УДК 681.32

А. А. Тимченко, *д.т.н., професор*
Черкаський державний технологічний університет
б-р Шевченка, 460, м. Черкаси, 18006, Україна

СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРОЦЕСІВ ТА МОДЕЛЕЙ ВЗАЄМОЗВ'ЯЗКІВ І ВЗАЄМОДІЙ. ЛІНІЙНІ ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ

Природа не боится математических трудностей.
Ст. Бир «Кибернетика и управления производством»

Розглядається підхід до створення свого роду мови спілкування з ЕОМ дослідника технічних систем з використанням т. зв. стандартизованого математичного (матричного) опису взаємодій, який дозволяє формувати моделі лінійних динамічних систем. При цьому використовується апарат теорії графів потоків сигналів для структурованого опису елементів та зв'язків між ними.

Ключові слова: *елементи, зв'язки, система вхід-вихід, структура, модель взаємодій, задача, граф потоків сигналів, системний аналіз та підхід.*

Вступ. Із системного аналізу моделі статичної системи типу <вхід/вихід> (*У* – вхід, *X* – невідоме) отримані результати, які стали можливими при використанні методу графів потоків сигналів, де виділено як перетворення елементів (власних) та елементів зв'язків, можливо і не одинарних.

Граф, у свою чергу, будується на основі закону про вузол потоків сигналів (умова гомеостазису): *алгебраїчна сума вузла дорівнює нулю, тобто все, що входить у вузол, перетворюється у вихід (* $\sum (Y, X)=0$*).*

Таким чином, на основі цієї рівності було отримано матричне рівняння < вихід/вхід > деякої статичної системи [1-3]:

$$A\ X = B\ Y. \qquad (1)$$

Формально розв'язок цього рівняння можливо записати у вигляді операцій над матрицями *A і B*:

$$X = A^{-1}\ B\ Y. \qquad (2)$$

У прикладному плані цей вираз дає можливість побудови статичних характеристик системи (при наявності умови динамічної рівноваги) це можуть бути, наприклад, характеристики системи: *швидкісні,* ті що дозволяють *регулювати* відношення, а також визначати взаємозв'язок з *навантаженнями*, які характеризують *режими* використання системи.

Здавалося б, що в цій ситуації і проблеми не існує – тому що все інше буде залежати від характеристик елементів матриць *A*, *B* – арифметичні значення, алгебраїчні величини або, можливо, і ще щось інше (функції, функціональні матриці, блочні матриці, або предметні змінні).

Стаття є в деякій мірі логічним продовженням роботи [1, с. 111] і присвячена системному дослідженню моделі неперервної *лінійної динамічної* системи та є основою для використання засобів обчислювальної техніки при синтезі й аналізі широкого класу інформаційних систем і технологій.

Мета та задачі системного аналізу

Система як об'єкт дослідження. При створенні та дослідженні системи як *мережі* зв'язаних *динамічних* елементів, де мережа зв'язків визначається як *структура*, а елементи як їх *сукупність*. Така практика існує при створенні систем керування т.зв. *об'єктами автономного функціонування (ОАФ) (*транспортними засобами, робото подібними комплексами, інформаційними системами, технологічними енергетичними комплексами, засобами зв'язку та телекомунікацій, можливими віртуальними інформаційними структурами).

Результати обробки експериментальних досліджень, виконаних на базі різного роду макетів та аналогів, які характеризують реакції конструкцій на входи, дають можливість побудувати математичні моделі <вхід-вихід> в вигляді різного роду функціональних залежностей.

З цієї точки зору розглянемо основні етапи створення системи :

<будова-структура> →<функція-процес> →<технологія-результат>,

що базується відповідно на процесах:

<*структуризації*>→<*алгоритмізація*>→

<*цілеорієнтації*>.

При описі моделі функціонування динамічної системи введемо додаткове поняття *стану*. Опис загального перетворення в системі буде мати вигляд [2, с. 415]:

<стан наступний> = <стан попередній> +
+<вхід системи>,
<вихід системи> = <стан попередній>,

$$\dot{X}(t) = A \; X(t) + B \; У(t),$$

$$Z(t) = C \; X(t) \; , \qquad (3)$$

де $X(t)$, $Z(t)$, $У(t)$ – вектори виходу та входу системи,
$\dot{X}(t)$ – вектор похідних стану системи,
A,B,C – матриці коефіцієнтів, включаючи описи перетворення елементів та їх зв'язків.

Відповідно до принципу Д'Аламбера-Лагранжа для механічної системи, приєднуючи сили інерції в вигляді похідних змінних стану до опису діючих активних сил, використаємо його до вирішення задач динаміки. Це дає можливість використати загальний метод розв'язку задач статики та динаміки і дозволяє вивчати функціонування динамічних систем, не вводячи в рівняння невідомі реакції зв'язків.

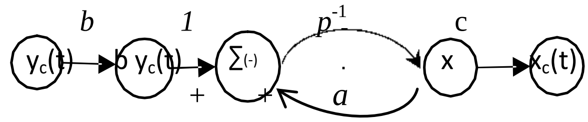
Якщо мова йде про динамічну систему, то основні її перетворення відбуваються в динамічних елементах, які, будучи зв'язаними між собою, формують різні реакції на виходах системи.

Елемент як система. Почнемо з розгляду опису перетворення одного динамічного елемента та його наступного (системного) аналізу:

$$x_c(t)=c\,x(t), \quad x(t)= p^{-1}(a\,x(t)+by_c(t)), \qquad (4)$$

де $x(t)$ – вихід елемента, $y_c(t)$ – вхід системи, a,b,c коефіцієнти перетворення, $p^{-1} = d/dt$.

Графічне зображення цього перетворення: (граф потоків сигналів – граф Мезона) надає можливість проаналізувати і уточнити схему перетворення (4):



Побудова математичної моделі лінійної динамічної системи

Динамічна система як матричний елемент:

$$C\,\dot{X}_c(t) = A \; X(t) + B \; У_c(t).$$

Використовуючи топологічні властивості матриць, структуруємо залежність (3), ($C=I$):

$$\dot{X}(t) = (Ae+Aз)\,X(t)+(Be+Bз)\,Y(t), \qquad (5)$$

де Aе, Bе – матриці коефіцієнтів, перетворення елементів, Aз, Bз матриці зв'язків. Формально розв'язання цих матричних рівнянь можна записати з використанням оберненої матриці (рис. 1а):

$$X(t) = P^{-1}\,[(Ae+Aз)\,X(t)+(Be+Bз)\,Y(t)], \qquad (6)$$

На етапі *структуризації* на вибраному наборі динамічних елементів для реалізації моделі системи необхідно сформувати систему їх відношень (рівнянь), (тобто структуру, як мережу зв'язків). Для поелементного опису динамічної системи існує система алгебро-диференційних рівнянь типу (3) (рис. 1а, 1б):

<вхід> <динамічний елемент> <вихід>.

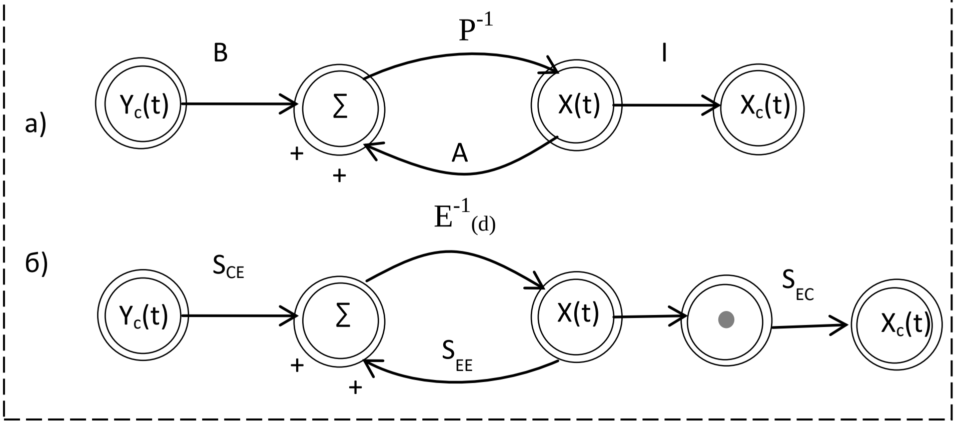


Рис. 1. Граф-схема матричних перетворень: а) – (8), б) – (9)

Вище наведені рівняння в скалярному вигляді алгебраїчно розв'язані відносно кожної своєї головної змінної з виділенням відповідного перетворення a_i (в круглих дужках елементи зв'язків як на вході, так і на виході) (рис. 2).

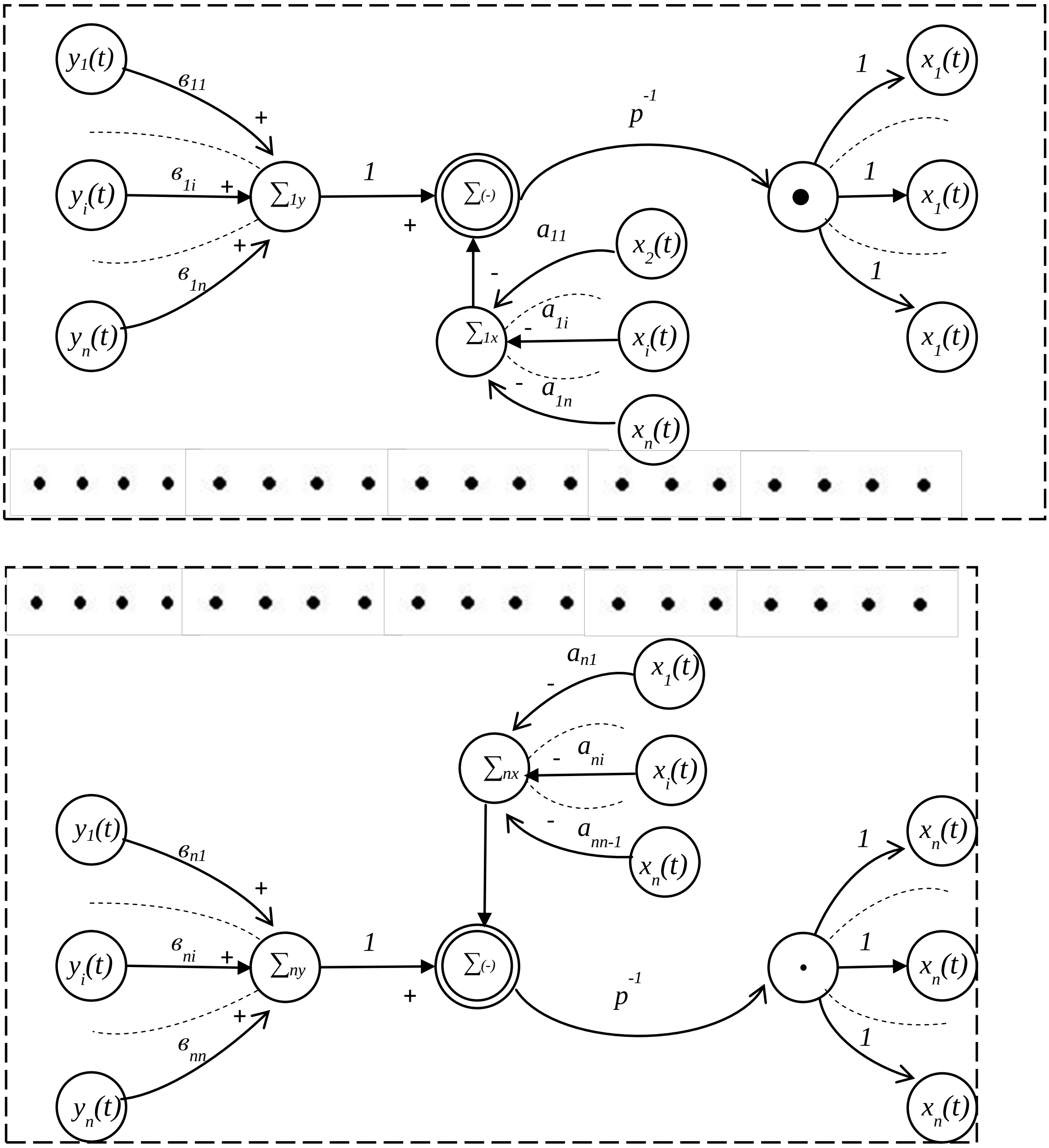


Рис. 2. Граф-схема системи з'єднання динамічних елементів

В квадратних дужках показано відповідно зв'язки на входах та виходах із елементів:

$$\begin{cases} x(t)'_1 = a_{11}^{-1}\left[\left(-X_{1\Sigma} + Y_{1\Sigma}\right) + b_{11}y_1\right] - x_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (7) \\ x(t)'_n = a_{nn}^{-1}\left[\left(-X_{n\Sigma} + Y_{n\Sigma}\right) + b_{nn}y_n\right] - x_n. \end{cases}$$

При більш уважному розгляді граф-схеми приходимо до висновку, що для опису системи:

<входи> <динамічні елементи> <виходи>

необхідно додати опис системних зв'язків відповідно на вході та виході елементів типу:

$$X_C(t) = S_{CE} * X_E(t), Y_E(t) = S_{EC} * Y_C(t); \quad (8)$$

$$X_E(t) = E_{(d)}^{-1}\left(B_e Y_E(t) + B_3 Y_E(t) + A_3 X_E(t)\right) \quad (9)$$

Системний аналіз структурних з'єднань

Розглянемо з системних позицій *задачу корегування та пошуку структури* (а також параметрів) засобів корегування з метою досягнення бажаних властивостей системи.

Більш детальніше розглянемо вхідні змінні, які діють на систему. Звичайно – це змінні *стану* динамічної системи, як об'єкта функціонування, на який можуть діяти *керуючі впливи* (вектор керуючих впливів – $U(t)$, а також *збурюючі* впливи – $V(t)$. Тоді можливо переписати модель (3) як модель *об'єкта корегування* (рис 2).

$$\dot{X}_o = A_o X_o + B_u U + B_v V. \qquad (10)$$

Задача корегування як пошуку структури такого з'єднання (тобто залежності *корегуючих впливів* від вхідних величин), щоб забезпечити підтримання визначених змінних стану X_o відповідно до умови:

$$e = [\dot{X}_o \triangleq \dot{X}_c],\ (або\ e = 0), \qquad (11)$$

де $\dot{X}_c = A_c X_c$ – рівняння бажаної (корегованої) системи, як результату корегування об'єкту.

Враховуючи те, що вища похідна є алгебраїчною функцією інших змінних, та виконуючи умову (11), отримаємо рівняння закону корегування[4, с. 285]:

$$B_u^* U = (A_c - A_0)^* X - B_v V. \qquad (12)$$

Тобто, необхідно ввести в закон корегування всю інформацію, яка доступна в системі. Думається, що цього було б і достатньо для кінцевого вирішення *задачі корегування*, але поява невимірних неконтрольованих збурень V не дає можливості виконувати умову (11) і мати деяке відхилення від умови синтезу, тобто, якщо збурення присутнє в рівнянні об'єкту корегування, а не введене в закон корегування, то буде відхилення похибки, яке могло би бути компенсовано за рахунок наступного виразу:

$$B_v{}^* V = (P - A_o) X_o + B_u U. \qquad (13)$$

Системний аналіз задачі керування
Скалярний підхід до опису моделі системи.

Можливо на графах відобразити рівняння <вхід – вихід> системи, приводячи до виходу вхідні (як елементів) так і системні, які дозволяють вибрати опис систему у вигляді опису входу – виходу системи. Інколи це викликано поведінкою на *початковому* етапі синтезу (конструювання). І взагалі це призводить до т.н. структури перетворень на базі структурованих елементів стуктурних з'єднань.

Для того, щоб оцінити якість належного перетворення, необхідно оцінити параметричні зміни, які характеризують елементарні зв'язки між ними. До речі, відсутність свого зворотного зв'язку у елементів може відповісти на те, що елементи в свою чергу є з'єднанням, наприклад, з внутрішнім зворотнім зв'язком (як розприділяються перетворення між прямими зв'язками в кожному окремому випадку виділяються дослідником).

В загальному випадку розвязання алгебраїчних рівнянь кожного відносно інших можна описати рівняннями високого порядку:

$$x_1^{(n)} = f_1\left(x_1^{(n-1)}, \dots, x_1, u_1, v_1, y_1, t\right),$$
$$x_n^{(n)} = f_n\left(x_n^{(n-1)}, \dots, x_n, u_n, v_n, y_n, t\right), \qquad (14)$$

де змінні $x_1, \dots, x_i, \dots x_n$ стану системи в кожний момент часу t; u_i, v_i, y_i – зовнішні впливи, що діють на систему.

Причому, відома математична модель функціонування системи і її стан в початковий момент часу (Задача Коші):

$$x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \dots \qquad (15)$$

Розв'язок поставленої задачі зводиться до інтегрування диференціального рівняння (14) з початковими умовами (15). В результаті знаходяться значення змінних x_i, які будуть характеризувати рух системи. Розглянута вище система (14) фактично є сукупністю n диференційних рівнянь високого порядку, котре із котрих можна розвязати як автономний канал відповідної автономної системи, наприклад, системи керування трьохфазним електричним генератором змінної напруги. Цю систему можна розглядати як деякий набір моделей елементів для створення нової більш складної системи на єтапі проектування. Якщо диференціальне рівняння має порядок вище першого, то вводячи позначення $x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}, \dots, x_n = x^{(n-1)}$, отримаємо *нормальну* систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = f(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}). \end{cases} \qquad (16)$$

Аналогічно можна описати, наприклад, модель II закону Ньютона.

$$m\ddot{x} = F(\dot{x}, x, t). \qquad (17)$$

Структурний синтез законів керування.

Розглянемо сформульовану вище задачу інваріантності (незбуреності) з точки зору методу структурного синтезу [1-5].

Об'єкт управління задається операторним рівнянням <вхід> – <вихід>:

$$a(p)x = b(p)u + c(p)\lambda + d(p)\xi \ , \qquad (18)$$

де x(t) – керована змінна, u(t) – керуючий вплив, $\lambda(t), \xi(t)$– збурюючі впливи, a, b, c, d – оператори, $p = d/dt$.

Задача управління може бути сформульована у вигляді:

$$x(t) \overset{\Delta}{=} y(t) \quad \forall t \ , \ \lambda(t) \neq 0 \ , \ \xi(t) = 0, \quad (19)$$

де *y(t)* – програмне завдання.

Введемо додаткову змінну:

$$e(t) \equiv y(t) - x(t). \qquad (20)$$

Тоді наведений вище вираз можна записати:

$$e(t) \overset{\Delta}{=} 0 \quad \forall t \ , \ \lambda(t) \neq 0 \ , \ \xi(t) = 0 \ .$$

Умову оптимальності в задачі структурного синтезу сформулюємо у вигляді функції – предикат $\chi = \left[\ e(t) \overset{\Delta}{=} 0 \ \right]$, причому $\chi = \{ \ 0, \ 1 \ \}$.

Дійсно, якщо $e \overset{\Delta}{=} 0$ (буде дорівнювати «0»), то вихідна змінна *x(t)* повинна буде дорівнювати *y (t)* для всіх t ($x(t) = y(t)$). Таким чином, задачу синтезу закону керування можна розв'язати, якщо розв'язати рівняння:

$$y - a^{-1}(p) \ [b(p)u + c(p)\lambda + d(p)\xi] \ = \ 0 \qquad (21)$$

відносно невідомого керуючого впливу *u*. Тоді

$$u = b^{-1}(p) \ [a(p)y - c(p)\lambda - d(p)\xi]. \qquad (22)$$

Якщо неможливо реалізувати (22), то замкнута система управління буде описуватись деяким новим операторним рівнянням:

$$a(p)x = b(p)b^{*}(p) \cdot a^{*}(p)y - a(p)x.$$

(23) Отриманий закон керування включає до себе компоненту $b^{-1}(p) \ c(p)\lambda$, яка означає, що треба знати закон зміни ($\lambda = \lambda(t)$), щоб завести його відповідно в регулятор; це прямий зв'язок по збуренню, що визначається так само, як і по завдаючому впливу, що відповідно задається.

Дуже багато реальних пристроїв працюють по такій розімкненій схемі (наприклад, автомати по продажу напоїв, розпакування / розфасування продуктів, включення / виключення освітлення та ін.).

Професор Щипанов Г. В. у своїй відомій роботі [5, с. 25] стверджує, що досягти відповідної якості керування по завданню можливо на *етапі проектування*, а ось для досягнення точності при появі збурень, діючих на об'єкт, потрібні додаткові зусилля, включаючи відповідні зв'язки в системі, тобто необхідне керування.

Дійсно, якщо збурення λ*(t)* не компенсовано, воно з'явиться в рівнянні замкнутої системи:

$$a(p)x = b(p) \cdot b^{-1}(p)(a(p)y - c(p)\lambda). \quad (24)$$

Тоді, якщо припустити ідеальність операторів $b^{-1}(p)$ та $a(p)$, то отримаємо відповідне рівняння: $e(t) = a(p) \cdot c(p)\lambda$, тобто похибка зменшується за рахунок оберненого оператора об'єкта, але буде постійно присутня в системі [6, с. 214].

Ідею професора Щипанова Г. В. можна розвинути, використовуючи знову ж таки рівняння об'єкта з метою пошуку закону зміни збурення. Якщо його неможливо заміряти *безпосередньо* то, враховуючи наслідки його впливу, можливо постійно *підраховувати* за виразом

$$\lambda(t) = c(p)^{-1}[a(p)x - b(p)y], \qquad (25)$$

при цьому використовуючи раніше знайдений закон:

$$u = b(p)^{-1}\{a(p)y - c(p)c^{-1}(p)[a(p)x - b(p)u]\}.$$

Якщо оператор $c(p) = 1$, то вираз набуває вигляду

$$u = b(p)^{-1}(a(p)(y - x) + b^{*}(p)u), \qquad (26)$$

тобто отримуємо два зворотних зв'язки: один від'ємний по регульованій величині, а другий додатній по керуючому впливу (одночасно), тобто ця частина закону керування дозволяє компенсує вплив збурення. Тоді, додаючи раніше знайдений закон, отримуємо

$$u = b^{-1}(p)[(a(p)y - c(p)c^{-1}(p)(a^{x}(p)e)]. \quad (27)$$

Якщо збурення відсутнє в рівнянні замкнутої системи, то інваріантність може бути досягнута (по проф. Павлову В. В.) [7–8].

Заключення. Основні висновки. Проведений системний аналіз відомого матричного рівняння поелементного математичного опису лінійної динамічної системи дає можливість порівняти його з відомим графічним представленням у вигляді графів потоків сигналів (графів Мезона), по якому досить наглядно можливо використати т. зв. *вербальне представлення* про елементарні типи з'єднання – паралельного, послідовного та зворотно-паралельного.

Відносно зворотного переходу до матричного опису існує можливість використати відомий перший закон Кірхгофа про вузол сигналів (аналогічного закону про алгебраїчного суму струмів вузла) – вона повинна дорівнювати нулю, тобто, як наслідок – існує рівність між тим, що надходить до вузла, і тим, що виходить із нього[3].

В подальшому такий структурований опис дає можливість використати його для т.зв. структурного – параметричного синтезу системи по критеріях *оптимальності, інваріантності, автономності* та ін. [9-11].

Список літератури

1. Тимченко А. А. Системний аналіз процесів та моделей взаємозв'язків і взаємодій. Лінійні статичні системи. *Вісник Черкаського державного технологічного університету*. 2017. № 1. С. 111–117.
2. Тимченко А. А. Структурний підхід до побудови моделей взаємозв'язків та взаємодії. *Математичне та імітаційне моделювання систем. МОДС-2016.* Чернігів: ЧНТУ, 2016. С. 414–416.
3. Тимченко А. А. Системні дослідження: «Невідоме в математиці та способи його визначення». *Вісник Черкаського державного технологічного університету.* 2006. № 4. С. 192–193.
4. Тимченко А. А. Системний підхід до синтезу нових законів керування. *Матеріали XX Міжнародної конференції з автоматичного керування. Автоматика. 2013.* Миколаїв: НУК, 2013. С. 284–285.
5. Щипанов Г. В. Теория и методы проектирования автоматических регуляторов. *Автоматика и телемеханика.* 1989. № 1. С. 20–31.
6. Тимченко А. А. Системний аналіз моделей комплексу технічних засобів на прикладі ЧАЕС. *Математичне та імітаційне моделювання систем. МОДС-2017.* Чернігів: ЧНТУ, 2017. С. 212–214.
7. Тимченко А. А., Підгорний М. В., Тьорло О. В. Структурний синтез законів управління. *Автоматика. 2008.* Одеса: ОНМА 2008. С. 941–944.
8. Тимченко А. А. Системні дослідження. Відкриття нових законів в автоматиці. *Вісник Черкаського державного технологічного університету.* 2007. № 1. С. 152–157.
9. Шатихин Л. Г. Структурные матрицы и их применение для исследования систем. М: Машиностроение, 1994. 248 с.
10. Тимченко А. А. Таблиці, матриці і логічні схеми рішень. *Матеріали IX Міжнародної науково-практичної конференції «Математичне та імітаційне моделювання систем. МОДС-2014».* Київ-Жукин, 2014. С. 323–326.
11. Тимченко А. А. Логічні схеми дослідження та їх використання. *Тези доповідей II Міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні технології в освіті, науці і техніці» (ІТОНТ-2014): Черкаси, 24-26 квітня 2014 р.* У 2 т. Черкаси: ЧДТУ, 2014. Т.1. С. 67–68.

References

1. Tymchenko, A. A. (2017) System analysis of processes and patterns of interconnections and interactions. Linear static systems. *Visnyk Cherkaskogo derzhavnogo tehnologichnogo universitetu. Seria: Tehnichni nauky,* No. 1, pp. 111–117.
2. Tymchenko, A. A. (2016) Structural approach to the construction of interconnection and interaction models. *Mathematical and simulation of systems simulation. MODS-2016.* Chernihiv: CSTU, pp. 414–416.
3. Tymchenko, A. A. (2006) System research: "Methods unknown to math in mathematics". *Visnyk Cherkaskogo derzhavnogo tehnologichnogo universitetu. Seria: Tehnichni nauky,* No. 4, pp. 192–193.
4. Tymchenko, A. A. (2013) System approach to the synthesis of new management laws. *Automation – 2013: Materials of the XX International Conference on Automatic Control.* Nikolaev: NUS, pp. 284–285.
5. Shchipanov, G. V. (1989) Theory and methods of designing automatic regulators. *Automatics and telemechanics,* № 1, pp. 20–31.
6. Tymchenko, A. A. (2017) System analysis of models of a complex of technical means on the example of ChNPP. *Mathematical and*

simulation of systems simulation. MODS-2017. Chernigov: CSTU-2017, pp. 212–214.
7. Tymchenko A. A., Podgorniy M. V., Thorlo O. V. (2008) Structural synthesis of control laws. *Automatics–2008*. Odessa: ONMA, pp. 941–944.
8. Tymchenko, A. A. (2007) System research. Opening of new laws. *Visnyk Cherkaskogo derzhavnogo tehnologichnogo universitetu. Seria: Tehnichni nauky*, No. 1, pp. 152–157.
9. Shatykhyn, L. H. (1994) Strukturnye matrytsy y ykh prymynenye dlya ysledovanye system. M.: Mashynostroenye, 248 s.
10. Tymchenko, A. A. (2014) Tablytsi, matrytsi i lohichni skhemy rishen'. *Materialy IX Mizhnarodnoyi naukova-praktychnoyi konferentsiyi «Matematychne ta imitatsiyne modelyuvannya system. MODS-2014»*. Kyyiv-Zhukyn, s. 323–326.
11. Tymchenko, A. A. (2014) Lohichni skhemy doslidzhennya ta yikh vykorystannya. *Tezy dopovidey II Mizhnarodnoyi naukovo-praktychnoyi konferentsiyi «Informatsiyni tekhnolohiyi v osviti, nautsi i tekhnitsi» (ITONT-2014): Cherkasy, 24-26 kvitnya 2014 r.* U 2 t. Cherkasy: ChDTU, t. 1, s. 67–68.

A. Tymchenko, *Doctor of Technical Sciences, Professor*
Cherkassy State Technological University
Shevchenko str., 460, Cherkassy, 18006, Ukraine

SYSTEM ANALYSIS: PROCESSES AND MODELS OF RELATIONSHIPS AND INTERACTIONS. LINEAR DINAMIC SYSTEMS

The paper describes approach to developing man-machine language of technical systems researcher using the so-called standardized mathematical (matrix) description of interactions which allows forming models of linear dynamic system.

The apparatus of signal flow graphs theory is used for structured description of compositions and relationships between them.

Keywords: *compositions, connections, input-output system, structure, interaction model, task, task, signals flow graph, system analysis and approach.*

У підготовці статті до друку взяли участь к.т.н., доц. **Андрієнко В. О.,** магістр **Чабан Ю. В.**

Статтю представляє Тимченко А. А., д.т.н., професор.