

УДК 004.94

DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.78-85

**В. А. Іванюк\***, канд. техн. наук,**Н. Л. Костьян\*\***, канд. техн. наук

\* Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

\*\* Черкаський державний технологічний університет, м. Черкаси

## ІНТЕГРАЛЬНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ОБ'ЄКТІВ ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

У статті розглянуто метод отримання одновимірних інтегральних динамічних моделей систем із розподіленими параметрами в інтегральній формі на основі застосування диференціальних рівнянь з дробовими похідними, які отримуються шляхом перетворень ірраціональних передатних функцій. Такі передатні функції зустрічаються при описі задач теплопровідності, дифузії, коливальних процесів та інших задач, які описуються диференціальними рівняннями з частинними похідними параболічного та гіперболічного типу. Типовими прикладами можуть бути передатні функції, які описують напівінтегральну або напівінерційну ланки, в яких змінна Лапласа знаходиться під коренем. Отримана задача Коші для звичайного диференціального рівняння з дробовими похідними подається у формі інтегрального рівняння Вольтерри II роду типу згортки. Застосування даного підходу розглянуто при розв'язанні різних диференціальних рівнянь: звичайного диференціального рівняння порядку  $0 < \alpha < 1$ , звичайного диференціального рівняння дробового порядку  $\alpha > 1$ , диференціального рівняння  $n$ -го порядку із дробовими похідними. Розв'язування останнього рівняння здійснюється на основі складання характеристичного рівняння, що призводить до розв'язування звичайних диференціальних рівнянь порядку  $\alpha$ . Важливим прикладом є також розглянутий підхід до розв'язування системи диференціальних рівнянь із дробовими похідними. Завдяки переходу до еквівалентних інтегральних рівнянь розглянута задача може розв'язуватись різними наближеними методами, які будуються на основі квадратурних методів із застосуванням апроксимаційних моделей поліноміальної форми, зокрема, поліномів Чебишева. Запропонований підхід дозволяє будувати одновимірні інтегральні динамічні моделі систем взаємопов'язаних об'єктів із розподіленими параметрами, які можуть забезпечити високу точність та стійкість розв'язку.

**Ключові слова:** *об'єкти із розподіленими параметрами, диференціальні рівняння із дробовими похідними, інтегральне рівняння Вольтерри II роду.*

**Вступ.** Одним з поширених методів отримання одновимірних математичних моделей у вигляді передатних функцій, що описують лінійні об'єкти з розподіленими параметрами, є застосування перетворення Лапласа до вихідних диференціальних рівнянь з частинними похідними [4]. Для деяких класів об'єктів передатні функції містять дробові показники змінної  $p$  [5]. Прикладом є передатна функція від-

різка довгої лінії виду  $W(p) = \frac{a}{\sqrt{p+b}}$  ( $a, b$  — сталі). При моделю-

ванні скалярних об'єктів в часовій області достатньо знайти і реалізувати відповідний даній передатній функції інтегральний оператор. Однак такий підхід значно ускладнюється при дослідженні системи взаємопов'язаних об'єктів з розподіленими параметрами. У цьому випадку доцільно кожному елементу системи поставити у відповідність звичайне диференціальне рівняння з дробовими похідними, що отримується з його передатної функції [1]. Наприклад, для зазначеної вище передатної функції відповідне рівняння має вигляд:

$$u^{(\frac{1}{2})}(t) + bu(t) = af(t),$$

де  $u(t)$  — вихідний сигнал;  $f(t)$  — вхідний вплив об'єкта.

Таким чином, розгляду підлягатимуть одновимірні динамічні моделі у вигляді звичайних диференціальних рівнянь з дробовими похідними або їх системи.

**Основна частина.** Розглянемо необхідні визначення. Оператором інтегрування дробового порядку  $\alpha > 0$  називається оператор виду

$$I_\alpha f(t) = (i_\alpha * f)(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau, \quad (1)$$

де  $i_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ ,  $f(t)$  — довільна неперервна функція. Інтеграл, що стоїть в правій частині (1), називається інтегралом Рімана-Ліувілля порядку  $\alpha$  [2].

Оператор диференціювання дробового порядку  $0 < \alpha < 1$  для будь-якої неперервної диференційованої функції  $\psi(t)$  визначається як оператор, обернений до оператора (1). Зокрема, він може бути записаний у формі дробової похідної Маршо в наступному вигляді [2]:

$$(D_\alpha \psi)(t) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \left\{ \frac{\psi(t) - \psi(t-\tau)}{\tau^{1+\alpha}} \right\} d\tau. \quad (2)$$

Оператор диференціювання дробового порядку  $m < \alpha < m+1$ ,  $m \in N$ , для функції  $\psi \in C^{(k)}$ ,  $k \geq m$ , може бути визначений у вигляді суперпозиції [2]:

$$D_\alpha \psi = D_{\alpha_1} D_{\alpha_2} \dots D_{\alpha_k} \psi, 0 < \alpha \leq 1, j = \overline{1, k}, \sum_{j=1}^k \alpha_j = \alpha,$$

де  $D_\alpha$  визначається за формулою (2), а при  $\alpha_j = 1$  — це звичайний оператор взяття першої похідної. Очевидно, що таке визначення оператора  $D_\alpha$  неоднозначне та істотно залежить від способу розбиття числа  $\alpha$  на складові  $\alpha_j, j = \overline{1, k}$ . Тому позначимо  $D_\alpha = D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  і під  $\alpha$  маємо на увазі вектор  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ . Суму ж  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$  позначаємо  $|\alpha|$ .

Розглянемо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння з дробовими похідними виду:

$$\left[ \left( \sum_{m=1}^n a_m D_{\alpha_m} + a_0 \right) u \right] (t) = f(t), a_n = 1, \alpha_m = (r_m, 1, 1, \dots, 1), t \in [0, T], (3)$$

$$0 < r_m \leq 1, m = \overline{1, n}, |\alpha_n| > |\alpha_{n-1}| > \dots > |\alpha_1| > |\alpha_0| = 0, u^{(j)}(0) = u_j, j = \overline{0, k_n}.$$

Застосовуючи до рівняння (3) оператор Рімана-Ліувілья порядку  $|\alpha_n|$ , отримуємо інтегральне рівняння Вольтера II роду типу згортки:

$$u(t) + \int_0^t \sum_{m=0}^{n-1} a_m \frac{(t-\tau)^{|\alpha_n| - |\alpha_m| - 1}}{\Gamma(|\alpha_n| - |\alpha_m|)} u(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) \frac{(t-\tau)^{|\alpha_n| - 1}}{\Gamma(|\alpha_n|)} d\tau + \\ + \sum_{j=0}^n u_j \frac{t^j}{j!} + \sum_{m=1}^{n-1} a_m \sum_{j=1}^{k_m} u_j \frac{t^j + |\alpha_n| - |\alpha_m| - 1}{\Gamma(j + |\alpha_n| - |\alpha_m|)}.$$

Записавши (4) в операторному вигляді, отримуємо

$$u + \gamma * u = \varphi,$$

де

$$\gamma = \sum_{m=0}^{n-1} a_m i_{|\alpha_n| - |\alpha_m|}, \varphi = f * i_{|\alpha_n|} + \sum_{j=0}^n u_j i_{j+1} + \sum_{m=1}^{n-1} a_m \sum_{j=0}^{k_m} u_j i_{j + |\alpha_n| - |\alpha_m|}.$$

Для розв'язання рівняння (4) можуть бути застосовані відомі чисельні методи [3].

Розглянемо деякі найпростіші випадки [1, 2].

1. Задача Коші для рівняння

$$(D_\alpha - a)u(t) = f(t), 0 < \alpha < 1, t \in [0, T], u(0) = u_0. (5)$$

Звівши (5), як зазначено вище, до інтегрального рівняння, знайдемо його резольвенту

$$R(t) = \frac{d}{dt} E_{\frac{1}{\alpha}}(at^\alpha), (6)$$

де  $E_{\frac{1}{\alpha}}(W)$  — ціла функція Міттаг-Леффлера, що визначається рядом [2]

$$E_{\frac{1}{\alpha}}(W) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{W^m}{\Gamma(m\alpha + 1)}.$$

Тоді для розв'язання задачі (5) отримаємо формулу

$$u = u_0 + i_{\alpha} * f + R * [u_0 + i_{\alpha} * f],$$

або детальніше:

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau + \int_0^t R(\tau) \left[ u_0 + \int_t^{t_0} f(s) \frac{(t-\tau-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \right] d\tau.$$

2. Задача Коші для рівняння

$$(D_{\alpha} - a)u(t) = f(t), \quad t \in [0, T],$$

де  $\alpha = (\underbrace{\alpha, 1, \dots, 1}_m)$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  
*m раз, m > 0*

$$u^{(j)}(0) = u_j, \quad j = \overline{0, m}.$$

Провівши аналогічні перетворення, отримаємо

$$u = u_0 R + u_1 R * i_1 + \dots + u_m R * i_m + R * f * i_{|\alpha| - 1},$$

тобто

$$u(t) = u_0 R(t) + u_1 \int_0^t R(\tau) d\tau + \dots + u_m \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} R(\tau) d\tau + \\ + \int_0^t R(t-\tau) \int_0^{\tau} f(s) \frac{(\tau-s)^{|\alpha|-2}}{\Gamma(|\alpha|-1)} ds d\tau,$$

де  $R$  визначається за формулою (6).

3. Задача Коші для рівняння

$$\left[ D_{n_{\alpha}} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k D_{k_{\alpha}} + a_0 \right] u(t) = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

де

$$k_{\alpha} = (\underbrace{\alpha, \alpha, \dots, \alpha}_k), \quad 0 < \alpha < 1, \quad k = \overline{1, n}, \quad D_{j_{\alpha}} u(0) = u_j, \quad j = \overline{0, n-1}.$$

Щоб розв'язати (7), складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

і знайдемо всі його корені  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in C$ . Тоді оператор в лівій частині (7) перетвориться до виду

$$D_{n_a} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k D_{k_a} + a_0 = \prod_{m=1}^n (D_{\alpha} - \lambda_m).$$

Після цього розв'язок рівняння (7) зведеться до послідовного розв'язування рівнянь виду (5).

Тими ж засобами можна досліджувати і системи звичайних диференціальних рівнянь з дробовими похідними. Розглянемо систему виду

$$(D_{\alpha_k} u_k)(t) + \sum_{i=1}^n a_{ki} u_i(t) = f_k(t), \quad 0 < \alpha_k < 1, \quad k = \overline{1, n}, \quad t \in [0, T], \quad (8)$$

або коротко

$$D_{[\alpha]} u - Au = f,$$

де

$$D_{[\alpha]} = \begin{pmatrix} D_{\alpha_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{\alpha_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D_{\alpha_n} \end{pmatrix},$$

$$A = \| a_{ij} \|_{i,j=1}^n, \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T, \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T.$$

Будемо шукати розв'язок (8), який задовольняє початкові умови

$$u(0) = u^0 = (u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0)^T.$$

Застосувавши до (8) оператор

$$I_{[\alpha]} = \begin{pmatrix} I_{\alpha_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_{\alpha_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I_{\alpha_n} \end{pmatrix},$$

отримаємо

$$u - I_{[\alpha]} Au = I_{[\alpha]} f + u^0. \quad (9)$$

Як бачимо остання рівність є системою лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду типу згортки

$$u_k(t) - \int_0^t i_{\alpha_k}(t-\tau) \sum_{i=1}^n a_{ki} u_i(\tau) d\tau = \int_0^t i_{\alpha_k}(t-\tau) f_k(\tau) d\tau + u_k^0, \quad k = \overline{1, n},$$

або більш детально

$$u_k(t) - \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)} \sum_{i=1}^n a_{ki} u_i(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)} f_k(\tau) d\tau + u_k^0, \quad k = \overline{1, n}$$

У випадку, коли  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$ , можна побудувати резольвенту системи (9)

$$R(t) = \frac{d}{dt} E_{\frac{1}{\alpha}} (At^\alpha).$$

Розв'язок системи (9) при цьому запишеться у вигляді

$$u = I_{[\alpha]} f + u^0 + [I_{[\alpha]} f + u^0] * R,$$

або

$$u(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma([\alpha])} d\tau + u^0 + \int_0^t R(t-\tau) \left[ \int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{\alpha-1}}{\Gamma([\alpha])} f(s) ds + u^0 \right] d\tau.$$

Розглянемо тепер узагальнюючу (7) задачу Коші:

$$D_{n_\alpha} u(t) + \sum_{k=1}^{n-1} (D_{k_\alpha} a_k u)(t) + a_0(t)u(t) = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (10)$$

$$(D_{i_\alpha} u)(0) = u_j, \quad j = \overline{0, n-1},$$

в припущенні, що  $a_k(t), k = \overline{0, n-1}$ , і  $f(t)$  — поліноми за степенями  $t^\alpha$ . Зведемо (10) до еквівалентного інтегрального рівняння шляхом послідовного застосування оператора  $I_\alpha$ :

$$u(t) + \int_0^t K(t,s)u(s)ds = F(t), \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} K(t,s) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-s)^{(n-k)\alpha-1}}{\Gamma((n-k)\alpha)} a_k(s), \\ F(t) &= \int_t^{t_0} \frac{(t-s)^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)} f(s) ds + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j t^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+1)} + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^t \frac{(t-s)^{(n-k)\alpha-1}}{\Gamma((n-k)\alpha)} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(D_{m\alpha} a_k u)(0)}{\Gamma(m\alpha+1)} s^{m\alpha} ds. \end{aligned} \quad (12)$$

Значення  $(D_{m\alpha} a_k u)(0)$  в (12) можуть бути визначені через початкові значення  $u_j, j = \overline{0, n-1}$ . Дійсно,

$$a_k(t) = \sum_{j=0}^k C_j^{(k)} t^{j\alpha}, \quad k = \overline{0, n-1},$$

тоді

$$(D_{m\alpha} a_k u)(0) = \sum_{j=0}^{\min\{k,m\}} C_j^{(k)} \frac{y_{m-j} \Gamma(m_\alpha + 1)}{\Gamma((m-j)\alpha + 1)}, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad m = \overline{0, n-2}.$$

Завдяки переходу до еквівалентних інтегральних рівнянь до розглянутої задачі можуть застосовуватись різні наближені методи. Згідно схеми [3] апроксимаційного методу розв'язок (11) шукаємо у вигляді

$$u_N(t) = \sum_{i=0}^N \gamma_i t^{i\alpha},$$

а рівняння (11) замінимо наближеним рівнянням

$$u_N(t) + \int_0^t K(t,s)u_N(s)ds = F(t) - \sum_{j=N+1}^{N+M} \tau_j P_j(t^\alpha), \quad (13)$$

де  $\gamma_j, j = \overline{0, N}$  — невизначені коефіцієнти;  $P_j(t^\alpha), j = \overline{N+1, N+M}$  — деякі фіксовані алгебраїчні многочлени степеня  $j$ ;  $\tau_j, j = \overline{N+1, N+M}$  — невизначені коефіцієнти;  $M$  — параметр, який  $\geq n$ .

Замінивши в (13) інтеграл квадратурною сумою і прирівнюючи в обох частинах коефіцієнти при однакових степенях  $t$ , отримуємо для невідомих  $\gamma_i, i = \overline{0, N}$  і  $\tau_i, j = \overline{N+1, N+M}$  систему, яка містить  $N+M+1$  лінійних рівнянь.

Якщо в якості  $P_j(s), j = \overline{N+1, N+M}$ , вибрати змішані многочлени Чебишева  $T_j(s) = \cos j \arccos(2s-1)$ , які найменше відмінні від нуля на відрізку  $[0,1]$ , то можна розраховувати на високу точність наближення.

**Висновки.** Запропонований підхід дозволяє будувати одновимірні інтегральні динамічні моделі систем із розподіленими параметрами та на їх основі обчислювальні алгоритми, які можуть забезпечити високу точність та стійкість розв'язків.

### Список використаних джерел:

1. Miller K. S. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations / K. S. Miller, B. Ross. — New York : John Wiley and Sons, 1993. — 366 p.
2. Samko S.G. Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications / S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev. — Gordon and Breach Science Publishers, 1993. — 976 p.
3. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — К. : Наук. думка, 1986. — 544 с.
4. Верлань А. Ф. Комп'ютерне моделювання в задачах динаміки електромеханічних систем / А. Ф. Верлань, В. А. Федорчук, В. А. Іванюк. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. — 204 с.

5. Іванюк В. А. Інтегральні моделі ірраціональних та трансцендентних ланок / В. А. Іванюк, В. О. Тихоход, С. О. Протасов // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2011. — Вип. 5. — С. 101–109.

## AN INTEGRAL METHOD FOR SOLVING DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE MODELING OF OBJECTS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

The article deals with the method of obtaining one-dimensional integral dynamic models of systems with distributed parameters in the integral form on the basis of applying the differential equations with fractional derivatives obtained by transformations of irrational transfer functions. Such transfer functions occur in the description of the problems of heat conductivity, diffusion, oscillatory processes and other problems, which are described by differential equations with partial derivatives of a parabolic and hyperbolic type. Transfer functions that describe the semi-integral or semi-inertial links in which the Laplace variable is under the root may be the typical examples. The received Cauchy problem for an ordinary differential equation with fractional derivatives is given in the form of the Volterra integral equation of the second kind of convolution type. The applying of this approach is considered in solving various differential equations: the ordinary differential equation of the order  $0 < \alpha < 1$ , the ordinary differential equation of the fractional order  $\alpha > 1$ , the differential equation of the  $n$ -th order with fractional derivatives. Solving of the last equation is based on the compilation of the characteristic equation, which leads to solving of ordinary differential equations of order  $\alpha$ . An important example is the researched approach to solving a system of differential equations with fractional derivatives. Due to the transition to equivalent integral equations, the researched problem can be solved by various approximate methods, which are based on quadrature methods with applying the approximation models of polynomial form, in particular, Chebyshev polynomials. The suggested approach makes it possible to construct one-dimensional integral dynamic models of systems of interconnected objects with distributed parameters that can provide high accuracy and stability of solving.

**Key words:** *objects with distributed parameters, differential equations with fractional derivatives, Volterra equation of the II kind.*

Отримано: 23.11.2018