

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. СТАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

**для здобувачів освітнього ступеня бакалавр
з технічних спеціальностей усіх форм навчання**

Черкаси
2017

УДК 531.2 (075.8)
ББК 22.21я73
В31

Упорядники: Веретільник Т.І., *к.т.н., професор*
Мисник Л.Д., *к.т.н., доцент*

Рецензент Губарь Є.Я., *к.т.н., доцент*

Теоретична механіка. Статика. Конспект лекцій для здобувачів
В 31 освітнього ступеня бакалавр з технічних спеціальностей усіх форм
навчання [Електронний ресурс] / [упоряд. Т.І. Веретільник, Л.Д.
Мисник]; М-во освіти і науки України, Черкас. Держ. технол. ун-т. –
Черкаси: ЧДТУ, 2017. – 83 с.

В основу навчального видання покладено досвід читання лекцій з теоретичної механіки для машинобудівних та будівельної спеціальностей в Черкаському державному технологічному університеті. Відмінною особливістю даного видання є його лаконічність і спеціальний підбір задач, переважно машинобудівної тематики.

Для студентів технічних спеціальностей.

УДК 531.2 (075.8)
ББК 22.21я73

Навчальне електронне видання

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. СТАТИКА

Конспект лекцій
для здобувачів освітнього ступеня бакалавр
з технічних спеціальностей усіх форм навчання

Упорядники: **Веретільник** Тимофій Іванович
Мисник Людмила Дмитрівна

В авторській редакції

ЗМІСТ

ВСТУП	5
Позначення, прийняті в тексті	6
Основні поняття теоретичної механіки	7
ЛЕКЦІЯ 1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І АКсіОМИ СТАТИКИ	8
1.1 Основні поняття статички	8
1.2 АксіОми статички	10
1.3 Активні сили і реакції в'язей	12
1.4 Види в'язей та напрямки їх реакцій	13
1.5 ТеОрема по три непаралельні сили	16
1.6 Питання для самоконтролю	16
ЛЕКЦІЯ 2 СИСТЕМА ЗБіЖНИХ СИЛ	17
2.1 Приведення системи збіжних сил до рівнодійної	17
2.1.1 Графічний спОсіб знаходження рівнодійної	17
2.1.2 Аналітичний спОсіб знаходження рівнодійної	18
2.2 Умови рівноваги системи збіжних сил	20
2.3 Питання для самоконтролю	22
ЛЕКЦІЯ 3 МОМЕНТ СИЛИ ВІДНОСНО ТОЧКИ І ОСІ	23
3.1 Векторний момент сили відносно центра	23
3.2 Алгебраїчний момент сили відносно центра.....	24
3.3 Момент сили відносно осі	25
3.4 Аналітичне визначення моменту сили відносно довільного центру.....	25
3.5 Залежність між моментом сили відносно точки і моментом сили відносно осі.....	27
3.6 Питання для самоконтролю	28
ЛЕКЦІЯ 4 ТЕОРІЯ ПАР СИЛ. ПАРА СИЛ	29
4.1 Пара сил. Момент пари сил	29
4.2 ТеОрема про еквівалентність пар сил	30
4.3 ТеОрема про додавання пар сил	31
4.4 Умови рівноваги пар сил	32
4.5 Питання для самоконтролю	34
ЛЕКЦІЯ 5 ДОВІЛЬНА ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ	35
5.1 ТеОрема про паралельне перенесення сили.....	35
5.2 ТеОрема про зведення довільної системи сил до даного центру	35
5.3 Умови рівноваги системи сил	36
5.4 ТеОрема ВаріньОна про момент рівнодійної	37
5.5 Умови рівноваги довільної плоскої системи сил	38
5.6 Умови рівноваги плоскої системи паралельних сил	39
5.7 Розв'язок задач статички	40
5.8 Питання для самоконтролю	43
ЛЕКЦІЯ 6 РІВНОВАГА СИСТЕМИ ТІЛ	44
6.1 Рівновага складених конструкцій	44
6.2 Статично визначені і статично невизначені задачі	47

6.3 Питання для самоконтролю	48
ЛЕКЦІЯ 7 ДОВІЛЬНА ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ	49
7.1 Головний вектор і головний момент просторової системи сил	49
7.2 Окремі випадки зведення системи сил	50
7.3 Умови рівноваги довільної просторової системи сил	52
7.4 Умови рівноваги просторової системи паралельних сил	53
7.5 Питання для самоконтролю	54
ЛЕКЦІЯ 8 РІВНОВАГА З ВРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ	55
8.1 Тертя ковзання	55
8.1.1 Закони Амонтона-Кулона	55
8.1.2 Кут тертя. Область рівноваги	56
8.1.3 Рівновага при наявності тертя	57
8.2 Тертя кочення	61
8.3 Питання для самоконтролю	62
ЛЕКЦІЯ 9 РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ ФЕРМ	63
9.1 Поняття про ферми	63
9.2 Способи знаходження зусиль у стержнях ферми	64
9.2.1 Спосіб вирізання вузлів	64
9.2.2 Спосіб Ріттера (спосіб перерізів)	68
9.3 Графічне визначення реакцій в'язей ферми за допомогою силового та мотузкового багатокутників	70
9.4 Знаходження зусиль в стержнях ферми графічним способом. Діаграма Максвелла-Кремони	71
9.5 Питання для самоконтролю	73
ЛЕКЦІЯ 10 ЦЕНТР ВАГИ ТВЕРДОГО ТІЛА	74
10.1 Центр паралельних сил	74
10.2 Центр ваги однорідного твердого тіла	76
10.2.1 Центр ваги однорідного об'ємного тіла	77
10.2.2 Центр ваги однорідного плоского тіла	77
10.2.1 Центр ваги однорідного лінійного тіла	78
10.3 Способи визначення положення центра ваги	78
10.3.1 Метод симетрії	78
10.3.2 Метод розбивання	79
10.3.3 Метод доповнення (від'ємних площ)	79
10.3.4 Експериментальні методи	80
10.4 Питання для самоконтролю	81
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	82

ВСТУП

Теоретична механіка – це одна з дисциплін науки “*Механіка*”. Саме слово “*механіка*” грецького походження і в прямому перекладі означає “*хитрість*”. Цей термін вперше був застосований в III ст. до н. е. одним із учнів Аристотеля при вивченні таких явищ, в яких “менше зусилля перемагає більше”, наприклад, при підйманні вантажу за допомогою важеля.

Сучасна техніка ставить перед інженерами велику кількість задач, розв’язання яких пов’язане з дослідженням механічного руху і механічної взаємодії матеріальних тіл.

Механічним рухом називають переміщення одного матеріального об’єкта (або його частин) по відношенню до іншого матеріального об’єкта (іншої його частини) в просторі і часі.

Під *механічною взаємодією* розуміють дію одного матеріального тіла на інше, в результаті якої відбувається зміна руху цих тіл або зміна їх форми (деформація). За основну міру такої дії приймають величину, яку називають *силою*.

Прикладами механічного руху в природі є рух небесних тіл, коливання земної кори, повітряні і морські течії, тепловий рух молекул тощо, а в техніці – рух різноманітних наземних або водних транспортних засобів та літальних апаратів, рух частин різноманітних машин, механізмів та двигунів і багато іншого. Прикладами механічної взаємодії можуть бути взаємне притягання матеріальних тіл за законом всесвітнього тяжіння, взаємний тиск тіл, які дотикаються (або співударяються), взаємодія частинок рідини та газу тощо.

Теоретична механіка вивчає загальні закони механічного руху і механічної взаємодії матеріальних тіл.

Теоретична механіка належить до природничих наук і є науковим підґрунтям для багатьох технічних дисциплін, теоретичні засади яких базуються на положеннях і законах, сформульованих механікою. Це такі дисципліни, як опір матеріалів, теорія коливань, гідравліка, теорія пружності, аеро- і гідромеханіка, електродинаміка, біомеханіка, теорія автоматичного керування рухомими об’єктами, теорія механізмів і машин, приладів, роботів-маніпуляторів тощо.

Основним завданням теоретичної механіки є пізнання кількісних і якісних закономірностей механічного руху і відображення їх на математичній мові у вигляді рівнянь – законів механічного руху.

За характером розв’язуваних задач курс теоретичної механіки розділяють на три частини: *статика, кінематика, динаміка*.

В *статичі* викладається вчення про сили та умови рівноваги матеріальних тіл під дією сил.

У *кінематиці* розглядаються загальні геометричні властивості руху тіл незалежно від діючих на них сил.

У *динаміці* вивчається рух матеріальних точок, абсолютно твердих тіл та механічних систем під дією факторів, які викликали цей рух.

Позначення, прийняті в тексті

<i>Буквене позначення</i>	<i>Одиниця СІ</i>	<i>Термін</i>
\bar{F}	H	Сила
F	H	Модуль сили
F_x, F_y, F_z	H	Проекція сили \bar{F} на координатні осі Ox, Oy, Oz
\bar{F}^e	H	Зовнішня сила механічної системи
\bar{F}^i	H	Внутрішня сила механічної системи
$\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$	H	Складові реакції в'язі
\bar{R}	H	Рівнодійна системи сил
F_{xy}	H	Проекція сили на координатну площину Oxy
$\bar{M}_O(\bar{F})$	$H \cdot m$	Момент сили \bar{F} відносно центру O
$M_O(\bar{F})$	$H \cdot m$	Алгебраїчний момент сили \bar{F} відносно центру O
h	m	Плече сили \bar{F} відносно центру O
$M_x(\bar{F}), M_y(\bar{F}), M_z(\bar{F})$	$H \cdot m$	Момент сили \bar{F} відносно осей Ox, Oy, Oz
$\bar{M}(\bar{F}, \bar{F}')$	$H \cdot m$	Момент пари сил
$M(\bar{F}, \bar{F}')$	$H \cdot m$	Алгебраїчний момент пари сил
\bar{R}	H	Головний вектор системи сил
\bar{M}_O	$H \cdot m$	Головний момент системи сил відносно центру O
$\text{пр}_x(\bar{M}_O)$	$H \cdot m$	Проекція головного моменту на вісь Ox
M_x, M_y, M_z	$H \cdot m$	Головні моменти системи сил відносно осей Ox, Oy, Oz
q	H/m	Інтенсивність розподіленого навантаження

<i>Буквене позначення</i>	<i>Одиниця СІ</i>	<i>Термін</i>
\bar{F}_T	<i>H</i>	Сила тертя ковзання
f_c		Статичний коефіцієнт тертя ковзання
f		Динамічний коефіцієнт тертя ковзання
φ	<i>рад</i>	Кут тертя
δ	<i>м</i>	Коефіцієнт тертя кочення
M_T	<i>H·м</i>	Момент тертя кочення
P	<i>H</i>	Вага тіла
\bar{r}_C	<i>м</i>	Радіус-вектор центра ваги або центра мас
x_C, y_C, z_C	<i>м</i>	Координати центра ваги або центра мас

Основні поняття теоретичної механіки

Розглянемо лише ті поняття, без розгляду яких неможливо приступити до вивчення теоретичної механіки і які є загальними для трьох її частин. До таких понять належать поняття матеріальної точки, механічної системи і абсолютно твердого тіла.

Матеріальна точка – це тіло, розмірами якого за даних умов (при розв’язанні даної задачі) можна знехтувати. Це поняття є відносним. Відносність його, по-перше, полягає в тому, що одне і те ж саме тіло при розв’язанні однієї задачі приймають за матеріальну точку, а при розв’язанні іншої – ні. По-друге, при розв’язанні одних задач (наприклад, при дослідженні руху планет навколо Сонця) величезні тіла (планети) приймаються за матеріальну точку, а при розв’язанні інших – навіть мікро тіла не можна прийняти за матеріальну точку.

Механічна система – це сукупність матеріальних точок (тіл), положення і рух яких взаємопов’язані.

Абсолютно тверде тіло (тверде тіло) – тіло, відстані між двома точками якого не змінюються при будь-яких взаємодіях, тобто тіло, яке не змінює своєї форми та розмірів при будь-яких впливах на нього з боку інших тіл.

Матеріальна точка, тверде тіло, механічна система є основними матеріальними об’єктами, закони руху яких вивчаються в теоретичній механіці. Кожен з цих об’єктів може знаходитись в певному кінематичному стані – в стані спокою або здійснювати деякий рух.

ЛЕКЦІЯ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І АКсіОМИ СТАТИКИ

Статика – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються умови рівноваги систем сил, прикладених до твердого тіла, а також приведення складних систем сил до найпростішого виду.

1.1 Основні поняття статики

Сила – міра механічної взаємодії матеріальних тіл, в результаті якої відбувається зміна руху цих тіл або зміна їх форми (деформація).

Сила – це векторна величина, тобто вона характеризується числовим значенням, напрямком і точкою прикладання. Тому силу можна зобразити направленим відрізком. Лінія вздовж якої діє сила називається *лінією дії сили* (рис 1.1).

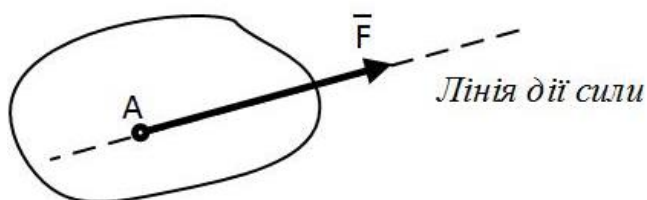


Рис. 1.1

Використовуючи одиничні вектори ($\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$), силу можна представити через її проекції на осі координат (рис.1.2):

$$\bar{F} = F_x \bar{i} + F_y \bar{j} + F_z \bar{k}$$

де F_x, F_y, F_z – проекції сили на осі координат;

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – одиничні вектори (орти) осей Ox, Oy, Oz

$$F_x = F \cos(\bar{F}, \bar{i})$$

$$F_y = F \cos(\bar{F}, \bar{j})$$

$$F_z = F \cos(\bar{F}, \bar{k})$$

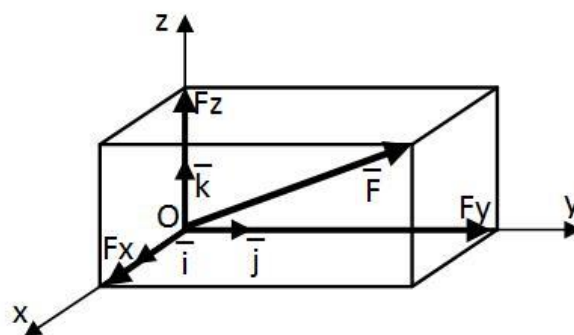


Рис. 1.2

Одиниці вимірювання сили \bar{F} : $[H] =$ ньютон.

Система сил – це сукупність кількох сил ($\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n$), діючих на дане тіло або систему тіл (рис. 1.3).

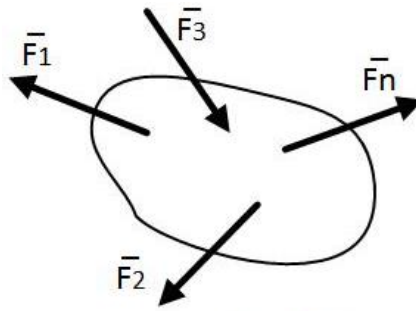


Рис. 1.3

Еквівалентні системи сил – це такі системи сил, дія яких на одне і теж тіло спричиняє однаковий механічний вплив за інших однакових умов (рис. 1.4).

$$(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n) \sim (\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_n)$$

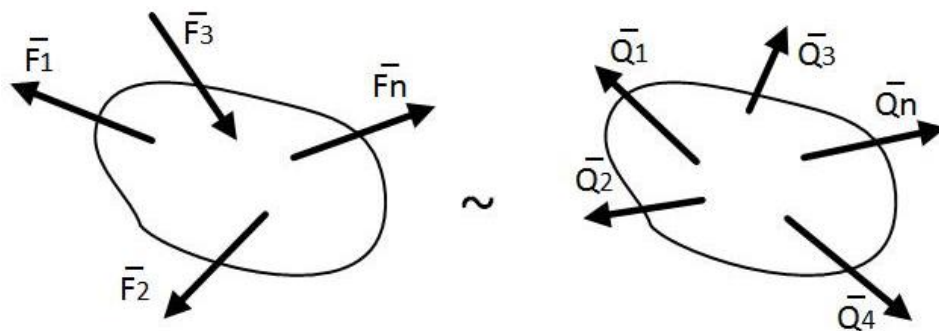


Рис. 1.4

Рівнодійна даної системи сил (рис. 1.5) це сила, дія якої на тверде тіло або матеріальну точку еквівалентна дії цієї системи сил:

$$\bar{R} \sim (\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n),$$

де \bar{R} – рівнодійна.

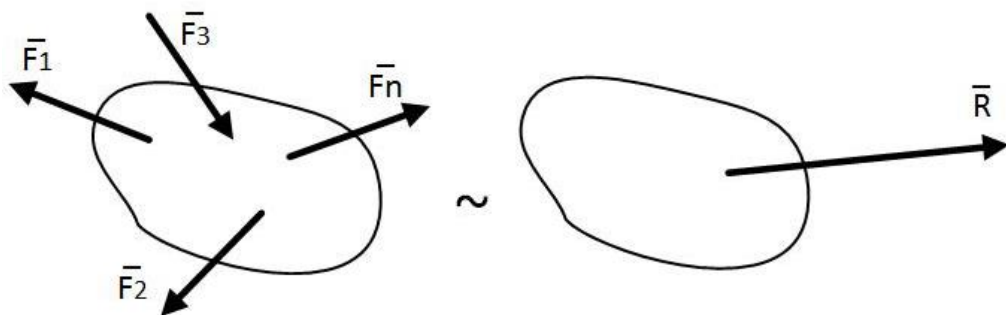


Рис. 1.5

Зрівноважена система сил це така система сил, дія якої на тверде тіло, що знаходиться в спокої або рухається, не приводить до зміни його стану. Рівнодійна зрівноваженої системи сил рівна нулю:

$$(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n) \sim 0$$

Зрівноважуюча сила \bar{R}^* заданої системи сил $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$ це така сила, яка, будучи приєднаною до цієї системи сил, складає разом з нею нову систему сил, еквівалентну нулю: $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n, \bar{R}^*) \sim 0$, причому $\bar{R} = -\bar{R}^*$.

Зосереджена сила \bar{F}_k – це сила, прикладена до фіксованої точки твердого тіла. На рис. 1.5 сили $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ є зосередженими.

Розподілені сили – це сили, діючі на всі точки даного об'єму або даної ділянки поверхні, або лінії. Розподілені сили характеризуються інтенсивністю q , тобто силою, що діє на одиницю об'єму, поверхні або довжини лінії.

Розподілені сили можна замінити зосередженими, якщо заміна не змінює механічний стан тіла.

Рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю $q = \text{const}$ (рис. 1.6, а) замінюють зосередженою силою $R_q = qL$, яка прикладається в середині ділянки (в центрі ваги прямокутника).

Сили, розподілені за лінійним законом (у формі трикутника) $0 \leq q \leq q_{\text{max}}$ замінюють зосередженою силою $R_q = \frac{q_{\text{max}}L}{2}$ рівній площі трикутника і прикладеній в центрі ваги трикутника (рис. 1.6, б).

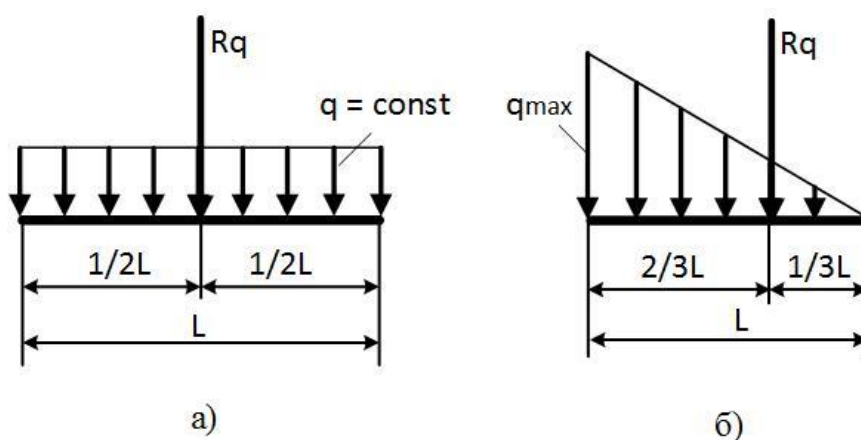


Рис. 1.6

Внутрішні сили – це сили взаємодії між тілами чи точками, які входять до складу однієї механічної системи.

Зовнішні сили – це сили, з якими тіла чи точки даної механічної системи діють на тіла чи точки, що до її складу не входять.

Наприклад, вантаж підвішений на пружині, знаходиться в рівновазі. Сила тяжіння, обумовлена притяганням Землі – зовнішня сила. Сила пружності, яка виникає при розтягу пружини – внутрішня сила.

1.2 Аксиоми статички

Статика, як і вся теоретична механіка, базується на деяких істинах (вихідних положеннях, аксіомах), які є результатом багаточисельних спостережень і експериментів на основі яких шляхом логічних міркувань з використанням відповідного математичного апарату, будується весь теоретичний курс.

1. Аксиома про рівновагу системи двох сил.

Дві сили, прикладені до абсолютно твердого тіла чи точки будуть врівноважені (еквівалентні нулю), якщо модулі їх рівні, а діють вони вздовж однієї прямої в протилежних напрямках (рис. 1.7 а, б).

$$F_A = F_B; \vec{F}_A = -\vec{F}_B$$

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \vec{F}_A - \vec{F}_B = 0.$$

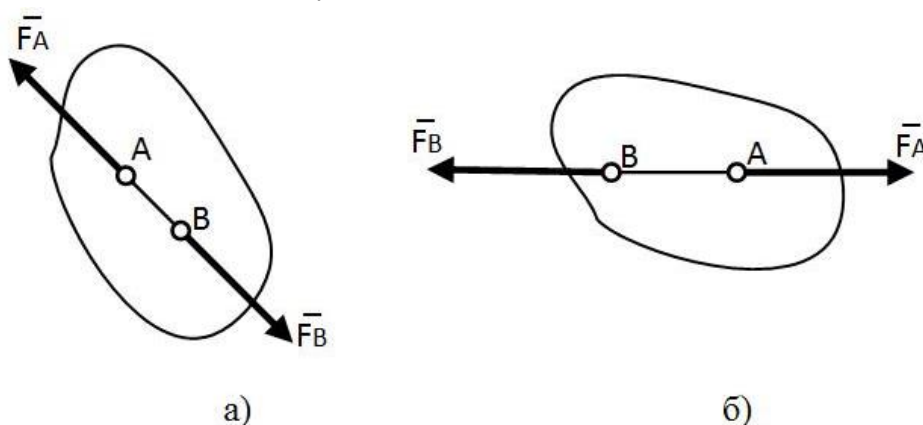


Рис. 1.7

2. Аксиома про приєднання (виключення) зрівноваженої системи сил.

Стан твердого тіла не порушиться, якщо до системи сил, що діє на нього, приєднати або виключити систему зрівноважених сил.

Наслідок. Не порушуючи стану твердого тіла, силу можна переносити вздовж лінії її дії, тобто сила, прикладена до твердого тіла – ковзний вектор.

Для доведення цього наслідку розглянемо тверде тіло, на яке в точці A діє сила \vec{F} (рис. 1.8, а). Візьмемо на лінії дії сили \vec{F} яку-небудь точку B і прикладемо в цій точці дві сили (\vec{F}' , \vec{F}''), які чисельно дорівнюють силі \vec{F} і задовольняють умову зрівноваження ($\vec{F}' = -\vec{F}''$) (рис. 1.8, б). Таке приєднання згідно аксіоми 2 не порушує стану тіла, тобто система сил ($\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}''$) буде еквівалентна вихідній системі сил (\vec{F}). Так як сили \vec{F}'' і \vec{F} взаємно врівноважуються (аксіома 1), їх, не порушуючи стану тіла, можна відкинути і залишиться одна сила \vec{F}' , яка прикладена в точці B (рис. 1.8, в). Оскільки $\vec{F}' = \vec{F}$, то можна вважати, що сила \vec{F}' є силою \vec{F} , яка перенесена вздовж лінії дії з точки A в точку B . Отже, наслідок доведений. Доведене положення дозволяє, не порушуючи стану тіла, переносити точку прикладання кожної сили вздовж лінії її дії в будь-яку точку тіла.

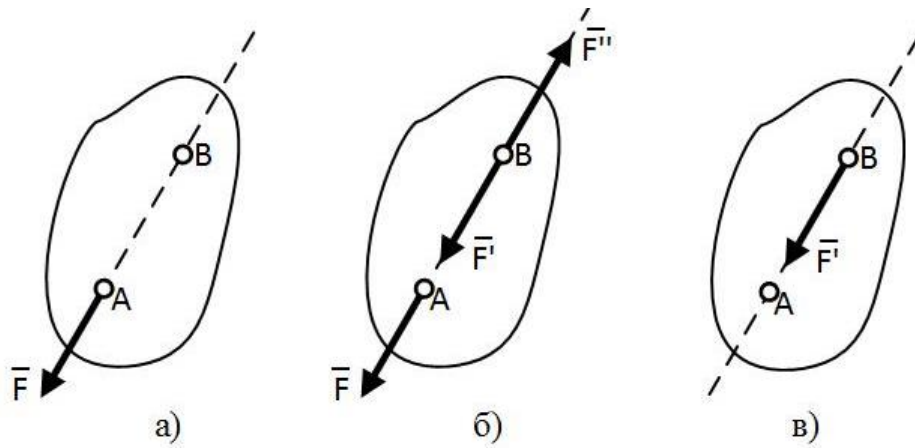


Рис. 1.8

3. *Аксиома паралелограма сил.*

Сили, прикладені до тіла в одній точці, можна замінити рівнодійною, зображеною діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах, як на сторонах (рис. 1.9).

Додавання за правилом паралелограма називається векторною (геометричною) сумою і записується так: $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$

Модуль рівнодійної рівний:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos(\widehat{F_1, F_2})}$$

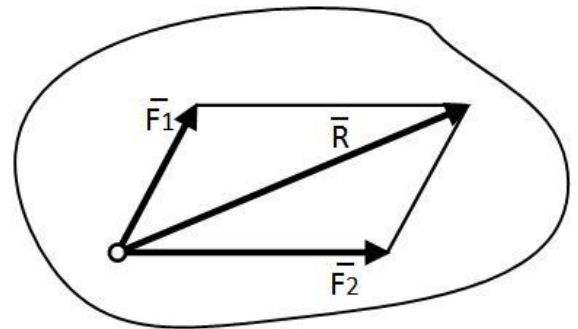


Рис. 1.9

Справедливе і обернене твердження, тобто одну силу, прийнявши її за рівнодійну, можна розкласти на дві складові сили по заданих напрямках.

4. *Аксиома про рівність сил дії і протидії.*

Сили взаємодії двох тіл рівні за модулем і направлені вздовж однієї прямої в протилежних напрямках. Силами взаємодії є сили дії і сили протидії.

Сили взаємодії (дії і протидії) двох тіл прикладені до різних тіл і не утворюють зрівноважену систему сил (рис. 1.10).

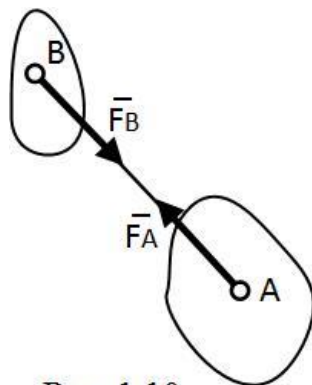


Рис. 1.10

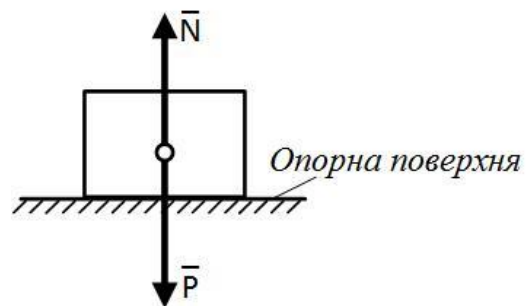


Рис. 1.11

Розглянемо приклад, тіло знаходиться на горизонтальній поверхні і тисне на цю поверхню з силою \vec{P} (рис. 1.11). В свою чергу поверхня діє на тіло з силою \vec{N} , рівною за модулем і протилежною за напрямком. Сила \vec{P} – сила дії, а сила \vec{N} – протидії. $N = P, \vec{N} = -\vec{P}$.

5. Аксиома затвердіння.

Рівновага змінного тіла не порушиться, якщо тіло вважати в визначений час абсолютно твердим, тобто недеформованим.

1.3 Активні сили і реакції в'язей

Всі тіла в природі можна розділити на вільні і невольні.

Вільним називається тіло, переміщення якого в даний момент часу в просторі не обмежені. В іншому випадку тіло є невольним.

Тіла, які обмежують рух даного матеріального об'єкту в просторі називаються в'язями (опорами).

Наприклад, рух книжки обмежений площиною столу. Площина столу є в'яззю для книжки. Для столу в'яззю є підлога, яка обмежує його рух і т. д.

Якщо в'язь обмежує рух матеріального об'єкту в просторі, то вона з ним взаємодіє. Мірою цієї взаємодії є реакція в'язі.

Реакція в'язі або просто реакція – це сила, з якою в'язь діє на тіло перешкоджаючи його рухові.

Активними (заданими) силами називаються сили, які не залежать від в'язей.

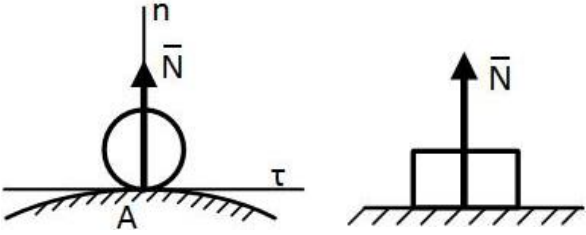
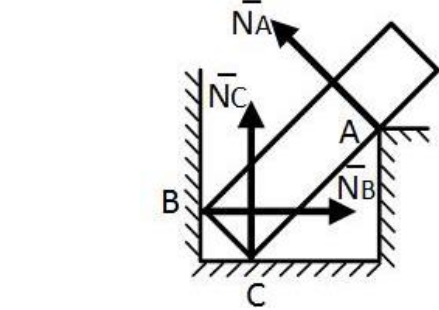
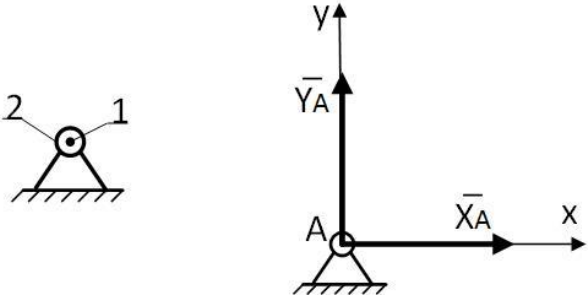
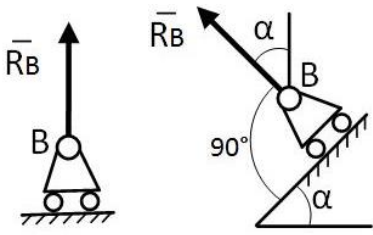
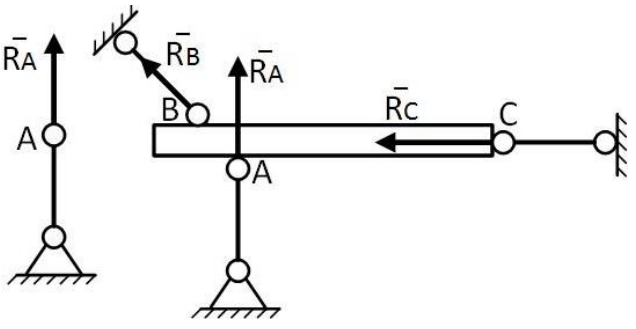
Реакції в'язей – це пасивні сили. Вони залежать від активних сил. Величину і напрямок реакцій можна визначити, виходячи з виду в'язей та їх конструкції.

Принцип звільнення від в'язей. Невільне тверде тіло можна вважати вільним, якщо відкинути в'язі і їх дію замінити силами реакцій в'язей, прикладеними до тіла.

1.4 Види в'язей та напрямки їх реакцій

В статичі, в основному, розглядаються прості в'язі, які реалізуються наступними тілами

1	<p>Гнучке тіло (нитка, трос, ланцюг) Реакції спрямовані вздовж нитки (троса, ланцюга) вглиб неї. Позначається літерою \vec{T} і називається натягом.</p>	
---	--	--

2	<p><i>Ідеально гладка поверхня</i> Реакція направлена вздовж нормалі до поверхні і найчастіше позначається літерою \bar{N}.</p>	
3	<p><i>Точкова опора. Опора на ребро</i> Реакції направлені перпендикулярно до поверхні тіла, що опирається.</p>	
4	<p><i>Циліндрична шарнірно-нерухома опора</i> (конструкція, що складається з болта 1 та втулки 2, що надіта на нього) Реакція лежить у площині, що перпендикулярна осі болта і проходить через його центр. Зазвичай вона невідома за напрямом і при розв'язуванні задач розкладаються на дві складові \bar{X}_A, \bar{Y}_A.</p>	
5	<p><i>Циліндрична шарнірно-рухома опора</i> В'язь еквівалентна ідеально гладкій поверхні, а її реакція направлена вздовж нормалі до опорної поверхні.</p>	
6	<p><i>Невагомий стержень з шарнірами на кінцях</i> Реакція направлена вздовж лінії, що проходить через шарніри стержня, позначається літерою \bar{S}, або \bar{R} і називається зусиллям у стержні.</p>	

7	<p><i>Сферичний шарнір</i> (деяке тіло, що закінчується кулею, яка обертається у сферичному підшипнику. Реакція \bar{R}_A невідома за напрямком і при розв'язуванні задач розкладається на три складові $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$.</p>	
8	<p><i>Підп'ятник</i> (упорний підшипник, що складається з циліндричного шарніра і опорної поверхні). Реакція може мати будь-який напрям у просторі і при розв'язуванні задач розкладається на три складові $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$.</p>	
9	<p><i>Жорстке зацмлення на площині</i> (балка одним кінцем зароблена жорстко у стіну). Реакція складається із сили \bar{R}_A, яку розкладаються на дві складові \bar{X}_A, \bar{Y}_A і пари сил реактивним моментом M_R.</p>	
10	<p><i>Жорстке зацмлення у просторі</i> Сила реакції \bar{R}_A і реактивний момент M_R розкладаються на три складові відповідно $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$ та M_{RX}, M_{RY}, M_{RZ}.</p>	

Зауваження. Якщо напрям реакцій в'язей точно невідомий, то направляємо їх у бік додатного напрямку осей координат. Коли при розв'язку задачі отримаємо відповідну реакцію зі знаком мінус, то це означає, що в дійсності вона направлена протилежно прийнятому напрямку.

1.5 Теорема про три непаралельні сили

Три непаралельні сили, які діють на тверде тіло в одній площині, врівноважуються тільки в тому випадку, коли їх лінії дії перетинаються в одній точці.

Ця теорема виражає необхідну умову врівноваження трьох сил. Її часто використовують для знаходження лінії дії реакції в'язі, напрям якої, згідно з класифікацією в'язей, невідомий.

Приклад 1.1 На середину балки AB діє сила P (рис. 1.12). В точці A балка має шарнірно нерухому опору, а в точці B – шарнірно-рухомою. Знайти лінію дії реакції в точці A .

Розв'язок. Реакція \bar{R}_B шарнірно-рухомої опори направлена перпендикулярно опорній поверхні і перетинається з лінією дії сили \bar{P} в точці C . За теоремою про три непаралельні сили лінія дії реакції опори A також повинна пройти через цю точку:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{CD}{AD}; \quad CD = l \cdot \operatorname{tg} 30^\circ; \quad AD = l$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l \cdot \operatorname{tg} 30^\circ}{l} = \operatorname{tg} 30^\circ; \quad \alpha = 30^\circ.$$

Відповідь. Реакція \bar{R}_A утворює кут 30° з віссю балки AB .

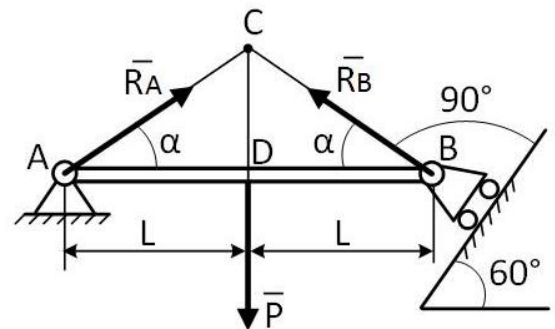


Рис. 1.12

1.6 Питання для самоконтролю

1. Що вивчає статика?
2. Якщо при взаємодії відстань між точками тіла зменшується, чи можна це тіло вважати абсолютно твердим?
3. Якщо тіла не надають одне одному прискорення, але деформуються, чи діє, в цьому випадку, на тіла сила?
4. Чи можна оцінити дію сили на тіло, якщо відомі лише її модуль і точка прикладання?
5. За яких умов дві системи сил можна вважати еквівалентними?
6. Чи зрівноважена система сил, яка примусить рухатись тіло, що перебуває в стані спокою?
7. Дайте визначення рівнодійної сили.
8. Якщо книга лежить на горизонтальній поверхні столу, то її дія на стіл характеризується зосередженою чи розподіленою силою?
9. Що таке в'язь?
10. Дайте визначення реакції в'язі.
11. Коли тіло знаходиться в рівновазі під дією трьох непаралельних сил?

ЛЕКЦІЯ 2. СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ

Збіжними називаються сили лінії дії яких перетинаються в одній точці. Система збіжних сил має рівнодійну, рівну геометричній сумі цих сил і прикладену в точці перетину їх ліній дії.

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (2.1)$$

Точка перетину ліній дії сил системи називається точкою збігу.

2.1 Приведення системи збіжних сил до рівнодійної

2.1.1 Графічний спосіб знаходження рівнодійної

Знаходження рівнодійної базується на побудові векторного багатокутника сил, який називають *силовим багатокутником*. Рівнодійна в силовому багатокутнику з'єднує початок першої сили, яку проводять з довільно вибраного центру O , з кінцем останньої.

Розглянемо систему збіжних сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4$ (рис. 2.1). Знайдемо рівнодійну цієї системи сил, побудувавши векторний багатокутник сил.

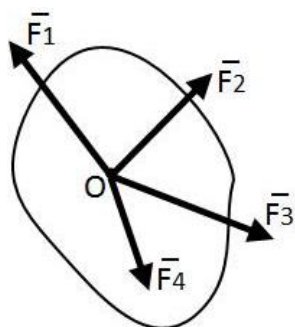


Рис. 2.1

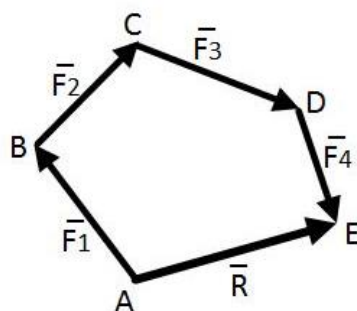


Рис. 2.2

З довільного центру O проводимо лінію, паралельну вектору сили \bar{F}_1 (рис. 2.2), і відкладаємо відрізок AB , рівний взятому в масштабі модулю цієї сили. З точки B проводимо відрізок BC паралельний вектору сили \bar{F}_2 і рівний взятому в тому ж масштабі модулю цієї сили. Далі з точки C проводимо відрізок CD , паралельний вектору сили \bar{F}_3 , рівний модулю цієї сили (взятому в масштабі). З точки D проводимо відрізок DE , паралельний вектору \bar{F}_4 і рівний модулю цієї сили відкладеному в масштабі. Відрізок AE , який з'єднує початок вектору \bar{F}_1 з кінцем вектору \bar{F}_4 , буде рівнодійною \bar{R} цієї системи збіжних сил. Величина рівнодійної рівна взятому в масштабі сил відрізку AE .

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 \sim \bar{R}$$

Будувати силовий багатокутник можна у будь-якій послідовності від якої змінюється лише форма багатокутника, а рівнодійна зостається незмінною. При побудові багатокутника в масштабі, модуль рівнодійної можна визначити безпосереднім вимірюванням.

2.1.2 Аналітичний спосіб знаходження рівнодійної

Рівнодійну системи збіжних сил можна визначити аналітичним способом, який базується на проектуванні сил системи на вибрані осі координат.

Проекція сили на вісь – це алгебраїчна величина, рівна добутку модуля сили на косинус кута між силою і додатнім напрямком осі.

Якщо цей кут гострий, – проекція додатна, якщо тупий – від’ємна, а якщо сила перпендикулярна осі, – її проекція на цю вісь рівна нулю. Так, для сил, зображених на рис. 2.3,

$$F_x = F \cos \alpha = ab, \quad Q_x = Q \cos \alpha_1 = -Q \cos \varphi = -de, \quad P_x = 0.$$

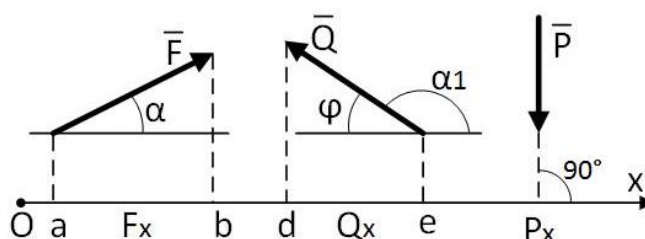


Рис. 2.3

Для розв’язку деяких задач механіки, потрібно за відомими проекціями сили \vec{F} на осі координат (F_x, F_y, F_z) знайти модуль сили та її розташування в просторі, яке задається кутами між силою і осями координат Ox, Oy і Oz (рис. 2.4).

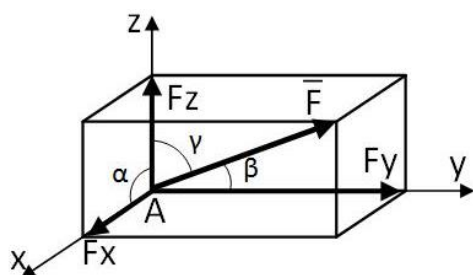


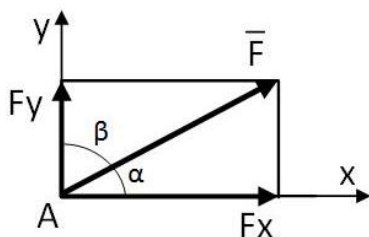
Рис. 2.4

Як видно з рисунка:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \quad (2.2)$$

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}; \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}; \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F}.$$

Якщо всі задані сили лежать в одній площині, то кожен з сил можна задати її проекціями на дві осі Ox і Oy (рис. 2.5). Тоді рівняння за якими можна знайти силу, знаючи її проекції на осі координат, матимуть вигляд:



$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \quad (2.3)$$

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}; \cos \beta = \frac{F_y}{F}.$$

Рис. 2.5

Рівнодійна системи збіжних сил рівна їх геометричній сумі і щоб знайти її аналітичним способом потрібно перейти від залежності між векторами до залежності між їх проекціями на осі координат. Це можна зробити за допомогою наступної теореми:

Проекція рівнодійної системи сил на вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій всіх сил системи на цю ж вісь.

Згідно цієї теореми, якщо $\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$, то

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz}. \quad (2.4)$$

Знаючи R_x , R_y і R_z за формулами (2.2) знаходимо

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \quad (2.5)$$

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}; \cos \beta = \frac{R_y}{R}; \cos \gamma = \frac{R_z}{R}.$$

Формули (2.4) і (2.5) дозволяють розв'язати задачу про додавання сил аналітично.

Для сил, розташованих в одній площині, відповідні рівняння мають вигляд:

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}. \quad (2.6)$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad \cos \alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}.$$

Приклад 2.1 Для заданої плоскої збіжної системи сил $F_1 = 26 \text{ Н}$, $F_2 = 26 \text{ Н}$, $F_3 = 44 \text{ Н}$ (рис. 2.6, а) визначити величину і напрямок рівнодійної.

Розв'язок. Графічний спосіб. Вибираємо масштаб $\mu_F = \frac{F, \text{Н}}{l, \text{мм}} = \frac{26 \text{ Н}}{26 \text{ мм}} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{мм}}$ та будуємо силовий багатокутник у цьому масштабі. Починаємо з сили \bar{F}_1 . Прикладаємо її в точці А. Силу \bar{F}_2 проводимо з кінця вектору \bar{F}_1 , а \bar{F}_3 – з кінця вектору \bar{F}_2 . Кінець вектору \bar{F}_3 з'єднуємо з початком побудови – точкою А. Отриманий вектор \overline{AD} і є рівнодійна \bar{R} даної системи сил (рис. 2.6, б). Вимірюємо довжину в мм вектору \overline{AD} і, врахувавши масштаб, визначаємо величину рівнодійної.

$$R = AD \cdot \mu_F = 13 \text{ мм} \cdot 1 \frac{\text{Н}}{\text{мм}} = 13 \text{ Н}.$$

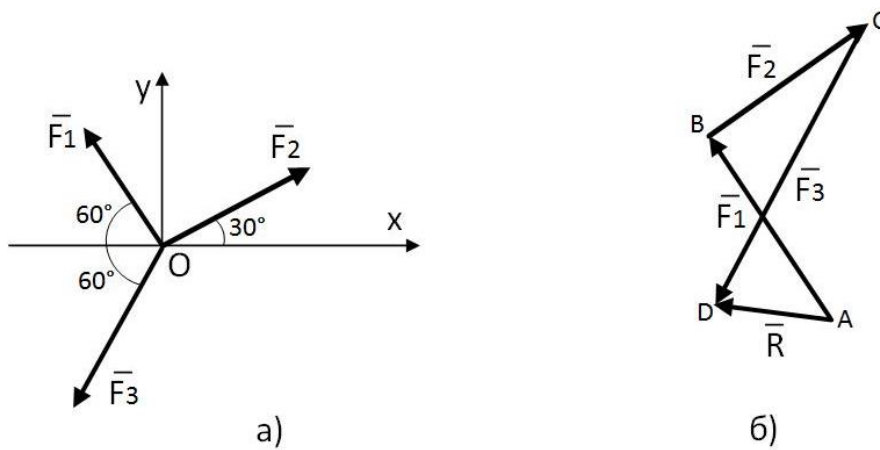


Рис. 2.6

Аналітичний спосіб. Задані сили лежать в одній площині, тому для знаходження рівнодійної використовуємо рівняння (2.6).

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = -F_1 \cos 60^\circ + F_2 \cos 30^\circ - F_3 \cos 60^\circ;$$

$$R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = F_1 \sin 60^\circ + F_2 \sin 30^\circ - F_3 \sin 60^\circ;$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-12,38)^2 + (-2,66)^2} = 12,66 \text{ Н};$$

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = 0,978, \alpha = 167,96^\circ.$$

Відповідь: Результати графічного та аналітичного розв'язку задачі співпадають. Рівнодійна системи збіжних сил $R = 12,66 \text{ Н}$.

2.2 Умови рівноваги системи збіжних сил

Для рівноваги системи збіжних сил, прикладених до твердого тіла, необхідно і достатньо, щоб рівнодійна цієї системи сил дорівнювала нулю:

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k = 0.$$

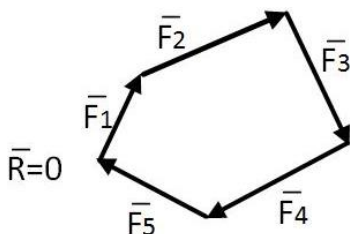


Рис. 2.7

Геометрична умова рівноваги означає, що силовий багатокутник буде замкнутим, тобто при побудові силового багатокутника кінець останнього вектору співпадає з початком першого вектору (рис. 2.7).

Для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб силовий багатокутник, побудований на цих силах, був замкнутим.

Аналitичні умови рівноваги отримуємо, використовуючи рівняння (2.5):

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

Так як під коренем стоїть сума додатних доданків, то \bar{R} перетвориться на нуль лише тоді, коли одночасно $R_x = 0$; $R_y = 0$; $R_z = 0$, тобто, як це впливає з рівнянь (2.4), коли діючі на тіло сили задовольнятимуть рівняння:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0. \quad (2.7)$$

Рівняння (2.7) виражають умови рівноваги в аналітичній формі:

Для рівноваги просторової системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб суми проєкцій цих сил на кожну з трьох осей координат дорівнювали нулю.

Якщо всі діючі на тіло збіжні сили лежать в одній площині, то вони утворюють плоску систему збіжних сил. У випадку плоскої системи збіжних сил отримаємо, вочевидь, лише два рівняння рівноваги:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0. \quad (2.8)$$

Приклад 2.2 Два невагомих стержні, з'єднані в точці C шарніром (рис. 2.8), утримують в рівновазі вантаж $P = 50 \text{ Н}$, який підвішений до шарніра C . Знайти зусилля в стержнях CA і CB , якщо кут $\alpha = 60^\circ$.

Розв'язок. Використовуючи принцип звільнення від в'язей, замінюємо дію стержнів CA , CB і нитки на шарнір C реакціями $\bar{S}_A, \bar{S}_B, \bar{T}$. Вважаємо стержні розтягнутими, направляючи зусилля в них від вузла. Враховуємо, що $T = P = 50 \text{ Н}$.

На вузол C діє плоска збіжна система сил, для якої записуємо рівняння рівноваги. Осі координат направляємо вздовж взаємо перпендикулярних сил \bar{S}_A і \bar{T} .

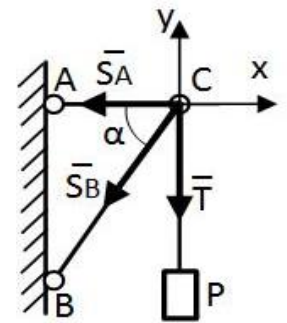


Рис. 2.8

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -S_A - S_B \cos \alpha = 0.$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad -T - S_B \sin \alpha = 0.$$

Розв'язавши рівняння відносно невідомих, знаходимо:

$$S_B = -\frac{T}{\sin \alpha} = -57,74 \text{ Н}; \quad S_A = -S_B \cos \alpha = 28,87 \text{ Н}.$$

Відповідь: $S_A = 28,87 \text{ Н}$; $S_B = -57,74 \text{ Н}$. Знаки показують, що стержень CA розтягнутий, а стержень CB – стиснутий.

Приклад 2.3 Три невагомi стержни з'єднанi в точцi C шарнiром, до якого ниткою прикрiплено вантаж $P = 100 \text{ H}$ (рис. 2.9). В положеннi, коли площина $ACDK$ горизонтальна, а кути $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, знайти зусилля в стержнях AC , BC , CD .

Розв'язок. За принципом звiльнення вiд в'язей замiняємо дiю стержнiв AC , BC , CD на шарнiр C iх реакцiями $\vec{S}_A, \vec{S}_B, \vec{S}_D$, якi направляємо вiд шарнiра (припускаємо, що стержни розтягнутi). Сила натягу нитки рiвна \vec{T} ($T = P = 100 \text{ H}$). На шарнiр дiє просторова збiжна система сил для якої записуємо рiвняння рiвноваги:

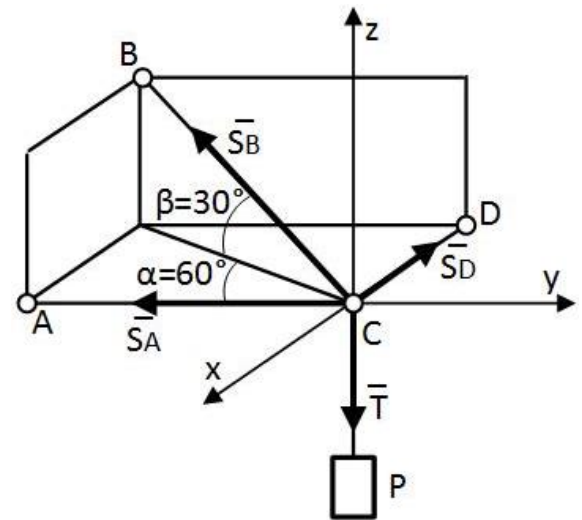


Рис. 2.9

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -S_D - S_B \cos 30^\circ \sin 60^\circ = 0$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad -S_A - S_B \cos 30^\circ \cos 60^\circ = 0$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad -T + S_B \sin 30^\circ = 0.$$

Розв'язавши рiвняння, знаходимо:

$$S_B = -\frac{T}{\sin 30^\circ} = 200 \text{ H};$$

$$S_A = -S_B \cos 30^\circ \cos 60^\circ = -86,6 \text{ H};$$

$$S_D = -S_B \cos 30^\circ \sin 60^\circ = -150 \text{ H}.$$

Вiдповiдь: $S_A = -86,6 \text{ H}$; $S_B = 200 \text{ H}$; $S_D = -150 \text{ H}$. Знаки показують, що стержень CB розтягнутий, а стержни CA i CD – стиснутi.

2.3 Питання для самоконтролю

1. Яка система сил називається збiжною.
2. Як знайти рiвнодiйну системи збiжних сил графiчним способом?
3. Як знайти проекцiю сили на вiсь?
4. Як визначити рiвнодiйну системи збiжних сил аналітичним способом?
5. Сформулюйте умову рiвноваги системи збiжних сил.
6. Запишіть рiвняння рiвноваги просторової системи збiжних сил?
7. Яка геометрична умова рiвноваги системи збiжних сил?
8. Запишіть рiвняння рiвноваги плоскої системи збiжних сил.
9. Визначте величину рiвнодiйної двох рiвних за модулем сил $F_1 = F_2 = 8 \text{ H}$, якi прикладенi до однієї точки, утворюючи між собою кут 60° .
10. Кут між силами $F_1 = F_2 = 20 \text{ H}$, прикладених до однієї точки 120° . Знайдіть модуль сили F_3 , яка зрiвноважить ці сили.
11. До якого канонiчного виду зводиться система збiжних сил?

ЛЕКЦІЯ 3. МОМЕНТ СИЛИ ВІДНОСНО ЦЕНТРА І ОСІ

3.1 Векторний момент сили відносно центра

Введемо важливе поняття про момент сили відносно точки. Точку, відносно якої береться момент, називають *центром моменту*, а момент сили відносно цієї точки – *моментом відносно центра* (рис. 3.1). Якщо під дією прикладеної сили тіло може обертатись навколо деякої точки, то момент сили відносно цієї точки характеризує обертальний ефект дії сили.

Векторним моментом сили \vec{F} відносно центра O називається прикладений в центрі O вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$, модуль якого рівний добутку модуля сили F на її плече h відносно цього центра і який направлений перпендикулярно площині, що проходить через центр O і силу, в бік, звідки видно, що сила намагається повернути тіло проти руху годинникової стрілки.

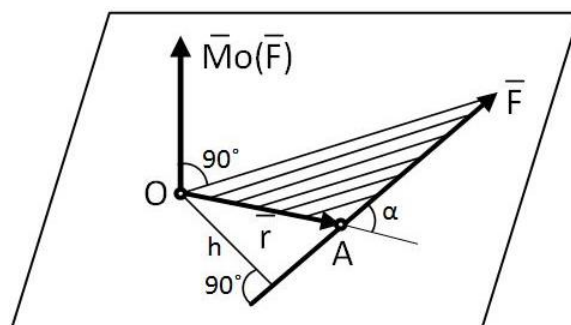


Рис. 3.1

Згідно цього визначення $|\vec{M}_O(\vec{F})| = F \cdot h$. Вимірюється момент сили в ньютон-метрах (Н·м).

Знайдемо формулу, що виражає вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$. Для цього розглянемо векторний добуток $\vec{OA} \times \vec{F}$ векторів \vec{OA} і \vec{F} , або $\vec{r} \times \vec{F}$, де $\vec{r} = \vec{OA}$ – радіус-вектор точки прикладання сили, проведений з центра O . З рис. 3.1 видно, що $r \sin \alpha = h$. За визначенням

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = rF \sin \alpha = Fh = |\vec{M}_O(\vec{F})|$$

Таким чином

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \quad (3.1)$$

Момент сили \vec{F} відносно центра O рівний векторному добутку радіуса-вектору \vec{r} , проведеного з центра O в точку A , де прикладена сила, на саму силу.

Відмітимо наступні властивості моменту сили:

- 1) момент сили відносно центра не змінюється при переносі точки прикладання сили вздовж її лінії дії;
- 2) момент сили відносно центра O дорівнює нулю або коли сила рівна нулю, або коли лінія дії сили проходить через центр O (плече дорівнює нулю) (рис. 3.2).

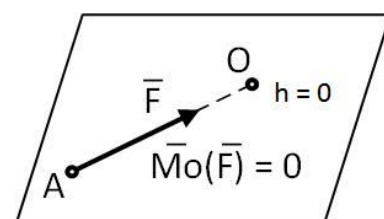


Рис. 3.2

3.2 Алгебраїчний момент сили відносно центра

Алгебраїчним моментом сили відносно центра називають добуток модуля сили на плече цієї сили відносно вибраного центра, взятий зі знаком плюс чи мінус.

$$M_O(\vec{F}) = \pm Fh \quad (3.2)$$

Плече сили \vec{F} відносно вибраного центра O – це довжина перпендикуляра, опущеного з центра O на лінію дії сили (рис. 3.3).

Момент сили вважають додатнім, якщо сила намагається повернути тіло відносно вибраного центра проти руху годинникової стрілки, а від’ємним – якщо за рухом годинникової стрілки.

Для знаходження алгебраїчного моменту сили відносно центра необхідно:

1. продовжити лінію дії сили;
2. опустити з центра O перпендикуляр на лінію дії сили, який і буде її плечем;
3. визначити знак моменту.

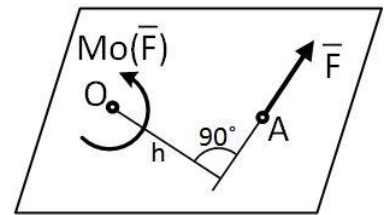


Рис. 3.3

Приклад 3.1 Знайти момент сили $F = 100 \text{ Н}$ відносно точок A, B, C . Сила діє вздовж діагоналі прямокутника $ABCD$, де $BC = 3 \text{ м}$, $DC = 4 \text{ м}$ (рис. 3.4).

Розв’язок. Проводимо лінію дії сили \vec{F} і опускаємо з точок A і C перпендикуляри на цю лінію. Як видно з рисунка, перпендикуляри h_A і h_C , які є плечем сили відносно точок A і C , мають однакову довжину:

$$h_A = AD \cos \alpha, h_C = BC \cos \alpha.$$

З трикутника CBD знаходимо

$$\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0,8.$$

Отже,

$$h_A = h_C = 3 \cdot 0,8 = 2,4 \text{ м},$$

так як $AD = BC = 3 \text{ м}$.

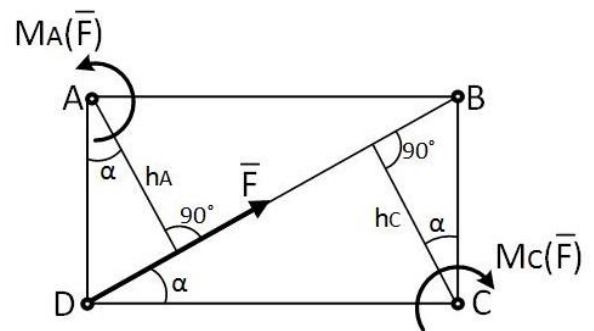


Рис. 3.4

Тоді $M_A(\vec{F}) = Fh_A = 100 \cdot 2,4 = 240 \text{ Нм},$

$$M_C(\vec{F}) = -Fh_C = -100 \cdot 2,4 = -240 \text{ Нм},$$

Момент сили \vec{F} відносно точки C від’ємний, оскільки сила намагається повернути прямокутник відносно цієї точки за рухом годинникової стрілки.

$$M_B(\vec{F}) = Fh_B = 0, \text{ так як } h_B = 0 \text{ (вектор } \vec{F} \text{ проходить через точку } B).$$

Відповідь: $M_A(\vec{F}) = 240 \text{ Нм}; M_C(\vec{F}) = -240 \text{ Нм}; M_B(\vec{F}) = 0.$

3.3 Момент сили відносно осі

Момент сили відносно осі – це скалярна величина, що чисельно дорівнює моменту проекції цієї сили на площину, перпендикулярну осі, відносно точки перетину осі з площиною.

Для визначення моменту сили \vec{F} відносно будь-якої осі (наприклад осі Oz , рис 3.5) необхідно спроектувати силу на площину, перпендикулярну до даної осі і визначити момент одержаної проекції F_{xy} відносно точки перетину осі з площиною (точки O).

$$M_z(\vec{F}) = \pm F_{xy}h \quad (3.3)$$

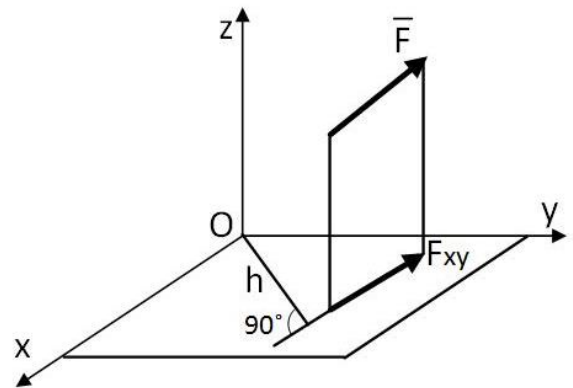


Рис. 3.5

Момент сили відносно осі вважається додатнім, якщо при спостереженні з додатного напрямку осі видно, що сила намагається повернути тіло проти руху годинникової стрілки, в протилежному – від’ємним.

Момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо:

1. проекція сили на площину перпендикулярну осі дорівнює нулю, тобто сила \vec{F} паралельна осі (рис. 3.6, а);
2. плече h дорівнює нулю, тобто лінія дії сили (проекції) перетинає вісь (рис. 3.6, б).

Отже, момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо сила і вісь лежать в одній площині.

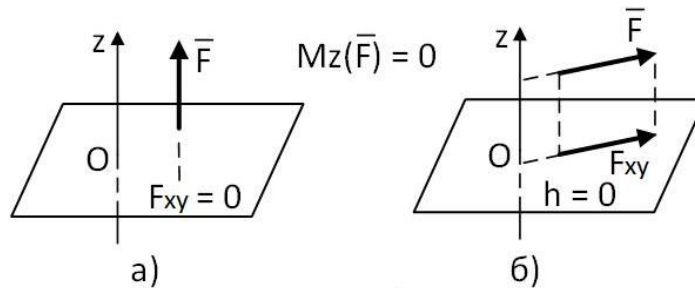


Рис. 3.6

3.4 Аналітичне визначення моменту сили відносно довільного центру

На практиці часто зустрічаються задачі, в яких потрібно визначити момент відносно певного центру для сили, заданої своїми проекціями на координатні осі і прикладеної в точці, положення якої задано координатами. Отримаємо відповідні формули. Для цього розглянемо декартовий простір з координатними осями Ox , Oy , Oz , яким відповідають орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Нехай в даному просторі в точці A з координатами (x, y, z) діє сила \vec{F} , проекції якої на координатні осі дорівнюють F_x, F_y, F_z (рис. 3.7). Момент цієї сили відносно початку системи координат O , згідно з формулою (3.1)

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}.$$

З векторної алгебри відомо, що кожний векторний добуток можна представити у вигляді визначника. В нашому випадку

$$\bar{M}_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

Розкривши визначник за елементами першого рядка, отримаємо

$$\bar{M}_O(\bar{F}) = (yF_z - zF_y)\bar{i} + (zF_x - xF_z)\bar{j} + (xF_y - yF_x)\bar{k} \quad (3.5)$$

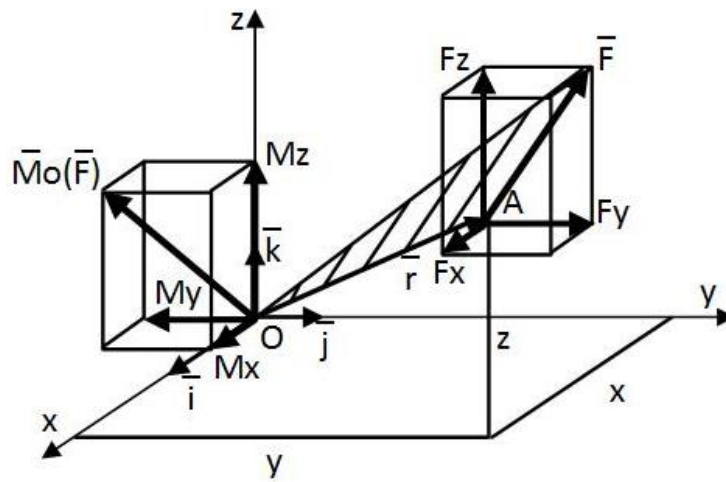


Рис. 3.7

Вектор $\bar{M}_O(\bar{F})$ можна розкласти вздовж осей координат

$$\bar{M}_O(\bar{F}) = M_x\bar{i} + M_y\bar{j} + M_z\bar{k} \quad (3.6)$$

Порівнюючи рівняння (3.5) і (3.6), отримаємо

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y; \\ M_y &= zF_x - xF_z; \\ M_z &= xF_y - yF_x. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Формули (3.7) є аналітичними виразами моменту сили \bar{F} відносно координатних осей. Як видно з рис. 3.7:

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}, \quad (3.8)$$

а напрям вектору моменту сили визначається косинусами направляючих кутів

$$\cos(\bar{M}_O, \bar{i}) = \frac{M_x}{M_O}; \quad \cos(\bar{M}_O, \bar{j}) = \frac{M_y}{M_O}; \quad \cos(\bar{M}_O, \bar{k}) = \frac{M_z}{M_O}. \quad (3.9)$$

Формули (3.7) визначають проекції на координатні осі вектору моменту сили відносно початку координат, але є в них і другий зміст. Вони визначають момент сили відносно координатних осей Ox , Oy , Oz .

3.5 Залежність між моментом сили відносно точки і моментом сили відносно осі

Знайдемо момент проекції сили \vec{F} на площину xOy – \vec{F}_{xy} (рис. 3.5) відносно точки O перетину площини і осі Oz за формулою (3.5), враховуючи, що координата точки прикладання сили \vec{F}_{xy} по осі Oz рівна нулю і проекція сили на вісь Oz також рівна нулю, тобто $z = 0$ і $F_z = 0$.

$$\vec{M}_O(\vec{F}_{xy}) = (y \cdot 0 - 0 \cdot F_y)\vec{i} + (0 \cdot F_x - x \cdot 0)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k},$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}_{xy}) = (xF_y - yF_x)\vec{k} = M_z(\vec{F}_{xy})\vec{k} = M_z(\vec{F})\vec{k}.$$

Момент сили \vec{F} відносно осі Oz рівний проекції вектору моменту сили \vec{F}_{xy} на вісь Oz , а також моменту сили \vec{F}_{xy} відносно точки O .

Момент сили відносно осі рівний проекції вектору моменту цієї сили відносно точки на вісь, яка проходить через цю точку.

Приклад 3.2 Знайти момент сили $F = 40$ Н, лінія дії якої направлена вздовж діагоналі куба, відносно осей координат і відносно початку системи координат O . Довжина сторони куба рівна 0,5 м (рис. 3.8).

Розв'язок.

1 спосіб.

Знайдемо координати точки A прикладання сили \vec{F} і її проекції на осі координат.

$$\cos\beta = \frac{OA}{AB} = \frac{0,707}{\sqrt{0,5^2 + 0,707^2}} = 0,866;$$

$$\sin\beta = 0,5$$

$$x_A = 0,5 \text{ м}, y_A = 0,5 \text{ м}, z_A = 0.$$

$$F_x = -F \cos\beta \cos 45^\circ = -24,5 \text{ Н},$$

$$F_y = -F \cos\beta \cos 45^\circ = -24,5 \text{ Н},$$

$$F_z = F \sin\beta = 20 \text{ Н}.$$

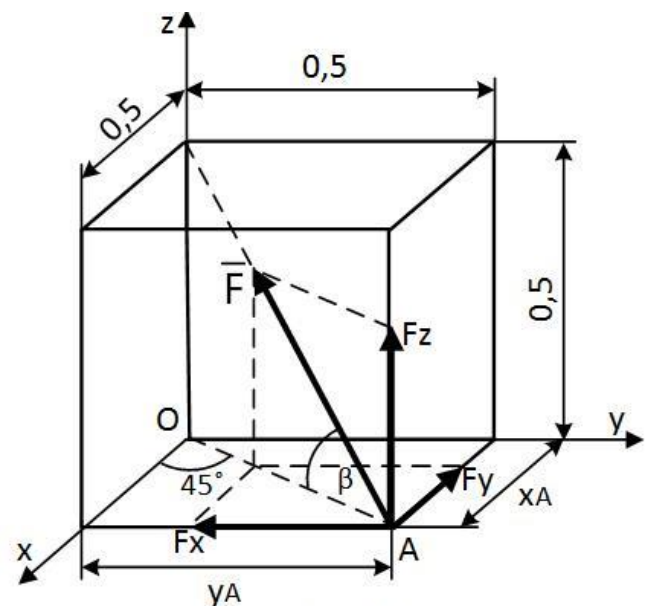


Рис. 3.8

За формулами (3.7) знайдемо моменти сили \vec{F} відносно осей координат:

$$\begin{aligned}M_x &= y_A F_z - z_A F_y = 0,5 \cdot 20 - 0 \cdot (-24,5) = 10 \text{ Нм}; \\M_y &= z_A F_x - x_A F_z = 0 \cdot (-24,5) - 0,5 \cdot 20 = -10 \text{ Нм}; \\M_z &= x_A F_y - y_A F_x = 0,5 \cdot (-24,5) - 0,5 \cdot (-24,5) = 0; \\M_O(\vec{F}) &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 14,14 \text{ Нм}.\end{aligned}$$

2 спосіб. Визначимо момент сили \vec{F} відносно осей координат, спроектувавши спочатку силу на площини, перпендикулярні осям Ox , Oy , Oz

$$\begin{aligned}F_{xy} &= F \cos \beta = 17,32 \text{ Н}, \quad \vec{F}_{xy} \perp Oz, \\F_{zy} &= F \sin \beta = 20 \text{ Н}, \quad \vec{F}_{zy} \perp Oy, \quad \vec{F}_{zy} \perp Ox.\end{aligned}$$

Тоді, за визначенням моменту сили відносно осі

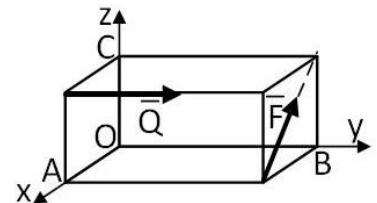
$$\begin{aligned}M_x &= 0,5 \cdot F_{zy} = 10 \text{ Нм}; \\M_y &= -0,5 \cdot F_{zy} = -10 \text{ Нм}; \\M_z &= 0 \cdot F_{xy} = 0,\end{aligned}$$

так як \vec{F}_{xy} перетинає вісь Oz , то момент сили \vec{F} відносно осі Oz рівний нулю).

Відповідь: $M_x = 10 \text{ Нм}$; $M_y = -10 \text{ Нм}$; $M_z = 0$. Результати, одержані двома способами, співпадають.

3.6 Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте визначення алгебраїчного моменту сили відносно центру.
2. Як знайти плече сили відносно центру?
3. Які властивості моменту сили відносно центру?
4. В якому випадку момент сили вважають додатнім, а в якому від'ємним?
5. Сформулюйте визначення векторного моменту сили відносно центру?
6. Як направлений вектор моменту сили відносно центру?
7. Як знайти моменти сили відносно осей, якщо відомі проєкції сили на осі координат і координати точки прикладання сили?
8. Сформулюйте визначення моменту сили відносно осі.
9. У яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
10. Яка залежність між моментом сили відносно точки і моментом сили відносно осі?
11. Визначте моменти сил \vec{F} і \vec{Q} відносно координатних осей, якщо $F = 20 \text{ кН}$, $Q = 50 \text{ кН}$, $OA = 0,4 \text{ м}$, $OB = 0,6 \text{ м}$, $OC = 0,3 \text{ м}$.



ЛЕКЦІЯ 4. ТЕОРІЯ ПАР СИЛ. ПАРА СИЛ

4.1 Пара сил. Момент пари сил

Парою сил називають систему двох рівних за модулем, паралельних і протилежно направлених сил, що діють на тверде тіло (рис. 4.1).

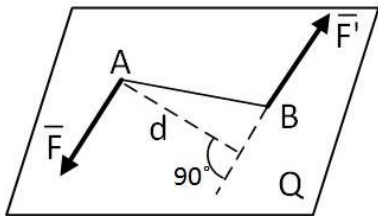


Рис. 4.1

Основними характеристиками пари сил є:

1. Площина дії пари сил – це площина, в якій знаходиться пара сил (на рис. 4.1 – площина Q).
2. Плече пари сил (d) – це найкоротша відстань між лініями дії сил пари. Для визначення плеча необхідно з будь-якої точки на лінії дії однієї сили пари опустити перпендикуляр на лінію дії другої сили.
3. Момент пари сил – це вектор, який геометрично рівний моменту однієї сили пари відносно точки прикладання другої сили.

$$\vec{M} = \vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{AB} \times \vec{F} \quad (4.1)$$

З даного визначення випливає, що вектор моменту пари сил перпендикулярний до площини дії пари і направлений в бік, звідки видно, що обертання тіла парою сил відбувається проти руху годинникової стрілки (рис. 4.2).

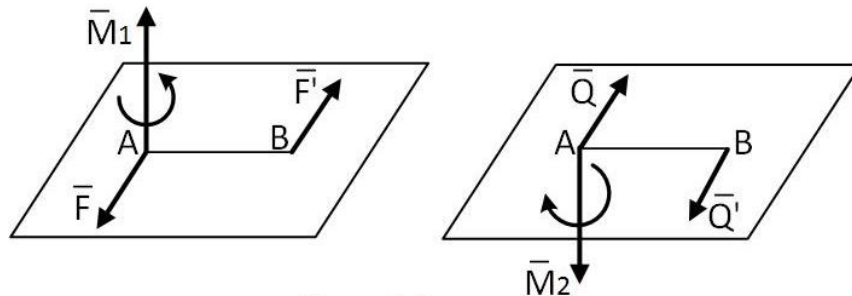


Рис. 4.2

Чисельно момент пари сил відносно будь-якої точки дорівнює добутку модуля однієї з сил пари на її плече

$$M = \pm Fd$$

Момент пари сил вважається додатнім, коли пара сил намагається повернути тіло в площині її дії проти руху годинникової стрілки і від'ємним – коли за рухом годинникової стрілки (рис. 4.3)

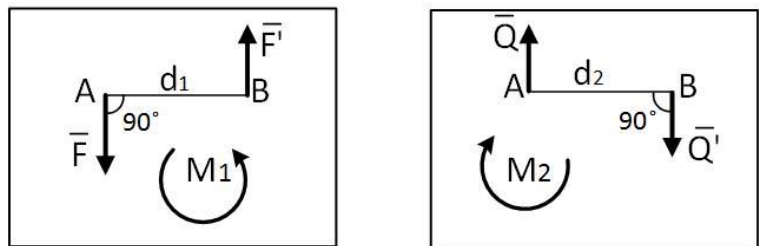


Рис. 4.3

$$M_1 = Fd_1; \quad M_2 = -Qd_2. \quad (4.2)$$

Приклад 4.1 Сили (\vec{F}, \vec{F}') рівні 30 Н , утворюють пару з плечем $0,5\text{ м}$. Знайти момент пари сил відносно точки O , якщо $OB = 1,5\text{ м}$ (рис. 4.4).

Розв'язок. Знайдемо модуль моменту пари сил

$$M(\vec{F}, \vec{F}') = 30 \cdot 0,5 = 15\text{ Нм}.$$

Знак моменту додатній, так як пара сил намагається повертати тіло проти руху годинникової стрілки.

Визначимо момент сил \vec{F} і \vec{F}' відносно центра O :

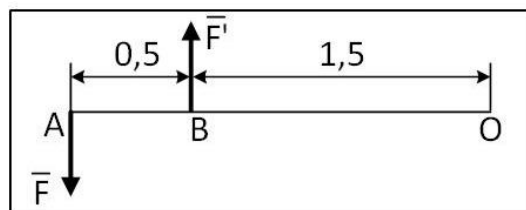


Рис. 4.4

$$M_O(\vec{F}) = F \cdot OA = 30(0,5 + 1,5) = 60\text{ Нм},$$

$$M_O(\vec{F}') = -F' \cdot BO = -30 \cdot 1,5 = -45\text{ Нм},$$

$$M_O(\vec{F}, \vec{F}') = M_O(\vec{F}) + M_O(\vec{F}') = 60 - 45 = 15\text{ Нм},$$

$$M_O(\vec{F}, \vec{F}') = M(\vec{F}, \vec{F}') = 15\text{ Нм},$$

$$M_A(\vec{F}, \vec{F}') = F \cdot AB = 15\text{ Нм},$$

$$M_B(\vec{F}, \vec{F}') = F \cdot AB = 15\text{ Нм}.$$

Відповідь: Момент пари сил (\vec{F}, \vec{F}') відносно точки O : $M(\vec{F}, \vec{F}') = 15\text{ Нм}$.

Момент пари сил не залежить від положення центру моменту, відносно якого обчислюється момент сил.

4.2 Теорема про еквівалентність пар сил

Пари сил, які лежать в одній площині, еквівалентні, якщо їх моменти чисельно рівні і однакові за напрямом.

Необхідною і достатньою умовою еквівалентності двох пар сил з моментами \vec{M}_1 і \vec{M}_2 є:

$$\vec{M}_1 = \vec{M}_2.$$

З теореми про еквівалентність пар сил випливає, що дія пари сил на тверде тіло не зміниться, якщо

- пару сил перенести у будь-яке місце у площині дії, включаючи і її поворот на будь-який кут (рис. 4.5, а);
- пару сил перенести у будь-яку площину, паралельну площині її дії (рис. 4.5, б);
- змінити плече пари одночасно змінюючи модулі її сил, так, щоб незмінним зберігався момент пари сил, $(\vec{F}_1, \vec{F}'_1) \sim (\vec{F}_2, \vec{F}'_2) \rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}$ (рис. 4.5, в).

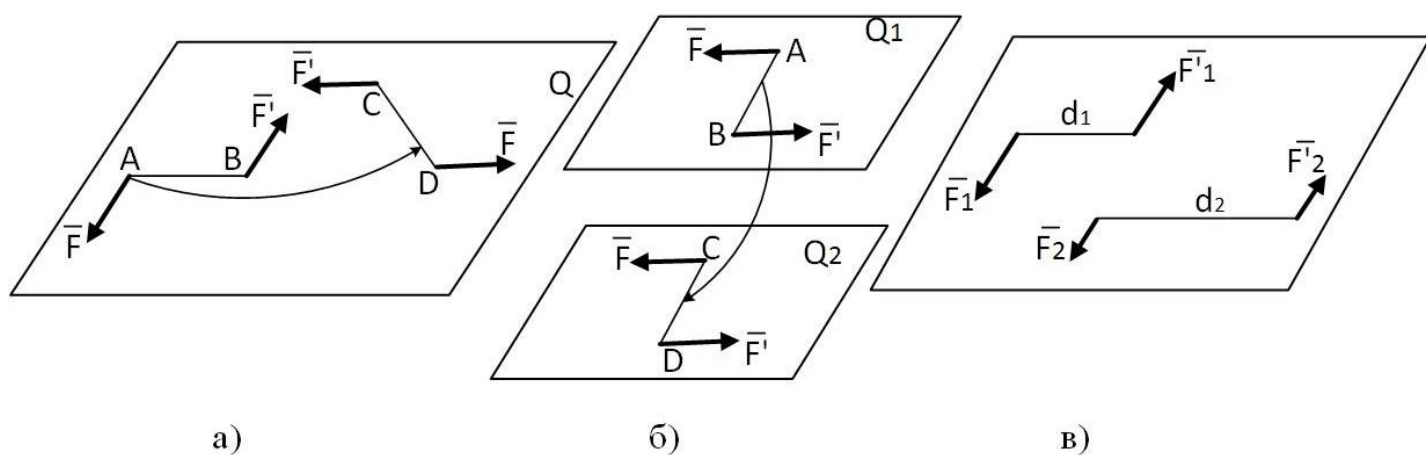


Рис. 4.5

Отже, основна характеристика пари сил, міра її механічної дії – момент пари сил.

4.3 Теорема про додавання пар сил

Система пар, діючих на абсолютно тверде тіло, еквівалентна одній парі з моментом, рівним геометричній сумі моментів пар, які додаються.

Розглянемо спочатку дві пари з моментами \bar{M}_1 і \bar{M}_2 , лежать в площинах I і II (рис. 4.6). Візьмемо на лінії перетину площин відрізок $AB = d$ і зобразимо пару з моментом \bar{M}_1 силами \bar{F}_1, \bar{F}'_1 , а пару з моментом \bar{M}_2 – силами \bar{F}_2, \bar{F}'_2 , (при цьому, звичайно, $F_1 d = M_1, F_2 d = M_2$).

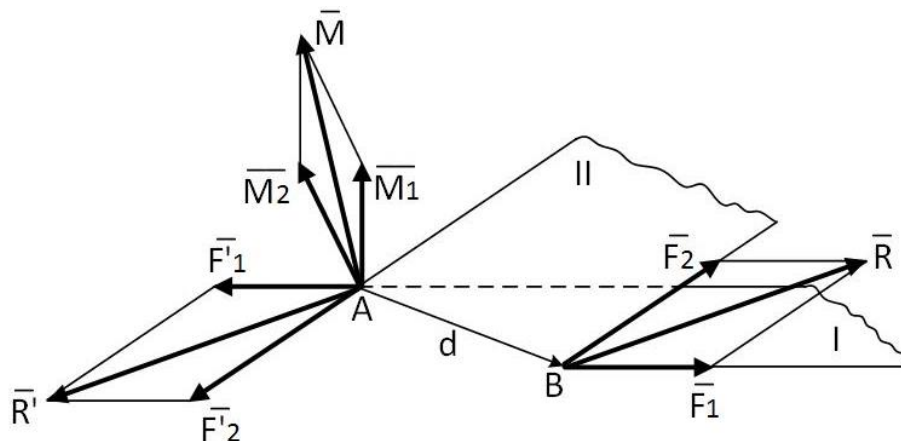


Рис. 4.6

Додавши сили, прикладені в точках A і B, переконуємося, що пари (\bar{F}_1, \bar{F}'_1) і (\bar{F}_2, \bar{F}'_2) , дійсно еквівалентні одній парі (\bar{R}, \bar{R}') ; знайдемо момент \bar{M} цієї пари. Так як

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2, \text{ то } \overline{AB} \times \bar{R} = \overline{AB} \times \bar{F}_1 + \overline{AB} \times \bar{F}_2$$

або згідно рівняння (4.1)

$$\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2.$$

Для двох пар теорема доведена; при цьому очевидно, що доведення буде справедливим і у випадку, коли площини I і II зливаються (пари лежать в одній площині).

Якщо на тіло діє система n пар сил з моментами $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$, то послідовно застосовуючи результат, одержаний для двох пар, знайдемо, що дана система пар буде дійсно еквівалентна одній парі з моментом

$$\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n = \sum_{k=1}^n \bar{M}_k \quad (4.3)$$

Якщо пари сил лежать в одній площині, то векторна сума буде рівна алгебраїчній:

$$M = \sum_{k=1}^n M_k.$$

Приклад 4.2 Визначити модуль моменту еквівалентної пари сил, якщо відомі пари сил з моментами: $M_1 = 12 \text{ Нм}$; $M_2 = 16 \text{ Нм}$; $M_3 = 4 \text{ Нм}$. Напрямок моментів показано на рис. 4.7.

Розв'язок. В площині A zOy діють два моменти, направлені протилежно. Знаходимо їх суму:

$$M_A = M_3 - M_2 = 4 - 16 = -12 \text{ Нм}.$$

Додаємо моменти, діючі в перпендикулярних площинах A zOy і B zOx і знаходимо момент еквівалентної пари:

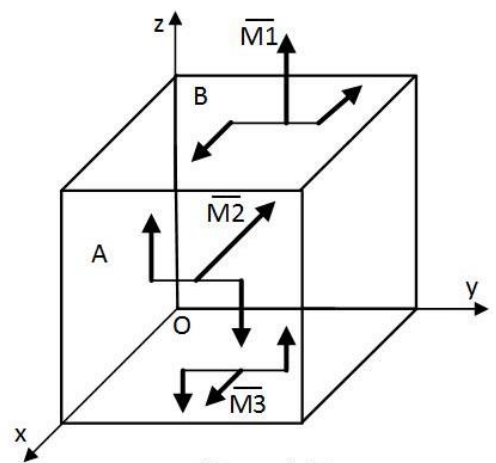


Рис. 4.7

$$M_{A-B} = \sqrt{M_1^2 + M_A^2} = \sqrt{12^2 + (-12)^2} = 12\sqrt{2} \text{ Нм}.$$

Відповідь: Модуль моменту еквівалентної пари сил $12\sqrt{2} \text{ Нм}$.

4.4 Умови рівноваги пар

Для рівноваги пар сил, діючих на тверде тіло, необхідно і достатньо, щоб момент еквівалентної (результуючої) пари був рівний нулю:

$$\bar{M} = \sum_{k=1}^n \bar{M}_k = 0 \quad (4.4)$$

Спроектуювши рівняння (4.4) на осі декартової системи координат, одержимо три скалярних вирази:

$$M_x = \sum_{k=1}^n M_{kx} = 0;$$

$$M_y = \sum_{k=1}^n M_{ky} = 0; \quad (4.5)$$

$$M_z = \sum_{k=1}^n M_{kz} = 0.$$

Для врівноваження системи пар необхідно прикласти зрівноважуючу пару, тобто пару сил можна врівноважити іншою парою сил з рівним за модулем і протилежним за напрямком моментом.

Пару сил неможливо врівноважити однією силою, або будь-якою системою сил, крім пари сил.

Приклад 4.3 Знайти результуючу пару, яка врівноважила б дві пари сил з моментами $M_1 = 14 \text{ Нм}$; $M_2 = 40 \text{ Нм}$, прикладеними до балки AB довжиною 2 м (рис. 4.8).

Розв'язок. Розглянемо двох опорну балку, яка утримується в точці A нерухомим шарніром, а в точці B має шарнірно-рухому опору. Використовуючи принцип звільнення від в'язей, замінюємо дію опор на балку реакціями X_A, Y_A і R_B . Вектор реакції \bar{R}_B направлений перпендикулярно до опорної поверхні, а вектор реакції \bar{R}_A (представлений на рис. 4.8 двома складовими X_A, Y_A) має бути паралельним \bar{R}_B , так як реакції опор повинні утворювати еквівалентну результуючу пару (отже, $X_A = 0$).

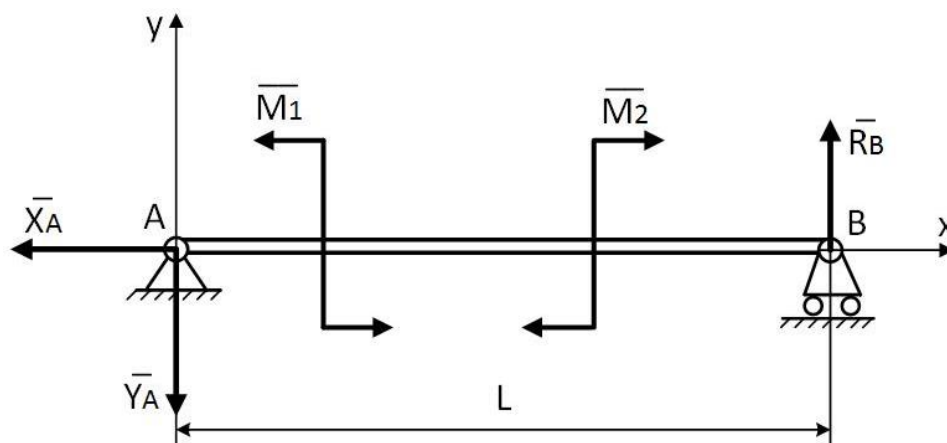


Рис. 4.8

Виходячи з умов рівноваги пар сил:

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; \sum_{k=1}^n M_B(\bar{F}_k) = 0,$$

$$M_1 - M_2 + M(\bar{R}_A, \bar{R}_B) = 0, \text{ звідки}$$

$$M(\bar{R}_A, \bar{R}_B) = M_2 - M_1 = 40 - 14 = 26 \text{ Нм}.$$

Так як задана довжина балки, то можна знайти сили, які утворюють результуючу пару:

$$\sum_{k=1}^n M_B(\bar{F}_k) = 0; M_1 - M_2 + R_A \cdot l = 0;$$

$$R_A = \frac{M_2 - M_1}{l} = 13 \text{ Н}.$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; M_1 - M_2 + R_B \cdot l = 0;$$

$$R_B = \frac{M_2 - M_1}{l} = 13 \text{ Н.}$$

$$R_A = R_B = \frac{M(\bar{R}_A, \bar{R}_B)}{AB} = 13 \text{ Н. } \bar{R}_A = -\bar{R}_B, \text{ тобто маємо пару сил.}$$

Отже, сили реакцій утворюють пару сил, яка зрівноважує діючі на балку пари сил. $\bar{M}_1 + \bar{M}_2 = \bar{M}_\Sigma$, тобто пари сил можна зрівноважити тільки парою сил.

$$M_\Sigma = (-M(\bar{R}_A, \bar{R}_B)); \quad \bar{M}_\Sigma + \bar{M}(\bar{R}_A, \bar{R}_B) = 0.$$

Відповідь: $M(\bar{R}_A, \bar{R}_B) = 26 \text{ Нм}$. Величина результуючого моменту має знак плюс. Це означає, що напрямок реакцій в точках A і B вибрано вірно.

4.5 Питання для самоконтролю

1. Що називається парою сил?
2. Який напрям має вектор моменту пари сил?
3. Чи можна пару сил замінити рівнодієюю?
4. Запишіть формулу яка чисельно визначає момент пари сил відносно деякої точки.
5. Як визначити плече пари сил?
6. Чому пара сил не має рівнодієюю?
7. Які пари сил називаються еквівалентними?
8. Сформулюйте властивості пар сил.
9. Сформулюйте теорему про додавання пар сил.
10. До якого канонічного виду зводиться система пар сил?
11. Сформулюйте необхідну і достатню умову рівноваги системи пар сил.
12. Запишіть умови рівноваги системи пар сил.
13. Як можна зрівноважити пару сил?
14. Чому момент сили відносно центра, або момент пари сил не змінюється при переміщенні сили вздовж лінії її дії?
15. Що є мірою механічної дії пари сил на тверде тіло?

ЛЕКЦІЯ 5. ДОВІЛЬНА ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ

5.1 Теорема про паралельне перенесення сили

Силу, прикладену до твердого тіла в деякій його точці, можна, не порушуючи її дії на тверде тіло, перенести в будь-яку точку тіла паралельно самій собі, додаючи при цьому пару сил з моментом, рівним моменту заданої сили відносно точки переносу.

Для доведення теореми розглянемо силу \vec{F} , прикладену в точці A твердого тіла (рис. 5.1, а). Дія цієї сили на тіло не зміниться, якщо в будь-якій точці B тіла прикласти дві врівноважені сили \vec{F}' і \vec{F}'' , такі, що $\vec{F}' = \vec{F}$, $\vec{F}'' = -\vec{F}$. Отримана система трьох сил і являє собою силу \vec{F}' рівну \vec{F} , але прикладену в точці B , і пару (\vec{F}, \vec{F}'') з моментом

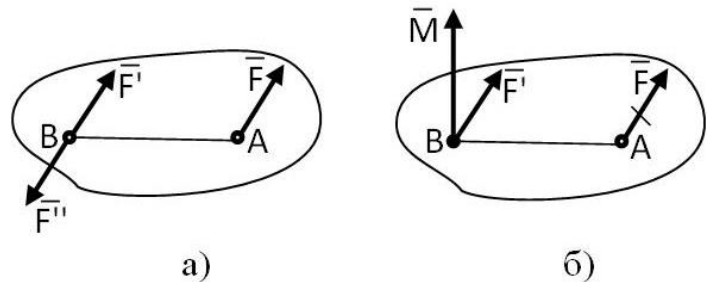


Рис. 5.1

собою силу \vec{F}' рівну \vec{F} , але прикладену в точці B , і пару (\vec{F}, \vec{F}'') з моментом

$$\bar{M} = \bar{M}_B(\vec{F}) \quad (5.1)$$

Таким чином теорема доведена. Результат, доведений теоремою, можна представити так, як це показано на рис. 5.1, б (силу \vec{F} на цьому рисунку потрібно вважати відкинутою).

5.2 Теорема про зведення довільної системи сил до даного центру

Розглянемо задачу про приведення довільної системи сил до даного центра, тобто про заміну даної системи сил іншою, їй еквівалентною, але значно простішою, а саме утвореної, як буде доведено, тільки з однієї сили і пари.

Нехай на тверде тіло діє довільна система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ (рис. 5.2, а). Виберемо яку-небудь точку O за центр приведення і, користуючись теоремою про паралельне перенесення сили, перенесемо всі сили в центр O , приєднуючи при цьому відповідні пари (рис. 5.2, а). Тоді на тіло буде діяти система сил

$$\vec{F}'_1 = \vec{F}_1, \vec{F}'_2 = \vec{F}_2, \dots, \vec{F}'_n = \vec{F}_n, \quad (5.2)$$

прикладених в центрі O і система пар, моменти яких згідно рівняння (5.1) рівні:

$$\bar{M}_1 = \bar{M}_O(\vec{F}_1), \bar{M}_2 = \bar{M}_O(\vec{F}_2), \dots, \bar{M}_n = \bar{M}_O(\vec{F}_n). \quad (5.3)$$

Збіжні сили, прикладені в точці O , замінюються однією силою \vec{R} , прикладеною в точці O . При цьому $\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}'_k$ або, згідно рівнянням (5.2),

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (5.4)$$

Щоб додати всі отримані пари, потрібно додати вектори моментів цих пар. В результаті система пар буде замінена одною парою, момент якої

$$\bar{M}_O = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k). \quad (5.5)$$

Вектор \bar{R} рівний геометричній сумі усіх сил, називається *головним вектором системи сил*.

Вектор \bar{M}_O , рівний геометричній сумі моментів всіх сил відносно центра O , називається *головним моментом системи сил* відносно цього центра (рис. 5.2, б).

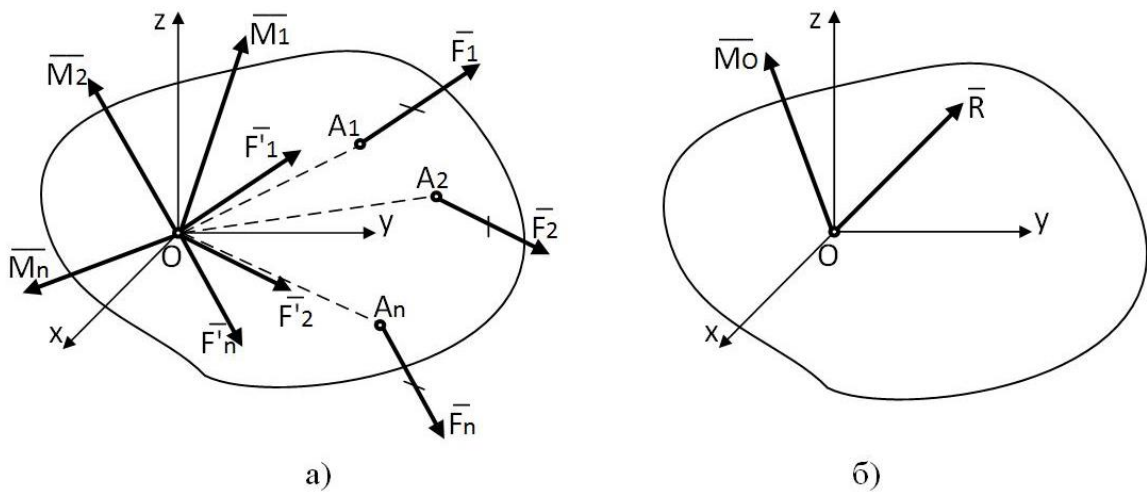


Рис. 5.2

Таким чином доведена теорема про приведення системи сил:

будь-яка система сил, діюча на абсолютно тверде тіло, при приведенні до довільно вибраного центра O замінюється одною силою \bar{R} , рівною головному вектору системи сил і прикладеною в центрі приведення O , та одною парою з моментом \bar{M}_O , рівним головному моменту системи сил відносно центра O .

Відмітимо, що сила \bar{R} не є рівнодібною даної системи сил, так як замінює систему сил не одна, а разом з парою сил.

З доведеної теореми слідує, що *дві системи сил, які мають однакові головні вектори і головні моменти відносно одного і того ж центра, еквівалентні.*

5.3 Умови рівноваги системи сил

Для рівноваги будь-якої системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор цієї системи і її головний момент відносно будь-якого центра дорівнювали нулю, тобто, щоб виконувались умови:

$$\bar{R} = 0, \quad \bar{M}_O = 0 \quad (5.6)$$

де O – будь-який центр.

Умови (5.6) є необхідними, так як якщо якась з них не виконується, то система діючих на тіло сил приводиться або до рівнодіючої (коли $\bar{R} \neq 0$), або до пари сил (коли $\bar{M}_O \neq 0$) і, отже, не буде врівноваженою. Одночасно умови (5.6) є і достатніми, тому що при $\bar{R} = 0$ система сил може приводитись тільки до пари з моментом \bar{M}_O , а так як $\bar{M}_O = 0$, то має місце стан рівноваги.

5.4 Теорема Варіньона про момент рівнодіючої

Якщо дана система сил має рівнодійну, то момент рівнодійної відносно будь-якого центра O дорівнює геометричній сумі моментів всіх сил системи відносно того ж центра O .

Розглянемо систему сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$, яка приводиться до рівнодійної \bar{R} , лінія дії якої проходить через деяку точку A (рис.5.3).

Прикладемо в цій точці силу $\bar{R}'_k = -\bar{R}$. Тоді система сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n, \bar{R}'_k$ перебуватиме в рівновазі і для неї має виконуватись умова $M_O = 0$, тобто згідно рівняння (5.5) для даних сил (включаючи силу \bar{R}'_k) повинно бути $\sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k) + \bar{M}_O(\bar{R}'_k) = 0$. Але так як $\bar{R}'_k = -\bar{R}$ і обидві сили направлені вздовж однієї прямої, то $\bar{M}_O(\bar{R}'_k) = -\bar{M}_O(\bar{R})$. Підставляючи це значення $\bar{M}_O(\bar{R}'_k)$ в попереднє рівняння, знайдемо з нього, що

$$\bar{M}_O(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k) \quad (5.7)$$

Дану теорему зручно використовувати при обчисленні моментів сил.

Приклад 5.1 Система сил зведена до рівнодіючої. Знайти момент рівнодіючої $R_A = 100 \text{ Н}$ відносно початку системи координат, якщо $x_A = 0,15 \text{ м}$, $y_A = 0,12 \text{ м}$ (рис. 5.4).

Розв'язок. Знайдемо проекції рівнодіючої на осі координат:

$$R_{Ax} = R_A \cos 30^\circ = 100 \cdot 0,866 = 86,6 \text{ Н},$$

$$R_{Ay} = R_A \cos 60^\circ = 100 \cdot 0,5 = 50 \text{ Н}.$$

Застосуємо теорему Варіньона для визначення моменту \bar{R}_A :

$$M_O(\bar{R}_A) = M_O(\bar{R}_{Ax}) + M_O(\bar{R}_{Ay}) = y_A \cdot R_A \cos 30^\circ + x_A \cdot R_A \cos 60^\circ = 18,4 \text{ Нм}.$$

Відповідь: момент рівнодіючої відносно початку системи координат $M_O(\bar{R}_A) = 18,4 \text{ Нм}$.

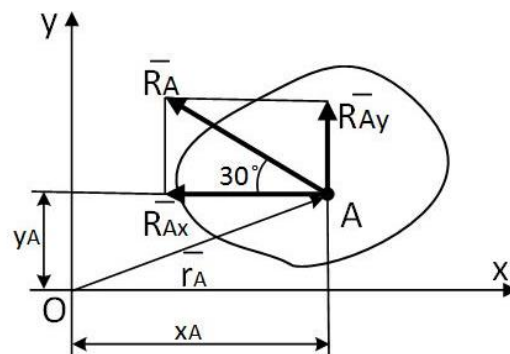


Рис. 5.4

5.5 Умови рівноваги довільної плоскої системи сил

Розглянемо систему сил лінії дії яких довільно розташовані в одній площині (рис. 5.5). Така плоска система сил приводиться до сили, рівної \bar{R} і прикладеної в довільному центрі O , і пари з моментом \bar{M}_O , значення яких визначаються рівняннями $\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$, а $\bar{M}_O = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k)$.

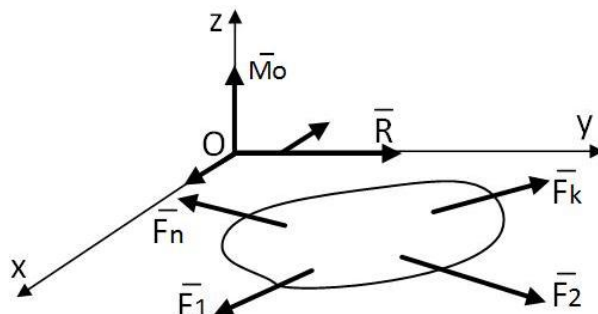


Рис. 5.5

Так як сили діють в площині Oxy , то аналітично вектор \bar{R} можна визначити за формулами (2.6), а векторна сума моментів сил відносно довільного центра рівна алгебраїчній. Отже, для плоскої системи сил

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}; R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}, R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}, M_O = \sum_{k=1}^n M_O(\bar{F}_k) \quad (5.8)$$

Для рівноваги будь-якої системи сил необхідно і достатньо, щоб $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_O = 0$, а з рівнянь (5.8) слідує, що для плоскої довільної системи сил ці рівняння виконуватимуться, коли діючі сили задовольняють умовам:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \sum_{k=1}^n M_O(\bar{F}_k) = 0 \quad (5.9)$$

для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проєкцій всіх сил на кожну з двох координатних осей і сума їх моментів відносно будь-якого центра дорівнювали нулю.

Умови рівноваги, виражені рівняннями (5.9), називають *основною формою умов рівноваги*, так як вони не накладають ніяких обмежень на вибір системи координат та центру моменту сил.

Друга форма умов рівноваги: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів всіх сил відносно будь-яких двох центрів A і B та сума їх проєкцій на вісь O , не перпендикулярну прямій AB , дорівнювали нулю:

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; \sum_{k=1}^n M_B(\bar{F}_k) = 0; \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad (5.10)$$

Необхідність цих умов очевидна, так як якщо будь-яка з них не виконується,

то або $\bar{R} \neq 0$, або $M_A \neq 0$ ($M_B \neq 0$) і рівноваги не буде. Доведемо їх достатність. Якщо для даної системи сил виконуються лише перші дві з умов (5.10), то для неї $M_A = 0$ і $M_B = 0$. Така система сил може не знаходитись в рівновазі, а мати рівнодійну \bar{R} , яка одночасно проходить через точки A і B (рис. 5.6). Але згідно третьої умови має бути $R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0$. Так як вісь Ox проведена не перпендикулярно до AB , то остання умова може бути виконана, лише коли $\bar{R} = 0$, тобто коли має місце рівновага.

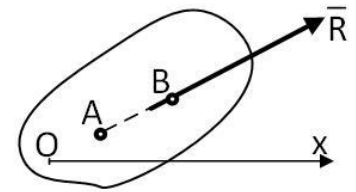


Рис. 5.6

Третя форма умов рівноваги (рівняння трьох моментів): для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів всіх сил дорівнювали нулю:

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; \sum_{k=1}^n M_B(\bar{F}_k) = 0; \sum_{k=1}^n M_C(\bar{F}_k) = 0 \quad (5.11)$$

Необхідність цих умов, як і в попередньому випадку, очевидна. Достатність умов (5.11) слідує з того, що якщо при одночасному виконанні цих умов дана система сил не була б врівноваженою, то вона мала б приводитись до рівнодійної, яка одночасно проходить через точки A , B і C , що неможливо, так як ці точки не лежать на одній прямій. Отже, при виконанні умов (5.11) має місце рівновага.

В усіх розглянутих випадках для плоскої довільної системи сил отримуємо три рівняння рівноваги.

5.6 Умови рівноваги плоскої системи паралельних сил

У випадку, коли всі діючі на тіло сили паралельні одна одній, можна направити вісь Ox перпендикулярно силам, в вісь Oy паралельно їм (рис. 5.7). Тоді проекція кожної сили на вісь Ox дорівнюватиме нулю і перше з рівнянь (5.9) перетвориться в тотожність нулю ($0 \equiv 0$). В результаті для паралельних сил залишиться дві умови рівноваги:

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \sum_{k=1}^n M_O(\bar{F}_k) = 0, \quad (5.12)$$

де вісь Oy паралельна силам.

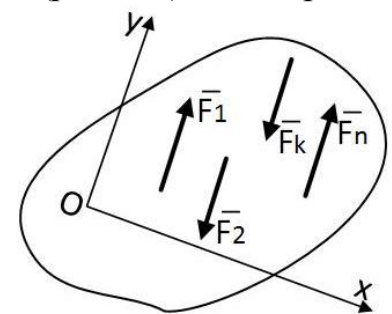


Рис. 5.7

Друга форма умов рівноваги для паралельних сил, отримана з рівнянь (5.10), має вигляд:

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; \sum_{k=1}^n M_B(\bar{F}_k) = 0 \quad (5.13)$$

При цьому точки A і B не повинні лежати на прямій паралельній силам.

5.7 Розв'язок задач статички

Починаючи розв'язок будь-якої задачі, потрібно насамперед встановити, *рівновагу якого тіла (чи яких тіл) треба розглянути, щоб знайти шукані величини.* Процес розв'язку зводиться до наступних дій.

1. *Вибір тіла (чи тіл), рівновагу якого потрібно розглянути.* Для розв'язку задачі треба розглянути рівновагу тіла, до якого прикладені задані та шукані сили або сили, рівні шуканим (наприклад, якщо потрібно знайти тиск на опору, то можна розглянути рівновагу тіла, до якого прикладена чисельно рівна цій силі реакція опори і т. п.).

Якщо задані сили діють на одне тіло, а шукані на інше або коли ті і другі сили діють одночасно на кілька тіл, може виявитись необхідним розглянути рівновагу системи цих тіл або послідовно рівновагу кожного тіла окремо.

2. *Зображення діючих сил.* Встановивши, рівновагу якого тіла або тіл розглядаємо (і тільки після цього), потрібно на рисунку зобразити усі діючі на це тіло (або тіла) зовнішні сили.

3. *Використання принципу звільнення від в'язей.* В'язі, утримуючі тіло, потрібно відкинути і замінити їх дію відповідними реакціями, прикладеними до даного тіла.

4. *Складання рівнянь рівноваги.* Умови рівноваги складають для сил, діючих на тіло (або тіла), рівновага якого розглядається. Умови рівноваги вибираються залежно до діючої на тіло системи сил.

5. *Визначення шуканих величин, перевірка правильності розв'язку і дослідження отриманих результатів.* Важливе значення при розв'язку має чіткий рисунок (це допомагає швидше знайти вірний шлях розв'язку і уникнути помилок при складанні рівнянь рівноваги) і послідовне проведення усіх розрахунків.

Всі обчислення при розв'язку задач рекомендується, як правило, проводити в загальному вигляді (алгебраїчно). Тоді для шуканих величин отримуємо формули, які дають можливість аналізувати отримані результати. Крім того, розв'язок в загальному вигляді дозволяє інколи знайти помилки шляхом перевірки розмірності (розмірність кожного з доданків в обох частинах рівняння мають бути однакові). Числові значення, якщо розв'язок проводиться в загальному вигляді, підставляються в остаточні результати.

Розглянемо приклади розв'язку задач на рівновагу тіл під дією плоскої довільної системи сил.

Приклад 5.2 Визначити реакції в'язей в точках A і B зображеної на рис. 5.8 балки, якщо на неї діє рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю $q = 2 \text{ кН/м}$ і пара сил з моментом 14 кНм .

Розв'язок: Розглянемо рівновагу балки AB під дією пари сил з моментом M , розподіленого навантаження (яке замінюємо рівнодійною \bar{R}_q , прикладеною посередині навантаженої ділянки,) і реакцій в'язей. В точці A – нерухомий шарнір реакцію якого при розв'язуванні задач представляємо двома складовими \bar{X}_A і \bar{Y}_A , але так як все навантаження вертикальне, то $\bar{X}_A = 0$ і реакція шарніра A матиме

лише одну вертикальну складову – \bar{Y}_A . В точці B – рухомий шарнір, реакція \bar{R}_B якої направлена перпендикулярно до опорної поверхні. Отже, на балку діє плоска система паралельних сил для якої складаємо відповідні рівняння рівноваги:

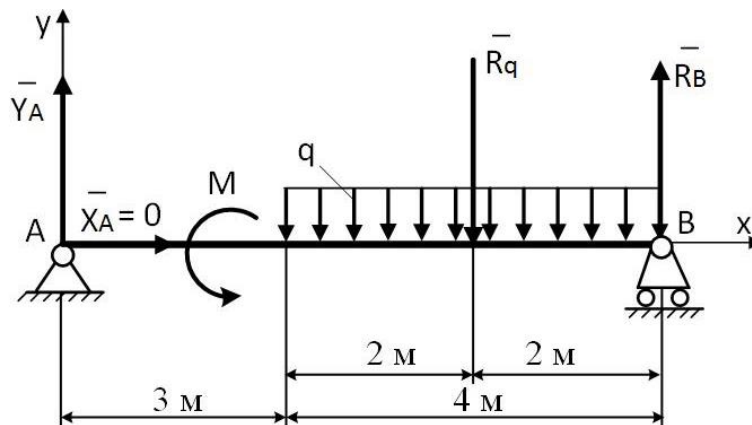


Рис. 5.8

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; R_B \cdot 7 + M - R_q \cdot 5 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_B(\bar{F}_k) = 0; -Y_A \cdot 7 + M + R_q \cdot 2 = 0.$$

Враховуючи, що модуль рівнодійної розподіленого навантаження $R_q = q \cdot 4 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ kH}$, розв'язуємо рівняння відносно невідомих:

$$R_B = \frac{-M + R_q \cdot 5}{7} = \frac{-14 + 8 \cdot 5}{7} = 3,71 \text{ kH};$$

$$Y_A = \frac{M + R_q \cdot 2}{7} = \frac{14 + 8 \cdot 2}{7} = 4,29 \text{ kH}.$$

Виконуємо перевірку отриманих результатів. Для цього записуємо додаткове рівняння рівноваги і підставляємо в нього знайдені значення реакцій.

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; Y_A - R_q + R_B = 0;$$

$$4,29 - 8 + 3,71 = 8 - 8 = 0.$$

Відповідь: $Y_A = 4,29 \text{ kH}$, $R_B = 3,71 \text{ kH}$. Додатні знаки показують, що напрям реакцій відповідає показаному на рис. 5.8.

Приклад 5.3 Визначити реакції в'язей кутника на який діють сила $F = 10 \text{ H}$, пара сил з моментом $M = 7 \text{ kHm}$ та розподілене навантаження інтенсивністю $q = 3 \text{ kH/m}$ (рис. 5.9).

Розв'язок: Розглянемо рівновагу кутника під дією сили \bar{F} , пари сил з моментом M , розподіленого навантаження (яке замінюємо рівнодійною \bar{R}_q ,

прикладеною посередині навантаженої ділянки,) і реакцій в'язей. В точці A – нерухомий шарнір реакцію якого при розв'язуванні задач представляємо двома складовими \bar{X}_A і \bar{Y}_A . В точці B – вертикальний стержень з шарнірами на кінцях реакція \bar{R}_B якого направлена вздовж лінії, що проходить через шарніри стержня. Отже, на балку діє плоска довільна система сил для якої вибираємо відповідні умови рівноваги. Так як балка має дві опори в точках A і B , то вибираємо другу форму умов рівноваги для плоскої довільної системи сил. За центри моментів сил приймаємо точки опор A і B , це дозволить отримати в кожному з рівнянь моментів сил по одній невідомій.

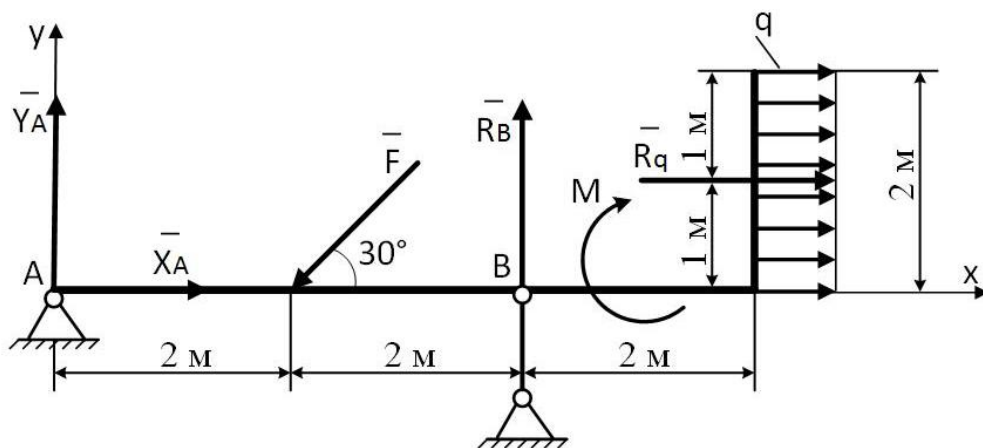


Рис. 5.9

Складаємо рівняння рівноваги кутника:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; X_A - F \cos 30^\circ + R_q = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; -F \cos 60^\circ \cdot 2 + R_B \cdot 4 - M - Rq \cdot 1 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_B(\bar{F}_k) = 0; -Y_A \cdot 4 + F \cos 60^\circ \cdot 2 - M - Rq \cdot 1 = 0.$$

Знаходимо модуль рівнодійної розподіленого навантаження $R_q = q \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6 \text{ kH}$ і розв'язуємо рівняння відносно невідомих:

$$X_A = F \cos 30^\circ - R_q = 10 \cdot 0,866 - 6 = 2,66 \text{ kH};$$

$$R_B = \frac{F \cos 60^\circ \cdot 2 + M + R_q \cdot 1}{4} = \frac{10 \cdot 0,5 \cdot 2 + 7 + 6 \cdot 1}{4} = 5,75 \text{ kH};$$

$$Y_A = \frac{F \cos 60^\circ \cdot 2 - M - R_q \cdot 1}{4} = \frac{10 \cdot 0,5 \cdot 2 - 7 - 6 \cdot 1}{4} = -0,75 \text{ kH}.$$

Виконуємо перевірку отриманих результатів. Для цього записуємо додаткове рівняння рівноваги і підставляємо в нього знайдені значення реакцій.

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; Y_A - F \cos 60^\circ + R_B = 0;$$

$$-0,75 - 10 \cdot 0,5 + 5,75 = -5,75 + 5,75 = 0.$$

Відповідь: $X_A = 2,66 \text{ kH}$, $Y_A = -0,75 \text{ kH}$, $R_B = 5,75 \text{ kH}$. Знаки показують, що реакція \bar{Y}_A направлена протилежно показаній на рис. 5.9.

5.8 Питання для самоконтролю

1. Яка система сил називається довільною?
2. Як перенести силу до заданого центру?
3. Сформулюйте теорему про приведення системи сил до найпростішого виду.
4. Що називається головним вектором довільної системи сил?
5. Що називається головним моментом довільної системи сил?
6. Як геометрично визначити головний вектор довільної системи сил?
7. Запишіть формули за допомогою яких аналітично визначається головний вектор довільної системи сил?
8. Що мають спільного і чим відрізняються головний вектор сил і рівнодійна?
9. Якщо довільну систему сил звести до деякого центру, що в загальному випадку отримаємо?
10. Сформулюйте необхідну і достатню умову рівноваги довільної системи сил?
11. Сформулюйте теорему Варіньона про момент рівнодіючої.
12. Запишіть умови рівноваги плоскої довільної системи сил.
13. В яких формах можна записати рівняння рівноваги плоскої довільної системи сил.
14. Запишіть умови рівноваги плоскої системи паралельних сил.
15. В яких формах можна записати рівняння рівноваги плоскої системи паралельних сил.
16. Як замінити рівномірно розподілене навантаження рівнодійною? Де знаходиться точка її прикладання?
17. Яка послідовність розв'язку задач статки на визначення реакцій опор твердого тіла?
18. Як використати теорему про момент рівнодіючої при обчисленні моментів сил?
19. Як перевірити правильність розв'язку задач статки на визначення реакцій опор твердого тіла?
20. Що означає від'ємне значення реакції опори?

ЛЕКЦІЯ 6. РІВНОВАГА СИСТЕМИ ТІЛ

6.1 Рівновага складених конструкцій

Статичний розрахунок інженерних споруд в багатьох випадках зводиться до розгляду рівнянь рівноваги конструкції з системи тіл, з'єднаних якими-небудь в'язями.

В'язі, які з'єднують між собою частини даної конструкції, називаються *внутрішніми*, на відміну від *зовнішніх* в'язей, які скріплюють конструкцію з тілами, що до неї не входять (наприклад з опорами).

Якщо після відкидання зовнішніх в'язей конструкція залишається жорсткою, то для неї задачі статики розв'язуються як для абсолютно твердого тіла (приклади 5.2 і 5.3).

Однак, можуть зустрічатися такі інженерні конструкції, які після відкидання зовнішніх в'язей не залишаються жорсткими. Прикладом такої конструкції є тришарнірна арка (рис. 6.1, а). Якщо відкинути зовнішні в'язі A і B , то арка не буде жорсткою: її частини можуть обертатися навколо шарніра C .

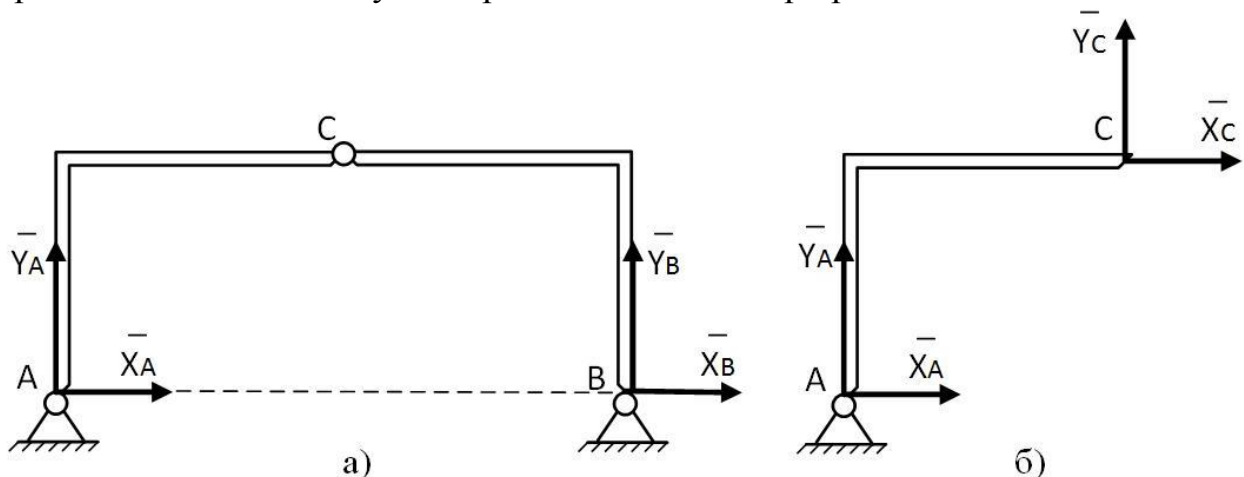


Рис. 6.1

За аксіомою затвердіння система сил, діючих на таку конструкцію, повинна при рівновазі задовольняти умовам рівноваги твердого тіла. Але ці умови, як виявляється, будучи необхідними, не є достатніми; тому з них неможна визначити всі невідомі величини. Для розв'язку задачі потрібно додатково розглянути рівновагу якої-небудь одної або кількох частин конструкції.

Наприклад, складаючи умови рівноваги для сил, діючих на тришарнірну арку (рис. 6.1, а), одержимо три рівняння з чотирма невідомими \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{X}_B , \bar{Y}_B . Розглянувши додатково умови рівноваги лівої (чи правої) її половини, одержимо ще три рівняння з двома новими невідомими \bar{X}_C , \bar{Y}_C (рис. 6.1, б). Розв'язуючи одержану систему шести рівнянь, знайдемо всі шість невідомих (див. приклад 6.1).

Другий спосіб розв'язку подібних задач полягає в тому, що конструкцію одразу роз'єднують на окремі частини і складають умови рівноваги кожного тіла окремо (див. приклад 6.2). При цьому реакції внутрішніх в'язей будуть попарно рівні за модулем і протилежні за напрямом. Для конструкції з n тіл, на кожне з яких діє плоска довільна система сил, отримаємо $3n$ рівнянь, з яких можна визначити $3n$

невідомих (при інших системах сил число рівнянь відповідно зміниться).

Приклад 6.1 Кронштейн складається з горизонтального бруса AD (рис. 6.2, а) вагою $P_1 = 150 \text{ Н}$, прикріпленого до стіни шарніром, і косою бруса CB вагою $P_2 = 120 \text{ Н}$, який з брусом AD і зі стіною також з'єднаний шарнірами (розміри вказані на рисунку). До кінця D бруса підвішений вантаж вагою $Q = 300 \text{ Н}$. Визначити реакції шарнірів A і C , вважаючи обидва бруса однорідними.

Розв'язок: Розглянемо спочатку рівновагу всього кронштейна. На нього діють наступні зовнішні сили: задані сили $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{Q}$ і реакції в'язей $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_C, \bar{Y}_C$. Кронштейн, звільнений від зовнішніх в'язей не буде жорсткою конструкцією (бруси можуть повертатися навколо шарніра B), але за принципом затвердіння діючи на нього сили при рівновазі мають задовольняти рівнянням рівноваги. Складаючи ці рівняння, знайдемо:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; X_A + X_C = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; Y_A + Y_C - P_1 - P_2 - Q = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; X_C \cdot 4a - Y_C \cdot a - P_1 \cdot 2a - P_2 \cdot a - Q \cdot 4a = 0.$$

В записаних рівняннях рівноваги, як видно, чотири невідомих $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_C, \bar{Y}_C$. Для розв'язку задачі розглянемо додатково рівновагу бруса AD (рис. 6.2, б). На нього діють сили \bar{P}_1, \bar{Q} , реакції зовнішнього шарніра A \bar{X}_A, \bar{Y}_A і реакції внутрішнього шарніра B \bar{X}_B, \bar{Y}_B . Складемо додаткове рівняння моментів діючих на брус AD сил відносно центра B (тоді в рівняння не ввійдуть нові невідомі \bar{X}_B, \bar{Y}_B):

$$\sum_{k=1}^n M_B(\bar{F}_k) = 0; -Y_A \cdot 3a + P_1 \cdot a - Q \cdot a = 0.$$

Розв'язуючи тепер систему чотирьох складених рівнянь (починаючи з останнього), знайдемо:

$$Y_A = \frac{P_1 - Q}{3} = -50 \text{ Н}, \quad Y_C = -Y_A + P_1 + P_2 + Q = 620 \text{ Н},$$

$$X_C = \frac{Y_C + P_1 \cdot 2 + P_2 + Q \cdot 4}{4} = 560 \text{ Н}, \quad X_A = -X_C = -560 \text{ Н}.$$

Реакції шарніра B , якщо їх потрібно визначити, знайдуться з рівнянь

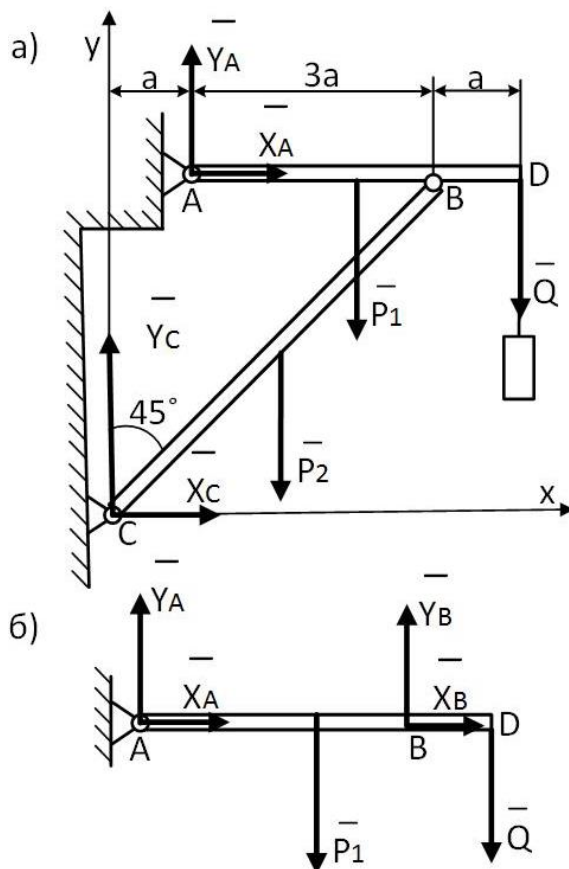


Рис. 6.2

проекцій на осі x і y сил, діючих на брус AD , і будуть рівні:

$$X_B = -X_A = 560 \text{ Н}, \quad Y_B = -Y_A + P_1 + Q = 500 \text{ Н}.$$

Як видно, розв'язуючи задачі статички не завжди потрібно складати всі умови рівноваги для заданого тіла. Якщо в задачі не треба визначати реакції деяких в'язей, то потрібно намагатися зразу складати такі рівняння, в які ці невідомі реакції не входять. Так, в даному прикладі, при розгляді рівноваги бруса AD складено лише одне рівняння моментів відносно центра B .

Відповідь: $X_A = -560 \text{ Н}$, $Y_A = -50 \text{ Н}$, $X_C = 560 \text{ Н}$, $Y_C = 620 \text{ Н}$. Знаки показують, що сили \bar{X}_A , \bar{Y}_A направлені протилежно показаним на рисунку.

Приклад 6.2 Знайти реакції зовнішніх в'язей і тиск у внутрішньому шарнірі C складеної конструкції (рис. 6.3) на яку діють сили $P = 10 \text{ кН}$, $Q = 4 \text{ кН}$, пара сил з моментом $M = 12 \text{ кНм}$ і рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю $q = 3 \text{ кН/м}$.

Розв'язок: Розділяємо конструкцію на дві частини. Для цього відкидаємо внутрішній шарнір C і замінюємо його дію реакціями \bar{X}_C , \bar{Y}_C . Важливо враховувати, що реакції внутрішніх в'язей попарно рівні за модулем і протилежні за напрямом. Розглядаємо рівновагу стержнів AC і BC окремо. На стержень AC (рис. 6.4, а) діють сила \bar{P} , пара сил M , рівнодійна розподіленого навантаження $R_q = q \cdot 2 = 6 \text{ кН}$, реакції зовнішнього шарніра A \bar{X}_A , \bar{Y}_A та реакції внутрішнього шарніра \bar{X}_C , \bar{Y}_C . Складаючи для цих сил рівняння рівноваги, отримаємо:

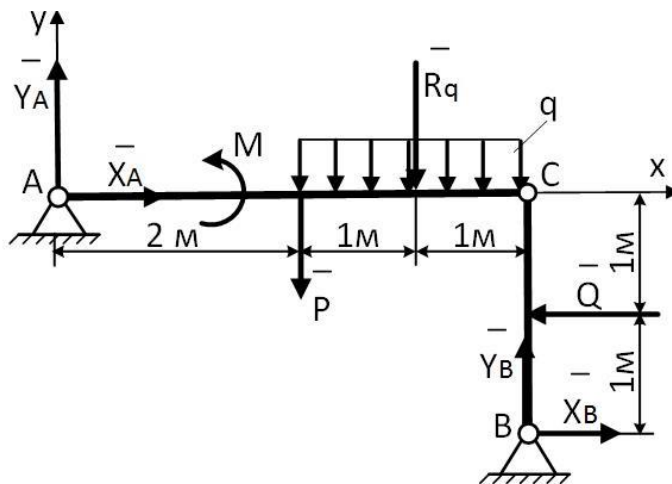


Рис. 6.3

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A + X_C = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A + Y_C - P - R_q = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad Y_C \cdot 4 + M - P \cdot 2 - R_q \cdot 3 = 0.$$

На стержень BC , якщо його розглядати окремо, діють сила \bar{Q} , реакції зовнішнього шарніра B \bar{X}_B , \bar{Y}_B та реакції внутрішнього шарніра \bar{X}_C , \bar{Y}_C . Складаємо для цих сил рівняння рівноваги:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_B - X_C - Q = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_B - Y_C = 0,$$

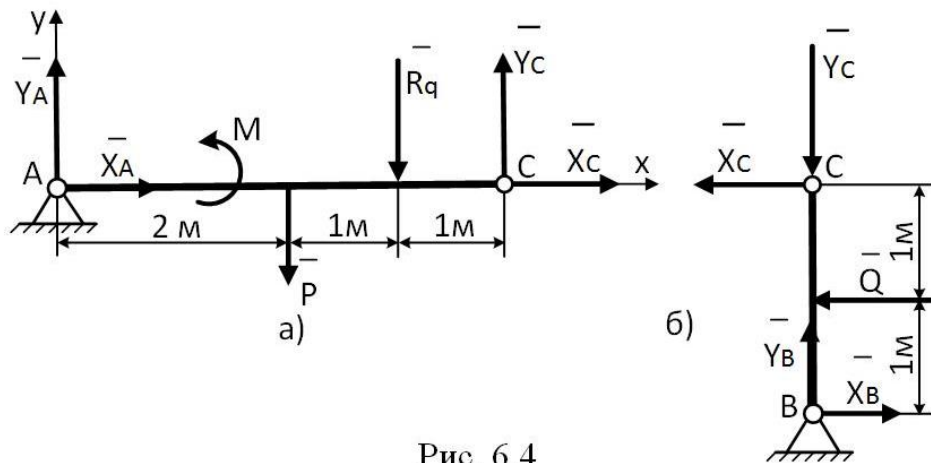


Рис. 6.4

$$\sum_{k=1}^n M_B(\bar{F}_k) = 0; X_C \cdot 2 + Q \cdot 1 = 0.$$

Розв'язуючи одержану систему шести рівнянь, одержимо:

$$X_C = \frac{-Q}{2} = -2 \text{ Н}, X_A = -X_C = 2 \text{ Н}, X_B = X_C + Q = 2 \text{ Н}.$$

$$Y_C = \frac{-M + P \cdot 2 + R_q \cdot 3}{4} = 6,5 \text{ Н}, Y_A = -Y_C + P + R_q = 9,5 \text{ Н}, Y_B = Y_C = 6,5 \text{ Н}.$$

Для перевірки отриманих результатів записуємо рівняння рівноваги для складеної конструкції, наприклад, рівняння проекцій діючих сил на вісь y .

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; Y_A - P - R_q + Y_B = 9,5 - 10 - 6 + 6,5 = 0.$$

Відповідь: $X_A = 2 \text{ Н}$, $Y_A = 9,5 \text{ Н}$, $X_B = 2 \text{ Н}$, $Y_B = 6,5 \text{ Н}$, $X_C = -2 \text{ Н}$, $Y_C = 6,5 \text{ Н}$. Знаки показують, що сила \bar{X}_C , направлена протилежно показаній на рисунку.

6.2 Статично визначені і статично невизначені задачі

Задачі на рівновагу тіл, які розв'язуються методами статички твердого тіла, називаються статично визначеними. В протилежному випадку задача статично невизначена.

Що означає розв'язати задачу? Розв'язати задачу означає визначити певну кількість невідомих величин. Позначимо k – число невідомих в задачі.

Задачі на рівновагу тіл в статиці розв'язують методом складання незалежних рівнянь рівноваги. Як відомо, для кожної системи сил можна скласти певну кількість рівнянь рівноваги. Позначимо m – число незалежних рівнянь рівноваги, які можна скласти для даної системи сил. Задача буде статично визначеною, якщо

$$k \leq m \quad (6.1)$$

Нерівність (6.1) – це умова статичної визначеності задачі. Для різних систем сил ця умова виглядає так:

1. Плоска система збіжних сил ($m = 2$): $k \leq 2$;
2. Плоска система паралельних сил ($m = 2$): $k \leq 2$;
3. Довільна плоска система сил ($m = 3$): $k \leq 3$;
4. Довільна просторова система сил ($m = 6$): $k \leq 6$;
5. Просторова система паралельних сил ($m = 3$): $k \leq 3$;
6. Просторова система збіжних сил ($m = 3$): $k \leq 3$.

Як приклад, розглянемо задачу на визначення реакцій в'язей накладених на балку AB в двох варіантах її кріплення (рис. 6.5).

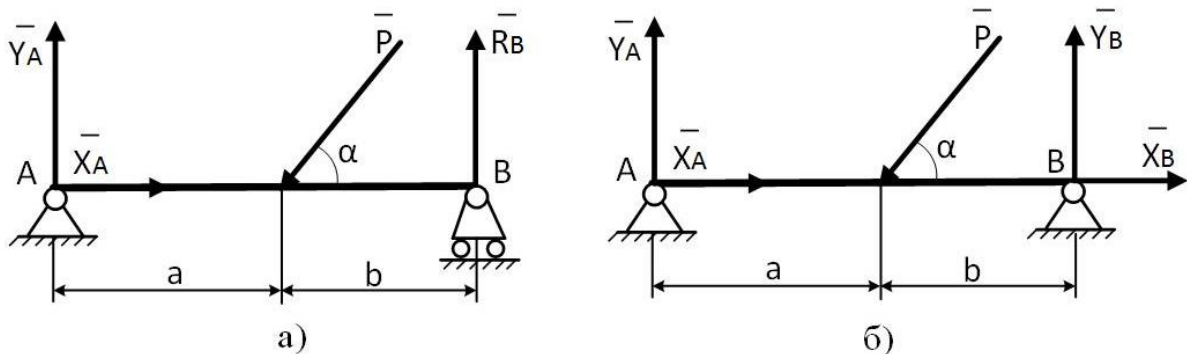


Рис. 6.5

В першому випадку (рис. 6.5, а) балка AB прикріплена до горизонтальної поверхні нерухомим шарніром A і рухомим шарніром B . Так як реакція нерухомого циліндричного шарніра має дві складові \bar{X}_A , \bar{Y}_A , а реакція рухомої опори \bar{R}_B перпендикулярна до опорної поверхні, то в даному варіанті закріплення балки маємо три невідомі: \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{R}_B . На балку діє плоска система сил, для якої можна скласти три незалежних рівняння рівноваги, отже $k = m$, тобто задача є статично визначеною.

Якщо балку AB прикріпити до горизонтальної поверхні двома нерухомими шарнірами (рис. 6.5, б), то задача буде статично невизначеною, так як число невідомих (\bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{X}_B , \bar{Y}_B) рівне чотирьом ($k = 4$), а для плоскої системи сил, яка діє на балку, можна скласти тільки три незалежні рівняння рівноваги. Для розв'язання такої задачі необхідно враховувати пружні властивості тіла AB , його деформацію, що не входить до компетенції теоретичної механіки. Такі задачі будуть розв'язуватись в опорі матеріалів.

Умова статичної визначеності задачі (6.1) значно розширюється для системи тіл, які з'єднані між собою і знаходяться в рівновазі.

6.3 Питання для самоконтролю

1. Які системи сил називаються статично визначеними?
2. Які сили називають зовнішніми?
3. Які сили називають внутрішніми?
4. Скільки рівнянь рівноваги можна скласти для плоскої довільної системи з N тіл?

ЛЕКЦІЯ 7. ДОВІЛЬНА ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ

7.1 Головний вектор і головний момент просторової системи сил

Довільна просторова система сил зводиться до головного вектору і головного моменту.

Згідно з формулами (5.4) і (5.5) значення головного вектору \bar{R} і головного моменту \bar{M}_O системи сил визначаються рівняннями $\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$, $\bar{M}_O = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k)$.

Розглянемо, як значення \bar{R} і \bar{M}_O для просторової довільної системи сил обчислюються аналітично, тобто за їх проекціями на осі координат.

Формули для R_x , R_y , R_z уже відомі:

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz}.$$

Тоді головний вектор просторової довільної системи сил рівний

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}. \quad (7.1)$$

Проекції вектору \bar{M}_O на осі координат позначатимемо M_x , M_y , M_z . За теоремою про проекції суми векторів на вісь $M_x = \sum_{k=1}^n [\bar{m}_O(\bar{F}_k)]_x$ або $M_x = \sum_{k=1}^n m_x(\bar{F}_k)$. Аналогічно знаходимо M_y і M_z .

Остаточно для аналітичного визначення головного моменту \bar{M}_O отримаємо рівняння:

$$M_x = \sum_{k=1}^n m_x(\bar{F}_k), \quad M_y = \sum_{k=1}^n m_y(\bar{F}_k), \quad M_z = \sum_{k=1}^n m_z(\bar{F}_k)$$

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}. \quad (7.2)$$

Приклад 7.1 Знайти головний вектор і головний момент системи сил, прикладеної до куба, якщо $F_1 = 20 \text{ Н}$, $F_2 = 6 \text{ Н}$, $F_3 = 12 \text{ Н}$, $F_4 = 4 \text{ Н}$, $F_5 = 10 \text{ Н}$. Ребро куба $a = 0,5 \text{ м}$ (рис. 7.1).

Розв'язок: Знаходимо проекції головного вектору на осі координат:

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = -F_3 = -12 \text{ Н},$$

$$R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = -F_2 + F_4 = -2 \text{ Н},$$

$$R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} = F_1 - F_5 = 10 \text{ Н}.$$

Модуль головного вектору

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 15,75 \text{ Н}.$$

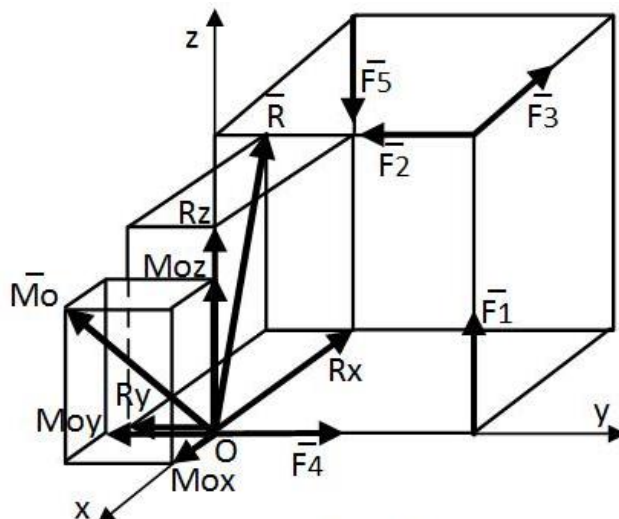


Рис. 7.1

Визначаємо проекції головного моменту на осі координат:

$$M_{Ox} = \sum_{k=1}^n m_x(\bar{F}_k) = F_1 a + F_2 a = 13 \text{ Нм},$$

$$M_{Oy} = \sum_{k=1}^n m_y(\bar{F}_k) = -F_3 a - F_5 a = -11 \text{ Нм},$$

$$M_{Oz} = \sum_{k=1}^n m_z(\bar{F}_k) = F_3 a = 6 \text{ Нм}.$$

Модуль головного моменту

$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} = 18 \text{ Нм}.$$

Відповідь: $R = 15,75 \text{ Н}$, $M_O = 18 \text{ Нм}$.

7.2 Окремі випадки зведення довільної системи сил

В загальному випадку будь-яка система сил приводиться до сили, рівної головному вектору \bar{R} і прикладеної в довільному центрі O , і до пари з моментом, рівним головному моменту \bar{M}_O . Розглянемо до якого найпростішого вигляду може бути приведена нерівноважена просторова система сил. Результат залежить від значень, які у цієї системи мають вектори \bar{R} і \bar{M}_O .

1. Якщо для даної системи сил $\bar{R} = 0$, а $\bar{M}_O \neq 0$, то вона приводиться до пари сил, момент якої рівний \bar{M}_O і може бути обчислений за формулами (7.2). У цьому випадку значення \bar{M}_O від вибору центру O не залежить.

2. Якщо для даної системи сил $\bar{R} \neq 0$, а $\bar{M}_O = 0$, то вона приводиться до рівнодійної, рівної \bar{R} , лінія дії якої проходить через центр O . Значення \bar{R} можна знайти за формулами (7.1).

3. Якщо для даної системи сил $\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_O \neq 0$, але $\bar{M}_O \perp \bar{R}$, то ця система також приводиться до рівнодійної, рівної \bar{R} , але яка не проходить через центр O .

Дійсно, при $\bar{M}_O \perp \bar{R}$ пара, зображена вектором \bar{M}_O , і сила \bar{R} лежать в одній площині (рис. 7.2). Тоді, вибравши сили пари \bar{R}' і \bar{R}'' рівними за модулем \bar{R} і розташували їх так, як показано на рис. 7.2, отримаємо, що сили \bar{R} і \bar{R}'' взаємно врівноважуються, і система заміниться однією рівнодійною $\bar{R}' = \bar{R}$, лінія дії якої проходить через точку O' . Відстань OO' ($OO' \perp \bar{R}$) визначається за формулою $Rd = |M_O|$, де $d = OO'$.

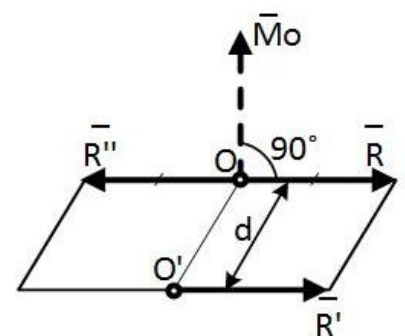


Рис. 7.2

4. Якщо для даної системи сил $\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_O \neq 0$ і при цьому вектор \bar{M}_O паралельний вектору \bar{R} (рис. 7.3, а), то це означає, що система сил приводиться до сукупності сили \bar{R} і пари \bar{P} , \bar{P}' , яка лежить в площині, перпендикулярній силі (рис. 7.3, б). Така сукупність сили і пари називається *динамічним гвинтом*, а пряма,

вздовж якої направлений вектор \vec{R} , віссю гвинта. Подальше спрощення цієї системи неможливе.

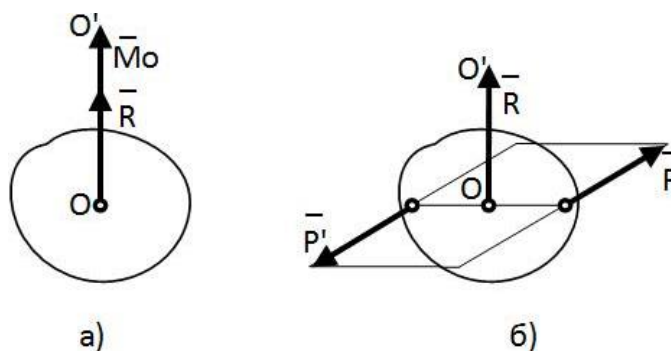


Рис. 7.3

5. Якщо для даної системи сил $\vec{R} \neq 0$, $\vec{M}_O \neq 0$ і при цьому вектори \vec{M}_O і \vec{R} не перпендикулярні один одному і не паралельні, то приводиться така система сил теж до динамічного гвинта, але вісь гвинта не буде проходити через центр O .

Приклад 7.2 Знайти до чого приводиться система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ і \vec{F}_4 , діючих на куб, якщо $a = 2 \text{ м}$, $F_1 = 8 \text{ Н}$, $F_2 = 16 \text{ Н}$, $F_3 = 8 \text{ Н}$, $F_4 = 8\sqrt{2} \text{ Н}$ (рис. 7.4).

Розв'язок:

Знайдемо модуль і напрямок головного вектору

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = F_3 - F_4 \cos 45^\circ = 0,$$

$$R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0,$$

$$R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} = F_1 - F_2 + F_4 \cos 45^\circ = 0.$$

Отже головний вектор рівний нулю. Знайдемо модуль і напрямок головного моменту.

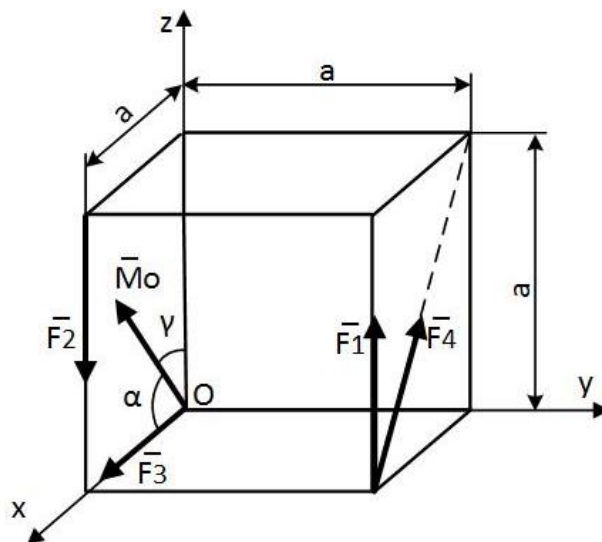


Рис. 7.4

$$M_x = \sum_{k=1}^n m_x(\vec{F}_k) = F_1 a + F_4 \cos 45^\circ a = 32 \text{ Нм},$$

$$M_y = \sum_{k=1}^n m_y(\vec{F}_k) = F_2 a - F_1 a - F_4 \cos 45^\circ a = 0,$$

$$M_z = \sum_{k=1}^n m_z(\vec{F}_k) = F_4 \cos 45^\circ a = 16 \text{ Нм},$$

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 16\sqrt{5} \text{ Нм}.$$

Відповідь: Система сил зводиться до головного моменту, який лежить в площині Oxz .

7.3 Умови рівноваги довільної просторової системи сил

Необхідні і достатні умови рівноваги будь-якої системи сил виражаються рівняннями $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_O = 0$. Але вектори \bar{R} і \bar{M}_O рівні нулю лише тоді, коли $R_x = R_y = R_z = 0$ і $M_x = M_y = M_z = 0$, тобто коли діючі сили, згідно рівнянь (7.1) і (7.2), будуть задовольняти умовам:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad (7.3)$$

$$\sum_{k=1}^n m_x(\bar{F}_k) = 0, \sum_{k=1}^n m_y(\bar{F}_k) = 0, \sum_{k=1}^n m_z(\bar{F}_k) = 0.$$

Таким чином, для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проєкцій всіх сил на кожену з трьох координатних осей і суми їх моментів відносно цих осей дорівнювали нулю.

Рівняння (7.3) виражають одночасно рівняння рівноваги твердого тіла, яке знаходиться під дією будь-якої просторової системи сил.

Приклад 7.3 Прямокутна однорідна плита вагою P закріплена в точці A сферичним шарніром, в точці B – циліндричним шарніром і утримується в горизонтальному положенні тросом CC' (рис. 7.5). Визначити реакції в'язей, якщо $P = 100 \text{ Н}$, $F = 40 \text{ Н}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\bar{F} \parallel zAy$.

Розв'язок: За принципом звільнення від в'язей, замінимо дію в'язей, накладених на плиту, їх реакціями. В точці A маємо три складові реакції сферичного шарніра: \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{Z}_A . В точці B – дві складові реакції циліндричного шарніра: \bar{X}_B , \bar{Z}_B . Реакцію тросу \bar{T} направляємо вздовж лінії CC' . Для отриманої довільної просторової системи сил складаємо шість рівнянь рівноваги:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, X_A + X_B - T \cos \alpha \sin \beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, Y_A + F \cos 45^\circ - T \cos \alpha \cos \beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, Z_A + Z_B + T \sin \alpha - P - F \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n m_x(\bar{F}_k) = 0, -P \frac{AB}{2} + Z_B AB + T \sin \alpha AB = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n m_y(\bar{F}_k) = 0, F \sin 45^\circ AD + P \frac{AD}{2} - T \sin \alpha AD = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n m_z(\bar{F}_k) = 0, F \cos 45^\circ AD - X_B AB = 0.$$

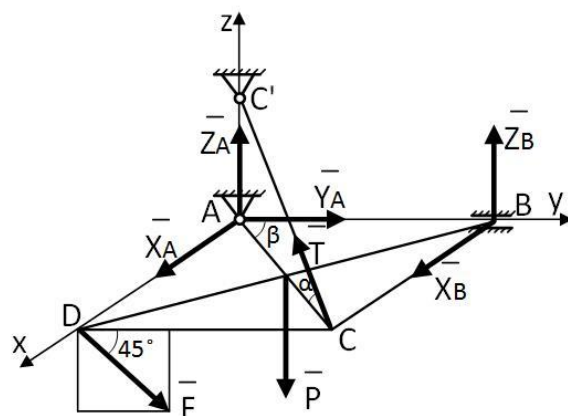


Рис. 7.5

Розв'язуємо рівняння відносно невідомих реакцій в'язей.

$$X_B = \frac{F \cos 45^\circ AD}{AB} = \frac{F \cos 45^\circ AD}{AD \operatorname{tg} \beta} = 16,33 \text{ Н},$$

$$T = \frac{F \sin 45^\circ AD + P \frac{AD}{2}}{AD \sin \alpha} = 156,56 \text{ Н},$$

$$Z_B = \frac{P \frac{AB}{2} - T \sin \alpha AB}{AB} = -28,28 \text{ Н},$$

$$X_A = -X_B + T \cos \alpha \sin \beta = 101,09 \text{ Н},$$

$$Y_A = -F \cos 45^\circ + T \cos \alpha \cos \beta = 39,51 \text{ Н},$$

$$Z_A = -Z_B - T \sin \alpha + P + F \cos 45^\circ = 78,28 \text{ Н}.$$

Відповідь: $X_A = 101,09 \text{ Н}$, $Y_A = 39,51 \text{ Н}$, $Z_A = 78,28 \text{ Н}$, $X_B = 16,33 \text{ Н}$, $Z_B = -28,28 \text{ Н}$, $T = 156,56 \text{ Н}$. Знак мінус означає, що напрямок \vec{Z}_B протилежний показаному на рисунку.

7.4 Умови рівноваги просторової системи паралельних сил

У випадку, коли всі діючі на тіло сили паралельні одна одній, можна вибрати координатні осі так, що вісь z буде паралельна силам (рис. 7.6). Тоді проекції кожної сили на осі x і y та їх моменти відносно осі z будуть рівні нулю і система (7.3) дасть три рівняння рівноваги:

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n m_x(\vec{F}_k) = 0, \quad (7.4)$$

$$\sum_{k=1}^n m_y(\vec{F}_k) = 0.$$

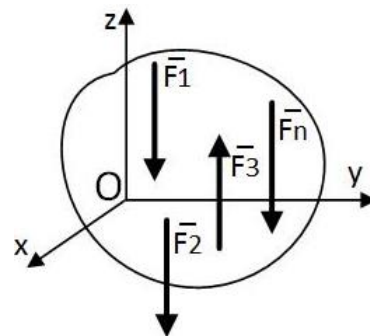


Рис. 7.6

Інші рівняння перетворяться при цьому в тотожності виду $0 \equiv 0$.

Отже, для рівноваги просторової системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб сума проекцій всіх сил на вісь, паралельну силам, і суми їх моментів відносно двох інших координатних осей дорівнювали нулю.

Приклад 7.4 На прямокутній однорідній плиті зі сторонами a і b лежить вантаж. Центр ваги плити разом з вантажем знаходиться в точці D з координатами x_D, y_D (рис. 7.7). Один з робітників утримує плиту за кут A . В яких точках B і E мають утримувати плиту двоє інших робітників, щоб сили, прикладені кожним з утримуючих плиту, були рівними.

Розв'язок: Розглянемо рівновагу плити, яка є вільним тілом, що знаходиться в рівновазі під дією чотирьох паралельних сил $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{Q}_3, \bar{P}$, де \bar{P} – сила тяжіння.

Складаємо для цих сил умови рівноваги (7.4), вважаючи плиту горизонтальною і провівши осі так, як показано на рис. 7.7. Отримаємо:

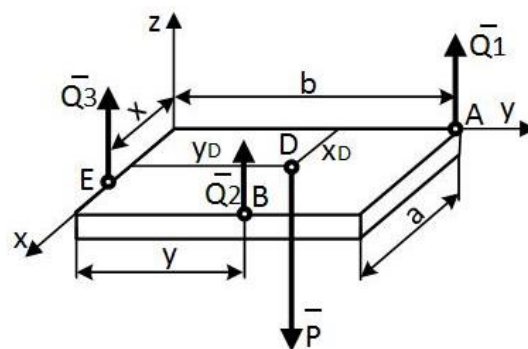


Рис. 7.7

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \quad Q_1 + Q_2 + Q_3 - P = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n m_x(\bar{F}_k) = 0, \quad Q_1 b + Q_2 y - P y_D = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n m_y(\bar{F}_k) = 0, \quad -Q_2 a - Q_3 x + P x_D = 0.$$

За умовою задачі має бути $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$. Тоді з першого рівняння $P = 3Q$. Підставивши це значення P в два інші рівняння, знайдемо остаточно $x = 3x_D - a$, $y = 3y_D - b$.

Розв'язок можливий, якщо $\frac{a}{3} \leq x_D \leq \frac{2a}{3}$, $\frac{b}{3} \leq y_D \leq \frac{2b}{3}$. При $x_D = \frac{a}{3}$, $y_D = \frac{b}{3}$ буде $x = a$, $y = b$. Коли точка D в центрі плити, $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$.

Відповідь: $x = 3x_D - a$, $y = 3y_D - b$.

7.5 Питання для самоконтролю

1. Як знайти головний вектор і головний момент просторової системи сил?
2. До якого найпростішого виду можна звести довільну просторову систему сил, якщо:
 - а) головний вектор рівний нулю, а головний момент не рівний нулю?
 - б) головний вектор не рівний нулю, а головний момент рівний нулю?
 - в) головний вектор і головний момент не рівні нулю?
3. Яку сукупність сил називають динамічним гвинтом?
4. Що таке вісь гвинта?
5. Скільки і які рівняння рівноваги можна скласти для просторової системи паралельних сил?
6. Скільки і які рівняння рівноваги можна скласти для довільної просторової системи сил?
7. Коли довільна система сил зводиться до пари сил?
8. В яких випадках канонічним видом довільної системи сил є рівнодійна?
9. Якщо довільну систему сил звести до деякого центру, що в загальному випадку отримаємо?
10. Яка необхідна і достатня умова рівноваги просторової довільної системи сил?

ЛЕКЦІЯ 8. РІВНОВАГА ТІЛ З ВРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ СПОКОЮ

8.1 Тертя ковзання

Припущення про ідеально гладеньку поверхню, яке використовується в теоретичній механіці, суперечить практиці.

Дійсно, дотик двох тіл відбувається не в одній лише точці. Обидва тіла зазнають при цьому малі деформації, внаслідок яких вони дотикаються по певній поверхні. Дослід переконує в тому, що крім нормальної складової реакції \bar{N} виникає ще дотична \bar{F}_t , яка називається силою тертя $\bar{F}_{тр}$ ковзання (рис. 8.1). Розрізняють тертя спокою, або статичне тертя, що відбувається при відносному спокої статичних тіл, і тертя руху, що відбувається при відносному русі цих тіл. Наближені закони тертя ковзання або закони тертя першого роду встановили Г. Амонтон і Ш. Кулон. Ці закони відповідають простим дослідом, на основі яких вони встановлені.

Наприклад, тіло вагою \bar{P} починає рухатися під дією сили \bar{Q} . Нехай у початковий момент тіло перебувало у спокої. Якщо поступово збільшувати силу \bar{Q} , то тіло все одно залишається у спокої. Отже, горизонтальна складова реакції стола $\bar{F}_t = \bar{F}_{тр}$ врівноважує прикладену силу \bar{Q} і зростає разом з нею доти, доки рівновага не порушиться. Це відбудеться тоді, коли сила тертя досягне свого максимального значення $\bar{F}_{тр}^{max}$.

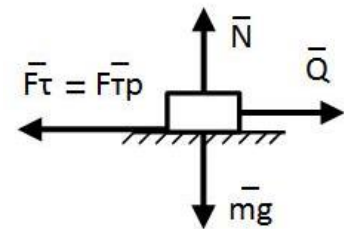


Рис. 8.1

8.1.1 Закони Амонтона-Кулона

1. Сила тертя ковзання знаходиться в спільній дотичній площині до поверхонь тіл, які стикаються, і напрямлена в бік, протилежний напрямку можливого ковзання тіла під дією активних сил. Сила тертя залежить від активних сил, а її модуль змінюється від нуля до максимального значенням, якого вона досягає в момент виходу тіла з положення рівноваги, тобто:

$$0 \leq F_{тр} \leq F_{тр}^{max}$$

$F_{тр}^{max}$ – називається *граничною силою тертя*.

2. Гранична сила тертя ковзання пропорційна нормальній реакції (нормальному тиску), тобто

$$F_{тр}^{max} = f \cdot N \quad (8.1)$$

де f – безрозмірний коефіцієнтом тертя ковзання, який не залежить від нормальної реакції.

3. Гранична сила тертя ковзання за інших рівних умов не залежить від площі зіткнення поверхонь, що труться. З цього закону випливає, що для того, щоб

зрушити, наприклад цеглину, необхідно прикласти одну і ту ж саму, силу, незалежно, від того, якою гранню вона покладена на поверхню.

4. Коефіцієнт тертя ковзання залежить від матеріалу і фізичного стану поверхонь, що труться, тобто від величини і характеру шорсткості, вологості, температури та інших умов. Коефіцієнт тертя встановлюється експериментально. Значення його для різних матеріалів наведено у довідниках.

Вважається, що коефіцієнт тертя не залежить від швидкості руху.

8.1.2 Кут тертя. Область рівноваги

Багато завдань на рівновагу тіла на шорсткій поверхні, тобто за наявності тертя, зручно вирішувати геометрично. Для цього введемо поняття кута і конуса тертя.

Реакція реальної (шорсткої) в'язі \bar{R} складається з двох складових: нормальної реакції \bar{N} і перпендикулярної до неї сили тертя $\bar{F}_{тр}$. Як наслідок, реакція в'язі \bar{R} відхиляється від нормалі до поверхні на деякий кут φ (рис. 8.2, а). При зміні сили тертя від нуля до максимальної ($0 \leq \bar{F}_{тр} \leq \bar{F}_{тр}^{max}$), сила реакції \bar{R} змінюється від \bar{N} до \bar{R}^{max} ($\bar{N} \leq \bar{R} \leq \bar{R}^{max}$), а її кут з нормаллю зростає від нуля до деякого граничного значення φ_c ($0 \leq \varphi \leq \varphi_c$) (рис. 8.2, б).

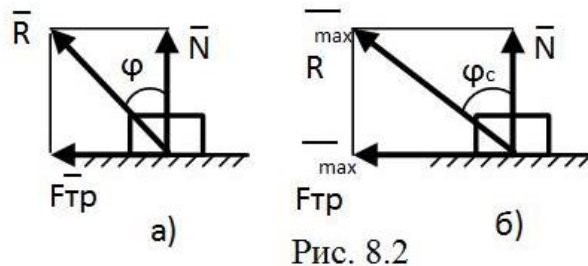


Рис. 8.2

Кутом тертя називається найбільший кут φ_c між граничною силою реакції шорсткої в'язі \bar{R}^{max} і нормальною реакцією \bar{N} :

$$tg \varphi = \frac{F_{тр}^{max}}{N}; F_{тр}^{max} = f \cdot N \Rightarrow tg \varphi = f \quad (8.2)$$

Кут тертя φ_c залежить від коефіцієнта тертя f .

При зміні напрямку прикладання активної сили \bar{Q} буде змінюватись напрям сили тертя $\bar{F}_{тр}$, а реакція \bar{R} поверхні буде описувати конусну поверхню (рис. 8.3).

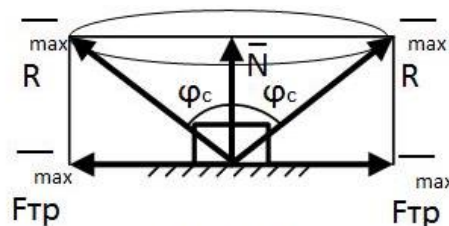


Рис. 8.3

Конус, вершина якого знаходиться в точці дотику тіла з поверхнею, а твірна з нормаллю до поверхні утворює кут тертя, називається *конусом тертя*.

Якщо коефіцієнт тертя в усіх напрямках однаковий, то конус тертя буде круговим.

Область, обмежена конусом тертя, називається *областю рівноваги*.

Така назва пояснюється тим, що, якщо активні сили, котрі діють на тіло, зводяться до рівнодійної, лінія дії якої знаходиться в області, обмеженій конусом тертя, то якою б великою вона не була, тіло перебуватиме в стані спокою.

Для доведення цього розглянемо тіло на шорсткій поверхні. Позначимо рівнодійну активних сил, що діють на тіло, \bar{Q} і нехай вона утворює кут α з нормаллю до поверхні (рис. 8.4).

Умовою не ковзання тіла по поверхні є

$$Q \sin \alpha \leq F_{\text{тр}}^{\max}$$

Так як $F_{\text{тр}}^{\max} = f \cdot N = f Q \cos \alpha$, то умова спокою набуває вигляду

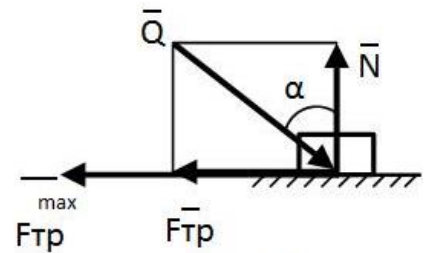


Рис. 8.4

$$Q \sin \alpha \leq f Q \cos \alpha \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \leq f, \text{ а враховуючи, що } f = \operatorname{tg} \varphi, \text{ отримуємо}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \operatorname{tg} \varphi \text{ або } \alpha \leq \varphi.$$

З отриманої нерівності випливає, що, якщо до тіла, яке знаходиться на шорсткій поверхні, прикладено силу \bar{Q} , котра утворює з нормаллю до поверхні кут, менший від кута тертя, то тіло буде знаходитись у стані спокою.

Для рівноваги твердого тіла на шорсткій поверхні необхідно і достатньо, щоб лінія дії рівнодійної активних сил, що діють на тверде тіло, проходила всередині конуса тертя або по його твірній через його вершину. Тіло не можна вивести з рівноваги будь-якою за модулем активною силою, якщо її лінія дії проходить усередині конуса тертя. Цим пояснюються такі відомі в техніці явища, як заклинювання або самогальмування.

У багатьох випадках сили тертя розглядають як джерела шкідливих опорів руху машин чи приладів. Проте в ряді інших випадків, навпаки, без сил тертя рух неможливий. Саме така роль тертя при ходьбі людини, русі всіх видів колісних транспортних машин, прокатних станів та ін.

8.1.3 Рівновага при наявності тертя

При розв'язанні задач статички за наявності сил тертя ковзання реакцію шорсткої в'язі зображають двома її складовими \bar{N} і $F_{\text{тр}}^{\max}$. Потім складають звичайні рівняння рівноваги, які відповідають діючій в задачі системі сил, і приєднують до них рівняння $F_{\text{тр}}^{\max} = f \cdot N$. З одержаної таким чином системи рівнянь і знаходять потрібні величини.

Якщо задачу розв'язують геометричним способом, то реакцію шорсткої

в'язі зручно зображати однією силою \bar{R}^{max} , яка в граничному положенні рівноваги відхилена від нормалі на кут φ_C .

Розглянемо приклади розв'язку задач на рівновагу з врахуванням тертя.

Приклад 8.1 Тіло вагою $P=100\text{ Н}$ утримується в рівновазі силою \bar{Q} на шорсткій похилій площині, нахиленій під кутом $\alpha = 45^\circ$. Сила \bar{Q} діє на тіло під кутом $\beta = 15^\circ$ до площини (рис 8.5).

Визначити:

- 1) силу тертя ковзання, якщо $Q = 7\text{ Н}$;
- 2) величину сили Q , при якій тіло перебуватиме в стані спокою, якщо коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,6$.

Розв'язок. Реакцію шорсткої поверхні зображаємо у вигляді нормальної складової реакції опори \bar{N} та сили тертя ковзання $F_{\text{тр}}^{max}$ (рис. 8.6). Так як відразу визначити напрям можливого руху тіла неможливо, то зображаємо силу тертя вздовж поверхні в довільному напрямі, наприклад донизу. Вводимо систему координат Oxy .

Для визначення сили $F_{\text{тр}}^{max}$ складаємо рівняння рівноваги

$$\sum_{k=1}^n F_{xk} = 0; P \sin \alpha - Q \cos \beta + F_{\text{тр}}^{max} = 0.$$

Звідси знаходимо $F_{\text{тр}}^{max} = Q \cos \beta - P \sin \alpha$.

Для заданих величин маємо

$$F_{\text{тр}}^{max} = 7 \cdot 0,707 - 100 \cdot 0,5 = -45\text{ Н}.$$

Від'ємний знак величини $F_{\text{тр}}^{max}$ означає, що дійсний напрям сили протилежний зображеному на рис. 8.6.

Можливі два випадки граничної рівноваги тіла і відповідно два граничних значення Q при двох напрямках сили тертя по похилій площині вниз і вгору в залежності від напрямку можливого ковзання тіла по похилій площині. Для складення рівнянь рівноваги тільки один раз введемо $f_1 = kf$, де $k = \pm 1$.

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{k=1}^n F_{xk} = 0; P \sin \alpha - Q \cos \beta + F_{\text{тр}}^{max} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{yk} = 0; N - P \cos \alpha + Q \sin \beta = 0;$$

Так як $F_{\text{тр}}^{max} = f_1 \cdot N = kf \cdot N$, то розв'язуючи ці рівняння маємо

$$Q = \frac{P(\sin \alpha + kf \cos \alpha)}{\cos \beta + kf \sin \beta}$$

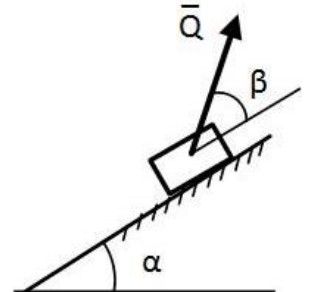


Рис. 8.5

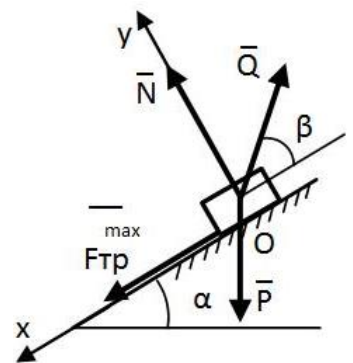


Рис. 8.6

Тоді при $k = +1$

$$Q_1 = \frac{P(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{\cos\beta + f\sin\beta} = 102 \text{ Н}$$

при $k = -1$

$$Q_2 = \frac{P(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{\cos\beta - f\sin\beta} = 35 \text{ Н}$$

Відповідь: 1) $F_{\text{тр}}^{\text{max}} = -45 \text{ Н}$; 2) при рівновазі тіла сила Q знаходиться в межах $35 \text{ Н} \leq Q \leq 102 \text{ Н}$.

Варто зазначити, що аналогічною розглянутій є така постановка задачі: за відомою силою Q визначити значення кута α , при якому тіло починає рухатись.

Приклад 8.2 Однорідний важкий стержень AB довжиною l спирається кінцем A на гладеньку вертикальну стіну, а кінцем B на шорстку вертикальну стіну (рис. 8.7). Відстань між стінами h , причому $h < l$. Визначити коефіцієнт тертя стіни f при якому можлива рівновага стержня.

Розв'язок. Розглянемо випадок, коли точка A стержня знаходиться вище точки B . Рівновага стержня неможлива, якщо точка A розташована нижче точки B . На стержень діє сила ваги \bar{P} , прикладена посередині стержня, нормальна реакція гладенької стіни A \bar{N}_A і реакція шорсткої стіни B \bar{R}_B , яку розкладемо на нормальну реакцію \bar{N}_B і силу тертя $\bar{F}_{\text{Втр}}$.

Вводимо систему координат Oxy і складемо умови рівноваги плоскої системи сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; N_A - N_B = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; F_{\text{Втр}} - P = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_B(\bar{F}_k) = 0; P \frac{h}{2} - N_A l \sin\alpha.$$

До цих рівнянь слід додати формулу для знаходження сили тертя:

$$F_{\text{Втр}} \leq F_{\text{тр}}^{\text{max}} = f N_B$$

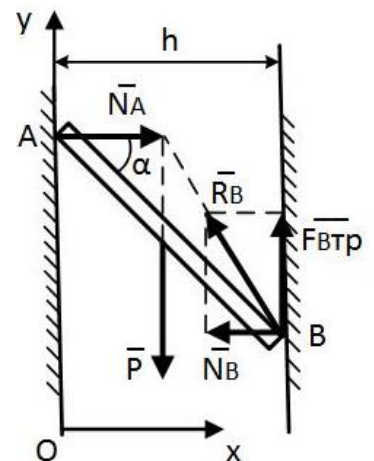


Рис. 8.7

З одержаної системи рівнянь знаходимо:

$$N_A = N_B; F_{\text{Втр}} = P; N_A = \frac{Ph}{2l\sin\alpha}.$$

З рис. 8.7 маємо $\sin\alpha = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}$, отже $F_{\text{Втр}} = P$ і $F_{\text{Втр}} \leq \frac{fPh}{2\sqrt{l^2 - h^2}}$.

Прирівнявши ці рівняння, отримуємо умови рівноваги стержня:

$$1 \leq \frac{fh}{2\sqrt{l^2-h^2}} \quad \text{або} \quad f \leq \frac{2\sqrt{l^2-h^2}}{h}.$$

Відповідь: стержень знаходиться в рівновазі коли $f \leq \frac{2\sqrt{l^2-h^2}}{h}$.

Приклад 8.3 Однорідний тонкий брус AB вагою G спирається кінцем A на вертикальну стіну і точкою D на ребро. На кінці бруса B підвішений вантаж вагою $G_1 = \frac{1}{2}G$. Відомі відстані $AE = 2a$, $DE = a$, а також коефіцієнти тертя між брусом і стіною $f_A = 0,3$ та брусом і ребром $f_D = 0,2$. Визначити найменшу довжину бруса AB , при якій кінець A не ковзне вниз, і реакції опор в точках A і D (рис. 8.8, а).

Розв'язок. Розглянемо систему сил прикладених до бруса AB , який знаходиться у стані граничної рівноваги. На брус діють задані сили \vec{G} і \vec{G}_1 , нормальні реакції \vec{N}_A і \vec{N}_D , а також максимальні сили тертя $\vec{F}_{\text{Атр}}^{\text{max}}$ і $\vec{F}_{\text{Dтр}}^{\text{max}}$, направлені протилежно напрямку можливого ковзання бруса (рис. 8.8, б). Ці сили тертя рівні:

$$F_{\text{Атр}}^{\text{max}} = f_A N_A, \quad F_{\text{Dтр}}^{\text{max}} = f_D N_D \quad (*)$$

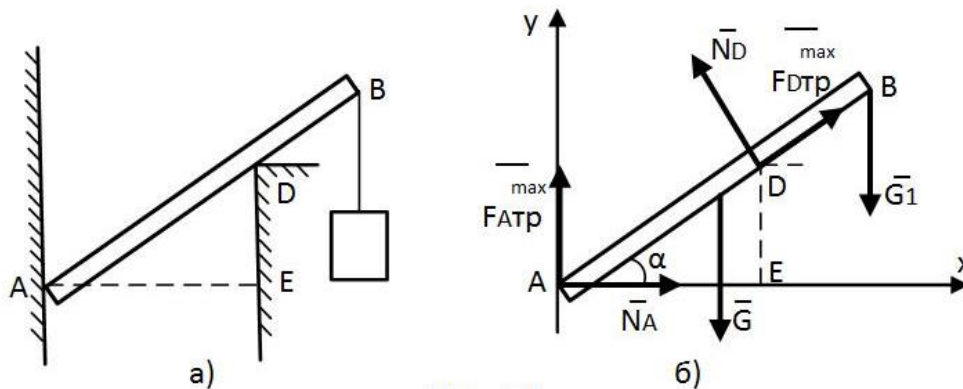


Рис. 8.8

Знаходимо значення кута α :

$$AD = \sqrt{AE^2 + DE^2} = a\sqrt{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{AE}{AD} = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin\alpha = \frac{ED}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Складаємо рівняння рівноваги для плоскої довільної системи сил, які діють на брус, прийнявши, що $AB=l$:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad N_A - N_D \sin\alpha + F_{\text{Dтр}}^{\text{max}} \cos\alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad F_{\text{Атр}}^{\text{max}} - G + N_D \cos\alpha + F_{\text{Dтр}}^{\text{max}} \sin\alpha - G_1 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; -G \frac{l}{2} \cos \alpha + N_D a \sqrt{5} - G_1 l \cos \alpha = 0.$$

Розв'язуємо отримані рівняння разом з рівняннями (*) відносно невідомих l , N_A і N_D :

$$N_A - N_D \sin \alpha + f_D N_D \cos \alpha = 0$$

$$f_A N_A - G + N_D \cos \alpha + f_D N_D \sin \alpha - \frac{1}{2} G = 0,$$

звідси

$$N_A = N_D (\sin \alpha - f_D \cos \alpha)$$

$$N_D = \frac{3G/2}{(f_A + f_D) \sin \alpha + (1 - f_A f_D) \cos \alpha}.$$

Підставивши значення коефіцієнтів f_A і f_D та $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$ матимемо:

$$N_D = 0,63\sqrt{5}G, \text{ а } N_A = 0,38G.$$

Врахувавши знайдені значення реакцій, з рівняння $\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0$ знайдемо довжину бруса:

$$-G \frac{l}{2} \frac{2}{\sqrt{5}} + 0,63\sqrt{5}Ga\sqrt{5} - \frac{1}{2}Gl \frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \Rightarrow l = 1,575a\sqrt{5}.$$

Відповідь: найменша довжина бруса AB , при якій він залишатиметься в стані спокою дорівнює: $AB = 1,575a\sqrt{5} = 1,575AD$, а довжина ділянки DB при цьому має бути $DB = AB - AD = 0,575AD$.

8.2 Тертя кочення

Опір, що виникає при коченні одного тіла по поверхні іншого, називається *тертям кочення*. Нехай до котка радіусом R перпендикулярно до його осі Oz прикладена горизонтальна сила \bar{F} (рис. 8.9). Крім того на каток діє сила тяжіння \bar{P} . Внаслідок деформацій котка і горизонтальної опорної поверхні вони доторкаються один одного вздовж деякої ділянки контакту. Нормальна реакція опорної поверхні \bar{N} при цьому зміститься на певну відстань k .

Сила тертя $\bar{F}_{\text{тр}}$ виникає в тому місці, де коток доторкається до опорної поверхні, в точці C . При рівновазі котка сила $\bar{F}_{\text{тр}}$ дорівнює за модулем силі \bar{F} , але напрямлена в протилежний бік. Отже \bar{F} і $\bar{F}_{\text{тр}}$ утворюють пару сил, яка врівноважується парою сил \bar{N} і \bar{P} .

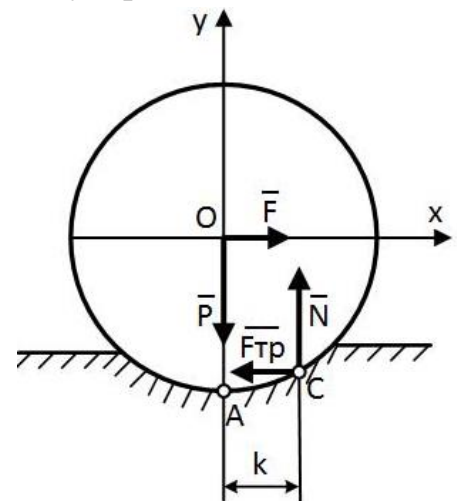


Рис. 8.9

Момент пари сил (\bar{N}, \bar{P}) називається *моментом тертя кочення*:

$$M_{\text{тр}} = N \cdot k \quad (8.3)$$

Плечем цієї пари є величина k , яка називається *коефіцієнтом тертя кочення* і має розмірність довжини.

Коефіцієнт тертя кочення k залежить від матеріалу катка, площини та фізичного стану їх поверхонь. Коефіцієнт тертя кочення при коченні в першому наближенні можна вважати незалежним від кутової швидкості кочення катка і його швидкості ковзання по площині.

Очевидно, тіло буде в рівновазі, якщо момент активної сили відносно точки C буде меншим від моменту тертя, тобто

$$F \cdot R \leq N \cdot k.$$

Розглянемо розв'язок задач статки з врахуванням тертя кочення на прикладі.

Приклад 8.4 Визначити, при яких значеннях кута α циліндр радіуса R залишається в спокої на похилій площині, якщо коефіцієнт тертя кочення дорівнює k (рис. 8.10).

Розв'язок. Розглянемо граничне положення рівноваги, коли $\alpha = \alpha_1$. Розклавши силу \bar{P} на складові \bar{P}_1 і \bar{P}_2 , знаходимо, що в цьому випадку

рушійна сила $F = P_1 = P \sin \alpha_1,$

а нормальна реакція $N = P_2 = P \cos \alpha_1.$

Тоді $P \sin \alpha_1 = \frac{k}{R} P \cos \alpha_1,$ або $\text{tg} \alpha_1 = \frac{k}{R}.$

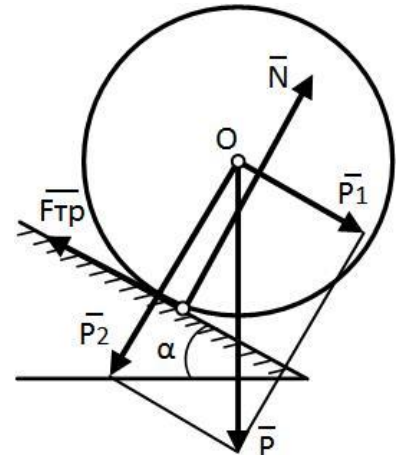


Рис. 8.10

При зменшенні k до нуля кут α_1 , теж зменшується до нуля.

Відповідь: рівновага зберігається при будь-якому куті $\alpha < \alpha_1$.

Отриманим результатом можна скористатися для експериментального визначення коефіцієнта k .

8.3 Питання для самоконтролю

1. Що називається тертям?
2. Що називається тертям кочення, тертям ковзання?
3. Чому дорівнює сила тертя ковзання?
4. Що таке кут тертя? Чому дорівнює тангенс кута тертя?
5. Що таке область рівноваги? Чому вона так називається?
6. Чому рівний момент тертя кочення?
7. Які одиниці вимірювання коефіцієнтів тертя ковзання і тертя кочення?

ЛЕКЦІЯ 9. РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ ФЕРМ

9.1 Поняття про ферми

Фермою називається жорстка конструкція із прямолінійних стержнів, з'єднаних між собою шарнірами. Якщо всі стержні ферми лежать в одній площині, ферму називають *плоскою*. Місця з'єднання стержнів ферми називають *вузлами*.

За своїм призначенням найчастіше ферми поділяють на:

- *мостові* – використовуються при будівництві мостів (рис. 9.1, а);
- *кроквяні* – використовуються в ролі каркасів для підтримки покриття будинків та інших споруд (рис. 9.1, б);
- *кранові* – використовуються в підйомних механізмах (рис. 9.1, в).

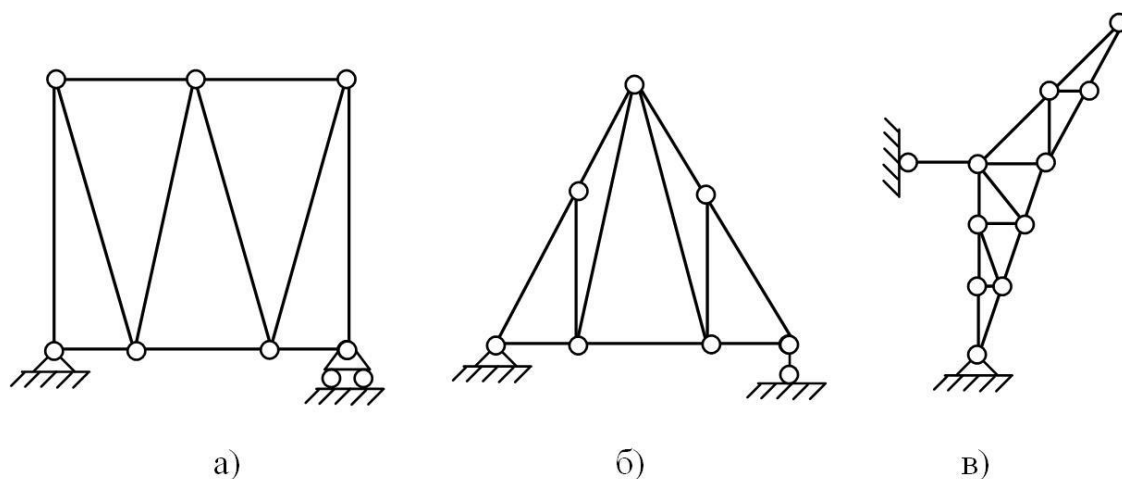


Рис. 9.1

Визначення ферми як шарнірно-стержневої конструкції є ідеалізованим. В реальних фермах стержні з'єднані жорстко за допомогою заклепок або електрозварювання.

В теоретичній механіці на ферми накладаються і інші умови, які спрощують її розрахунок. Такими умовами є:

1. вагою стержнів нехтують;
2. шарніри розміщені тільки на кінцях стержнів;
3. самі шарніри, що з'єднують стержні, ідеальні, тобто тертям в них нехтують;
4. навантаження, що діють на ферму, прикладені у вузлах, тому кожен стержень буде розтягнутий або стиснутий.

Розглянемо жорсткі плоскі ферми без зайвих стержнів, що утворені з трикутників. У таких фермах число стержнів k і число вузлів n пов'язані співвідношенням

$$k = 2n - 3.$$

При меншому числі стержнів ферма не буде жорсткою, при більшому числі вона буде статично невизначуваною.

Розрахунок ферми зводиться до визначення опорних реакцій і зусиль в її стержнях.

Опорні реакції можна знайти звичайними методами статички, розглядаючи ферму в цілому як тверде тіло.

Для визначення зусиль у стержнях ферми використовують способи вирізання вузлів та Ріттера.

9.2 Способи знаходження зусиль у стержнях ферми

9.2.1 Спосіб вирізання вузлів

Цим способом зазвичай користуються, коли необхідно знайти зусилля в усіх стержнях ферми. Він зводиться до послідовного розгляду умов рівноваги сил, що сходяться у вузлах.

Кожен вузол вирізається з ферми і розглядається окремо як такий, що перебуває в рівновазі під дією прикладених до нього зовнішніх сил і зусиль розрізаних стержнів. Система сил, що діє на вузол, є плоскою системою збіжних сил, яка перебуває в рівновазі. Тому розрахунок ферми необхідно починати з вузла, в якому сходяться два стержні, два невідомих зусилля в яких визначаються з двох рівнянь рівноваги збіжної системи сил на площині:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0.$$

Кожний наступний вузол вибирається так, щоб в ньому сходилось не більше двох стержнів, зусилля яких невідомі.

Припускають, що всі зусилля у стержнях напрямлені від вузла, тобто стержні розтягнуті. Останній вузол розглядають для перевірки.

Хід розрахунків розглянемо на прикладі.

Приклад 9.1 На плоску ферму з розмірами $a = 1,5$ м, $h = 2,5$ м (рис. 9.2) діють сили $F_1 = 15$ кН, $F_2 = 20$ кН, $F_3 = 25$ кН, $F_4 = 30$ кН. Визначити зусилля, що виникають у стержнях ферми методом вирізання вузлів.

Розв'язок. Насамперед знайдемо реакції в опорах ферми, розглядаючи її в цілому як тверде тіло.

Аналітичні рівняння рівноваги мають вигляд:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; X_A + F_1 + F_2 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; -F_1 \cdot 0,5h - F_2 \cdot h - F_3 \cdot 3a - F_4 \cdot 2a + R_B \cdot 4a = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_B(\bar{F}_k) = 0; -F_1 \cdot 0,5h - F_2 \cdot h + F_3 \cdot a + F_4 \cdot 2a - Y_A \cdot 4a = 0.$$

З одержаних рівнянь знаходимо:

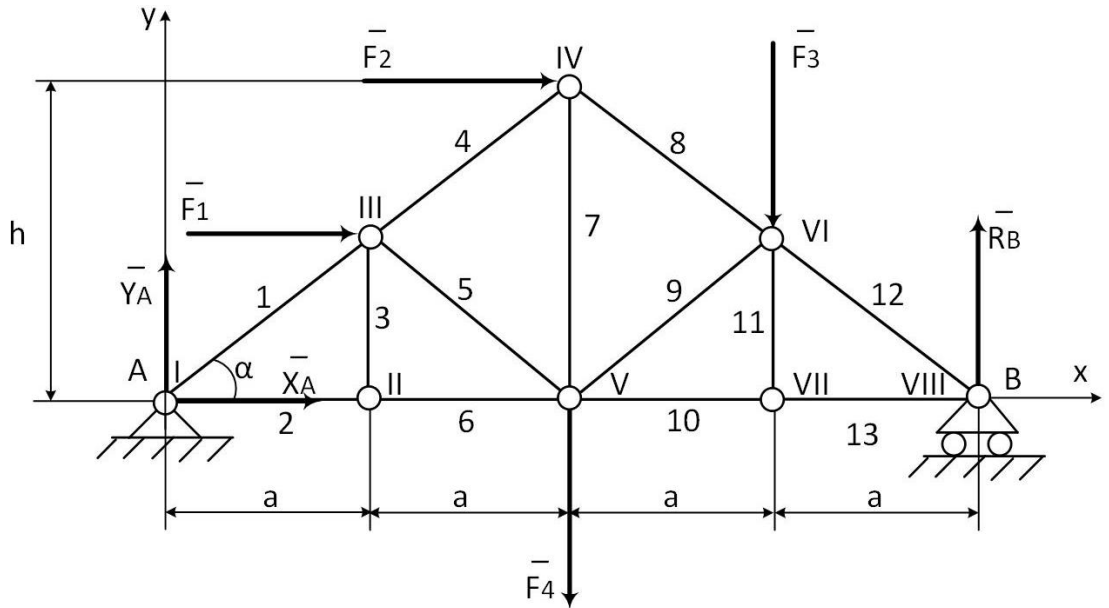


Рис. 9.2

$$X_A = -F_1 - F_2 = -35 \text{ kH};$$

$$R_B = \frac{F_1 \cdot 0,5h + F_2 \cdot h + F_3 \cdot 3a + F_4 \cdot 2a}{4a} = 45,2 \text{ kH};$$

$$Y_A = \frac{-F_1 \cdot 0,5h - F_2 \cdot h + F_3 \cdot a + F_4 \cdot 2a}{4a} = 9,8 \text{ kH}.$$

Виконуємо перевірку:

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; Y_A + R_B - F_3 - F_4 = 9,8 + 45,2 - 25 - 30 = 0.$$

Визначаємо зусилля в стержнях методом вирізання вузлів. Вузли пронумеруємо римськими цифрами, а стержні – арабськими. Вирізаємо уявно вузли, розсікаючи стержні. Дію відкинутих стержнів замінюємо силами, спрямованими вздовж відповідних стержнів від вузлів, тобто на розтяг. Шукані зусилля позначимо S_1 (у стержні 1), S_2 (стержні 2) і т. д. Якщо в результаті розрахунків значення зусилля в якому-небудь стержні буде від'ємним, це означає, що даний стержень не розтягується, а стискається.

Починаємо розв'язок з вузла I в якому сходяться два стержні 1 і 2 (рис. 9.3).

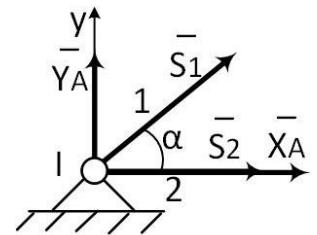


Рис. 9.3

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; S_2 + S_1 \cos \alpha + X_A = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; S_1 \sin \alpha + Y_A = 0.$$

Значення $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$ знаходимо враховуючи задані розміри ферми.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2a} = \frac{2,5}{3} = 0,83, \text{ відповідно } \sin \alpha = 0,64, \text{ а } \cos \alpha = 0,77.$$

З рівнянь рівноваги знаходимо:

$$S_1 = -\frac{Y_A}{\sin \alpha} = -\frac{9,8}{0,64} = -15,3 \text{ кН};$$

$$S_2 = -S_1 \cos \alpha - X_A = -(-15,3)0,77 - (-35) = 46,9 \text{ кН};$$

Знаки показують, що стержень 1 стискається, стержень 2 – розтягується.

Наступним розглядаємо вузол II в якому сходяться стержень 2 (зусилля в якому вже відоме) та стержні 3 і 6 (рис. 9.4).

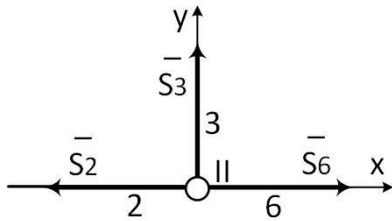


Рис. 9.4

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; -S_2 + S_6 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; S_3 = 0.$$

$$\text{Звідки } S_6 = S_2 = 46,9 \text{ кН}; S_3 = 0.$$

Стержень 6 розтягується, а стержень 3 – не навантажений.

Далі можна розглянути рівновагу вузла III в якому сходяться чотири стержні (рис. 9.5). Зусилля S_1 та S_3 відомі. З рівнянь рівноваги знайдемо S_4 і S_5 .

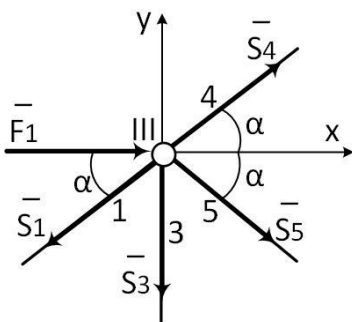


Рис. 9.5

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; F_1 - S_1 \cos \alpha + S_4 \cos \alpha + S_5 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; S_4 \sin \alpha - S_1 \sin \alpha - S_5 \sin \alpha - S_3 = 0.$$

Розв'язуємо рівняння:

$$+ \begin{cases} \frac{F_1}{\cos \alpha} - S_1 + S_4 + S_5 = 0; \\ -S_1 + S_4 - S_5 = 0; \end{cases}$$

$$\text{Остаточно } S_4 = S_1 - \frac{F_1}{2 \cos \alpha} = -15,3 - \frac{15}{2 \cdot 0,77} = -25,1 \text{ кН};$$

$$S_5 = S_4 - S_1 = -25,1 - (-15,3) = -9,8 \text{ кН}.$$

Як показують знаки, обидва стержні стиснуті.

Для вузла IV (рис. 9.6) зусилля S_4 відоме, тому з рівнянь рівноваги визначимо S_7 і S_8 .

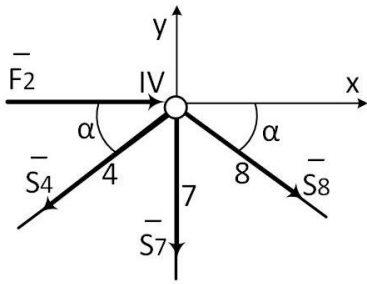


Рис. 9.6

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; F_2 - S_4 \cos \alpha + S_8 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; -S_4 \sin \alpha - S_7 - S_8 \sin \alpha = 0.$$

$$S_8 = S_4 - \frac{F_2}{\cos \alpha} = -25,1 - \frac{20}{0,77} = -51,1 \text{ kH};$$

$$S_7 = -S_4 \sin \alpha - S_8 \sin \alpha = -(-25,1)0,64 -$$

$$- (-51,1)0,64 = 48,8 \text{ kH}.$$

Робимо висновок, що зусилля у стержні 8 діє на стиск, а в стержні 7 – на розтяг.

Наступним розглядаємо вузол VIII в якому сходяться два стержні 12 і 13 з невідомими зусиллями (рис. 9.7).

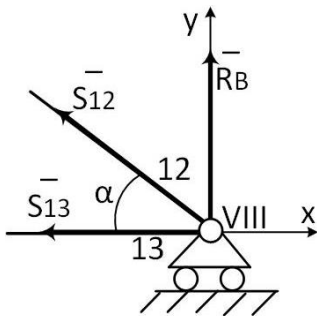


Рис. 9.7

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; -S_{12} \cos \alpha - S_{13} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; S_{12} \sin \alpha + R_B = 0.$$

Звідки

$$S_{12} = -\frac{R_B}{\sin \alpha} = -\frac{45,2}{0,64} = -70,6 \text{ kH};$$

$$S_{13} = -S_{12} \cos \alpha = -(-70,6)0,77 = 54,3 \text{ kH}.$$

Стержень 13 розтягується, а стержень 12 – стискається.

Для знаходження зусиль у 9 та 11 стержнях розглянемо рівновагу вузла VI (рис. 9.8).

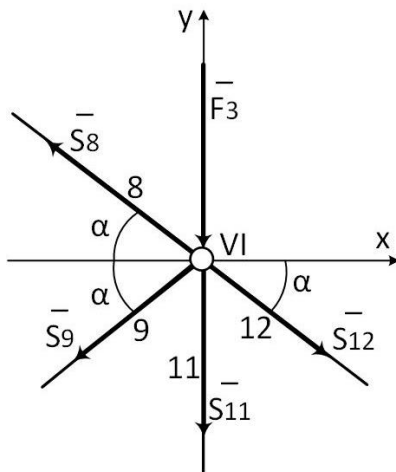


Рис. 9.8

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; S_{12} \cos \alpha - S_8 \cos \alpha - S_9 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; -S_{12} \sin \alpha - F_3 + S_8 \sin \alpha - S_9 \sin \alpha - S_{11} = 0.$$

З записаних рівнянь знаходимо:

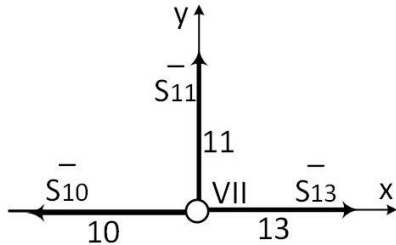
$$S_{12} - S_8 - S_9 = 0, \text{ отже}$$

$$S_9 = S_{12} - S_8 = -70,6 - (-51,1) = -19,5 \text{ kH};$$

$$S_{11} = (S_8 - S_{12} - S_9)\sin\alpha - F_3 = (-51,1 - (-70,6) - (-19,5))0,64 - 25 = 0$$

Стержень 9 стискається, а стержень 11 – не навантажений.

Зусилля в останньому стержні 10 знаходимо розглянувши рівновагу вузла VII (рис. 9.9).



$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; S_{13} - S_{10} = 0,$$

Отже, $S_{10} = S_{13} = 54,3 \text{ кН}$.

Стержень 10 розтягується.

Рис. 9.9

Відповідь: Результати розрахунків наведемо в таблиці.

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Знак реакції стержня	-	+		-	-	+	+	-	-	+		-	+
Значення реакції стержня, кН	15,3	46,9	0	25,1	9,8	46,9	48,8	51,1	19,5	54,3	0	70,6	54,3

Наявність в фермі ненавантажених (нульових) стержнів, подібних до стержнів 3 і 11, виявляється одразу, оскільки якщо у вузлі, не навантаженому зовнішніми силами, сходяться три стержні, два з яких спрямовані вздовж однієї прямої, то зусилля в третьому стержні дорівнює нулю. Цей результат впливає з рівняння рівноваги проекцій сил на вісь, перпендикулярну до цих двох стержнів.

9.2.2 Спосіб Риттера (спосіб перерізів)

Цим методом доцільно користуватися для визначення зусиль в окремих стержнях ферми, зокрема для перевірочних розрахунків. Ідея методу полягає в тому, що ферму розділяють на дві частини перетином, що проходить через три стержні, в яких (або в одному з яких) необхідно визначити зусилля, і розглядають рівновагу однієї з цих частин. Дію відкинутої частини замінюють відповідними реакціями, спрямовуючи їх уздовж розрізаних стержнів від перетину, тобто вважаючи стержні розтягнутими (як і в методі вирізання вузлів).

Для частини ферми, що залишилася складають три рівняння рівноваги з трьома невідомими зусиллями. Найчастіше ці рівняння є умовами рівності нулю алгебраїчних сум моментів сил відносно трьох різних центрів, за які обирають точки попарного перетину розсічених стержнів. Ці точки називаються *точками Риттера*.

Якщо два стержні з трьох розсічених паралельні, то відповідна точка Ріттера віддаляється у нескінченність. Тоді складають два рівняння моментів сил і одне рівняння проєкцій сил на вісь, перпендикулярну до паралельних стержнів.

Приклад 9.2 Для плоскої ферми, розглянутої в прикладі 9.1 (рис. 9.2) методом Ріттера перевірити зусилля в трьох стержнях, наприклад 8, 9 і 10.

Розв'язок: Реакції в опорах ферми вже визначені в попередньому прикладі, тому для визначення зусиль S_8 , S_9 , S_{10} робимо перетин ферми по вказаних стержнях (рис. 9.10). Дію відкинутої лівої частини ферми на праву замінюємо реакціями розсічених стержнів направленими на розтяг. Для одержаної плоскої довільної системи сил записуємо три рівняння рівноваги, як суми моментів сил відносно точок Ріттера (V, VI, VIII).

$$\sum_{k=1}^n M_V(\bar{F}_k) = 0;$$

$$R_B 2a - F_3 a + S_8 2a \sin \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_{VI}(\bar{F}_k) = 0;$$

$$R_B a - S_{10} 0,5h = 0$$

$$\sum_{k=1}^n M_{VIII}(\bar{F}_k) = 0;$$

$$F_3 a + S_9 2a \sin \alpha = 0.$$

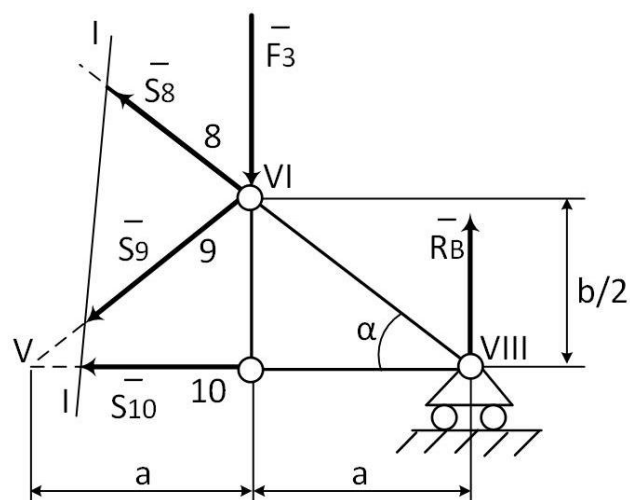


Рис. 9.10

З кожного рівняння знаходимо зусилля в певному стержні:

$$S_8 = \frac{F_3 a - R_B 2a}{2a \sin \alpha} = \frac{25 - 45,2 \cdot 2}{2 \cdot 0,64} = -51,09 \text{ кН};$$

$$S_{10} = \frac{R_B a}{0,5h} = \frac{45,2 \cdot 1,5}{0,5 \cdot 2,5} = 54,3 \text{ кН};$$

$$S_9 = -\frac{F_3 a}{2a \sin \alpha} = -\frac{25}{2 \cdot 0,64} = -19,5 \text{ кН}.$$

Знак “мінус” тут означає, що стержні 8 і 9 стиснені.

Відповідь. $S_8 = -51,09 \text{ кН}$, $S_9 = -19,5 \text{ кН}$, $S_{10} = 54,3 \text{ кН}$, Знайдені значення співпадають з отриманими раніше способом вирізання вузлів і підтверджують правильність результатів.

9.3 Графічне знаходження реакцій в'язей ферми за допомогою силового та мотузкового багатокутників

При графічних розрахунках ферму та діюче на неї навантаження зображаємо в масштабі. Потім будуємо силовий багатокутник і знаходимо рівнодійну зовнішніх сил, діючих на ферму: $\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$. Після цього переходимо до побудови мотузкового багатокутника в площині ферми. Розглянемо хід графічних побудов для визначення реакцій в'язей ферми на прикладі.

Приклад 9.3 Для плоскої ферми, розглянутої в прикладі 9.1 (рис. 9.2) визначити графічно реакції в'язей.

Розв'язок: Насамперед вибираємо масштаб побудови (10 мм – 1 м) та зображаємо ферму без нумерації стержнів (рис. 9.11).

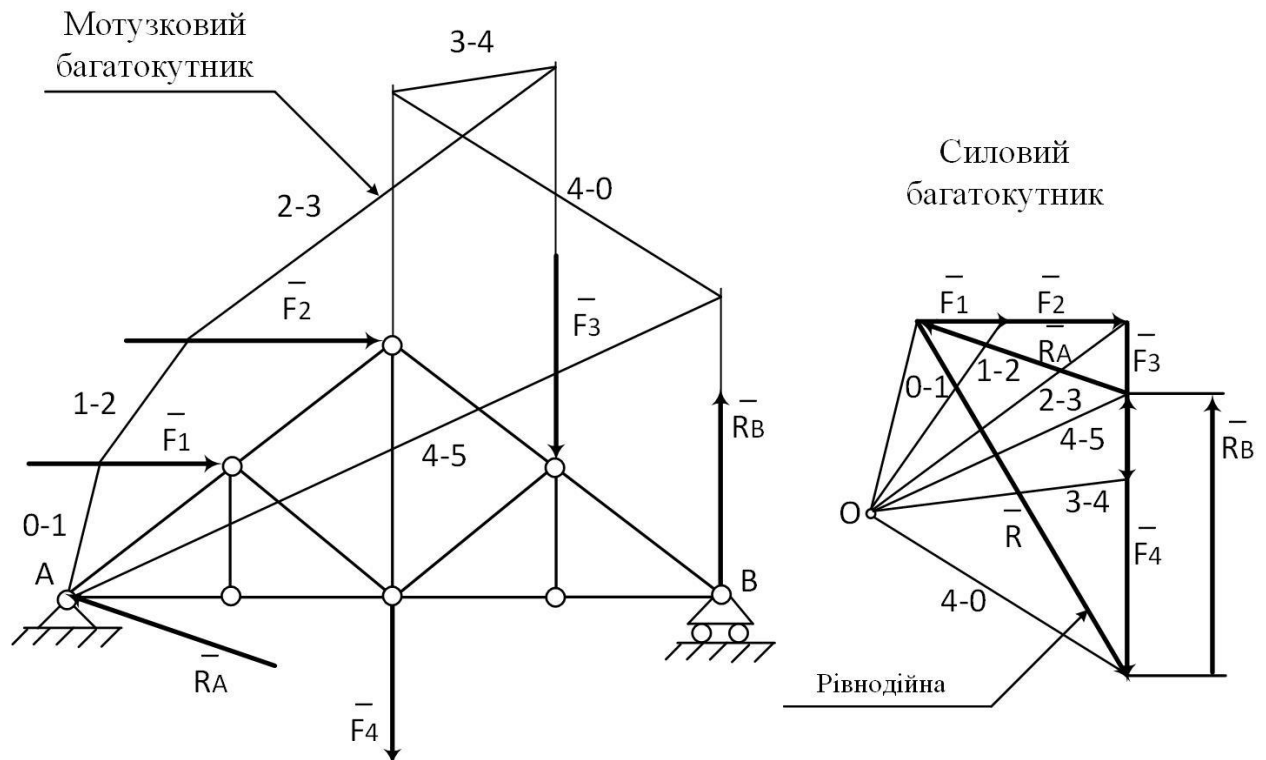


Рис. 9.11

Модуль і напрямок рівнодійної $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4$ заданої системи сил визначаємо побудовою у вибраному масштабі силового багатокутника.

$$\mu_F = \frac{15 \text{ кН}}{10 \text{ мм}} = 1,5 \frac{\text{кН}}{\text{мм}}.$$

Довільно вибираємо полюс O , який з'єднуємо променями $O-1, 1-2, 2-3, 3-4$ і $4-O$ з початками та кінцями векторів сил системи ($\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4$).

Мотузковий багатокутник будуємо в площині ферми. З точки A (точки

опори напрям реакції якої невідомий) проводимо пряму, паралельну променю $O-1$, до перетину з лінією дії сили \bar{F}_1 . Зі знайденої точки проводимо пряму паралельну променю $1-2$, до перетину з лінією дії сили \bar{F}_2 . З цієї точки проводимо наступну пряму паралельну променю $2-3$, до перетину з лінією дії сили \bar{F}_3 . Далі з отриманої точки проводимо пряму паралельну променю $3-4$, до перетину з лінією дії сили \bar{F}_4 . Останню пряму, паралельну променю $4-O$ проводимо до перетину з відомою лінією дії реакції опори B . Знайдену точку з'єднуємо з точкою опори A променем $4-5$. Утворена ламана лінія $(O-1) - (1-2) - (2-3) - (3-4) - (4-O) - (4-5)$ називається *мотузковим багатокутником*. Промінь $4-5$, яким завершується побудова мотузкового багатокутника, дає змогу знайти реакції опор ферми.

Величину і напрямок реакцій опор \bar{R}_A і \bar{R}_B визначаємо виходячи з умов рівноваги плоскої системи сил, які полягають в тому, що силовий і мотузковий багатокутник мають бути замкнені.

Паралельним переносом проводимо промінь $4-5$ через полюс O силового багатокутника. Цей промінь дозволяє розкласти рівнодійну активних сил на дві сили реакцій опор (так як за модулем ця рівнодійна дорівнює рівнодійній реакцій опор, а за напрямом протилежна їй).

$$\bar{R} = \bar{R}_A + \bar{R}_B.$$

З кінця рівнодійної \bar{R} проводимо лінію дії реакції \bar{R}_B до перетину з променем $4-5$, знайдену точку перетину з'єднуємо з початком рівнодійної. Побудовані два вектори відповідають модулям і напрямкам шуканих реакцій опор A і B .

У вибраному масштабі значення кожної з реакцій становлять відповідно $R_A = 36,5 \text{ kH}$, $R_B = 46 \text{ kH}$.

Для порівняння одержаних значень реакцій з розрахованими аналітичним способом, знаходимо

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(-35)^2 + 9,8^2} = 36,35 \text{ kH};$$

$$R_B = 45,2 \text{ kH}.$$

Відповідь: $R_A = 36,35 \text{ kH}$, $R_B = 45,2 \text{ kH}$, отже, графічно реакцій в'язей ферми знайдені досить точно.

9.4 Знаходження зусиль в стержнях ферми графічним способом. Побудова діаграми Максвелла-Кремони

Для кожного вузла ферми будуємо замкнені багатокутники сил, щоб утворити діаграму Максвелла-Кремони. При цьому дотримуємося наступних правил:

1) креслимо в масштабі схему ферми і показуємо на ній всі зовнішні сили (задані та реакції в'язей), які діють на ферму (рис. 9.12);

2) розбиваємо площину ферми на області, що знаходяться між зовнішніми силами та стержнями ферми (зовнішні області), а також області між стержнями (внутрішні області). Зовнішні області позначають малими літерами – a, b, c, d, e, k , а внутрішні великими літерами – R, S, P, N, M, Q ;

3) зовнішні сили і зусилля в стержнях на діаграмі позначаємо двома літерами, що відповідають назвам тих областей, між якими знаходиться певна сила або певний стержень ферми;

4) обхід ферми та її вузлів здійснюємо за ходом годинникової стрілки.

Будуємо в масштабі силовий багатокутник, як основу діаграми Максвелла-Кремони:

$$\mu_F = \frac{10 \text{ кН}}{10 \text{ мм}} = 1 \frac{\text{кН}}{\text{мм}}$$

Починаємо побудову з сили \bar{R}_A , яка лежить на межі зовнішніх областей a і b . При обході ферми за ходом годинникової стрілки перетинаємо лінію дії цієї сили, переходячи з області a в область b . На діаграмі у вибраному масштабі силу \bar{R}_A зображаємо вектором \bar{ab} , де першою літерою a фіксуємо початок цього вектору (відповідає області a), а другою b – кінець вектору \bar{R}_A (відповідає області b) (рис 9.13).

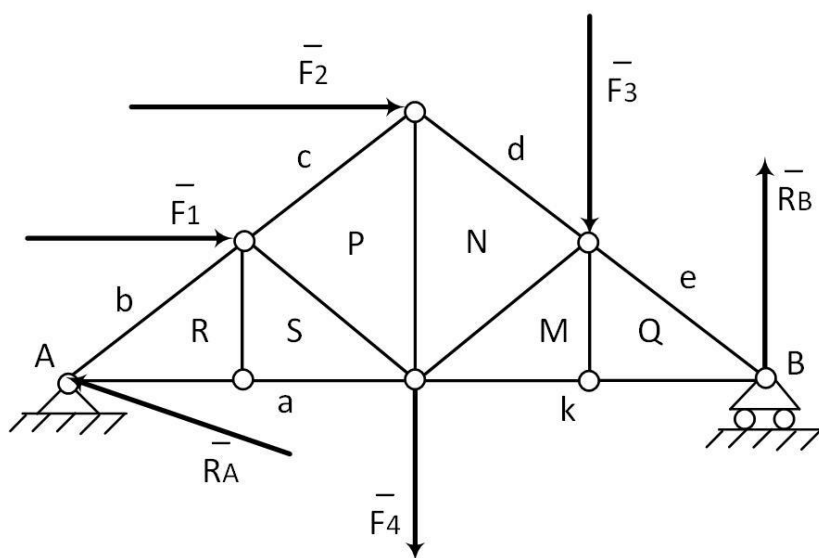


Рис. 9.12

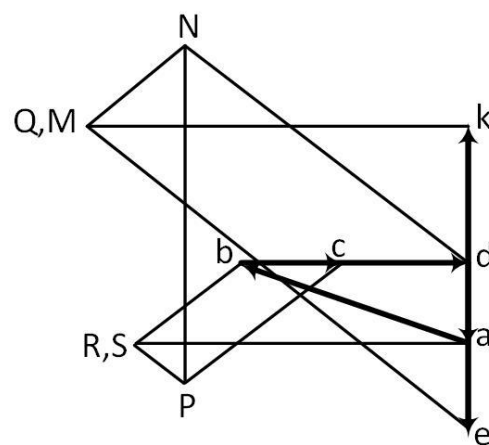


Рис. 9.13

Аналогічно на діаграмі вектором \bar{bc} позначаємо наступну силу \bar{F}_1 , вектором \bar{cd} – силу \bar{F}_2 , далі слідує сила \bar{F}_3 , яку зображаємо вектором \bar{de} , потім реакція \bar{R}_B , зображена вектором \bar{ek} і сила \bar{F}_4 , яку позначаємо вектором \bar{ka} . Одержану замкнену діаграму зовнішніх сил виділяємо товщими лініями.

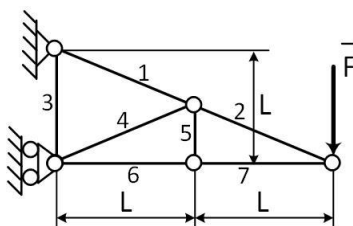
Визначення зусиль в стержнях ферм починаємо з побудови замкненого багатокутника сил для вузла A . Обходячи ферму за годинниковою стрілкою, з точки b проводимо пряму, паралельну стержню 1, а з точки a – пряму, паралельну стержню 2. Точка перетину R цих прямих на рис. 9.13 дає змогу визначити зусилля в стержнях \bar{S}_1 і \bar{S}_2 , які на діаграмі зображено відрізками bR (\bar{S}_1) та Ra (\bar{S}_2).

Таким же чином будуюмо діаграму для вузла II , так як в цьому вузлі сходяться два стержні (3 і 6) з невідомими зусиллями \bar{S}_3 та \bar{S}_6 . На рис. 9.13 з точки R проводимо пряму, паралельну стержню 3, а з точки a – пряму паралельну стержню 6. Зусилля в стержні 3 зображується відрізком RS , а так ці точки (R і S) співпадають, то величина $\bar{S}_3 = 0$. Зусилля в стержні 6 – це відрізок Sa діаграми.

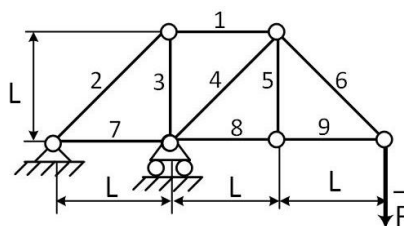
Цим способом будуюмо багатокутники сил і для інших вузлів ферми, закінчуючи вузлом $VIII$ (опора B). При цьому враховуємо той факт, що побудова багатокутників сил можлива для вузлів, де сходяться не більше двох невідомих зусиль. Правильність побудови діаграми Максвелла-Кремони підтверджується її замкнутістю на вузлі $VIII$ (опора B).

9.5 Питання для самоконтролю

1. Що називається фермою?
2. Як класифікують ферми?
3. Які ферми називаються фермами без зайвих стержнів?
4. Які ферми називаються статично визначеними?
5. Які спрощення застосовують при розрахунку ферм?
6. Які способи використовують при розрахунках ферм?
7. В чому полягає спосіб вирізання вузлів?
8. Скільки рівнянь рівноваги складають для вирізаного вузла?
9. Як виявити в фермі ненавантажені (нульові) стержні?
10. У чому полягає спосіб Ріттера (спосіб перетинів)?
11. Як графічно визначити реакції зовнішніх опор ферми?
12. Як побудувати силовий багатокутник?
13. Як побудувати мотузковий багатокутник?
14. Які правила побудови діаграми Максвелла-Кремони?
15. Як позначаються зовнішні сили і зусилля в стержнях на діаграмі Максвелла-Кремони?
16. Як здійснюють обхід ферми та її вузлів?
17. Знайдіть зусилля в стержні 6 заданої ферми. Сила $F = 360 \text{ Н}$.



18. Знайдіть зусилля в стержні 4 заданої ферми. Сила $F = 340 \text{ Н}$.



19. Що означає масштабний коефіцієнт μ_F ?

ЛЕКЦІЯ 10. ЦЕНТР ВАГИ ТВЕРДОГО ТІЛА

10.1 Центр паралельних сил

Розглянемо систему n -паралельних сил (рис. 10.1). Для наочності припустимо, що сили вертикальні, а систему координат виберемо так, що вісь Oz буде паралельною силам.

Для такої системи сил можливі наступні окремі випадки зведення до центра O :

1. $\bar{R} = 0, \bar{M}_O \neq 0$ – система зводиться до пари сил, рівною головному моменту;
2. $\bar{R} = 0, \bar{M}_O = 0$ – система знаходиться в рівновазі;
3. $\bar{R} \neq 0, \bar{M}_O = 0$ – система зводиться до рівнодійної;
4. $\bar{R} \neq 0, \bar{M}_O \neq 0$ – система зводиться до рівнодійної.

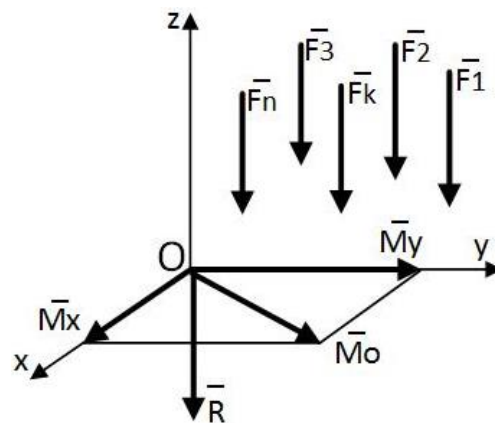


Рис. 10.1

Так як всі сили паралельні осі Oz , то $\bar{R} = \bar{R}_z$. Для проєкцій головного моменту маємо

$$M_x = \sum_{k=1}^n m_x(\bar{F}_k) \neq 0;$$

$$M_y = \sum_{k=1}^n m_y(\bar{F}_k) \neq 0;$$

$$M_z = \sum_{k=1}^n m_z(\bar{F}_k) \equiv 0 \text{ (сили паралельні осі } Oz).$$

Отже, головний момент знаходиться в площині Oxy , тобто $\bar{M}_O \perp \bar{R}$. Скалярний інваріант дорівнює нулю $\bar{M}_O \cdot \bar{R} = 0$ і система зводиться до рівнодійної.

Знайдемо точку її прикладання (рис. 10.2).

За теоремою про момент рівнодійної для системи паралельних сил, яка зводиться до рівнодійної, можна записати

$$\bar{M}_O(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k) \quad (10.1)$$

Вважаємо, що сили прикладені в фіксованих точках, визначених їх радіусами-векторами – $(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n)$.

Виберемо одиничний вектор \bar{e} вздовж осі Oz . Тоді кожна з паралельних сил рівна: $\bar{F}_k = \bar{e}F_k$.

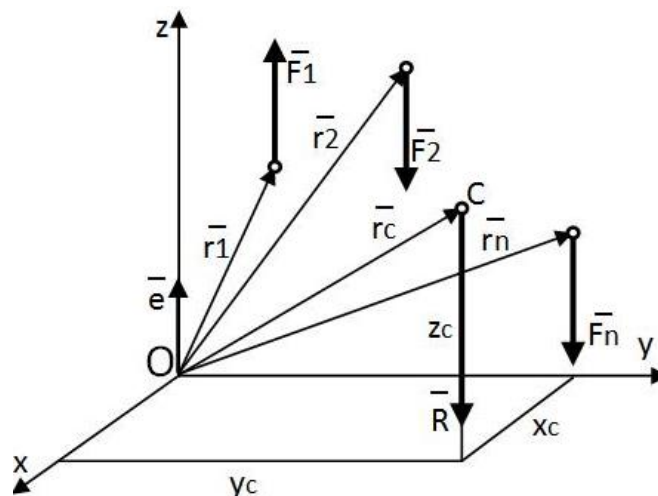


Рис. 10.2

Для рівнодійної маємо:

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k = \bar{e} \sum_{k=1}^n F_k.$$

Знайдемо моменти сил та рівнодійної відносно центра системи координат:

$$\bar{M}_O(\bar{R}) = \bar{r}_C \times \bar{R} = \bar{r}_C \times \bar{e} \sum_{k=1}^n F_k \quad (10.2)$$

$$\bar{M}_O(\bar{F}_k) = \bar{r}_k \times \bar{F}_k = \bar{r}_k \times \bar{e} F_k \quad (10.3)$$

Підставивши вирази (10.2) і (10.3) в формулу (10.1) отримаємо:

$$\bar{r}_C \times \bar{e} \sum_{k=1}^n F_k = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{e} F_k \quad \text{або}$$

$$(\bar{r}_C \sum_{k=1}^n F_k - \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k F_k)) \times \bar{e} = 0 \quad (10.4)$$

Вираз (10.4) не залежить від напрямку одиничного вектору і може виконуватись при перетворенні в нуль множника в дужках:

$$\bar{r}_C \sum_{k=1}^n F_k - \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k F_k) = 0.$$

Тоді

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n (\bar{r}_k F_k)}{\sum_{k=1}^n F_k} \quad (10.5)$$

Векторну величину $\sum_{k=1}^n (\bar{r}_k F_k)$ називають *статичним моментом системи паралельних сил відносно центра O*.

Проектуючи (10.5) на осі координат, маємо:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k F_k}{\sum_{k=1}^n F_k}, \\ y_C &= \frac{\sum_{k=1}^n y_k F_k}{\sum_{k=1}^n F_k}, \\ z_C &= \frac{\sum_{k=1}^n z_k F_k}{\sum_{k=1}^n F_k}. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Формули (10.6) дозволяють визначити положення центра паралельних сил – точки *C* через яку проходить лінія дії рівнодійної \bar{R} .

Алгебраїчні величини $\sum_{k=1}^n x_k F_k$, $\sum_{k=1}^n y_k F_k$, $\sum_{k=1}^n z_k F_k$ називають *статичними моментами відносно координатних площин*.

10.2 Центр ваги однорідного твердого тіла

Згідно з законом всесвітнього тяжіння на всі частинки тіла, що знаходиться поблизу поверхні Землі, діє сила притягання до Землі. Ця сила називається *силою тяжіння*, або *силою ваги*. Якщо тіло розбити на елементарні частини, вага яких $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ (рис. 10.3) і врахувати, що розміри тіла незначні порівняно з розмірами Землі, то сили ваги елементарних частин тіла \bar{P}_k з достатньо великою точністю утворюють систему паралельних сил.

Рівнодійна сил ваги окремих частин тіла називається вагою тіла

$$\bar{P} = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k \quad (10.7)$$

Враховуючи, що сили ваги елементарних частин тіла \bar{P}_k паралельні і направлені в один бік, векторну рівність (10.7) можна записати у вигляді

$$P = \sum_{k=1}^n P_k,$$

Тобто вага тіла дорівнює алгебраїчній сумі сил ваги окремих його частин.

Вага тіла, яка є рівнодійною системи паралельних сил \bar{P}_k прикладається в центрі цих паралельних сил.

Центр паралельних сил ваги окремих частин тіла, в якому прикладена сила ваги всього тіла, називається центром ваги тіла.

На рис. 10.3 центр ваги тіла позначено буквою C . Координати точки C можна розрахувати за формулами (10.6) замінивши F_k на P_k .

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k P_k}{\sum_{k=1}^n P_k} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k P_k}{P}, \\ y_C &= \frac{\sum_{k=1}^n y_k P_k}{\sum_{k=1}^n P_k} = \frac{\sum_{k=1}^n y_k P_k}{P}, \\ z_C &= \frac{\sum_{k=1}^n z_k P_k}{\sum_{k=1}^n P_k} = \frac{\sum_{k=1}^n z_k P_k}{P}. \end{aligned} \quad (10.8)$$

де P_k – вага окремої частини тіла;

x_k, y_k, z_k – координати частини тіла.

Формули (10.8) дозволяють визначити координати центра ваги тіла.

Для тіл, вага яких розподілена безперервно по об'єму, суму замінюють інтегруванням і формули (10.8) набувають вигляду

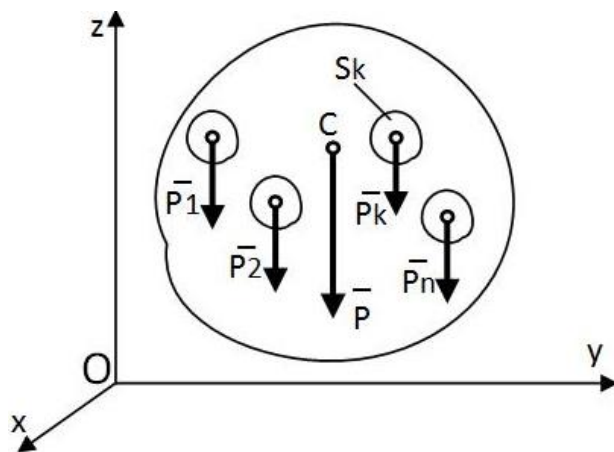


Рис. 10.3

$$x_C = \frac{\int_V x dP}{P}; y_C = \frac{\int_V y dP}{P}; z_C = \frac{\int_V z dP}{P} \quad (10.9)$$

10.2.1 Центр ваги однорідного об'ємного тіла

До однорідних тіл віднесемо тіла, питома вага яких по об'єму є постійною $\rho = const$. Тоді

$$P = \rho V, P_k = \rho V_k$$

де V – об'єм тіла;

V_k – об'єм частинки тіла.

Підставивши ці значення в формули (10.8)

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n x_k P_k}{P} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \rho V_k}{\rho V} = \frac{\rho \sum_{k=1}^n x_k V_k}{\rho V} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k V_k}{V},$$

отримаємо

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n x_k V_k}{V};$$

$$y_C = \frac{\sum_{k=1}^n y_k V_k}{V}, \quad (10.10)$$

$$z_C = \frac{\sum_{k=1}^n z_k V_k}{V}.$$

Рівняння (10.10) дозволяють визначити координати центра ваги об'ємного тіла.

10.2.2 Центр ваги однорідного плоского тіла

Розглянемо однорідне плоске тіло розміщене в площині Oxy (рис. 10.4). Його вагу і вагу окремих його частин можна визначити за формулами

$$P = \rho S, P_k = \rho S_k,$$

де ρ – вага одиниці площі тіла;

S – площа тіла;

S_k – площа k -тої частини тіла.

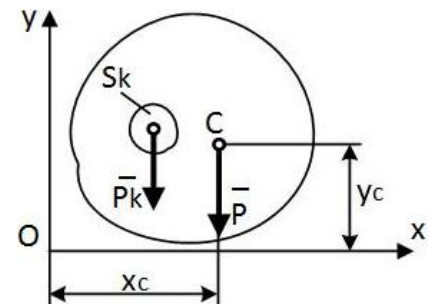


Рис. 10.4

Врахувавши це, з формул (10.8) отримаємо

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n x_k S_k}{S};$$

$$y_C = \frac{\sum_{k=1}^n y_k S_k}{S}.$$

(10.11)

Рівняння (10.11) дозволяють визначити *координати центра ваги плоского тіла*.

Зазначимо, що:

сума добутків площі кожного елемента плоскої фігури на його відстань до деякої осі, яка лежить у площині фігури, називається статичним моментом плоскої фігури відносно цієї осі.

10.2.3 Центр ваги однорідного лінійного тіла

Позначимо ρ – вагу одиниці довжини однорідного лінійного тіла. Тоді його вага і вага його частини відповідно рівні

$$P = \rho L, P_k = \rho l_k,$$

L – довжина тіла;

l_k – довжина k -того елемента тіла.

Підставивши ці значення в формули (10.8), отримаємо

$$\begin{aligned}x_C &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k l_k}{L}, \\y_C &= \frac{\sum_{k=1}^n y_k l_k}{L}, \\z_C &= \frac{\sum_{k=1}^n z_k l_k}{L}.\end{aligned}\tag{10.12}$$

Рівняння (10.12) дозволяють визначити *координати центра ваги лінійного тіла* (наприклад, стержневої конструкції, ламаної лінії та т. п.).

10.3 Способи визначення положення центра ваги тіл

10.3.1 Метод симетрії

Якщо тіло має площину, вісь чи центр симетрії, то центр ваги тіла знаходиться відповідно або в площині симетрії, або на осі симетрії, або в центрі симетрії.

Припустимо, наприклад, що однорідне тіло має площину симетрії. Тоді цією площиною воно розбивається на дві такі частини, вага яких P_1 і P_2 рівна, а центри ваги знаходяться на однакових відстанях від площини симетрії. Отже, центр ваги тіла як точка, через яку проходить рівнодіюча двох рівних і паралельних сил \bar{P}_1 і \bar{P}_2 , буде дійсно лежати в площині симетрії. Аналогічний результат отримаємо і у випадках, коли тіло має вісь або центр симетрії.

З властивостей симетрії слідує, що центр ваги однорідного круглого кільця,

круглої чи прямокутної пластини, прямокутного паралелепіпеда, кулі та інших однорідних тіл, які мають центри симетрії, лежить в геометричному центрі (центрі симетрії) цих тіл.

10.3.2 Метод розбивання

Якщо тіло можна розбити на скінченне число таких частин, для кожної з яких положення центра ваги відоме, то координати центра ваги всього тіла можна безпосередньо визначити за формулами (10.10) – (10.12). При цьому число доданків в кожній з сум буде рівним числу частин, на які розбите тіло.

Приклад 10.1 Визначити координати центра ваги однорідної пластини, зображеної на рис. 10.5. Всі розміри в сантиметрах.

Розв'язок. Проводимо осі x , y , і розбиваємо пластину на три прямокутника (лінії розбивання показані на рисунку). Обчислюємо координати центрів ваги кожного з прямокутників та їх площі. Дані заносимо в таблицю.

№ з/п	S_k	x_k	y_k	$S_k x_k$	$S_k y_k$
1	4	-1	1	-4	4
2	20	1	5	20	100
3	12	5	9	60	108

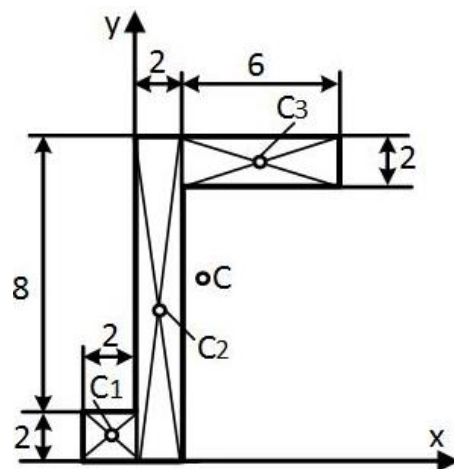


Рис. 10.5

Площа всієї пластини $S = S_1 + S_2 + S_3 = 36 \text{ см}^2$.

Підставляючи обчислені значення в формули (10.11), отримаємо:

$$x_C = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2 + x_3 S_3}{S} = \frac{-4 + 20 + 60}{36} = 2,11 \text{ см},$$

$$y_C = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2 + y_3 S_3}{S} = \frac{4 + 100 + 108}{36} = 5,89 \text{ см}.$$

Знайдене положення центра ваги C показано на рисунку.

Відповідь: $x_C = 2,11 \text{ см}$, $y_C = 5,89 \text{ см}$. Точка C виявилась за межами пластини.

10.3.3 Метод доповнення (від'ємних площ)

Цей метод являє собою окремий випадок методу розбивання. Він застосовується до тіл, які мають вирізані частини (отвори), якщо центри ваги тіла без отвору і вирізаної частини відомі або легко визначаються.

При розрахунках слід враховувати, що вирізані частини (отвори) мають від'ємні площі.

Приклад 10.2 Визначити положення центру ваги круглої пластини радіуса R з вирізаним отвором радіуса r (рис. 10.6). Відстань $C_1C_2 = a$.

Розв'язок. Центр ваги пластини лежить на лінії C_1C_2 , так як ця лінія – вісь симетрії. Проведемо осі координат. Для знаходження координати x_C доповнимо площу пластини до повного круга (частина 1), а потім віднімемо з отриманої площі площу вирізаного круглого отвору (частина 2). При цьому площа частини 2 (отвору) береться з від'ємним знаком. Тоді

$$S_1 = \pi R^2, S_2 = -\pi r^2, x_1 = 0, x_2 = a,$$

$$S = S_1 + S_2 = \pi(R^2 - r^2).$$

Підставляючи обчислені значення в формули (10.11), отримаємо:

$$x_C = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S} = -\frac{ar^2}{R^2 - r^2},$$

$$y_C = 0.$$

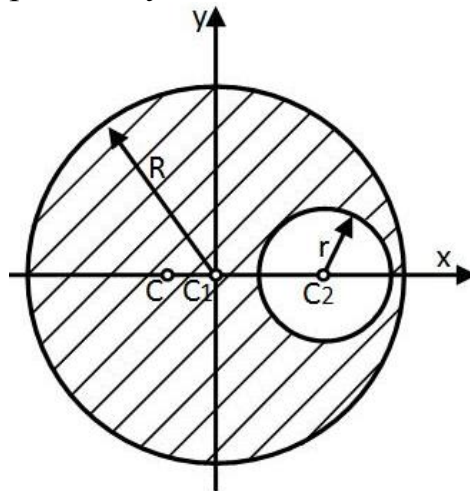


Рис. 10.6

Відповідь: $x_C = -\frac{ar^2}{R^2 - r^2}$, $y_C = 0$. Знайдений центр тяжіння C , як видно, знаходиться лівіше точки C_1 .

10.3.4 Експериментальні методи

Найпростішим експериментальним методом визначення положення центра ваги тіла є:

Метод підвішування.

Цей метод полягає в тому, що тіло підвішують за дві які-небудь точки (рис. 10.7). Так як на вільно підвішене тіло діють тільки дві сили (натяг нитки і вага тіла), то в положенні рівноваги ці сили діють вздовж однієї прямої в протилежних напрямках.

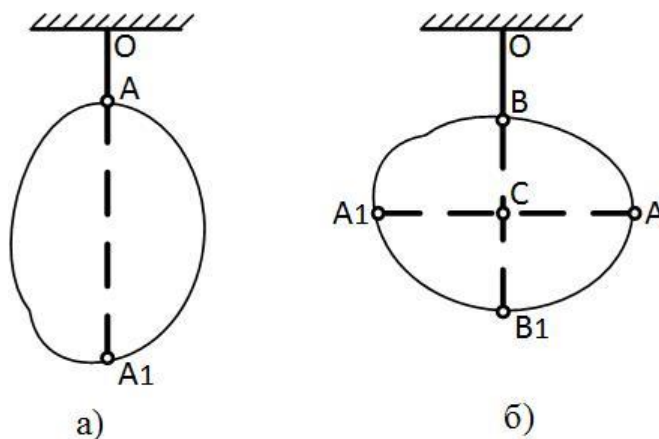


Рис. 10.7

Отже, центр ваги тіла буде знаходитись на лінії, що є продовженням нитки. Якщо тіло підвішене за точку A , то – на лінії AA_1 (рис. 10.7, а), якщо за точку B , то на лінії BB_1 (рис. 10.7, б). Точка C перетину цих ліній буде центром ваги тіла.

Метод зважування.

Для визначення положення центра ваги деякого тіла потрібно в точках A , B і D покласти його на платформи трьох ваг (рис. 10.8). Тіло знаходиться в рівновазі під дією чотирьох сил \bar{P} – ваги тіла, \bar{N}_1 , \bar{N}_2 , \bar{N}_3 – реакцій платформ, величини яких покажуть відповідні ваги. Ці сили утворюють систему паралельних сил. Складемо рівняння рівноваги

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \quad N_1 + N_2 + N_3 - P = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n m_x(\bar{F}_k) = 0, \quad N_3 y_D - P y_C = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n m_y(\bar{F}_k) = 0, \quad P x_C - N_2 x_B - N_3 x_D = 0.$$

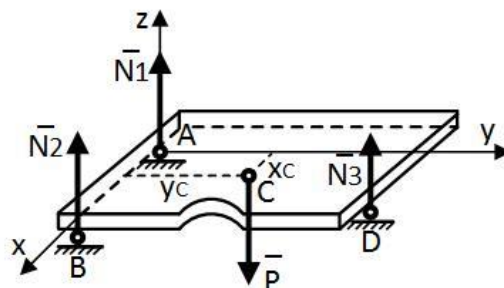


Рис. 10.8

З першого рівняння знаходимо вагу тіла

$$P = N_1 + N_2 + N_3.$$

З двох інших рівнянь визначаємо координати центра мас

$$y_C = \frac{N_3 y_D}{P};$$

$$x_C = \frac{N_2 x_B + N_3 x_D}{P}.$$

Координати x_B , x_D , y_D легко визначаються вимірюванням.

10.4 Питання для самоконтролю

1. Що називається системою паралельних сил?
2. До якого канонічного виду може зводитись система паралельних сил?
3. Що називається центром паралельних сил?
4. За якими формулами визначаються координати центра паралельних сил?
5. Що називається вагою тіла?
6. За якими формулами визначаються координати центра ваги однорідного плоского тіла?
7. Що називають статичним моментом системи паралельних сил відносно центра?
8. В чому полягає метод симетрії?
9. В чому сутність методу розбивання?
10. Поясніть особливості методу доповнення (від'ємних площ).
11. Які є експериментальні методи визначення положення центра ваги тіла?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 2001. – 416с.
3. Яскілка М.Б. Збірник завдань для розрахунково-графічних робіт з теоретичної механіки: Посібн. – К.: Вища шк., 1999. – 351 с.
4. Сборник коротких задач про теоретической механике / О.Є. Кеппе, Я.А. Виба, О.П. Грапис и др.; под ред. О.Є. Кеппе. – М.: Высш. шк., 1989. – 386 с.
5. Теоретична механіка. Збірник задач / О.С. Апостолюк, В.М. Воробйов, Д.І. Ільчишина та ін.; За ред. Павловського М.А. – К.: Техніка, 2007. – 400 с.
6. Теоретична механіка. Ч. II. Динаміка. Основи аналітичної механіки / [Литвинов О.І., Михайлович Я.М., Бойко А.В., Березовий М.Г.]. - К.: Агроосвіта, 2013. - 576 с.
7. Конспект лекцій із теоретичної механіки: навчальний посібник / Б. О. Іванов, М. В. Максюта. – К.: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2012. – 207 с.