиму додаються резистори і джерела струму лінеаризованих схем заміщення реактивних елементів. Включаючи дані резистори в лінійну частину кола і нормалізуючи систему вузлових рівнянь щодо нелінійних елементів, можна отримати рівняння нев'язок так само, як при розрахунку статички (струми лінеаризованих схем включаються в вектор правих частин системи вузлових рівнянь). Додатково до рівнянь нев'язок повинні бути сформовані ще дві системи рівнянь: перша - для оновлення значень джерел струму лінеаризованих схем заміщення, друга - для розрахунку шуканих напруг в лінійній частині кола. Кінцева система рівнянь виходить у вигляді, подібному (1.5) і відповідному методу змінних стану.

Джерела напруги представляються у вигляді кусково-лінійних функцій часу. Така форма подання досить загальна і дозволяє досить точно сформувати вхідний сигнал будь-якої форми.

Аналогічно програмам розрахунку статичного режиму в даному випадку мається на увазі наявність тільки джерел напруги, що володіють внутрішнім опором, тобто кожне джерело напруги може бути перетворене до джерела струму.

**3.6.1 Формування рівнянь електричного кола.** Для формування системи рівнянь використовується алгоритм, подібний до того, який реалізований в програмах розрахунку статичного режиму.

При викладі алгоритму будуть використані позначення, введені в 3.3. Крім цього, нехай

$K_c$  – кількість конденсаторів;

$K_l$  – кількість котушок індуктивностей;

$U_c, U_l$  – вектори напруги, відповідно, на ємностях і індуктивностях;

$I_c, I_l$  – вектори струмів ємностей і індуктивностей;

$J_c, G_c, J_l, G_l$  – параметри лінеаризованих схем заміщення реактивних елементів

$$U_p = \begin{bmatrix} U_c^t & U_l^t \end{bmatrix}^t,$$

$$I_p = \begin{bmatrix} I_c^t & I_l^t \end{bmatrix}^t.$$

Як і раніше, розіб'ємо матрицю вузлів  $\Pi$  на дві субматриці  $\Pi_i$  і  $\Pi_y$ ,

перша з яких відповідає незалежним джерелам струму, які представляють нелінійні двополюсники, залежним джерелам моделі Еберса-Молла і джерелам лінеаризованих схем заміщення реактивних елементів, тобто кількість стовпців  $\Pi_i$  збільшилася в порівнянні з розрахунком статичного режиму на  $K_c + K_l$ .

На стільки ж стовпців збільшиться і  $\Pi_y$ , тому що крім лінійних резисторів повинні враховуватися провідності  $g_{Ci}$  і  $g_{Li}$ .

Аналогічно аналізу статичного режиму матриця провідності лінійної частини кола може бути представлена

$$Y = \Pi_y \cdot Y_B \cdot \Pi_y^t,$$

де  $Y_B$  – компонентна матриця, діагональними елементами якої є лінійні провідності  $G$  і провідності  $G_C$  і  $G_L$ .

Розіб'ємо матрицю  $\Pi_I$  на чотири субматриці. Стовпці, які стосуються джерел струму лінеаризованих схем конденсаторів і котушок індуктивностей, утворюють четверту, додаткову по відношенню до алгоритму для статичного режиму, субматрицю  $\Pi_{I5}$ , розмірність якої  $[p \cdot (K_C + K_L)]$ .

Виключивши стовпці, відповідні залежним джерелам струму, еквівалентних схем транзисторів за правилом, викладеним в 3.3, отримуємо

$$\Pi_I = -[\Pi_{I4} \ \Pi_{I3} \ \Pi_{I5}].$$

Визначимо вектор струмів лінеаризованого кола  $I$

$$I = \Pi_I \cdot X_R,$$

де вектор  $X_p$ , в разі аналізу динамічного режиму, записується

$$X_R = -[X^t \cdot X_B^t \cdot X_p^t]^t,$$

і

$$X_p = [I_c^t \cdot I_l^t]^t.$$

Вираз для вектора нев'язок має такий же вигляд, як і при аналізі статички

$$F(X) = \Pi_{I1}^t \cdot Y^{-1} \cdot \Pi_I X_R - V(X),$$

або, вводячи позначення:

$$W(X^{(K)}) = A_1 - V'(X^{(K)}),$$



$$A_2 = -\Pi_{I1}^t \cdot Y^{-1} \cdot \Pi_{I3},$$

$$A_3 = -\Pi_{I1}^t \cdot Y^{-1} \cdot \Pi_{I5}.$$

отримуємо

$$F(X) = A_1 \cdot X + A_2 \cdot X_B + A_3 \cdot X_p - V(X) = 0. \quad (3.40)$$

Якобіан системи рівнянь (3.40) збігається з (3.27).

Для розрахунку вектору  $U_p$ , який необхідний для оновлення значень джерел в лінеаризованих схемах заміщення конденсаторів і котушок індуктивності, скористаємося тим, що включення джерел струму  $X_p$  однозначно визначають топологію реактивних елементів, тобто

$$U_p = \Pi_{I5}^t \cdot Y^{-1} \cdot \Pi_I \cdot X_R$$

або

$$U_p = A_4 \cdot X + A_5 \cdot X_B + A_6 \cdot X_p, \quad (3.41)$$

де:

$$A_4 = -\Pi_{I5}^t \cdot Y^{-1} \cdot \Pi_{I4},$$

$$A_5 = -\Pi_{I5}^t \cdot Y^{-1} \cdot \Pi_{I3},$$

$$A_6 = -\Pi_{I5}^t \cdot Y^{-1} \cdot \Pi_{I5}.$$

Розрахований відповідно до (3.41) вектор  $U_p$  служить для оновлення значень джерел  $J_C$  і  $J_L$ .

Крім цього необхідно отримати вираз для розрахунку напруг в лінійній частині кола. Будемо вважати, що вітки, напруги яких повинні бути знайдені, задані матрицею  $\Pi_6$  і позначимо шуканий вектор напруг через  $U_B$ . Аналогічно виразами (3.40) і (3.41)  $U_B$  як функція  $X$ ,  $X_B$ ,  $X_p$  може бути представлена

$$U_B = A_7 \cdot X + A_8 \cdot X_B + A_9 \cdot X_p \quad (3.42)$$

і коефіцієнтні матриці записуються:

$$A_7 = -\Pi_6^t \cdot Y^{-1} \cdot \Pi_{I4},$$

$$A_8 = -\Pi_6^t \cdot Y^{-1} \cdot \Pi_{I3},$$

$$A_9 = -\Pi_6^t \cdot Y^{-1} \cdot \Pi_{I5}.$$

Так само, як і при формуванні рівнянь для аналізу статичного режиму, в

даному випадку немає необхідності в явному використанні матриці вузлів  $\Pi$ . Топологія кола може здаватися інформаційними масивами  $P_Y, P_1, P_2, P_3, P_4$ . Перші три - визначені в 3.3, а масиви  $P_3$  і  $P_4$  задають, відповідно вузли, до яких підключені інерційні елементи, і вузли, напруги між якими повинні бути розраховані. Алгоритм для розрахунку матриць коефіцієнтів  $A_4$  і  $A_7$  збігається з алгоритмом розрахунку  $A_1$ , розглянутим в 3.3, (масив  $P_2$  при розрахунку  $A_4$  замінюється на  $P_3$ , а при розрахунку  $A_7$  – на  $P_4$ ). Матриці  $A_3, A_5, A_6, A_8, A_9$  розраховуються так само, як і  $A_2$  з використанням відповідних топологічних масивів.

У програмах, призначених для аналізу кіл з багатоеміттерними транзисторами, алгоритм для формування матриць  $A_1, A_4, A_7$  змінюється в такій же мірі, як і при аналізі статичного режиму.

Остаточно система рівнянь отримана у вигляді:

$$\begin{aligned} V(X) &= A_1 \cdot X + A_2 \cdot X_B + A_3 \cdot X_p, \\ U_p &= A_4 \cdot X + A_5 \cdot X_B + A_6 \cdot X_p, \\ U_B &= A_7 \cdot X + A_8 \cdot X_B + A_9 \cdot X_p. \end{aligned}$$

**3.6.2 Розв'язок рівнянь.** Розв'язок системи рівнянь (3.43) здійснюється відповідно до методу підсумовування кінцевих збільшень, тобто в кожен момент часу виконується тільки один крок методом Ньютона.

Використовуваний алгоритм може бути записаний:

1. Введення вихідної інформації.  $K$  присвоюється одиниця. Векторам  $X^{(K)}, X_p^{(K)}, I_C^{(K)}, I_L^{(K)}$  присвоюються нульові значення.
2. Формування матриць  $A_1 \div A_9$ .
3. Розраховується вектор  $X_B$  як значення джерел струму в момент часу  $t^{(K)}$ .
4. Виходячи з  $X^{(K)}, X_B^{(K)}, X_p^{(K)}$ , визначається вектор нев'язок згідно з

$$F(X^{(K)}) = A_1 \cdot X^{(K)} + A_2 \cdot X_B^{(K)} + A_3 \cdot X_p^{(K)} - V(X^{(K)}).$$

5. Проводиться один крок методом Ньютона і знаходиться

$$X^{(K+1)} = X^{(K)} - W^{-1}(X^{(K)}) \cdot F(X^{(K)})$$

де,

$$W(X^{(K)}) = A_1 - V'(X^{(K)})$$

6. Вектор напруги на реактивних елементах  $U_p^{(K+1)}$  розраховується відповідно до виразу (3.41) для поточних значень векторів  $X^{(K+1)}, X_B^{(K)}, X_P^{(K)}$ .

7. Використовуючи отриманий вектор  $U_p^{(K+1)}$  і вектори  $I_C^{(K)}, I_L^{(K)}$ , розраховуються нові  $I_C^{(K+1)}, I_L^{(K+1)}$ , а потім  $I_P^{(K+1)}$  (розрахунок проводиться згідно з методом трапеції).

8. Перевіряється, чи необхідний **друк** вихідної інформації. Якщо так, то згідно (3.42) оцінюється  $U_B$  для  $X^{(K+1)}, X_B^{(K)}, X_P^{(K+1)}$  і необхідні параметри виводяться на **друк**.

У вихідних даних задається інформація про кількість поспіль кроків, після яких здійснюється **друк** вихідної інформації.

9. Перевіряється, чи весь часовий інтервал пройдено:

а) ні, то збільшуємо  $K$  на одиницю і переходимо до п.3.

б) так – зупинка.

Даний алгоритм справедливий для аналізу кіл, в яких відсутні нелінійні інерційні елементи і крок інтегрування  $\Delta t$  постійний. В іншому разі, матриці коефіцієнтів  $A_1 \div A_9$  повинні переформуватися на кожному кроці і перехід з 9, а здійснюється не п.3, а п.2. Необхідність переформування коефіцієнтних матриць значно знижує ефективність розглянутого алгоритму. Тому програму, що реалізує описаний вище алгоритм, має сенс використовувати для аналізу кіл, в яких можна або взагалі знехтувати інерційністю напівпровідникових приладів, або вважати, що дифузійні і бар'єрні ємності переходів лінійні, тобто величина їх не залежить від режиму. Розрахунок повинен вестися з постійним кроком інтегрування. Схема, яка може бути розрахована відповідно до розглянутого алгоритму практично без втрати точності, наведена на рис.2.4. Крива встановлення вихідної напруги при включенні напруги живлення показана на рис.3.5 суцільною лінією (пунктирна крива отримана експериментально). Однак прийняті допущення без сумніву сильно звужують клас аналізованих схем. Для усунення обмежень може бути використана процедура, розглянута в 2.4, згідно якій в гілці, що відповідає реактивному елементу, виділяється постійна і змінна складові. Постійна складова утворює деяку провідність схеми заміщення нелінійної вітки, яка входить в матрицю провідності лінійної частини кола, а змінна - відповідне джерело струму або напруги. У цьому випадку немає необхідності в перерахунку коефіцієнтних матриць на кожному кроці інтегрування і програма може успішно використовуватися при розрахунку кіл з напівпровідниковими приладами.

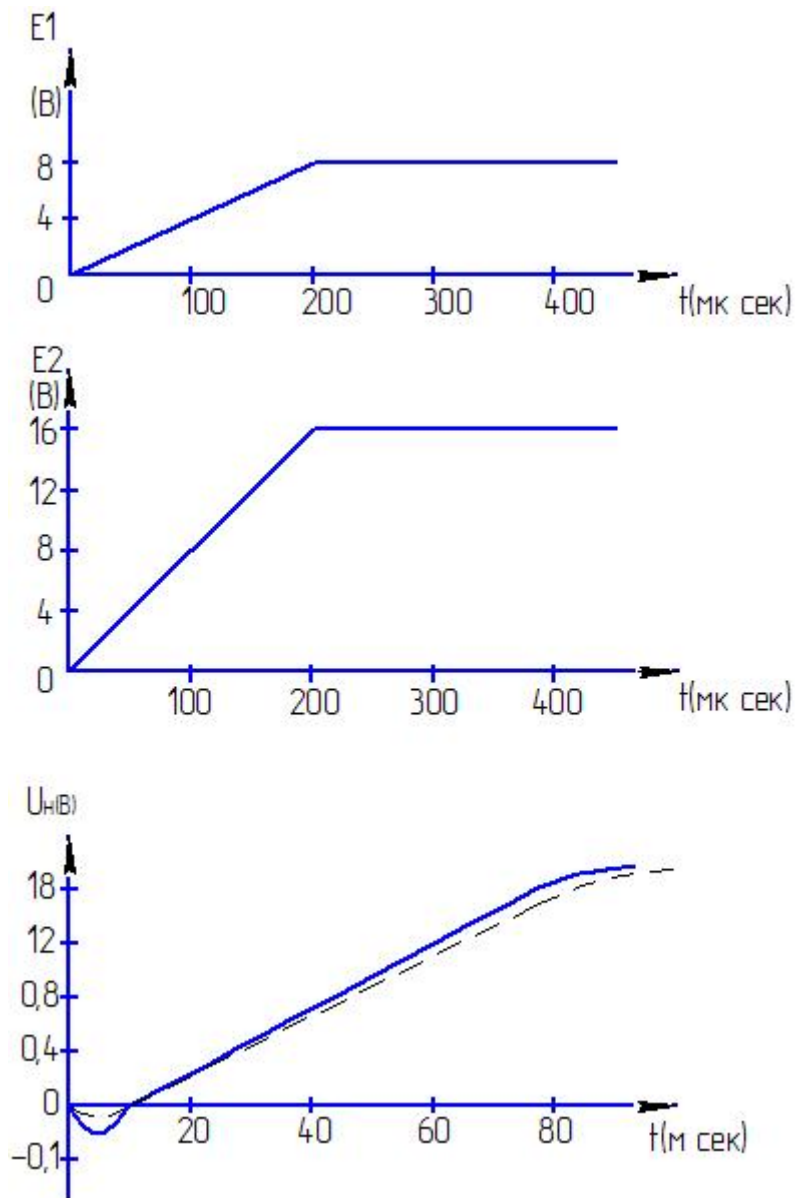


Рисунок 3.5 – Крива встановлення напруги навантаження при подачі живлення на стабілізатор напруги, наведений на рис.2.4

### *Контрольні питання для самоперевірки*

1. Наведіть систему нелінійних рівнянь в нормальній формі, що описує поведінку резистивного кола в статичному режимі.
2. Відносно яких змінних складаються рівняння в нормальній формі?
3. Наведіть алгоритм формування рівнянь в нормальній формі.
4. Назвіть переваги рівнянь в нормальній формі при використанні методу поділу кола на лінійну і нелінійну частини.
5. В чому полягає критерій єдиності розв'язку системи нелінійних рівнянь в нормальній формі, що описує поведінку резистивного кола в статичному режимі?
6. Наведіть алгоритм формування системи нелінійних рівнянь.
7. Як визначається порядок системи нелінійних рівнянь, складених щодо вектору струмів нелінійних двополюсників?
8. Якою матрицею задається топологія кола?
9. Для чого топологічну матрицю вузлів розбивають на дві субматриці?
10. Чому при формуванні рівнянь методу вузлових потенціалів, топологічна матриця вузлів в явному вигляді не використовується?
11. Якою кількістю чисел задається включення кожного транзистора?
12. Перелічіть особливості формування системи нелінійних рівнянь при аналізі кіл, що містять багатомітерні транзистори?
13. Запишіть критерій зупинки обчислювального процесу при використанні методу Ньютона для чисельного розв'язку рівнянь.
14. Які використовуються методи розв'язку системи рівнянь при поділі кола на лінійну і нелінійну частини?
15. Для чого вводяться обмеження на область пошуку коренів рівнянь?
16. Від чого залежить похибка, що допускається при розв'язку системи рівнянь?
17. Опишіть процедуру зменшення порядку системи лінійних рівнянь складених щодо вектору струмів нелінійних елементів.
18. В чому полягає переформування системи лінійних рівнянь?
19. Наведіть алгоритм розрахунку перехідних процесів нелінійних електричних кіл.

## 4. АЛГОРИТМИ РЕАЛІЗАЦІ МЕТОДІВ

### 4.1 Метод хорд і його модифікація

Розглянемо рівняння

$$f(x) = 0 \quad (4.1)$$

нехай функція  $f(x)$  визначена і неперервна на деякому кінцевому відрізку

$$a \leq x \leq b$$

разом зі своїми першою  $f'(x)$  та другою  $f''(x)$  похідними і приймає на кінцях відрізка протилежні знаки. У цьому випадку на відрізку  $[a, b]$  знаходиться корінь  $\xi$  рівняння (4.1) [8].

Згідно з методом хорд чергове наближення кореня визначається по ітераційній схемі [8]

$$x^{(K+1)} = x^{(K)} - \frac{f(x^{(K)})}{f(x^{(K)}) - f(d)} \cdot (x^{(K)} - d)$$

в якій, в залежності від знаків  $f'(x)$  і  $f''(x)$ ,  $d$  дорівнює або  $a$ , або  $b$ .

Метод хорд має невисоку швидкість збіжності і застосовується для розв'язку рівнянь кіл, в порівнянні з методом Ньютона і його модифікаціями, досить рідко.

Для розв'язку рівнянь, нелінійна частина яких має зворотну функцію, пропонується новий метод, згідно з яким нелінійна функція на кожному кроці розв'язку лінеаризується деякою хордою (цим пояснюється назва - модифікований метод хорд).

На відміну від відомого методу хорд в даному методі звуження області визначення кореня здійснюється на кожній ітерації з двох сторін.

Виклад методу будемо проводити на прикладі розв'язку нелінійного рівняння виду:

$$f(x) = -b_1 \cdot x + b_2 - v(x) = 0 \quad (4.2)$$

де  $v(x)$  - безперервна, монотонно зростаюча функція;

$b_1, b_2$  - деякі константи.

функція  $f(x)$  задовольняє таким умовам:

- 1)  $f(x)$  на відрізку  $[a, b]$  неперервна разом зі своїми похідними  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ ,
- 2) похідні  $f'(x)$  і  $f''(x)$  зберігають кожен певний знак на всьому відрізку  $[a, b]$ .

Для визначеності приймемо, що  $b_1 \geq 0$ ,  $v'(x) > 0$  і  $v''(x) < 0$ , тобто  $f'(x) < 0$  і  $f''(x) > 0$ , а також  $v(0) = 0$ .

Позначимо функцію, зворотну  $v(x)$ , через  $S(x)$ .

Пропонований метод передбачає на кожному кроці розв'язку відділення кореня рівняння (4.2) з подальшим звуженням знайденої області. В якості однієї з меж на першому кроці використовується точка  $x_1^{(0)}$ . Для визначення другої границі може бути використано  $x_1^{(0)} = S(b_2)$ . Покажемо, що в цьому випадку корінь рівняння (4.2) лежить на відрізку  $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]$ .

Припустимо  $b_2 > 0$ . Тоді

$$f(x_1^{(0)}) = b_2 > 0$$

і

$$f(x_2^{(0)}) = -b_1 \cdot S(b_2) + b_2 - v(S(b_2)) = -b_1 \cdot S(b_2).$$

Так як  $S(0) = 0$  і  $S'(x) > 0$ . Отже,  $f(x_1^{(0)}) \cdot f(x_2^{(0)}) < 0$  і, відповідно до [8] на відрізку  $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]$  лежить корінь  $\xi$  рівняння (4.2). Якщо  $b_2 < 0$ , а  $f(x_2^{(0)}) > 0$ , тобто і в цьому випадку корінь рівняння знаходиться на відрізку  $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]$ . Таким чином,  $x_1^{(0)}$ ,  $x_2^{(0)}$  можуть бути прийняті в якості початкового наближення з надлишком і недоліком для кореня  $\xi$ .

Наступне наближення для кореня  $\xi$  визначається, використовуючи ітераційну формулу методу хорд

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} - \frac{f(x_1^{(0)})}{f(x_1^{(0)}) - f(x_2^{(0)})} \cdot (x_1^{(0)} - x_2^{(0)}). \quad (4.3)$$

Обмежимося розглядом випадку  $b_2 > 0$ . При цьому виконується нерівність [8]:

$$\xi < x_1^{(1)} < x_2^{(0)}$$

Введемо в розгляд функцію

$$E(x) = -b_1 x + (x_1^{(1)} - x_2^{(0)}) \cdot b_1 \quad (4.4)$$

визначимо точку  $x''$ , яка задовольняє

$$f(x) = -b_1 x + (x_1^{(1)} - x_2^{(0)}) \cdot b_1. \quad (4.5)$$

З виразу (4.3) знаходимо

$$f(x_1^{(0)}) = \frac{f(x_1^{(0)}) - f(x_2^{(0)})}{x_1^{(0)} - x_2^{(0)}} \cdot (x_1^{(0)} - x_1^{(1)}).$$

Згідно з теоремою Лагранжа

$$\frac{f(x_1^{(0)}) - f(x_2^{(0)})}{x_1^{(0)} - x_2^{(0)}} = f'$$

де  $x_1^{(0)} < c < x_2^{(0)}$ ,  $f'(c)$  похідна функції  $f(x)$  в точці  $x = c$ .

Для  $f'(c)$  справедливий вираз

$$f'(c) = -b_1 - v'(c)$$

отже,

$$f(x_1^{(0)}) = -(b_1 + v'(c)) \cdot (x_1^{(0)} - x_1^{(1)})$$

або

$$f(x_1^{(0)}) = (b_1 + v'(c)) \cdot (x_1^{(1)} - x_1^{(0)}). \quad (4.6)$$

Порівнюючи вирази (4.5) і (4.6) і беручи до уваги, що  $v'(c) > 0$ , знаходимо

$$f(x_1^{(0)}) > f(x')$$

і так як

$$f'(x) > 0$$

виконується

$$x' > x_1^{(0)}.$$

Розглянемо тепер функцію

$$R(x) = f(x) - E(x). \quad (4.7)$$

Будемо шукати  $x_2^{(1)}$  як корінь рівняння



$$R(x) = 0$$

тобто

$$-b_1 \cdot x_2^{(1)} + f(x_1^{(0)}) - v(x_2^{(1)}) = -b_1 \cdot x_2^{(1)} + f(x') \quad (4.8)$$

тоді

$$V(x_1^{(0)}) = f(x_1^{(0)}) - f(x') > 0 \quad (4.9)$$

але

$$V(x_1^{(0)}) = 0$$

і

$$V'(x) > 0.$$

Звідси

$$x_2^{(1)} > x_1^{(0)}.$$

Припустимо

$$x_2^{(1)} > x'.$$

Використовуючи теорему Лагранжа, запишемо

$$f(x_2^{(1)}) - f(x') = f'(c) \cdot (x_2^{(1)} - x')$$

де  $x_2^{(1)} < c < x'$ .

Так як  $f'(c) < 0$  і  $x_2^{(1)} - x' < 0$

$$f(x_2^{(1)}) > f(x') \quad (4.10)$$

Однак з (4.8)

$$f(x') = f(x_2^{(1)}) + b_1 \cdot x_2^{(1)}$$

і

$$b_1 \cdot x_2^{(1)} > 0$$

тобто нерівність (4.10) невірна і невірне припущення, що

$$x_2^{(1)} < x'.$$

Отже, вірно

$$x_2^{(1)} > x' > x_1^{(0)}.$$

З виразу (4.9) знайдемо  $x_2^{(1)}$

$$x_2^{(1)} = S(b_2 - b_1 \cdot (x_1^{(1)} - x_1^{(0)})).$$

Представляючи рівняння (4.2) у вигляді

$$f(x) = u_n(x) - v(x)$$

і враховуючи, що  $x_1^{(0)} = 0$ , маємо

$$x_2^{(1)} = S(U_n(x_1^{(1)})) \quad (4.11)$$

Таким чином, доведено, що точка  $x_2^{(1)}$  лежить всередині відрізка  $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]$ . Однак залишається відкритим питання про розташування точки  $x_2^{(1)}$  по відношенню до кореня рівняння (4.2)  $\xi$ .

для  $\xi$  справедливо

$$V(\xi) = f(x_1^{(0)}) - b_1 \cdot \xi.$$

Перепишемо вираз (4.9) у вигляді

$$V(x_2^{(1)}) = f(x_1^{(0)}) - b_1 \cdot (x_1^{(1)} - x_1^{(0)}) \quad (4.12)$$
$$x_1^{(1)} - x_1^{(0)} > \xi,$$

а з цієї нерівності випливає, що

$$V(\xi) > V(x_2^{(1)}).$$

Застосувавши формулу Лагранжа

$$V(\xi) - V(x_2^{(1)}) = V'(C) \cdot (\xi - x_2^{(1)})$$

де  $C$  лежить на відрізку  $[x_2^{(1)}, \xi]$ . Так як

$$V(\xi) - V(x_2^{(1)}) > 0$$

і

$$V'(C) > 0$$

то

$$\xi > x_2^{(1)}$$

тобто  $x_2^{(1)}$  лежить зліва від кореня  $\xi$  і справедлива нерівність

$$x_1^{(0)} < x_2^{(1)} < \xi.$$

Отже, область відділення кореня звужена з двох сторін. Значення  $x_2^{(1)}$  і  $x_1^{(1)}$  приймаються за чергове наближення кореня  $\xi$  з недостачею і з надлишком.

Повторюючи описані вище процедури, для відрізка  $[x_2^{(1)}, x_1^{(1)}]$ , отримуємо нові наближення кореня  $\xi$ :  $x_1^{(2)}$  і  $x_2^{(2)}$ , причому

$$x_2^{(1)} < x_2^{(2)} < \xi$$

і

$$x_1^{(1)} > x_1^{(2)} > \xi.$$

Продовжуючи цю операцію  $K$  разів, утворюємо обмежену, монотонно спадаючу послідовність

$$x_1^{(1)} > x_1^{(2)} > \dots > x_1^{(K-1)} > x_1^{(K)} > \xi \quad (4.13)$$

де чергове значення  $x_1^{(K)}$  обчислюється за такою ітераційною формулою

$$x_1^{(K)} = x_1^{(K-1)} - \frac{f(x_1^{(K-1)})}{f(x_2^{(K-1)}) - f(x_1^{(K-1)})} \cdot (x_2^{(K-1)} - x_1^{(K-1)}). \quad (4.14)$$

Паралельно отримуємо монотонно зростаючу послідовність

$$x_2^{(1)} < x_2^{(2)} < \dots < x_2^{(K-1)} < x_2^{(K)} < \xi \quad (4.15)$$

де для обчислення  $x_2^{(K)}$  використовується вираз

$$x_2^{(K)} = S(U_n(x_1^{(K)})). \quad (4.16)$$

Монотонно зростаюча і монотонно спадаюча, але обмежені послідовності мають деяку кінцеву границю [8]. Позначимо межі для послідовностей (4.13) і (4.15) через  $a_1 \geq \xi$  і  $a_2 \leq \xi$ .

Переходячи до межі в виразі (4.14), маємо

$$R(x) = f(x) - E(x) \quad (4.17)$$

Відповідно до формули кінцевих збільшень

$$a_1 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f(a_2) - f(a_1)} \cdot (a_2 - a_1)$$

де  $a_1 > a > a_2$ .

Отже, для чисельника дробу і в правій частині виразу (4.17) виконується

$$f(a_1) = 0.$$

Але корінь рівняння (4.2) на відрізку  $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]$  тільки один. З цього випливає, що  $a_1 = \xi$ . Вираз (4.12) для  $K \rightarrow \infty$  має вигляд

$$V(a_2) = b_2 - b_1(a_1 - x_1^{(0)})$$

або

$$-b_1 \cdot a_1 + b_2 - V(a_2) = 0$$

замінюючи  $a_1$  на  $\xi$ ,

$$-b_1 \cdot \xi + b_2 - V(a_2) = 0$$

і  $\xi = a_2$ . Звідси

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_2^{(k)}) - f(x_1^{(k)})}{x_2^{(k)} - x_1^{(k)}} = f'(\xi)$$

і вираз (4.14) в межі при  $K \rightarrow \infty$  прагне до виду

$$\xi = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$$

тобто гранично модифікований метод хорд переходить в метод Ньютона.

Оцінімо швидкість зменшення різниць  $\xi - x_1^{(K)}$ . Уявімо

$$0 = f(\xi) = f(x_1^{(0)}) + f'(C) \cdot (\xi - x_1^{(0)})$$

$$f(\xi) = f(x_1^{(0)}) + \frac{f(x_2^{(0)}) - f(x_1^{(0)})}{x_2^{(0)} - x_1^{(0)}} \cdot (\xi - x_1^{(0)}) + (f'(C) - \frac{f(x_2^{(0)}) - f(x_1^{(0)})}{x_2^{(0)} - x_1^{(0)}}) \cdot (\xi - x_1^{(0)}), \quad (4.18)$$

де  $x_1^{(0)} < C < x_2^{(0)}$ .

Відповідно до Теорема Лагранжа

$$\frac{f(x_2^{(0)}) - f(x_1^{(0)})}{x_2^{(0)} - x_1^{(0)}} = f'(C_2) \quad (4.19)$$

де  $x_1^{(0)} < C_2 < x_2^{(0)}$

Підставляючи вираз (4.19) в (4.18),

$$f(\xi) = f(x_1^{(0)}) + f'(C_2) \cdot (\xi - x_1^{(0)}) + (f'(C) - f'(C_2)) \cdot (\xi - x_1^{(0)})$$

Ще раз застосовуючи формулу кінцевих різниць, отримуємо

$$f(\xi) = f(x_1^{(0)}) + f'(C_2) \cdot (\xi - x_1^{(0)}) + f''(C_1) \cdot (C_1 - C_2) \cdot (\xi - x_1^{(0)}) \quad (4.20)$$

де  $x_1^{(0)} < C < C_1 < C_2 < x_2^{(0)}$ .

Використовуючи (4.20) і очевидне

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} - \frac{f(x_1^{(0)})}{f'(C_2)}$$

і, переходячи від  $x_1^{(0)}$  до  $x_1^{(K)}$ , отримуємо

$$\xi - x_1^{(K+1)} = -\frac{f''(C_1^{(K)})}{f'(C_2^{(K)})} \cdot (C^{(K)} - C_2^{(K)}) \cdot (\xi - x_1^{(K)}) \quad (4.21)$$

причому

$$x_1^{(K)} > C^{(K)} > C_1^{(K)} > C_2^{(K)} > x_2^{(K)}.$$

Порівняємо (4.21) з виразом для оцінки швидкості убування різниці  $\xi - x^{(K)}$  при використанні методу Ньютона [8]

$$\xi - x^{(K+1)} = -\frac{f''(C)}{2 \cdot f'(x^{(K)})} \cdot (\xi - x^{(K)})^2.$$

Як відомо, метод Ньютона має квадратичну збіжність, якщо точка наближення знаходиться поблизу розв'язку. Розглядаючи вираз (4.21), можна зробити висновок, що модифікований метод хорд має збіжність, близьку до квадратичної.

Графічно хід розв'язання рівняння (4.2) відповідно до модифікованим методом хорд наведено на рис.4.1. Значення  $x_1^{(K)}$  визначається відповідно до методу хорд для відрізка  $[x_2^{(K-1)}, x_1^{(K-1)}]$ , а  $x_2^{(K)}$  є абсцисою точки перетину функції  $f(x)$  і  $E(x)$ .

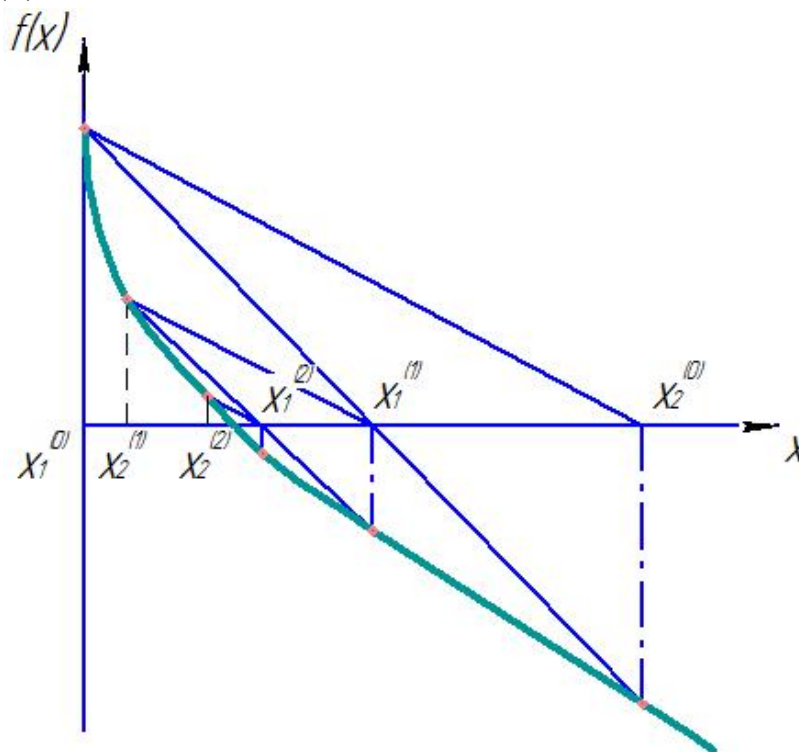


Рисунок 4.1 – Розв'язок рівняння  $f(x) = 0$  згідно модифікованому методу хорд

## 4.2 Реалізація модифікованого методу хорд і дослідження його збіжності

Звернемося до питання реалізації запропонованого методу при аналізі електричних кіл методом поділу кола на лінійну і нелінійну частину. Розглянемо розв'язок модифікованим методом хорд нелінійного рівняння, що описує схему, наведену на рис.1.4, і представленою у вигляді

$$f(x) = -R \cdot x + E - V(x) = 0, \quad (4.22)$$

де як і раніше  $x$  струм, що протікає через нелінійний двополюсник,  $V(x)$ -нелінійна функція струму.

Ітераційна формула методу Ньютона з урахуванням (3.12) може бути представлена при розв'язку (4.22) як

$$x^{(K+1)} = x^{(K)} - \frac{f(x^{(K)})}{-R - m\varphi_T / (x^{(K)} + I_0)}. \quad (4.23)$$

Неважко показати, що ітераційну формулу модифікованого методу хорд (4.14) в даному випадку можна записати в більш раціональній формі

$$x_1^{(K+1)} = x_1^{(K)} - \frac{f(x_1^{(K)})}{-R - f(x_1^{(K)}) / (x_2^{(K)} - x_1^{(K)})}. \quad (4.24)$$

З порівняння виразу (4.28), що відповідає методу дотичних, і (4.24) випливає, що різниця між методом Ньютона і модифікованим методом хорд при аналізі електричних кіл полягає тільки в підході до лінеаризації нелінійної вольт-амперної характеристики  $V(x)$ .

На рис.4.2 представлений хід розв'язку рівняння (4.22), згідно запропонованого методу на графіку залежності напруги на нелінійному двополюснику від струму, що протікає через нього. Пряма лінія, що перетинається з осями координат в точках  $(O, E)$  і  $(x_\varepsilon, 0)$ , є лінійною частиною рівняння (4.22), наведена крива – нелінійною частиною (4.22). Лінеаризація характеристики (3.12) нелінійного двополюсника на  $K$ -му кроці розв'язку здійснюється хордою, що проходить через точки  $a^{(K)}, b^{(K)}$ , координати яких розраховуються відповідно до виразів:

$$\begin{aligned} a_x^{(K)} &= x_1^{(K)}, a_u^{(K)} = V(x_1^{(K)}), \\ b_x^{(K)} &= V^{-1}(U_l^{(K)}), b_u^{(K)} = U_l^{(K)}, \end{aligned}$$

де  $U_l^{(K)} = R \cdot x_1^{(K)} + E$ .

Розглянемо тепер розв'язок систем нелінійних рівнянь в нормальній формі, представленій у вигляді (3.11). Згідно з модифікованим методом хорд, матриця  $R_d(X)$ , що входить у вираз (3.27) матриці Якобі системи рівнянь (3.11), повинна бути змінена на матрицю  $R(X)$  такої ж розмірності. Елементи діагональної матриці  $R(X)$  визначаються на кожній ітерації як

$$r_i(x_1^{(K)}) = \frac{f_i(x_1^{(K)})}{x_{1i}^{(K)} - x_{2i}^{(K)}}, \quad (4.25)$$

де  $X_1^{(K)} = [x_{11}^{(K)}, x_{12}^{(K)}, \dots, x_{1n}^{(K)}]^t$

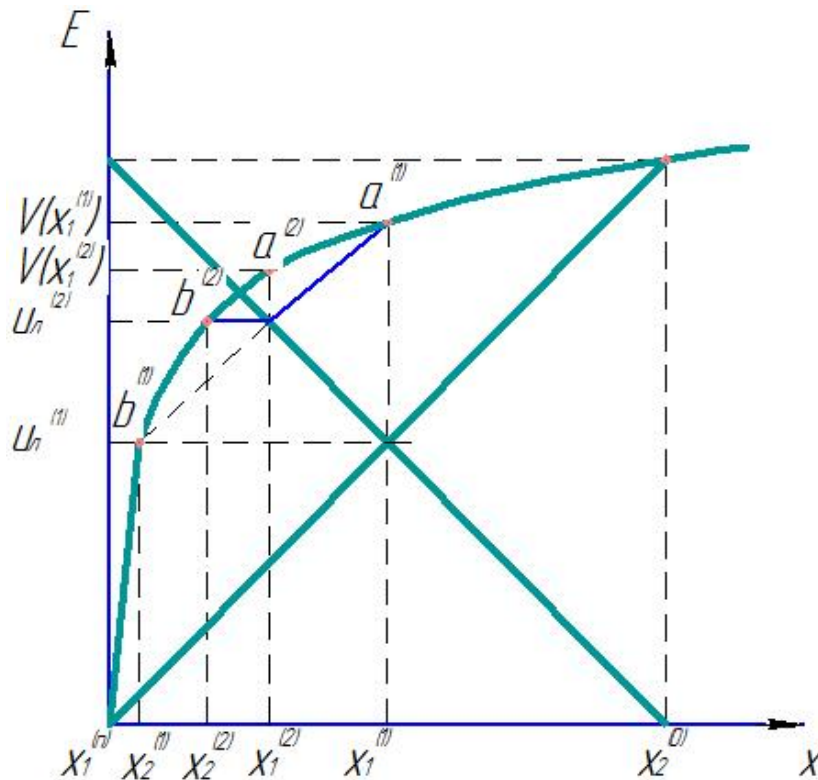


Рисунок 4.2 – Розв'язання рівняння (4.22) згідно модифікованому методу хорд

$x_{1i}^{(K)}$  – точка  $K$ -ого наближення  $i$ -ої змінної;

$x_{2i}^{(K)}$  – обчислюється згідно з (4.16) і з урахуванням того, що

$$v^{-1}(u) = I_0(\exp(u / (m\varphi_T)) - 1),$$



$$x_{2i}^{(K)} = I_0(\exp(u_{li}^{(K)} / (m\varphi_T)) - 1), \quad (4.26)$$

а для розрахунку  $u_{li}^{(K)}$  використовується вираз

$$u_{li}^{(K)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_{1j}^{(K)} + \sum_{j=1}^{K_2} b_{ij} \cdot x_{bi}, \quad (4.27)$$

де  $a_{ij}, b_{ij}$  – елементи коефіцієнтних матриць А і В системи рівнянь (3.11);

$n, K_2, x_{bi}$  – введені в 3.3.

Визначаючи матрицю

$$W_1(X) = A - R(X),$$

ітераційну формулу модифікованого методу хорд запишемо як

$$X_1^{(K+1)} = X_1^{(K)} - W_1^{-1}(X_1^{(K)}) \cdot F(X_1^{(K)}). \quad (4.28)$$

Дослідження збіжності модифікованого методу хорд здійснювалося відповідно до методики, при викладі методу Ньютона. Доведемо наступну теорему.

**Теорема.** Нехай дана нелінійна система рівнянь (3.11) і вектор-функція  $F(X)$  визначена і неперервна разом зі своїми приватними похідними першого і другого порядків в деякій області  $\omega$ . Покладемо, що  $X_1^{(0)}$  - точка, що лежить в  $\omega$  разом зі своєю замкнутою  $H$  – околom

$$\bar{U}_H(X_1^{(0)}) = \left\{ \|X - X_1^{(0)}\| \leq H \right\} \subset \omega,$$

де норма розуміється в сенсі  $m$  - норми, причому виконані наступні умови:

1) матриця  $W_1(X_1^{(0)})$  має зворотну  $\Gamma_1(X_1^{(0)})$  і

$$\xi_0 \leq \|\Gamma_1(X_1^{(0)})\| \leq d_0,$$

2)  $\|\Gamma_1(X_1^{(0)})\| \cdot \|F(X_1^{(0)})\| \leq g_0 \leq \frac{H}{2},$

$$3) \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_i \cdot \partial x_K} \right| \leq P,$$

4) похідна нелінійної частини рівнянь (3.11) в області  $\omega$  обмежена знизу величиною  $m$  і

$$\left\| \frac{\partial V(X)}{\partial X} \right\| \geq m \geq \min \left\{ \frac{3}{2\xi_0}, \|A\| \right\},$$

5) постійні  $d_0, g_0, P$  задовольняють нерівності

$$\mu_0 = 4nd_0 \cdot g_0 \cdot P \leq 1. \quad (4.29)$$

Тоді ітераційний процес (4.28) при початковому наближенні  $X_1^{(0)}$  збігається в граничний вектор

$$X^* = \lim_{K \rightarrow \infty} (X_1^{(K)})$$

і  $X^*$  є розв'язком системи рівнянь (3.11) таким, що

$$\|X^* - X_1^{(0)}\| \leq 2g_0 \leq H.$$

**Доведення.**

Прийmemo позначення

$$h_K = \|X_1^{(K+1)} - X_1^{(K)}\| = \max_i |x_{1i}^{(K+1)} - x_{1i}^{(K)}|,$$

$$\Gamma_1(X_1^{(K)}) = W_1^{-1}(X_1^{(K)}),$$

$$\Gamma(X_1^{(K)}) = W^{-1}(X_1^{(K)}).$$

Згідно (4.28)

$$h_K = \|\Gamma_1(X_1^{(K)}) \cdot F(X_1^{(K)})\|.$$

оцінимо величину  $\Gamma_1(X_1^{(K)})$  і  $\Gamma_1(X_1^{(K)}) \cdot F(X_1^{(K)})$ , враховуючи умови теореми 1) – 5).

Розглянемо випадок  $K = 1$ . З умови 2) випливає

$$h_0 = \|X_1^{(1)} - X_1^{(0)}\| \leq g_0 \leq \frac{H}{2}, \quad (4.30)$$

$$\bar{U} \frac{H}{2}(X_1^{(1)}) \subset \bar{U}_H(X_1^{(0)}).$$

попередньо оцінимо  $\|X_1^{(0)} - X_2^{(0)}\|$  і  $\|X_2^{(1)} - X_2^{(0)}\|$ , де

$$\begin{aligned} X_2^{(0)} &= S(U_n(X_1^{(0)})), \\ X_2^{(1)} &= S(U_n(X_1^{(1)})). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Очевидно, що

$$V(X_2^{(0)}) = U_n(X_1^{(0)})$$

і

$$F(X_1^{(0)}) = V(X_2^{(0)}) - V(X_1^{(0)}),$$

або, в скалярно́му формі

$$f_i(X_1^{(0)}) = v_i(x_{2i}^{(0)}) - v_i(x_{1i}^{(0)}) = v'(C) \cdot (x_{2i}^{(0)} - x_{1i}^{(0)}).$$

З огляду на умови 2) і 4)

$$|x_{2i}^{(0)} - x_{1i}^{(0)}| = \frac{|f_i(X_1^{(0)})|}{v'(C)} \leq \frac{|f_i(X_1^{(0)})|}{m}$$

і

$$\|X_2^{(1)} - X_2^{(0)}\| \leq \frac{\|F(X_1^{(0)})\|}{m} \leq \frac{g_0}{m \| \Gamma_1(X_1^{(K)}) \|} \leq \frac{2}{3} g_0. \quad (4.32)$$

Для оцінки  $\|X_2^{(1)} - X_2^{(0)}\|$  скористаємося виразами (4.31):

$$\begin{aligned} \|X_2^{(1)} - X_2^{(0)}\| &= \|S(U_n(X_1^{(1)})) - S(U_n(X_1^{(0)}))\| \leq \\ &\leq \|U_n(X_1^{(1)}) - U_n(X_1^{(0)})\| \cdot \|S'(\eta)\| = \\ &= \|A \cdot X_1^{(1)} + V_0 - A \cdot X_1^{(0)} - V_0\| \cdot \|S'(\eta)\| = \\ &= \|A \cdot (X_1^{(1)} - X_1^{(0)})\| \cdot \|S'(\eta)\| \leq \|A\| \cdot \|X_1^{(1)} - X_1^{(0)}\| \cdot \|S'(\eta)\| \leq \end{aligned}$$

$$\leq g_0 \|A\| \cdot \|S'(\eta)\|,$$

де  $\eta = U_n(X_1^{(0)}) + \theta \cdot (U_n(X_1^{(1)}) - U_n(X_1^{(0)}))$ ,  
 $0 < \theta < 1$ .

Максимальна величина  $S'(\eta)$  дорівнює  $\frac{1}{m}$  і, так як згідно з умовою 4)

$$\|A\| \cdot \frac{1}{m} \leq 1,$$

справедлива нерівність

$$\|X_2^{(1)} - X_2^{(0)}\| \leq g_0. \quad (4.33)$$

Перейдемо тепер до оцінки  $F(X_1^{(1)})$ . Запишемо

$$\begin{aligned} \|F(X_1^{(1)})\| &= \|F(X_1^{(1)}) - F(X_1^{(0)}) - W_1(X_1^{(0)}) \cdot (X_1^{(1)} - X_1^{(0)})\| = \\ &= \|F(X_1^{(1)}) - F(X_1^{(0)}) - W(X_1^{(0)}) \cdot (X_1^{(1)} - X_1^{(0)}) + W(X_1^{(0)}) \cdot (X_1^{(1)} - X_1^{(0)}) - \\ &- W_1(X_1^{(0)}) \cdot (X_1^{(1)} - X_1^{(0)})\| \leq \|F(X_1^{(1)}) - F(X_1^{(0)}) - W(X_1^{(0)}) \cdot (X_1^{(1)} - X_1^{(0)})\| + \\ &+ \|W(X_1^{(0)}) - W_1(X_1^{(0)}) \cdot (X_1^{(1)} - X_1^{(0)})\| \leq \frac{1}{2} n \cdot \|X_1^{(1)} - X_1^{(0)}\|^2 \times \\ &\times \|F''(\rho_1)\| + \|X_1^{(1)} - X_1^{(0)}\| \cdot \|W(X_1^{(0)}) - W(C^{(0)})\| \leq \frac{1}{2} n \cdot g_0^2 \cdot P + \\ &+ \|X_1^{(1)} - X_1^{(0)}\| \cdot n \cdot \|X_1^{(0)} - C^{(0)}\| \cdot \|F''(\rho_2)\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} n \cdot g_0^2 \cdot P + n \cdot g_0 \cdot P \cdot \|X_1^{(0)} - C^{(0)}\|, \end{aligned}$$

де  $\rho_1 = X_1^{(0)} + \theta \cdot (X_1^{(1)} - X_1^{(0)})$ ,

$\rho_2 = C^{(0)} + \theta_1 \cdot (X_1^{(1)} - C^{(0)})$ ,

$0 < \theta < 1$ ,

$0 < \theta_1 < 1$ ,

$C^{(0)} = [C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_n^{(0)}]^t$

і  $C_i^{(0)}$ , лежить в інтервалі  $(x_{1i}^{(0)}, x_{2i}^{(0)})$ .

отже

$$\|X_1^{(0)} - C^{(0)}\| \leq \|X_2^{(0)} - X_1^{(0)}\| \leq \frac{2}{3} g_0$$

і

$$\|F(X_1^{(1)})\| \leq \frac{7}{6} n \cdot g_0^2 \cdot P. \quad (4.34)$$

оцінімо величину  $\Gamma_1(X_1^{(1)}) = W^{-1}(X_1^{(1)})$ , представивши

$$\begin{aligned} \Gamma_1(X_1^{(1)}) &= [W_1(X_1^{(0)}) \cdot \Gamma_1(X_1^{(0)}) \cdot W(X_1^{(1)})]^{-1} = \\ &= [\Gamma_1(X_1^{(0)}) \cdot W_1(X_1^{(1)})]^{-1} \cdot \Gamma_1(X_1^{(0)}). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Далі продовжуємо

$$\begin{aligned} \|E - \Gamma_1(X_1^{(0)}) \cdot W_1(X_1^{(1)})\| &= \|\Gamma_1(X_1^{(0)}) [W_1(X_1^{(0)}) - W_1(X_1^{(1)})]\| \leq \\ &\leq \|\Gamma_1(X_1^{(0)})\| \cdot \|W_1(X_1^{(0)}) - W_1(X_1^{(1)})\| \leq d_0 \|W_1(X_1^{(0)}) - W_1(X_1^{(1)})\| \leq \\ &\leq d_0 \|W_1(C^{(0)}) - W_1(C^{(1)})\| \leq d_0 \cdot n \cdot \|C^{(1)} - C^{(0)}\| \cdot P, \end{aligned}$$

де  $C^{(1)} = [C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \dots, C_n^{(1)}]^t$  і  $C_i^{(1)}$ , лежить в інтервалі  $(x_{1i}^{(1)}, x_{2i}^{(1)})$ .

Очевидно, що

$$\begin{aligned} \|C^{(1)} - C^{(0)}\| &\leq \max \left\{ \|X_1^{(1)} - X_1^{(0)}\|, \|X_2^{(0)} - X_1^{(0)}\|, \|X_2^{(1)} - X_2^{(0)}\|, \right. \\ &\quad \left. \|X_2^{(1)} - X_1^{(1)}\|, \|X_2^{(0)} - X_1^{(1)}\|, \|X_2^{(1)} - X_1^{(0)}\| \right\}, \end{aligned}$$

або, з урахуванням (4.30), (4.32) і (4.33),

$$\begin{aligned} \|C^{(1)} - C^{(0)}\| &\leq \max \left\{ g_0, \frac{2}{3} g_0, g_0, \|X_2^{(1)} - X_1^{(1)}\|, \right. \\ &\quad \left. \|X_2^{(0)} - X_1^{(1)}\|, \|X_2^{(1)} - X_1^{(0)}\| \right\}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Проведемо оцінку  $\|X_2^{(1)} - X_1^{(1)}\|, \|X_2^{(0)} - X_1^{(1)}\|, \|X_2^{(1)} - X_1^{(0)}\|$ .

Використовуємо нерівність  $F(X_1^{(1)}) = V(X_2^{(1)}) - V(X_1^{(1)})$ , або, в скалярній формі

$$f_i(X_1^{(1)}) = v_i(x_{2i}^{(1)}) - v_i(x_{1i}^{(1)}).$$

далі

$$x_{2i}^{(1)} - x_{1i}^{(1)} = \frac{v_i(x_{2i}^{(1)}) - v_i(x_{1i}^{(1)})}{v'(\rho_i)},$$

де  $\rho_i = x_{1i}^{(1)} + \theta \cdot (x_{2i}^{(1)} - x_{1i}^{(1)})$ ,  $0 < \theta < 1$ .

$$\left| x_{2i}^{(1)} - x_{1i}^{(1)} \right| \leq \frac{|v_i(x_{2i}^{(1)}) - v_i(x_{1i}^{(1)})|}{|v'(\rho_i)|} \leq \frac{f_i(X_1^{(1)})}{m}.$$

Переходимо до норми  $\|X_2^{(1)} - X_1^{(1)}\|$ :

$$\|X_2^{(1)} - X_1^{(1)}\| \leq \frac{\|F(X_1^{(1)})\|}{m}.$$

Підставляючи в дану нерівність отриману вище оцінку  $\|F(X_1^{(1)})\|$  (вираз (4.34)), отримуємо

$$\begin{aligned} \|X_2^{(1)} - X_1^{(1)}\| &\leq \frac{7n \cdot g_0^2 \cdot P}{6m} = \frac{7}{24} \cdot \frac{g_0}{m \cdot d_0} \cdot 4n \cdot g_0 \cdot d_0 \cdot P \leq \\ &\leq \frac{7}{24} \cdot \frac{g_0 \cdot \mu_0}{m \cdot d_0} \leq \frac{7}{24} \cdot \frac{g_0}{m \cdot d_0} \leq \frac{7}{24} \cdot \frac{g_0}{m \cdot \zeta_0}, \end{aligned}$$

і згідно з умовою 4),

$$\|X_2^{(1)} - X_1^{(1)}\| \leq \frac{7}{36} g_0. \quad (4.37)$$

Продовжуючи таким же чином

$$\|X_2^{(0)} - X_1^{(1)}\| \leq \frac{\|V(X_2^{(0)}) - V(X_1^{(1)})\|}{m} = \frac{\|A \cdot X_1^{(0)} + V_0 - V(X_1^{(1)})\|}{m} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\|A \cdot X_1^{(0)} + V_0 - A \cdot X_1^{(1)} - V_0 + A \cdot X_1^{(1)} + V_0 - V(X_1^{(1)})\|}{m} = \\
&= \frac{\|A \cdot (X_1^{(0)} - X_1^{(1)}) + F(X_1^{(1)})\|}{m} \leq \frac{\|A\| \cdot \|X_1^{(0)} - X_1^{(1)}\| + \|F(X_1^{(1)})\|}{m} \leq \\
&\leq g_0 + \frac{7}{36} g_0,
\end{aligned}$$

i

$$\|X_2^{(0)} - X_1^{(1)}\| \leq \frac{43}{36} g_0. \quad (4.38)$$

Аналогічно

$$\begin{aligned}
\|X_2^{(1)} - X_1^{(0)}\| &\leq \frac{\|V(X_2^{(1)}) - V(X_1^{(0)})\|}{m} = \frac{\|A \cdot (X_1^{(1)} - X_1^{(0)}) + F(X_1^{(0)})\|}{m} \leq \\
&\leq g_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{m \cdot \|\Gamma(X_1^{(1)})\|}\right) \leq g_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{m \cdot \xi_0}\right),
\end{aligned}$$

а з урахуванням умови 4):

$$\|X_2^{(1)} - X_1^{(0)}\| \leq \frac{5}{3} g_0. \quad (4.39)$$

Підставивши (4.37), (4.38) і (4.39) в (4.36)

$$\|C^{(1)} - C^{(0)}\| \leq \max \left\{ g_0, \frac{2}{3} g_0, g_0, \frac{7}{36} g_0, \frac{43}{36} g_0, \frac{5}{3} g_0 \right\},$$

визначаємо

$$\|C^{(1)} - C^{(0)}\| \leq \frac{5}{3} g_0.$$

Продовжимо оцінку величини  $\|\Gamma_1(X_1^{(1)})\|$ :

$$\|E - \Gamma_1(X_1^{(0)}) \cdot \mathcal{W}_1(X_1^{(1)})\| \leq \frac{5}{3} d_0 \cdot n \cdot g_0 \cdot P = \frac{5}{12} \mu_0 \leq \frac{5}{12}.$$

Опускаючи аналогічні викладки, запишемо

$$\left\| \Gamma_1(X_1^{(0)}) \cdot W_1(X_1^{(1)}) \right\| \leq \frac{1}{1 - \frac{5}{12} \mu_0} \leq \frac{7}{12},$$

i

$$\left\| \Gamma_1(X_1^{(1)}) \right\| \leq \left\| \left[ \Gamma_1(X_1^{(0)}) \cdot W_1(X_1^{(1)}) \right]^{-1} \right\| \cdot \left\| \Gamma_1(X_1^{(0)}) \right\| \leq \frac{12}{7} \cdot d_0 = d_1.$$

остаточно

$$\begin{aligned} \left\| \Gamma_1(X_1^{(1)}) \cdot F(X_1^{(1)}) \right\| &\leq \left\| \Gamma_1(X_1^{(1)}) \right\| \cdot \left\| F(X_1^{(1)}) \right\| \leq \\ &\leq \frac{12}{7} d_0 \cdot \frac{7}{6} n \cdot g_0^2 \cdot P = 2n \cdot d_0 \cdot g_0 \cdot P \cdot g_0 = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot g_0 = g_1. \end{aligned}$$

для точки  $X_1^{(1)}$  отримали

$$\bar{U}_{\frac{H}{2}}(X_1^{(1)}) \subset \bar{U}_H(X_1^{(0)}) \subset \omega,$$

$$\left\| \Gamma_1(X_1^{(1)}) \right\| \leq d_1,$$

$$h_1 = \left\| \Gamma_1(X_1^{(1)}) \cdot F(X_1^{(1)}) \right\| \leq g_1,$$

$$\text{де } d_1 = \frac{12}{7} d_0, \quad g_1 = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot g_0 \leq \frac{H}{4}$$

i

$$\mu_1 = 4n \cdot d_1 \cdot g_1 \cdot P = 4n \cdot \frac{12}{7} d_0 \cdot \frac{1}{2} \mu_0 \cdot g_0 \cdot P = \frac{1}{2} \mu_0^2 \leq 1.$$

Надалі доказ теореми нічим не відрізняється від доказу аналогічної теореми для методу Ньютона.

Порівнюючи модифікований метод хорд з методом Ньютона необхідно відзначити, що пропонований метод вимагає трохи більшого числа обчислювальних операцій на кожній ітерації із-за обчислень згідно (4.26)  $x_{2i}^{(K)}$  для всіх змінних  $n$ . Значення  $u_{li}^{(K)}$ , що служать аргументом при розрахунку  $x_{2i}^{(K)}$ , визначаються при обчисленні нев'язок  $f_i(X_1^{(K)})$ , тобто додаткові витрати машинного часу не потрібні.

Для поліпшення збіжності модифікованого методу хорд можуть бути використані ті ж прийоми, що і при розрахунку збільшень незалежних змінних за допомогою дотичних, тобто реалізація методу Бройде, методу продовження розв'язку по параметру, методу підсумовування кінцевих збільшень.



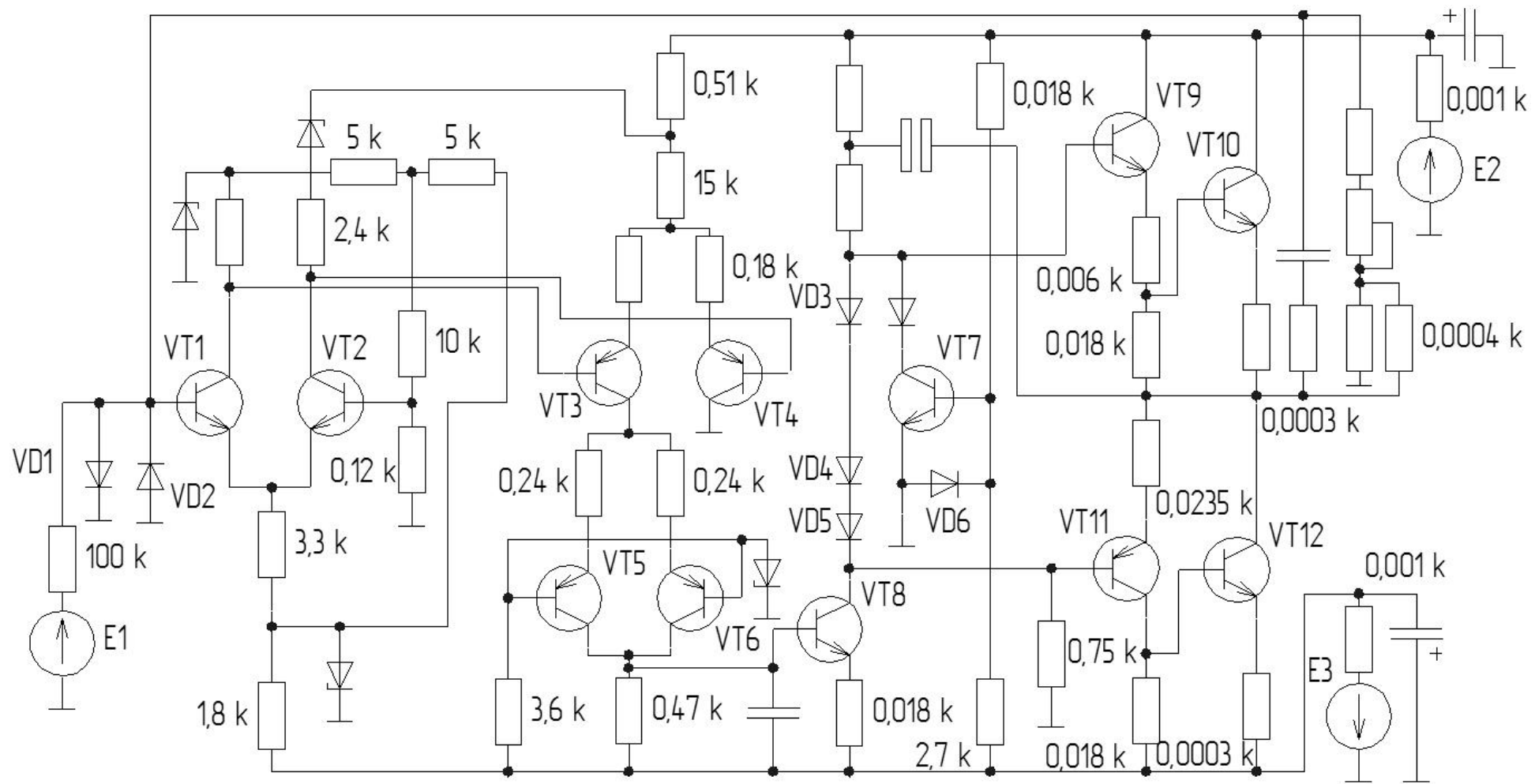


Рисунок 4.3 – Підсилювач постійного струму

При практичному застосуванні модифікованого методу хорд виникає небезпека зупинки обчислювального процесу із-за переповнення при обчисленні (4.25). Так як поблизу розв'язку  $x_{2i}^{(K)} \approx x_{1i}^{(K)}$ , то із-за обмежень точності обчислень на комп'ютері може виявитися, що знаменник в (4.25) буде прирівняний до нуля. Дане явище - звичайна складність чисельного диференціювання. Але при  $x_{2i}^{(K)} \rightarrow x_{1i}^{(K)}$  значення  $\xi_i(X)$  прагне до  $\xi_{d_i}(X)$ .

Отже, замість (4.25) може бути використано (3.28). Це добре узгоджується і з показаним в попередньому параграфі фактом, що асимптотично модифікований метод хорд переходить в метод Ньютона. Таким чином, для того, щоб уникнути переповнення, необхідно перевіряти близькість до розв'язку. Як міра близькості може бути використана величина різниці  $x_{2i}^{(K)} - x_{1i}^{(K)}$ , але більш зручною виявляється величина модуля  $i$ -ої нев'язки, так як при цьому з'являється можливість уникнути обчислень  $x_{2i}^{(K)}$ , якщо

$$|f_i(X_1^{(K)})| \leq \delta, \quad (4.40)$$

де  $\delta$  - деяка мала позитивна величина.

Відповідно до викладеного методу була розроблена програма в середовищі MatLab, яка представляє собою програму, яку розглянуто в попередньому розділі, доповнену блоком розрахунку матриць  $R(X)$  (додаток А). При розрахунку кожного елемента матриці  $R(X)$  перевіряється виконання нерівності (4.40). Якщо (4.40) не виконується, то обчислення ведеться згідно (4.25), в іншому випадку - відповідно до виразу (3.28). величина  $\delta$  приймається рівною  $10^{-10}$ .

За розробленою програмою був проведений розрахунок реальних електричних схем. Кількість ітерацій, необхідних для отримання розв'язку з однаковою точністю при використанні методу Бройде з лінеаризацією нелінійних характеристик дотичними (метод Ньютона) і хордами (модифікований метод хорд) наведені в таблиці 4.1, з розгляду якої можна зробити висновок, що модифікований метод хорд виявляється досить ефективним при розв'язку нелінійних рівнянь виду (3.11).

Перехід від дотичних до хорд в програмі аналізу кіл, який реалізує метод Монте-Карло, дозволив скоротити час рахунку для схеми, наведеної на рис.2.6, на 36% (розраховувалося 50 варіантів схеми з випадковими значеннями параметрів), а для схеми стабілізатора напруги, наведеної на рис.3.2, - на 37%.

Таблиця 4.1

метод розв'язку	приклад										
	схема рис. 2.4	схема рис. 2.5	схема рис. 2.7		схема рис. 2.8		схема рис. 2.9		схема рис.2.11		схема рис. 4.3
			I	II	I	II	I	II	I	II	
метод дотичних	13	28	15	18	28	15	27	10	8	12	19
Модіфікований метод хорд	10	16	9	4	18	9	12	10	6	12	13

### 4.3 Застосування модифікованого методу хорд для розв'язання вузлових рівнянь

У попередніх розділах було показано, що відмінність модифікованого методу хорд від методу Ньютона полягає тільки в способі лінеаризації нелінійної характеристики. Таким чином, при розв'язку вузлових рівнянь змінюється вираз для розрахунку провідностей  $g^{(K)}$  лінеаризованих схем заміщення нелінійних двополюсників. Вважаємо, як і раніше, що  $i_l^{(K)}, u_l^{(K)}$  - струм і напруга на нелінійному двополюснику, отримані з розгляду лінеаризованого кола і

$$i_n^{(K)} = v^{-1} \left( u_l^{(K)} \right), \quad (4.41)$$

$$u_n^{(K)} = v \left( i_l^{(K)} \right). \quad (4.42)$$

Розв'язок рівнянь здійснюється щодо напруг на нелінійних елементах і наближенню  $x_1^{(K)}$  відповідає  $u_l^{(K)}$ , а  $x_2^{(K)}$  -  $u_n^{(K)}$ . Береться до уваги, що функція нев'язки в даному випадку дорівнює

$$f_i(x_1^{(K)}) = j^{(K)} = i_l^{(K)} - i_n^{(K)},$$

вираз для провідності  $g^{(K)}$  лінеаризованої схеми заміщення можна записати

$$g^{(K)} = \frac{i_l^{(K)} - i_n^{(K)}}{u_n^{(K)} - u_l^{(K)}} = -j^{(K)} / \delta u^{(K)}, \quad (4.43)$$

де  $\delta u^{(K)}$  позначає нев'язку по напрузі.

При розв'язку одного нелінійного рівняння виду (4.22) небезпека зупинки обчислювального процесу при обчисленні функцій  $\ln(x)$  і  $\exp(x)$  не виникає, тому що точка наближення завжди знаходиться в області визначення для зазначених функцій. Це важлива відмінність модифікованого методу хорд від методу Ньютона, який вимагає різні видозміни, розглянуті вище, для знаходження розв'язку рівняння (4.22). Однак, якщо розв'язується система нелінійних рівнянь, небезпека виникнення переповнення не виключається і застосуванням модифікованого методу хорд, тобто в принципі можливі ситуації, розглянуті при викладі алгоритму розв'язку вузлових рівнянь методом Ньютона. З цієї причини в програмі, що використовує модифікований метод хорд, вжиті заходи захисту, описані в розділі 2.3. В розгляд вводиться масив обмежених значень напруг на  $p$ - $n$ -переходах, що розраховується і

використовується так само, як і при реалізації методу Ньютона. Якщо  $u_l^{(K)}$  перевищує значення  $u_{zp}$ , то струмовій нев'язці присвоюється значення  $I_{zp} = v^{-1}(u_{zp})$ .

У разі якщо  $i_l^{(K)}$  виявилось менше  $-I_0$  і величина  $u_n^{(K)}$  не може бути обчислена відповідно до виразу (4.42), то  $u_n^{(K)}$  присвоюється значення, яке дорівнює загальній кількості модулів величини всіх незалежних джерел напруги, наявних у колі зі знаком мінус. Вираз нев'язки по напрузі має вигляд

$$\delta u = -\sum_{j=1}^m |E_j| - u_l^{(K)},$$

де  $E_j$  – значення  $j$ -ого джерела напруги;

$m$  – кількість джерел напруги.

На відміну від рівнянь в нормальній формі при вузловому аналізі рівняння нев'язок в явному вигляді відсутні. Чисельне значення струмових нев'язок для нелінійних двополосників можуть бути знайдені тільки після виконання першого кроку розв'язку. Отже, на першому кроці рівняння хорди не може бути знайдене (визначення струмів через  $p$ - $n$  перехід при нульовому опорі переходів, тобто струмів короткого замикання, завдання не легше, ніж один аналіз лінеаризованого кола, тому навряд чи може служити виходом в даній ситуації). Одним з варіантів може бути виконання першого кроку відповідно до методу Ньютона. Відомо, що метод Ньютона добре працює поблизу розв'язку, чого не можна сказати про випадок, коли значення змінних далекі від коренів. У той же час немає підстав вважати, що модифікований метод хорд працює краще методу дотичних поблизу розв'язку (особливо беручи до уваги неминучу похибку чисельного диференціювання при розрахунку  $g^{(K)}$  відповідно до виразу (4.43)). Отже, якщо запропонований метод дозволяє скоротити кількість ітерацій, необхідних для отримання розв'язку, в порівнянні з методом Ньютона, то це відбувається за рахунок «кращої» поведінки далеко від розв'язку.

Можна очікувати, що виконання першого кроку відповідно до методу Ньютона нераціональне. Дійсно, більш вигідним виявляється моделювання режиму «близького» до режиму короткого замикання, тобто нелінійні двополосники на першому кроці розв'язку в лінеаризованій схемі представляються деякими досить великими провідностями. Оптимальна величина провідності підбиралася експериментально, виходячи з прикладів розрахунку конкретних схем.

Як вже зазначалося вище, пряма реалізація модифікованого методу хорд не дозволяє досягти досить високої точності розв'язку із-за труднощів розрахунку провідності  $g^{(K)}$  відповідно до виразу (4.43) при наближенні до розв'язку. Як і при розв'язку рівнянь кола з виділеною лінійною частиною із-за обмеженої точності обчислень на комп'ютері поблизу розв'язку може статися зупинка обчислювального процесу із-за переповнення розрядної сітки комп'ютера. Більш того, аварійна зупинка може статися і порівняно далеко від розв'язку, тому що для зупинки достатньо, щоб, принаймні одна така нев'язка була мала, а динамічна провідність, відповідна даній змінній велика. Дійсно

$$\delta u^{(K)} \approx \frac{j^{(K)}}{g_d^{(K)}}.$$

Отже, повинні бути прийняті спеціальні заходи проти можливої зупинки подібні тим, які приймалися при розв'язку рівнянь кола з виділеною лінійною частиною. Наприклад, можна перевіряти перед розрахунком  $g^{(K)}$  виконання нерівності

$$|j^{(K)}| \leq \delta, \quad (4.44)$$

сенс якої той же, що і нерівності (4.40).

Однак, як показали результати розрахунків схем, використання нерівності (4.44) незручне, тому що у багатьох схемах виявилось, що величина  $\delta$  повинна бути порядку  $10^{-8} \div 10^{-10}$  (при  $\delta > 10^{-8}$  спостерігалось збільшення необхідного числа ітерацій), але таке  $\delta$  не гарантує неможливість аварійної зупинки. Так, при аналізі схеми стабілізатора напруги, наведеної на рис.2.10, аварійна зупинка із-за поділу на  $\delta u^{(K)} = 0$  сталася при  $\delta = 10^{-8}$ .

При цій величині була реалізована перевірка близькості до розв'язку по виконанню нерівності

$$j^{(K)} / (g_d^{(K)} + g_y) \leq \delta_1, \quad (4.45)$$

де  $g_y$  – провідність витоку розглянутого нелінійного двополюсника, яка вводиться в (4.45) для того, щоб уникнути зупинки у випадках негативного зсуву  $p$ - $n$  переходів, коли  $g_d^{(K)} \approx 0$ .

Результати розрахунку (кількість витрачених на розв'язок ітерацій) для деяких схем при використанні (4.45) наведені в таблиці 4.2 (при проведенні

розрахунків провідність нелінійних двополіусників на першому кроці розв'язку приймалася рівною  $10^4$ ).

При збільшенні  $\delta_1$  спостерігалося уповільнення збіжності (для схеми рис.2.5 при  $\delta_1 = 10^{-7}$ . Розв'язок було отримано за 19 ітерацій, а при  $\delta_1 = 10^{-5}$  після 35 ітерацій процес обчислень ще не був закінчений). Таким чином, можна зробити висновок, що найкращим значенням для  $\delta_1 \in 10^{-9} \div 10^{-10}$ .

Таблиця 4.2

приклад		величина $\delta_1$			
		$10^{-11}$	$10^{-10}$	$10^{-9}$	$10^{-8}$
Схема рис.2.4		9	9	9	9
Схема рис.2.5		7	7	8	11
Схема рис.2.8	I	9	9	9	9
	II	10	10	10	10
Схема рис.2.10		51	51	51	51

Пошук оптимального значення, що присвоюється провідності нелінійних двополіусників на першому кроці розв'язку, проводився при  $\delta_1 = 10^{-8}$  і результати розрахунків зведені в таблицю 4.3, з розгляду якої випливає, що до найбільшого успіху призводить прирівнювання  $g_i^{(1)}$  величині  $10^3 \div 10^4$ . Прочерки в таблиці означають, що даний варіант не прораховувався.

Таблиця 4.3

приклад		величина $g_i^{(K)}$					
		$10^7$	$10^6$	$10^5$	$10^4$	$10^3$	$10^2$
Схема рис. 2.4		9	9	9	9	13	18
Схема рис. 2.5		-	20	25	11	17	19
Схема рис. 2.7 $u_{ex} = 2,5$		5	5	5	5	5	5
Схема рис. 2.8	I	9	9	9	9	10	9
	II	-	12	12	12	10	21
Схема рис. 2.9	I	8	8	8	8	10	11
	II	10	33	13	10	15	15
Схема рис. 2.10		54	130	31	51	17	31
Схема рис. 2.11	I	6	6	6	19	5	5
	II	6	7	6	5	6	6

Як і при реалізації алгоритму, розглянутого в 2.3, в даному випадку іноді можна скоротити потрібну для розрахунку кількість ітерацій за рахунок більш ретельного вибору I гр.

Це твердження ілюструє таблиця 4.4, розрахунки для якої проводилися при  $\delta_1 = 10^{-8}$  і  $g_i^{(1)} = 10^4$ .

Таблиця 4.4

величина I гр.	приклади									
	схема рис.1.1	схема рис.2.5	схема рис.2.7	схема рис.2.8		схема рис.2.9		схема рис.2.10	схема рис.2.11	
				I	II	I	II		I	II
100 а	9	11	5	9	10	8	10	51	6	5
10 а	9	11	5	9	10	8	10	17	6	5
1 а	9	11	5	9	10	8	10	12	5	5

Рівність числа ітерацій при різних значеннях I гр. для більшості аналізованих схем говорить про те, що при використанні модифікованого методу хорд поточне наближення змінних дуже рідко потрапляє в четвертий квадрант вольт-амперної характеристики нелінійного елемента.

З порівняння таблиць 2.2 і 4.4 можна зробити висновок, що, як і в разі рівнянь кола з виділеною лінійною частиною, при розв'язку вузлових рівнянь нелінійних електричних кіл модифікований метод хорд виявляється надзвичайно ефективним.



#### 4.4 Комбінований алгоритм I

В основі даного алгоритму лежать міркування, частково висловлені в попередніх параграфах, і суть його полягає в переході при наближенні до розв'язку від лінеаризації нелінійних характеристик хордами і дотичними. Якщо в двох попередніх розділах такий перехід розглядається як засіб проти аварійної зупинки при обчисленні хорди, то в пропонованому алгоритмі призначення його трохи ширше.

Крім усунення можливості аварійних зупинок за алгоритм, що проводить лінеаризацію нелінійних характеристик в залежності від близькості до розв'язку або хордами, або дотичними, свідчать такі міркування. По-перше, поблизу розв'язку модифікований метод хорд повинен працювати ідентично методу Ньютона і, отже, витрати на чисельне диференціювання нічим не окупаються (як вказувалося в 4.2, обчислення хорди дещо більш трудомісткий процес, ніж обчислення дотичної). Більш того, із-за неминучої похибки чисельного диференціювання можна очікувати, що поблизу кореня системи рівнянь модифікований метод виявиться гірше методу Ньютона. Але з наведеної в 4.2 таблиці 4.1 слідує, що для розрахованих прикладів схем модифікований метод хорд витрачає на розв'язок менше число ітерацій, ніж метод дотичних (виняток становить один з варіантів схеми рис.2.9, в якому кількість ітерацій рівна). Очевидно, що це досягається за рахунок «кращої» поведінки далеко від розв'язку.

На підставі цих міркувань і може бути запропонований алгоритм, який при наближенні до розв'язку переходить від методу хорд до методу дотичних. Як відомо, в якості міри близькості до розв'язку може використовуватися:

- а) норма вектора нев'язок;
- б) норма вектора приростів незалежних змінних.

Беручи до уваги той факт, що вектор збільшень змінних розраховується після формування матриці Якобі і, отже, на  $K$ -ому кроці розв'язку може використовуватися норма збільшень, що характеризує попередній  $(K - 1)$ -крок, краще виглядає використання норми вектора нев'язок.

Але при реалізації алгоритму розв'язку систем нелінійних алгебраїчних рівнянь, описаного в 3.4, нев'язки для змінних, розв'язок за якими лежить за межами  $x_{i \min}$ , ніколи не стають рівними нулю, що не дозволяє задавати єдиний критерій близькості для кіл в яких всі  $p$ - $n$ -переходи відкриті, і кіл, що містять хоча б один замкнений  $p$ - $n$ -перехід.

З цієї причини пропонується розглядати близькість до розв'язку по кожній змінній окремо (як це робилося в попередніх параграфах), виходячи з виконання нерівності (4.40). При цьому, природно, виключається і можливість переповнення.

Описана в 3.4 програма була модифікована відповідно до цього алгоритму. Результати розрахунку деяких кіл при різних значеннях  $\delta$  наведені в табл.4.5.

З розгляду даних таблиці 4.5 і порівняння її з таблицею 4.1 можна зробити висновок, що запропонований алгоритм дозволяє скоротити час розрахунку не тільки за рахунок зменшення здійснюваних операцій при обчисленні матриці  $W_1(X)$  але і в деяких випадках призводить до скорочення необхідного для розв'язку числа ітерацій.

При виборі найкращого значення  $\delta$  слід виходити з очевидних положень:

а) величина  $\delta$  повинна бути по можливості найбільшою;

б) кількість ітерацій в порівнянні з «чистим» модифікованим методом хорд не повинна зростати.

Виходячи з даних таблиці 4.5, цим вимогам задовольняє  $\delta = 10^{-1}$ , що добре узгоджується і з результатами розрахунку інших кіл.

Таблиця 4.5

приклад		величина $\delta$						
		$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	0,5	1	10	$10^6$
Схема рис. 2.4		10	10	7	7	7	8	13
Схема рис. 2.5		16	16	14	24	27	75	28
Схема рис. 2.8	I	18	17	19	26	22	29	28
	II	10	10	10	9	9	15	15
Схема рис. 2.9	I	10	10	10	10	10	34	27
	II	10	10	10	10	10	9	10
Схема рис. 2.10		25	52	40	59	59	39	39
Схема рис. 2.11	I	6	6	6	6	6	8	6
	II	12	12	12	12	12	12	12

## 4.5 Комбінований алгоритм II

Для викладу даного алгоритму розглянемо рис.4.3. На рисунку представлені графіки напруги на нелінійному двополюснику в функції струму, що протікає через даний двополюсник, отримані з розгляду лінійної і нелінійної частин рівняння (4.2) окремо (відповідно пряма лінія, описувана рівнянням  $u_n = -b_1x + b_2$  і крива функції  $v(x)$ ).

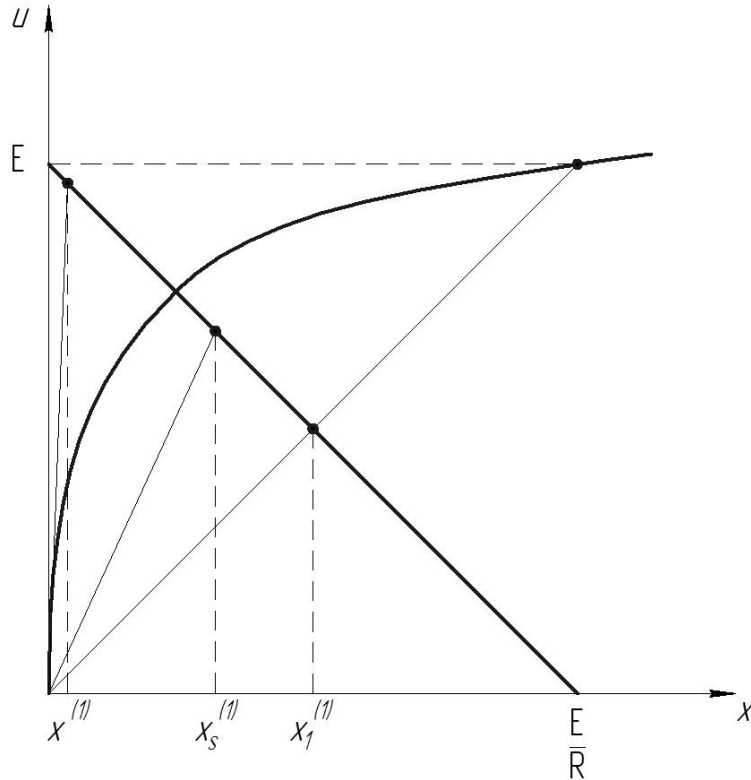


Рисунок 4.3 – Отримання чергового наближення незалежної змінної при застосуванні комбінованого алгоритму II

Застосовуючи до розв'язку рівняння (4.2) метод Ньютона, ми отримуємо чергове наближення для кореня, яке завжди буде лежати зліва від істинного розв'язку. У розділі 4.2 показано, що при застосуванні модифікованого методу хорд до розв'язку цього ж рівняння чергове наближення кореня  $x_1^{(K)}$  завжди буде знаходитися праворуч від істинного розв'язку. Тобто, справжній розв'язок завжди знаходиться між черговими наближеннями, одержуваними за методом Ньютона і модифікованим методом хорд. Використовуючи це явище, може бути запропонований алгоритм, в якому лінеаризація нелінійної характеристики здійснюється деякою прямою, що лежить між дотичною і хордою, знайденою відповідно до виразів для модифікованого методу хорд. Тангенс кута нахилу такої прямої до осі абсцис  $\zeta_S$  може бути

$$\xi_S(x^{(K)}) = \xi(x^{(K)}) + \lambda \cdot (\xi_d(x^{(K)}) - \xi(x^{(K)})), \quad (4.46)$$

де  $\xi_d(x^{(K)})$  – динамічний опір в точці  $K$ -го наближення;

$\xi(x^{(K)})$  – тангенс кута нахилу хорди, що отримується відповідно модифікованим методом хорд, до осі абсцис;

$\lambda$  – деякий коефіцієнт, причому  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Якщо  $\lambda$  дорівнює одиниці алгоритм працює як метод Ньютона, тобто нелінійна характеристика лінеаризується дотичною. Якщо ж  $\lambda = 0$ , то алгоритм збігається з модифікованим методом хорд, тому що

$$\xi_S(x^{(K)}) = \xi(x^{(K)}).$$

Таким чином, збіжність даного алгоритму при  $\lambda = 1$  і  $\lambda = 0$  при розв'язку рівняння (4.2) очевидна. Якщо ж  $\lambda$  не дорівнює ні нулю, ні одиниці, то збіжність впливає з того, що чергове наближення при застосуванні даного алгоритму завжди знаходиться між  $x^{(K)}$  і  $x_1^{(K)}$  де  $x^{(K)}$  – наближення, що отримується відповідно до методу Ньютона з точки  $x_S^{(K-1)}$ ,  $x_1^{(K)}$  – чергове наближення при застосуванні модифікованого методу хорд. Так як  $x^{(K)}$  і  $x_1^{(K)}$  збігаються до розв'язку  $\xi$  рівняння (4.2), то  $x_S^{(K)}$  також буде збігатися зі зростанням номера ітерації  $K$  до розв'язку  $\xi$ .

Вираз для оцінки швидкості убуття різниць  $\xi - x_S^{(K)}$  отримаємо таким же шляхом, як і в розділі 4.1 для різниці  $\xi - x_1^{(K)}$ . Використовуючи вирази (4.18) і (4.19) і беручи до уваги (4.46), вираз для  $f(\xi)$  можна записати як

$$\begin{aligned} f(\xi) = & f(x_S^{(0)}) + (f'(C_2) + \lambda \cdot (f'(x_S^{(0)}) - f'(C_2))) \cdot (\xi - x_S^{(K)}) + \\ & + (f'(C) - (f'(C_2) + \lambda \cdot (f'(x_S^{(0)}) - f'(C_2)))) \cdot (\xi - x_S^{(K)}). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Позначаючи

$$f'(C_3) = f'(C_2) + \lambda \cdot (f'(x_S^{(0)}) - f'(C_2)),$$

перепишемо (4.47) у вигляді

$$f(\xi) = f(x_S^{(0)}) + f'(C_3) \cdot (\xi - x_S^{(K)}) + (f'(C) - f'(C_3)) \cdot (\xi - x_S^{(K)}). \quad (4.48)$$

Застосовуючи формулу кінцевих різниць до  $f'(C) - f'(C_3)$  тобто представляючи

$$f'(C) - f'(C_3) = f''(C_4) \cdot (C - C_3),$$

перепишемо (4.48)

$$f(\xi) = f(x_S^{(0)}) + f'(C_3) \cdot (\xi - x_S^{(K)}) + f''(C_4) \cdot (C - C_3) \cdot (\xi - x_S^{(K)}). \quad (4.49)$$

Враховуючи що

$$x_S^{(1)} = x_S^{(0)} - \frac{f(x_S^{(0)})}{f'(C_3)},$$

і переходячи від  $x_S^{(0)}$  до  $x_S^{(K)}$ , отримуємо

$$\xi - x_S^{(K+1)} = -\frac{f''(C_4^{(K)})}{f'(C_3^{(K)})} \cdot (C^{(K)} - C_3^{(K)}) \cdot (\xi - x_S^{(K)}), \quad (4.50)$$

де  $x_S^{(K)} < C_3^{(K)} < C_4^{(K)} < C^{(K)} < x_2^{(K)}$  і для  $x_2^{(K)}$  маємо

$$x_2^{(K)} = v^{-1}(u_l(x_S^{(K-1)})),$$

де функції  $v^{-1}(u)$  і  $u_l(x)$  визначені в 4.1.

З розгляду (4.50) можна стверджувати, що комбінований алгоритм II подібно модифікованому методу хорд має збіжність, близьку до квадратичної. Відносно ж кількості витрачених на кожній ітерації обчислювальних операцій даний алгоритм поступається не тільки методу Ньютона, але і модифікованому методу хорд, що впливає з необхідності обчислювати на кожній ітерації і динамічний опір, і січну, відповідну модифікованому методу хорд. Незважаючи на це, в деяких випадках даний алгоритм виявляється більш ефективним, ніж метод Ньютона і модифікований метод хорд. Так, для схеми, наведеної на рис.2.4, кількість ітерацій, що вимагаються для розв'язку при застосуванні методу Ньютона, дорівнює 13, модифікованого методу хорд – 10, комбінованого методу при  $\lambda = 0,5$  – 6. Для схеми рис. 2.11 при  $U_{ex1} = U_{ex2} = 0,9V$  для  $\lambda = 1$  кількість ітерацій дорівнює 12, для  $\lambda = 0$  – також 12, а якщо  $\lambda = 0,5$  розв'язок отримуємо вже після 9 ітерацій. Для інших прикладів схем, що наводяться в даній роботі, кількість ітерацій при  $\lambda$ , що не дорівнює ні 1, ні 0, виявилось або рівним, або трохи більше, ніж при використанні модифікованого методу хорд.

Таблиця 4.6

приклад		величина $\lambda$					
		0	0,1	0,25	0,5	0,75	1
Схема рис. 2.4		10	6	6	6	6	13
Схема рис. 2.5		16	20	20	23	25	28
Схема рис. 2.8	I	18	28	24	24	25	23
	II	9	12	12	13	13	15
Схема рис. 2.9	I	12	13	13	11	33	27
	II	10	9	7	7	7	10
Схема рис. 2.11	I	6	7	7	7	7	8
	II	12	8	9	9	11	12

## 4.6 Розв'язання систем рівнянь методами випадкового пошуку

Незважаючи на великі успіхи, досягнуті останнім часом у розвитку ітераційних методів розв'язку систем нелінійних алгебраїчних рівнянь, авторам невідомі методи розв'язку, що гарантують знаходження коренів рівняння в загальному випадку, і, хоча метод продовження розв'язку по параметру і метод підсумовування кінцевих збільшень дозволяють значно поліпшити умови збіжності ітераційних методів розв'язку – збіжність не гарантовано. З цієї причини тривають спроби розробки нових методів розв'язку. Такою спробою є і спроба застосування методів випадкового пошуку до розв'язку завдання аналізу нелінійних електричних кіл. Гарна збіжність, простота реалізації і налагодження робить застосування цих методів в багатьох випадках дуже перспективним.

В даному розділі розглянуто застосування методів випадкового пошуку до розв'язання систем нелінійних рівнянь виду (3.11).

Найбільш часто розв'язок систем лінійних і нелінійних рівнянь методами мінімізації зводиться до мінімізації суми квадратів нев'язок, тобто функція якості формалізується у вигляді

$$Q(X) = \sum_{i=1}^n f_i^2(X). \quad (4.51)$$

Розв'язком цього завдання слід вважати такий вектор  $X^*$ , для якого виконується нерівність

$$Q(X^*) \leq \delta, \quad (4.52)$$

де  $\delta$  – деяке досить мале додатне число.

Область пошуку коренів обмежена нерівностями

$$x_i > -x_{0i}, \quad (4.53)$$

де  $x_{0i}$  – параметр вольт-амперної характеристики  $p$ - $n$  переходу, зворотний струм насичення  $I_0, i = 1, 2, \dots, n$ .

Для розв'язку завдання були використані наступні алгоритми:

- 1) алгоритм з перерахунком при невдалому кроці;
- 2) алгоритм випадкового пошуку з покоординатним самонавчанням.

**4.6.1 Алгоритм з перерахунком при невдалому кроці.** В процесі пошуку вектора  $X^*$  значення змінних на  $K$ -ому кроці визначаються як

$$x_i^{(K)} = x_i^{(K-1)} + \Delta x_i^{(K)}, \quad (4.54)$$

а для визначення  $\Delta x_i^{(K)}$  прийнята рекурентна формула, відповідна алгоритму з перерахунком при невдалому кроці, тобто

$$\Delta x_i^{(K)} = \begin{cases} a_i^{(K)} \cdot \xi^{(K)}, \text{ при } Q(X^{(K-1)}) \leq Q_{\min}(X), \\ -\Delta x_i^{(K)} \cdot a_i^{(K)} \cdot \xi^{(K)}, \text{ при } Q(X^{(K-1)}) > Q_{\min}(X), \end{cases} \quad (4.55)$$

де  $Q_{\min}(X)$  – найменше значення функції якості за всі попередні кроки пошуку;

$\xi^{(K)}$  – випадкові числа, рівномірно розподілені на інтервалі  $(-1;1)$ ;

$a_i^{(K)}$  – величина модуля кроку пошуку.

Для визначення модуля кроку використовується інформація про стан змінної щодо границі області пошуку. Величина  $a_i^{(K)}$  обчислюється на кожному кроці за такою формулою

$$a_i^{(K)} = \gamma_i^{(K)} \cdot (x_i^{(K-1)} + x_{0i}). \quad (4.56)$$

коефіцієнт  $\gamma_i^{(K)}$  приймає різні значення в залежності від величини змінної  $x_i^{(K-1)}$

$$\gamma_i^{(K)} = \begin{cases} \gamma_1, \text{ если } x_i^{(K-1)} \leq b_1, \\ \gamma_2, \text{ если } b_1 < x_i^{(K-1)} \leq b_2, \\ \gamma_3, \text{ если } x_i^{(K-1)} > b_2, \end{cases}$$

де  $b_1, b_2$  – деякі позитивні числа і

$$0 < \gamma_3 \leq \gamma_2 \leq \gamma_1 \leq 1.$$

Опис коефіцієнта  $\gamma_i^{(K)}$ , що характеризує швидкість зміни модуля кроку  $a_i^{(K)}$  на кожному етапі пошуку, ступінчастою функцією змінної  $x_i^{(K)}$  переслідує дві мети:

1) збільшити модуль кроку  $a_i^{(K)}$  і його швидкість зміни в районі вихідної точки  $X = [0, 0, \dots, 0]^t$ ,



2) для зменшення похибки визначення розв'язку, що знаходиться на значній відстані від точки  $X^{(0)}$  за рахунок зменшення модуля кроку  $a_i^{(K)}$  і швидкості його зміни.

Крім цього передбачена можливість зменшення коефіцієнтів  $\gamma_i$ , яка виконується автоматично, якщо деяке число кроків, що йдуть поспіль, виявилось невдалим.

Такий алгоритм розрахунку модуля кроку дозволяє відповідним набором  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, b_1, b_2$  задавати точність розв'язку, швидкість пошуку, а також гарантує, що змінні завжди залишаються всередині області пошуку, заданої нерівностями (4.53).

#### 4.6.2 Алгоритм випадкового пошуку з покоординатним навчанням.

Як і в попередньому випадку, пошук розв'язку  $X^*$  системи нелінійних рівнянь (3.11) починається з генерування випадкової послідовності чисел  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , рівномірно розподілених на інтервалі  $(-1; 1)$ . Напрямок зміни  $i$ -ого параметра на  $K$ -ому кроці пошуку буде визначатися за наступним правилом

$$\text{якщо} \begin{cases} \xi_i < \omega_i^{(K)}, \text{ то } -\Delta x_i^{(K)}, \\ \xi_i \geq \omega_i^{(K)}, \text{ то } \Delta x_i^{(K)}, \end{cases}$$

де  $\Delta x_i^{(K)}$  – модуль збільшення  $i$ -ого параметра, для розрахунку якого справедливі ті ж співвідношення, що і в попередньому алгоритмі;

$\omega_i$  – параметр, що визначає ймовірність зниження напрямку зміни  $i$ -ого параметру на  $K$ -ому кроці згідно з формулою:

$$P(\omega_i^{(K)}) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \omega_i^{(K)} \geq 1, \\ \frac{1}{2}(1 - \omega_i^{(K)}), \text{ якщо } -1 < \omega_i^{(K)} < 1, \\ 1, \text{ якщо } \omega_i^{(K)} \leq -1. \end{cases}$$

Параметр  $\omega_i$  є параметром навчання випадкового пошуку, так як він визначає ступінь його навченості на вдалий напрямок. Значення параметру  $\omega_i^{(K)}$  визначається за допомогою наступної рекурентної формули:

$$\begin{aligned} \omega_i^{(K)} = & K_1 \cdot \omega_i^{(K-1)} + K_2 \cdot \text{sign}(\Delta Q^{(K)} \cdot \Delta x_i^{(K)}) + \\ & + K_3 \cdot \text{sign}(\Delta f_i^{(K)} \cdot \Delta x_i^{(K)}) + K_4 \cdot \text{sign}(-f_i(X^{(K)})), \end{aligned} \quad (4.57)$$

де  $\Delta Q^{(K)} = Q(X^{(K)}) - Q(X^{(K-1)})$ ,

$$\Delta x_i^{(K)} = x_i^{(K)} - x_i^{(K-1)},$$

$$\Delta f_i^{(K)} = \left| f_i(X^{(K)}) \right| - \left| f_i(X^{(K-1)}) \right|,$$

$$0 \leq K_j \leq 1.$$

На відміну від відомої рекурентної формули в вираз (4.57) введені додаткові третя і четверта складові. Введення першої з них в праву частину виразу (4.57) викликано тим, що при прагненні критерію  $Q(X)$  до нуля модулі кожної змінної також повинні прагнути до нуля. Наявність цієї складової буде особливо ефективною, якщо матриця коефіцієнтів системи рівнянь (3.11) задовольняє умові домінантності.

Відносно четвертої складової можна відзначити, що, як показано в розділі 3.2, виконання нерівності

$$\frac{\partial f_i(X)}{\partial x_i} < 0,$$

є необхідною умовою існування і єдиності розв'язку системи рівнянь (3.3). Таким чином, можна припускати, що в більшості випадків для зменшення модуля нев'язки необхідно збільшувати  $x_i$  при  $\partial f_i(X) > 0$  або зменшувати, якщо  $\partial f_i(X) < 0$ .

Програми, розроблені в середовищі MatLab, дозволяють також використовувати ряд модифікацій розглянутих алгоритмів. Зокрема, є можливість при завданні відповідної ознаки в вихідній інформації реалізувати пошук з повторенням кроків у вдалому напрямку до тих пір, поки приріст функції якості не стане позитивним.

За допомогою розроблених програм в середовищі MatLab було зроблено розрахунок багатьох реальних електричних схем. На прикладах розрахунку проводився підбір оптимальних параметрів алгоритмів. Так для  $\gamma_1$  знайдено оптимальне значення  $0,2 \div 0,3$ ;  $K_1 - 0,7 \div 0,8$ ;  $K_2 - 0,1 \div 0,2$ ;  $K_3 - 0,1 \div 0,2$ ;  $K_4 - 0,1 \div 0,2$ . Крім того, в остаточній редакції програм на модуль параметра навчання накладено обмеження

$$|\omega_i| \leq 0,95,$$

яке охороняє процес навчання від передетермінування.

Розв'язок починається з початку координат, тобто при  $x_1^{(0)} = 0, x_2^{(0)} = 0, \dots, x_n^{(0)} = 0$ . Як ознаки зупинки програми використовують як виконання нерівності (4.52), так і рівність кількості кроків пошуку деякого наперед заданого числа.

Для схеми, наведеної на рис.4.4,  $Q(X^{(0)}) = 57,67$ . За програмою, що реалізує алгоритм з перерахунком при невдалому кроці, за 600 кроків пошуку було знайдено  $Q_{\min} = 46,9$ . Для схеми рис.2.4  $Q(X^{(0)}) = 254,02$ ; а  $Q_{\min} = 131,46$  (також за 600 кроків). Така ж картина була і при аналізі інших схем. Таким чином, можна зробити висновок, що при розв'язку систем нелінійних рівнянь виду (3.11) алгоритм з перерахунком при невдалому кроці виявляється малоефективним.

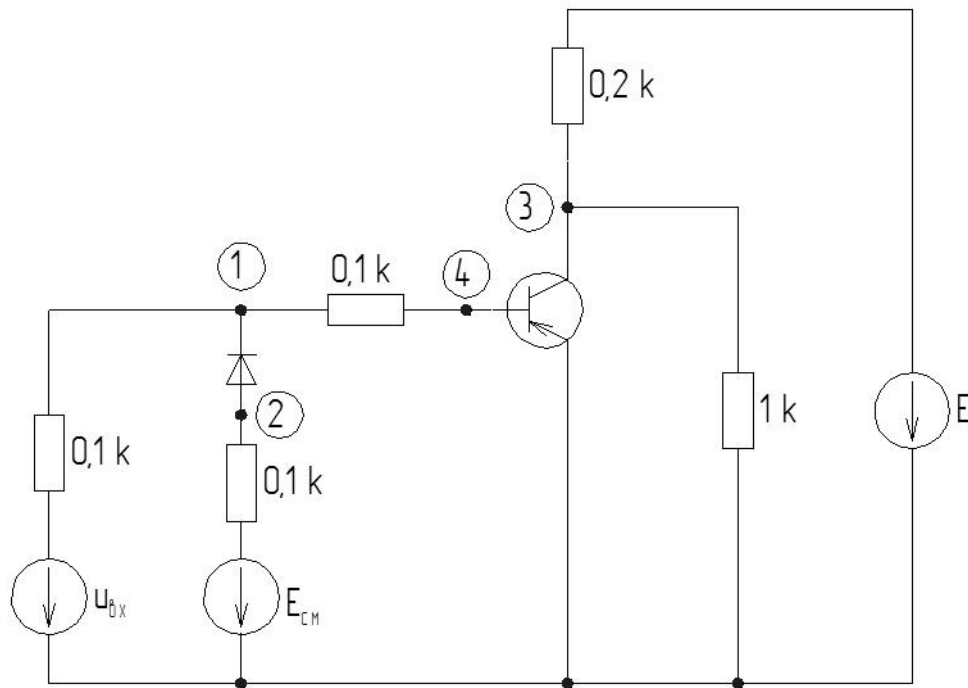


Рисунок 4.4 – Схема інвертора

Значно краще працює програма, що реалізує випадковий пошук з координатним самонавчанням. Для схеми рис.4.4  $Q_{\min} = 0,264 \cdot 10^{-2}$  було отримано на 281 кроці при значеннях змінних  $x_1 = 52,23$ ;  $x_2 = 6,69$ ;  $x_3 = 14,83$  (розв'язок як і раніше обмежувався 600 кроками пошуку). Значення змінних, отримані при аналізі цієї ж схеми за програмою, що реалізує метод Бройде, рівні  $x_1 = 56,17$ ;  $x_2 = 7,43$ ;  $x_3 = 14,39$ .

При розв'язку системи рівнянь, яка описує схему, наведену на рис.2.4,  $Q_{\min} = 19,91$  було отримано на 160 кроці, після чого не виявилось жодного вдалого кроку.

Порівняно швидко пошук по даному алгоритму приводив в досить малу в певному сенсі околицю точки розв'язку систем рівнянь і для інших більш складних схем. Подальше наближення до абсолютного розв'язку системи рівнянь (3.11) сповільнювалося.

В результаті дослідження розроблених програм в середовищі MatLab можна зробити висновки:

1) алгоритм випадкового пошуку з покоординатним самонавчанням при розв'язку задач аналізу нелінійних електричних кіл виявляється значно більш ефективним, ніж алгоритм з перерахунком при невдалому кроці;

2) дослідження програми, що реалізує алгоритм випадкового пошуку з покоординатним самонавчанням, на прикладах аналізу реальних електричних схем ще раз підтвердило твердження Л.А. Растрігіна про те, що методи випадкового пошуку доцільно застосовувати при оптимізації складних систем далеко від цілі;

3) щодо аналізу електричних кіл можна припустити, що алгоритм випадкового пошуку, зокрема алгоритм з покоординатним самонавчанням, може бути застосовано для отримання наближеного значення змінних, кращого, ніж нульова точка, з якої зазвичай починається розв'язок при використанні ітераційних методів.

В додатку Б наведено приклад розв'язку задачі ідентифікації інтегральних динамічних моделей електричних кіл.

### ***Контрольні питання для самоперевірки***

1. Розкрийте сутність методу хорд.
2. Проведіть порівняння методу хорд з методом Ньютона.
3. В чому полягає модернізований методу хорд?
4. Проведіть порівняння модернізованого методу хорд з методом Ньютона.
5. Які особливості виникають при практичному застосуванні модифікованого методу хорд?
6. Які особливості застосування модифікованого методу хорд для розв'язку вузлових рівнянь?
7. Поясніть сутність комбінованого алгоритму I, який при наближенні до розв'язку переходить від методу хорд до методу дотичних.
8. Розкрийте сутність комбінованого алгоритму II, який при наближенні до розв'язку переходить від модифікованого методу хорд до методу дотичних.
9. Яку збіжність мають комбіновані алгоритми I і II?
10. Охарактеризуйте алгоритм з перерахунком при невдалому кроці.
11. Поясніть сутність алгоритму випадкового пошуку з покоординатним самонавчанням.
12. Зробіть порівняння алгоритму випадкового пошуку з покоординатним самонавчанням з алгоритмом з перерахунком при невдалому кроці.

## ВИСНОВКИ

Найбільш складним завданням, що привертає увагу більшості розробників програм машинного проектування електричних кіл, є розрахунок статичного і динамічного режимів нелінійних кіл. Безперервний потік наукових робіт, присвячених питанням розрахунку нелінійних кіл, підтверджує актуальність задачі і незавершеність досліджень в даній області.

Модифікована модель Еберса-Молла може успішно використовуватися в універсальних програмах аналізу для моделювання діодів, біполярних і багатоємітерних транзисторів. Володіючи порівняно невеликою складністю, вона виявляється найбільш раціональною серед відомих універсальних моделей з точки зору як точності моделювання, так і зручності користування.

Переважає більшість програм аналізу засновані на чисельних методах. Формування систем рівнянь, що описують електричні кола, як правило, проводиться відповідно до одного з наступних методів:

- а) метод вузлових потенціалів;
- б) метод змінних стану.

Доцільність застосування будь-якого з цих методів залежить від виду кола, що розраховується, і, взагалі кажучи, повинна визначатися в кожному конкретному випадку.

Найбільш ефективні алгоритми розв'язку систем нелінійних алгебраїчних рівнянь отримані на основі модифікацій методу Ньютона. Однак, як неодноразово підкреслювалося в літературі, ні один з відомих методів не дає гарантії збіжності процесу розв'язку в загальному випадку. Більшість методів добре збігаються тільки поблизу розв'язку і для їх успішної реалізації потрібне знання початкового наближення, досить близького до коріння рівнянь. Надійні програми аналізу можуть бути розроблені при використанні методу підсумовування кінцевих збільшень.

Для чисельного інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь, що описують динамічний режим електричних кіл, найбільш перспективним є застосування неявних методів, які володіють більшою стійкістю в порівнянні з явними методами, дозволяють подолати труднощі, пов'язані з розрахунком кола з найбільш різними постійними часу, і не вимагають обов'язкового приведення диференціальних рівнянь до нормальної форми. Підвищеної швидкодії розрахунку вдається досягти проводячи інтегрування рівнянь зі змінним кроком.

Значного підвищення ефективності програми аналізу вдається досягти за рахунок організації обчислень з урахуванням розрідженості коефіцієнтних матриць.

Незважаючи на досягнуті в даний час значні успіхи в розробці алгоритмів і програм аналізу електричних кіл, завдання розрахунку нелінійних кіл і раніше є найбільш трудомісткою з точки зору витрат комп'ютерного часу. Підвищення швидкодії і надійності методів аналізу залишається актуальною проблемою.

Надзвичайна простота формування системи рівнянь, можливість проводити аналіз досить широкого класу кіл роблять застосування методу вузлових потенціалів в проектуванні електричних кіл високоефективним.

Застосування методу підсумовування кінцевих збільшень в разі, якщо розрахунок параметрів лінеаризованих схем заміщення нелінійних елементів, проводиться згідно з методом Ньютона, вимагає при аналізі багатьох електричних кіл надмірно великої кількості кроків.

До найбільшого успіху призводять алгоритми розв'язку вузлових рівнянь, які використовують для поліпшення збіжності характерні особливості вольт-амперних характеристик нелінійних елементів, що входять у розглянутий клас кіл. На підставі відомих якісних міркувань наведена модифікація методу Ньютона, покладена в основу розробленої програми аналізу статичного режиму електричних кіл. Наведені приклади розрахунку ілюструють переваги наведеної модифікації методу Ньютона.

Застосування методу підсумовування кінцевих збільшень при розрахунку перехідних процесів дозволяє розробити ефективні програми аналізу, в яких не виникає проблема рознесених постійних часу, легко поєднується розрахунок статичного і динамічного режимів.

Для упорядкування вузлових рівнянь при  $LU$  – перетворенні матриці провідності можуть успішно використовуватися алгоритми, розглянуті в розділі 2.5. Алгоритми прості в реалізації і досить ефективні.

Незаперечне достоїнство методу поділу кола на лінійну і нелінійну частини полягає в мінімальному порядку формованої системи рівнянь.

Формування системи нелінійних алгебраїчних рівнянь щодо струмів нелінійних елементів має низку привабливих рис, зокрема, дозволяє легко обійти деякі типові труднощі, пов'язані з розрахунком кола з експоненційними елементами.

Ефективність методу Матвеева-Бройде при розв'язку систем нелінійних алгебраїчних рівнянь згідно запропонованого алгоритму, що поєднує рух по дотичним з зигзагоподібним переміщенням уздовж границі, що вводяться на можливі значення незалежних змінних, може бути значно підвищена шляхом переходу на кожній ітерації до мінімізації норми нев'язок тільки для відкритих  $p$ - $n$  переходів.

Значного скорочення комп'ютерного часу, що витрачається на розрахунок кіл, можна досягти за рахунок реалізації запропонованого алгоритму зниження порядку розв'язуваної на кожній ітерації системи лінійних рівнянь для лінеаризованого кола.

Певний інтерес представляють алгоритми аналізу динамічного режиму електричних кіл, які використовують відмінну від традиційної реалізацію методу змінних стану, в основі якої лежить метод неявного інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь. Одна з переваг – при формуванні системи рівнянь не виникає необхідність у виборі дерева кола і наступних трудомістких матричних перетворень, неминучих зазвичай при використанні методу змінних стану.

Описано метод розв'язку нелінійних алгебраїчних рівнянь, нелінійна частина яких має зворотну функцію. Швидкість його збіжності близька до квадратичної. Гранично, при наближенні до розв'язку метод збігається з методом Ньютона.

З результатів розрахунку, наведених в роботі прикладів електричних кіл, випливає, що запропонований метод виявляється більш ефективним, ніж метод дотичних, при розв'язку даного класу нелінійних рівнянь, що відбувається за рахунок його «кращої» поведінки далеко від коренів.

Труднощі, викликані чисельним диференціюванням, усуваються без особливих витрат за допомогою прийому, що полягає в переході при наближенні до розв'язку від хорд до дотичних.

У деяких випадках є можливість прискорити збіжність обчислювального процесу шляхом лінеаризації нелінійних характеристик лінією, що лежить між дотичною і хордою, що розраховується згідно запропонованого методу.

На прикладах розрахунку схем отримані якісні характеристики ефективності розроблених алгоритмів.

У випадках, коли ітераційні методи не дозволяють знайти розв'язок для оцінки початкового наближення більш вдалого, ніж нульове, можуть використовуватися алгоритми випадкового пошуку з навчанням, які досить добре працюють в області, далекій від розв'язку системи рівнянь.

## Список рекомендованої літератури

1. Гліненко Л.К., Сухоносів О.Г. Основи моделювання технічних систем. – Навч. посібник. – Львів: Видавництво «Бескид Біт», 2003. – 176 с.
2. Шишкин, Г. Г., Шишкин А. Г. Електроніка: учебник для бакалавров - 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2015. — 703 с.
3. Головкин А.А., Пивоваров И.Ю., Кузнецов И.Р. Компьютерное моделирование и проектирование радиоэлектронных средств. Учебник для вузов. Стандарт третьего поколения. – СПб.: Питер, 2015. – 208 с.
4. Дьяконов В.П. Matlab 6.5 SP1/7 + Simulink 5/6 в математике и моделировании. М.: СОЛОН-Пресс, 2005. - 576с.
5. Поршнев С. Компьютерное моделирование физических процессов в пакете MATLAB. Горячая Линия - Телеком. 2003. – 592 с.
6. Матвиенко В.А. Основы теории цепей: учебное пособие для вузов – Екатеринбург: УМЦ УПИ, 2016. – 162 с.
7. Чивилихин С.А. Вычислительные методы в технологиях программирования. Элементы теории и практикум, – СПб: СПбГУИТМО, 2008. –108с.
8. Калиткин Н.Н. Численные методы. Учеб. пособие. -2-е изд., исправленное. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 592 с.
9. Теоретические основы электротехники: учебник для вузов в 3-х т. Том 1 / К.С.Демирчян, Л.Р.Нейман, Н.В.Коровкин, В.Л.Чечурин. – 4-е изд. – СПб.: Питер, 2004. – 463 с.
10. Дьяконов В.П. Энциклопедия Mathcad 2001i и Mathcad11. М.: Солон-Пресс, 2004. –832 с.
11. Семенов М.Г. Математическое моделирование в MathCad. Альтекс-А. 2003. – 208 с.
12. Автоматизация физических исследований и эксперимента: компьютерные измерения и виртуальные приборы на основе LabVIEW 7/Под ред. Бутырина П.А. – М.: ДМК Пресс, 2005. - 264 с.
13. Евдокимов Ю.К., Линдваль В.Р., Щербаков Г.И. LabVIEW для радиоинженера: от виртуальной модели до реального прибора. Практическое руководство для работы в программной среде LabVIEW. – М.: ДМК Пресс, 2007. - 400 с.
14. Моделирование процессов в технических системах. // ЛегаЮ. Г., СытникА. А., ЮзвенкоВ. Ф., ПодгорныйО. В. Черкассы: ЧДТУ, 2004. – 184 с.
15. Ключка К.М. Комплекс комп'ютерних програм для моделювання динаміки електричних кіл / К.М. Ключка //Збірник наукових праць. Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка – Кам'янець Подільський: Кам'янець Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2013. – Вип. 8, – С. 70-74.



## КОМПЛЕКС КОМП'ЮТЕРНИХ ПРОГРАМ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Традиційний підхід при побудові алгоритмів та програмних засобів розрахунку перехідних процесів в електричних колах базується на чисельній реалізації диференціальних рівнянь. Цей підхід закладений майже у всі універсальні та спеціалізовані серійні пакети прикладних програм, що дозволяють вести такі розрахунки. Чисельні алгоритми, що реалізовані в серійних пакетах на теперішній час, достатньо удосконалені та широко застосовуються, але теж мають певні якісні обмеження, що стосуються вказаних вище задач, а також задач великої розмірності, кіл із імпульсними впливами та зі змінною структурою.

Ефективним підходом для подолання цих утруднень може бути використання обчислювальних алгоритмів, заснованих на реалізації нетрадиційних динамічних моделей електричних у вигляді інтегральних або змішаних інтегро-диференціальних залежностей, аналітично еквівалентних моделям у вигляді диференціальних рівнянь, але таких, що реалізуються якісно відмінними чисельними методами, які враховують особливості структури непараметричних моделей. Дані чисельні методи володіють значною специфікою та можуть забезпечувати необхідні результати для задач розрахунку із вказаними вище особливостями, тобто області задач, що ефективно розв'язуються завдяки вказаним двом підходам, можуть перетинатися, але принципово не співпадають.

На основі розроблених алгоритмів розв'язання інтегральних рівнянь аналізу динаміки електричних кіл, побудовані програми у вигляді модулів розширень системи MATLAB, які об'єднані в комплекс під назвою ІЕЕС (Integral Equation for Electrical Circuits). Комплекс програм представляє собою набір *m*-файлів, які виконують роль або основних програм, або допоміжних програм [15].

Структурна схема комплексу програм ІЕЕС наведена на рис. А.1.

Комплекс вміщує два основні підкомплекси: SVIEEC – містить програми для розв'язання задач аналізу динаміки електричних кіл на основі інтегральних динамічних моделей; IDIEEC – містить програми для здійснення ідентифікації параметрів електричних кіл на основі інтегральних динамічних моделей.

Підмодулі містять кілька груп програм: SLVIE2 – містить програми для розв'язання систем лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду; SNLVIE2 – містить програми для розв'язання систем нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду; SLVIDE – містить програми для розв'язання систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь Вольтерри; SNLVIDE – містить програми для розв'язання систем нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь Вольтерри; COMMON – набір допоміжних підпрограм, що використовуються основними програмами комплексу.

Група **SLVIE2** включає 12 модулів: slvie2NC, slvie2NCad, slvie2NCdeg, slvie2NCdegad, slvie2open, slvie2openad, slvie2opendeg, slvie2opendegad, slvie2colloc, slvie2collocad, slvie2iter, slvie2iterdeg. Група **SNLVIE2** включає 5 модулів: snlvie2open, snlvie2openad, snlvie2colloc, snlvie2collocad, snlvie2NKant. Група **SLVIDE** включає модулі: slvide. Група **SNLVIDE** включає модулі: snlvide.

До групи **COMMON** увійшли 8 модулів: table, table\_deg, Aquad, NKcoef11, coefNK2, coefNK2\_3, coefNK3\_4, coefNK8\_11.

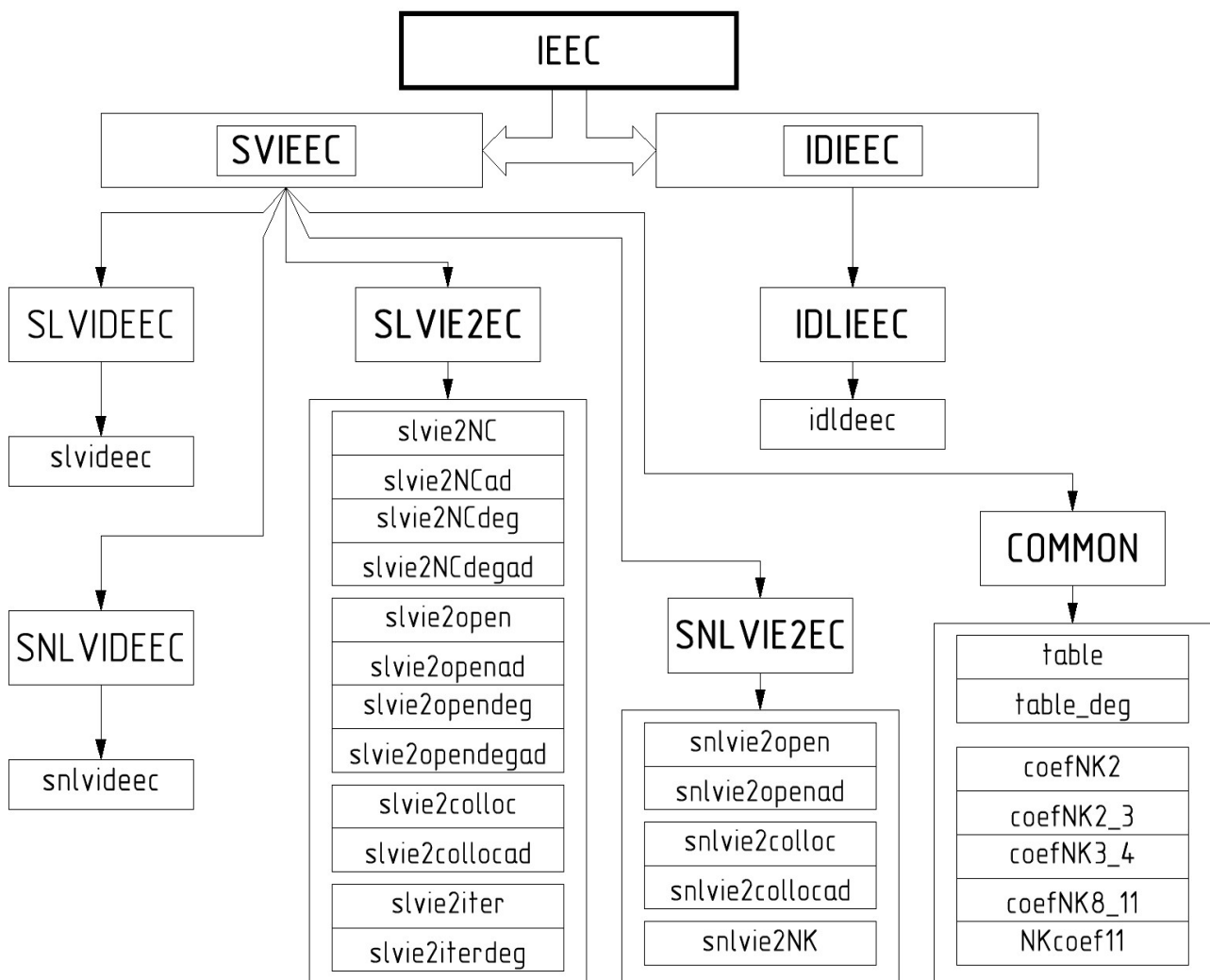


Рисунок А.1 – Структура комплексу програм ІЕЕС

## Призначення основних модулів комплексу програм ІЕЕС

Програма	Базовий чисельний метод	Призначення
<b>Група SLVIE2 (лінійні електричні кола)</b>		
slvie2NC	Аналіз динаміки електричних кіл методом квадратурна основі формул Ньютона-Котеса закритого типу	Розв'язання системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з ядрами загального вигляду на фіксованій сітці вузлів
slvie2NCdeg	Ньютона-Котеса закритого типу	Розв'язання системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з виродженими ядрами на фіксованій сітці вузлів
slvie2NCad		Розв'язання системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з ядрами загального вигляду та з ядрами, що розділяються, на адаптивній сітці вузлів
slvie2NCdegad		
slvie2open	Аналіз динаміки електричних кіл методом квадратурна основі комбінації формул Ньютона-Котеса закритого і відкритого типів	Розв'язання системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з ядрами загального вигляду на фіксованій сітці вузлів
slvie2opendeg	Аналіз динаміки електричних кіл методом квадратурна основі комбінації формул Ньютона-Котеса закритого і відкритого типів	Розв'язання системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з виродженими ядрами на фіксованій сітці вузлів
slvie2openad	Аналіз динаміки електричних кіл методом квадратурна основі комбінації	Розв'язання системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з ядрами загального вигляду на адаптивній сітці вузлів
slvie2opendegad	формул Ньютона-Котеса закритого і відкритого типів	Розв'язання системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з ядрами, що розділяються, на адаптивній сітці вузлів

slvie2colloc	Аналіз динаміки електричних кіл методом коллокацій на основі кусково-гладких поліномів	Розв'язання системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з ядрами загального вигляду на фіксованій сітці вузлів
slvie2collocad		Розв'язання системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з ядрами загального вигляду на адаптивній сітці вузлів
slvie2iter	Аналіз динаміки електричних кіл методом простої ітерації	Розв'язання системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з ядрами загального вигляду на фіксованій сітці вузлів
slvie2iterdeg		Розв'язання системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з виродженими ядрами на фіксованій сітці вузлів
<b>Група SNLVIE2 (нелінійні електричні кола)</b>		
snlvie2open	Аналіз динаміки електричних кіл на основі комбінації формул квадратури Ньютона-Котеса закритого і відкритого типів	Розв'язання системи нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з ядрами загального вигляду на фіксованій сітці вузлів
snlvie2openad	Аналіз динаміки електричних кіл на основі комбінації формул квадратури Ньютона-Котеса закритого і відкритого типів	Розв'язання системи нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з ядрами загального вигляду на адаптивній сітці вузлів
snlvie2colloc	Аналіз динаміки електричних кіл методом коллокацій на основі кусково-гладких поліномів	Розв'язання системи нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з ядрами загального вигляду на фіксованій сітці вузлів
snlvie2collocad		Розв'язання системи нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з ядрами загального вигляду на адаптивній сітці вузлів
snlvie2NK	Аналіз динаміки електричних кіл методом Ньютона-Канторовича	Розв'язання системи нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з ядрами загального вигляду на адаптивній сітці вузлів

<b>Група SLVIDE (лінійні електричні кола)</b>		
slvide	Аналіз динаміки електричних кіл методом квадратур і Рунге-Кутти	Розв'язання системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь Вольтерри
<b>Група SNLVIDE (нелінійні електричні кола)</b>		
snlvide	Аналіз динаміки електричних кіл методом квадратур і Рунге-Кутти	Розв'язання системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь Вольтерри
<b>Група IDIEEC</b>		
idldeec	Ідентифікація параметрів електричних кіл на основі інтегро-суматорного алгоритму	Реалізація ідентифікації параметрів електричних кіл на основі інтегральних динамічних моделей