МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРИЗОВАНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
МАШИНОБУДУВАННЯ ТА ДИЗАЙНУ

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. КІНЕМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

**для здобувачів освітнього рівня “бакалавр”
з технічних спеціальностей усіх форм навчання**

ЧЕРКАСИ 2018

УДК 531.2(075.8)
ББК 22.21 я 73
Т 33

Затверджено вченою радою ФКТМД,
протокол №   року
згідно з рішенням кафедри механіки, поліграфічних машин і технологій
протокол № року

Упорядники: Веретільник Тимофій Іванович, *канд. техн. наук., професор*
Мисник Людмила Дмитрівна, *канд. техн. наук., доцент*

Рецензент: Воронов С.О. *доктор техн. наук., професор*

Теоретична механіка. Кінематика. Конспект лекцій для здобувачів освітнього рівня “бакалавр” з технічних спеціальностей усіх форм навчання [Електронний ресурс] / [упоряд. Т.І. Веретільник, Л.Д. Мисник] ; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси: ЧДТУ, 2018. – с.

В основу навчального видання покладено досвід читання лекцій з теоретичної механіки для машинобудівних та будівельної спеціальностей в Черкаському державному технологічному університеті. Відмінною особливістю даного видання є його лаконічність і спеціальний підбір задач, переважно машинобудівної тематики.

Для студентів механічних та будівельних спеціальностей.

Навчальне електронне видання
мережного використання

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. КІНЕМАТИКА
КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
для здобувачів освітнього рівня “бакалавр”
з технічних спеціальностей усіх форм навчання

Упорядники: **Веретільник** Тимофій Іванович, **Мисник** Людмила Дмитрівна

В авторській редакції

ЗМІСТ

ВСТУП

Кінематика — це розділ теоретичної механіки, в якому вивчається механічний рух матеріальних точок, тіл чи систем без врахування умов, які спричинили, або змінили цей рух.

Рух матеріальних тіл відбувається в просторі і в часі. Простір розглядають як тривимірний евклідів, час у цьому просторі однаковий в усіх його точках і не залежить від руху матеріальних тіл.

Під механічним рухом розуміють зміну положення одного тіла відносно іншого.

Системою відліку називають систему координат, зв'язану з одним із тіл. Якщо тіло рухається, то система відліку рухома, якщо тіло в спокої, то і система відліку нерухома .

Основні задачі кінематики:

1. Встановлення закону руху точки, твердого тіла відносно вибраної системи відліку.
2. Визначення за заданим законом руху точки, твердого тіла кінематичних характеристик його руху (траєкторії, швидкості, прискорення, кутових швидкості та прискорення і т. і.).

ЛЕКЦІЯ 1. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

Найпростішим матеріальним тілом, яке вивчає теоретична механіка, є матеріальна точка.

Матеріальною точкою вважають тверде тіло, розмірами якого в даній задачі можна знехтувати. Рух точки вважають заданим, якщо відомий спосіб, що дозволяє встановити її положення відносно вибраної системи відліку в будь-який момент часу.

Траєкторією називають геометричне місце послідовних положень рухомої точки у вибраній системі відліку. Рух точки називають криволінійним, якщо точка переміщується по кривій лінії, і прямолінійним, якщо вона переміщується по прямій лінії. При цьому вид траєкторії залежить від системи відліку.

Основними способами задавання руху точки є: векторний, координатний, натуральний.

1.1 Векторний спосіб задавання руху

Векторний спосіб задавання руху полягає у визначенні положення точки радіусом-вектором, який є векторною функцією часу, відносно вибраної точки відліку.

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \tag{1.1}$$

Ця функція повинна бути однозначною та безперервною. Вираз (1.1) називають *законом руху точки у векторній формі*.

Траєкторія точки *M* при векторному способі — це геометричне місце точок кінців радіуса-вектору $\bar{r}$ при зміні часу, тобто годограф радіуса-вектора.

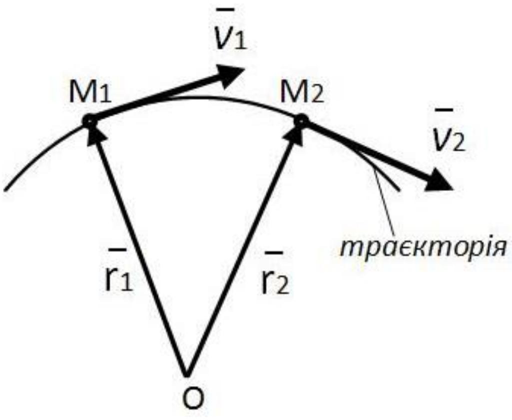


Рис. 1 1

Годограф — це крива, яку описує кінець радіуса-вектора при зміні його аргументу, коли початок вектору знаходиться в одній і тій же точці (рис. 1.1).

Швидкість точки – це фізична величина, яка вказує величину і напрямок її зміщення за одиницю часу в даний момент часу і рівна похідній радіуса-вектора точки за часом:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}} \qquad (1.2)$$

В механіці похідну за часом позначають точкою над змінною.

Напрямок вектора швидкості можна визначити, користуючись поняттям похідної вектора за скалярним аргументом, яка завжди направлена по дотичній до годографа даного вектору.

Вектор швидкості точки направлений по дотичній до траєкторії точки в бік її руху (рис. 1.1).

Прискорення точки – це фізична величина, яка вказує на величину і напрямок зміни вектора швидкості за одиницю часу в даний момент часу і рівна першій похідній вектора швидкості за часом або другій похідній радіуса-вектора за часом:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}} \qquad (1.3)$$

Вектор прискорення направлений по дотичній до *годографа вектора швидкості* (рис. 1.2).

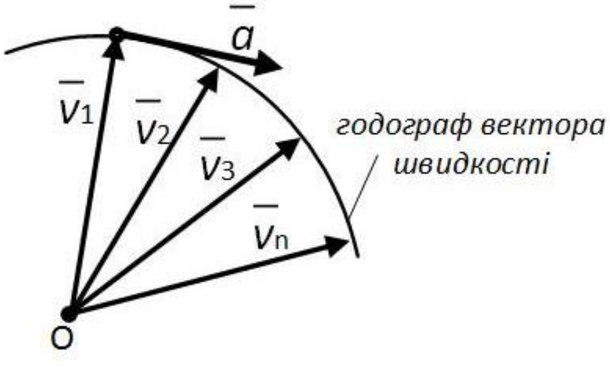


Рис. 1.2

<u>*Приклад 1.1* </u>Рух точки задано радіусом-вектором $\bar{r} = \bar{e} + \bar{b}t^2$, де $\bar{e}$ і $\bar{b}$ – постійні взаємно перпендикулярні вектори (рис. 1.3). Визначити траєкторію точки, а також швидкість та прискорення точки при *t = 2* с.

<u>Розв'язок.</u> Для побудови траєкторії задаємо час від *0* до *2* с і знайдемо величини радіуса-вектора в ці моменти часу:

$$t_0 = 0,\ \ \bar{r}_0 = \bar{e};$$

$$t_1 = 1\ c,\ \ \bar{r}_1 = \bar{e} + \bar{b};$$

$$t_2 = 2\ c,\ \ \bar{r}_2 = \bar{e} + 4\bar{b}.$$

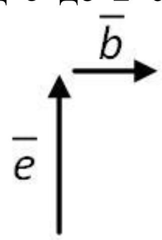


Рис. 1.3

З вибраного центру відкладемо вектори $\bar{r}_0$, $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ (рис. 1.4). Траєкторією руху буде пряма лінія.

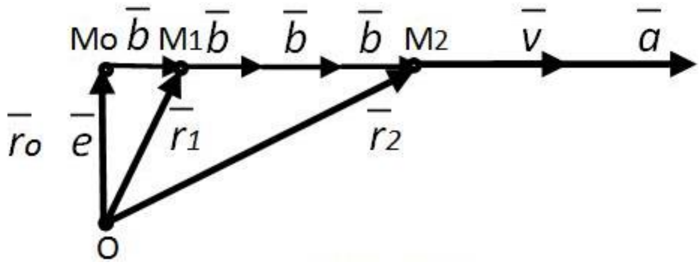


Рис. 1.4

Швидкість точки рівна:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = 2\bar{b}t.$$

При t = 2 с

$$\bar{v} = 4\bar{b}.$$

Вектор швидкості буде напрямлений по прямій M_0M_2 в бік збільшення відстані M_0M_2.

Прискорення точки рівне:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = 2\bar{b}.$$

Прискорення постійне, вектор прискорення направлений по прямій M_0M_2 в бік збільшення швидкості.

1.2 Координатний спосіб задавання руху

Координатний спосіб описання руху полягає в задаванні координат точки у вигляді відомих, безперервних, двічі диференційованих функцій часу.

Системи координат можуть бути різними: декартовими, полярними, сферичними, циліндричними і т. д.

В *декартовій системі координат* рівняннями руху точки мають вигляд

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t) \tag{1.4}$$

Приклад 1.2 Рух точки по гвинтовій лінії в декартовій системі координат можна задати трьома рівняннями (рис.1.5):

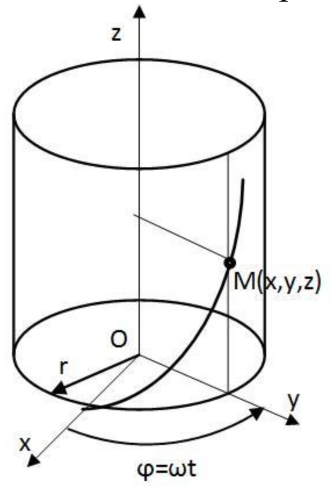


Рис. 1.5

1. $x = rcos\omega t$

2. $y = rsin\omega t$

3. $z = bt$

де b, ω постійні величини;
r — радіус циліндра.

1.3 Перехід від векторного способу задавання руху до координатного

Початок *декартової системи координат* розмістимо в точці *O* (рис. 1.6), відносно якої задано рух точки *M* у векторній формі: $\bar{r} = \bar{r}(t)$

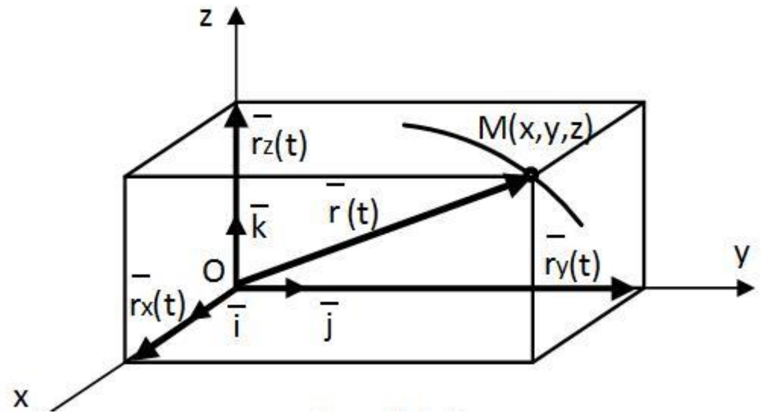


Рис. 1.6

Розкладемо радіус-вектор на координатні осі, використовуючи одиничні вектори $\bar{\imath}.\bar{\jmath},\bar{k}$:

$$\bar{r} = r_x(t)\bar{\imath} + r_y(t)\bar{\jmath} + r_z(t)\,\bar{k} \qquad (1.5)$$

Так як проекції радіуса-вектора рівні координатам точки, то

$$r_x(t) = x_M, r_y(t) = y_M, r_z(t) = z_M$$

Отже:

$$\bar{r} = x_M\bar{\imath} + y_M\bar{\jmath} + z_M\bar{k} \qquad (1.6)$$

Якщо використати вираз (2.1.4), то можна записати

$$\bar{r} = f_1(t)\bar{\imath} + f_2(t)\bar{\jmath} + f_3(t)\bar{k} \qquad (1.7)$$

Вираз (1.7) дозволяє перейти від координатного способу задавання руху до векторного.

Рівняння руху (1.4) є також рівняннями траєкторії точки в параметричному виді. Щоб одержати рівняння траєкторії в координатній формі, необхідно виключити з цих рівнянь час. Для цього виражаємо t з рівняння $x = f_1(t)$, тобто $t = F(x)$, і підставляємо його в інші рівняння:

$$y = \varphi_1(F(x)), \quad z = \varphi_2(F(x)) \tag{1.8}$$

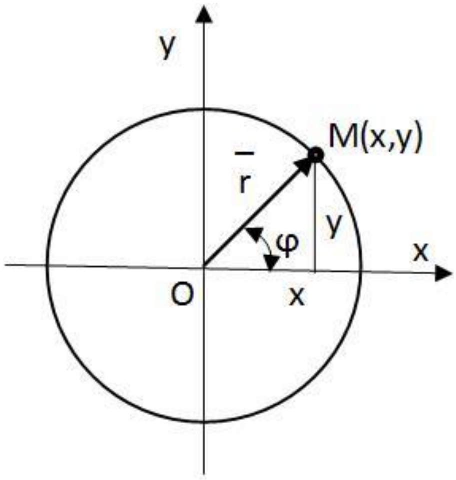
<u>*Приклад 1.3*</u> Рух точки задано рівняннями: $x = 4cos\pi t$, см; $y = 4sin\pi t$, см. Знайти траєкторію точки в координатній формі і задати рух точки у векторній формі (рис. 1.7).

<u>*Розв'язок.*</u> Виключимо час з рівнянь руху. Для цього підносимо обидві частини заданих рівнянь до квадрату і додаємо їх:

$$\frac{x^2}{4^2} = cos^2\pi t, \frac{y^2}{4^2} = sin^2\pi t$$

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{4^2} = cos^2\pi t + sin^2\pi t,$$

або $$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$



Траєкторія – коло радіуса 4 см.

Рис. 1.7

Для знаходження радіуса-вектора використаємо формулу (2.1.7):

$$\bar{r} = (4cos\pi t)\bar{\imath} + (4sin\pi t)\bar{\jmath}$$

<u>*Приклад 1.4*</u> Рух точки задано рівняннями $x = t^2 - 2,$ см; $y = 1 - \frac{t^2}{2},$ см. Знайти траєкторію точки в координатній формі.

<u>*Розв'язок.*</u> Перетворимо рівняння руху:

$$x = t^2 - 2, -2y = t^2 - 2$$

та одержимо рівняння траєкторії (рис. 1.8):

$$x = -2y$$

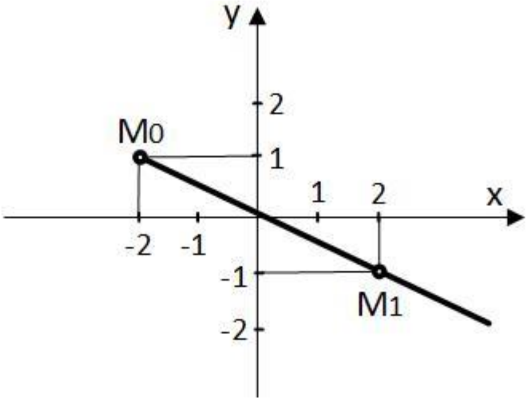


Рис. 1.8

Встановимо границі траєкторії.
Початок руху в точці M_O.
При $t = 0$ $x_O = -2$ см, $y_O = 1$ см;
при $t_1 = 2$ с $x_1 = 2$ см, $y_1 = -1$ см;
при $t \to \infty$ $x \to \infty$, $y \to -\infty$.

<u>*Відповідь.*</u> Траєкторією точки буде промінь, обмежений точкою M_O (–2,1).

1.4 Швидкість точки в декартових координатах

Швидкість точки в декартових координатах знаходимо з рівняння:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k}\right) = \dot{x}\bar{\imath} + \dot{y}\bar{\jmath} + \dot{z}\bar{k} = v_x\bar{\imath} + v_y\bar{\jmath} + v_z\bar{k}$$

Звідки маємо при $\bar{\imath}$ = *const*, $\bar{\jmath}$ = *const*, $\bar{k}$ = *const*.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x},\ v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y},\ v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \qquad (1.9)$$

де v_x, v_y, v_z – проекції вектора швидкості на відповідні осі координат.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \qquad (1.10)$$

Знаходимо кути вектора швидкості з осями координат:

$$\cos(\bar{v}, \bar{\imath}) = \frac{v_x}{v},\ \cos(\bar{v}, \bar{\jmath}) = \frac{v_y}{v}, \cos\left(\bar{v}, \bar{k}\ \right) = \frac{v_z}{v} \qquad (1.11)$$

1.5 Прискорення точки в декартових координатах

Прискорення точки в декартових координатах знаходимо з рівняння:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_x\bar{\imath} + v_y\bar{\jmath} + \ v_z\bar{k}\right) = \dot{v_x}\bar{\imath} + \dot{v_y}\bar{\jmath} + \ \dot{v_z}\bar{k} = a_x\bar{\imath} + a_y\bar{\jmath} + a_z\bar{k} \qquad (1.12)$$

де $a_x = \dot{v_x} = \ddot{x}$, $a_y = \dot{v_y} = \ddot{y}$, $a_z = \dot{v_z} = \ddot{z}$ (a_x, a_y, a_z – проекції вектора прискорення на відповідні осі координат)

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (1.13)$$

Знаходимо кути вектора прискорення з осями координат:

$$\cos(\bar{a}, \bar{\imath}) = \frac{a_x}{v},\ \cos(\bar{a}, \bar{\jmath}) = \frac{a_y}{v}, \cos\left(\bar{a}, \bar{k}\ \right) = \frac{a_z}{v} \qquad (1.14)$$

Приклад 1.5 Знайти швидкість і прискорення точки в будь-який момент часу, використовуючи умову прикладу 1.2.

Розв'язок. Знаходимо швидкість:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(rcos\omega t) = -r\omega sin\omega t,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(rsin\omega t) = r\omega cos\omega t,$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}(bt) = b\ ,$$

$$v = \sqrt{(-r\omega sin\omega t)^2 + (r\omega cos\omega t)^2 + b^2} = \sqrt{r^2\omega^2 + b^2},$$

$$\cos(\bar{v}, \bar{\imath}) = \frac{v_x}{v} = -\frac{r\omega sin\omega t}{\sqrt{r^2\omega^2+b^2}},$$

$$\cos(\bar{v}, \bar{\jmath}) = \frac{v_y}{v} = \frac{r\omega cos\omega t}{\sqrt{r^2\omega^2+b^2}},$$

$$\cos\left(\bar{v}, \bar{k}\ \right) = \frac{v_z}{v} = \frac{b}{\sqrt{r^2\omega^2+b^2}}.$$

Знаходимо прискорення:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$$a_x = \dot{v}_x = \frac{d}{dt}(-r\omega sin\omega t) = r\omega^2 cos\omega t,$$

$$a_y = \dot{v}_y = \frac{d}{dt}(r\omega cos\omega t) = -r\omega^2 sin\omega t,$$

$$a_z = 0,$$

$$a = \sqrt{(-r\omega^2 cos\omega t)^2 + (-r\omega^2 sin\omega t)^2} = \sqrt{r^2\omega^4 cos^2\omega t + r^2\omega^4 sin^2\omega t} = r\omega^2$$

$$\cos(\bar{a}, \bar{\imath}) = \frac{a_x}{a} = -\frac{r\omega^2 cos\omega t}{r\omega^2} = cos\omega t,$$

$$\cos(\bar{a}, \bar{\jmath}) = \frac{a_y}{a} = -\frac{r\omega^2 sin\omega t}{r\omega^2} = -sin\omega t.$$

Відповідь. $v = \sqrt{r^2\omega^2 + b^2}$, $a = r\omega^2$.

1.6 Натуральний спосіб задавання руху

Щоб описати рух *натуральним способом* потрібно задати:

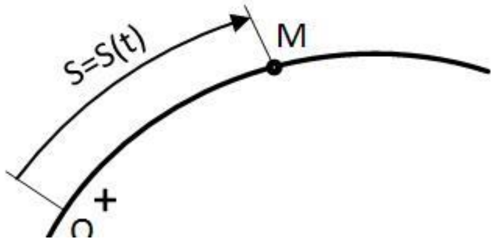


Рис. 1.9

1. траєкторію точки;
2. закон руху точки вздовж траєкторії
$$S = S(t);$$
3. початок відліку на траєкторії;
4. додатній і від'ємний напрямки руху.

Закон руху $S = S(t)$ також називають дуговою координатою, яку відраховують від початкового положення (рис. 1.9).

Дугову координату не слід плутати с довжиною шляху, пройденого точкою, так як за початок відліку може бути вибрана будь-яка точка або рух може бути коливальним.

При натуральному способі задавання руху точки за координатні осі приймають натуральні осі (осі натурального тригранника): τ – дотична, n – нормаль, b – бінормаль (рис. 1.10).

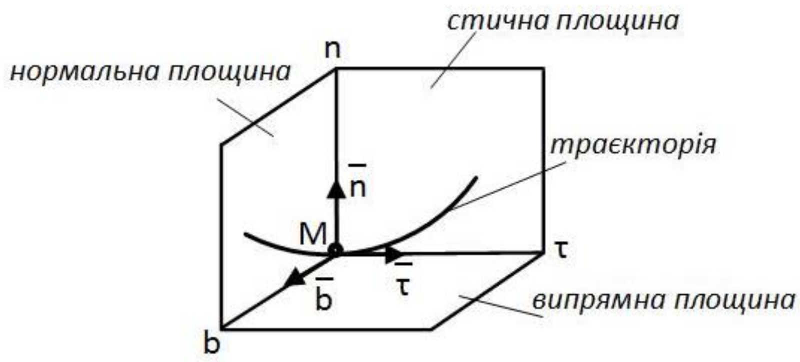


Рис. 1.10

τ – *дотична вісь* є лінією перетину стичної та випрямної площин.

n – *нормаль* є лінією перетину стичної та нормальної площин.

b – *бінормаль* є лінією перетину нормальної та випрямної площин.

$\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ – одиничні вектори направлені по трьом взаємно перпендикулярним осям $M\tau, Mn, Mb$.

Під час руху точки по кривій натуральні осі переміщаються разом з точкою, утворюючи праву систему координат.

1.7 Швидкість точки при натуральному способі задавання руху

За час Δt точка M рухаючись вздовж траєкторії перейшла в положення M_1 (рис. 2.1.11). За цей час дугова координата змінилась на ΔS, а радіус-вектор — на $\Delta \bar{r}$. Визначимо її швидкість:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt}\frac{dS}{dS} = \frac{d\bar{r}}{dS}\frac{dS}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dS}\dot{S},$$

Позначимо

$$\frac{d\bar{r}}{dS} = \bar{\tau}, \quad v = \frac{dS}{dt} = \dot{S}.$$

Вектор $\bar{\tau}$ направлений по дотичній до траєкторії, як похідна вектора за скалярним аргументом, в бік зростання дугової координати ΔS. Модуль цього вектора рівний одиниці. Вектор являє собою границю відношення довжини хорди ($\Delta \bar{r}$) до довжини стягуючої її дуги (ΔS) при наближенні ΔS до нуля:

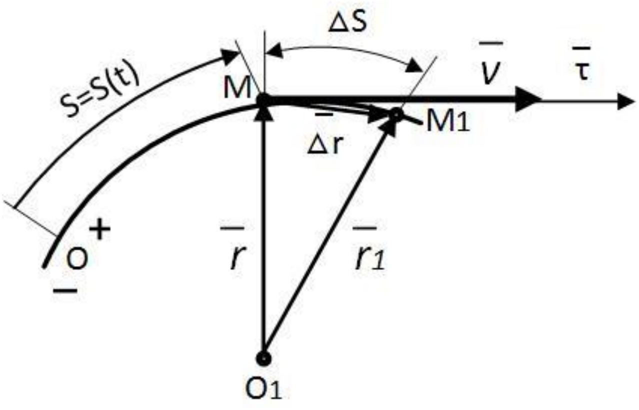


Рис. 1.11

$$\left|\bar{\tau}\right| = \left|\frac{d\bar{r}}{ds}\right| = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta S} = 1$$

Скалярну величину $v = \dot{S}$, яка являє собою проекцію вектора швидкості на дотичну, називають алгебраїчною швидкістю точки.

Якщо $S > 0$, то вектор швидкості направлений вздовж $\bar{\tau}$, тобто в бік зростання значень S (рис. 1.11), а якщо $S < 0$, то вектор швидкості направлений в бік зменшення значень дугової координати.

Тоді

$$\bar{v} = \dot{S}\bar{\tau} = v\bar{\tau} \tag{1.15}$$

$$v = \frac{dS}{dt} \tag{1.16}$$

Приклад 1.6 Точка рухається по дузі кола радіуса $R = 2$ м за законом $S = OM = \frac{\pi R}{6}(t^3 - 2t)$, м. Визначити швидкість точки в момент часу $t_1 = 1$ с і $t_2 = 2$ с.

Розв'язок. Рух задано натуральним способом. Приймемо за початок відліку точку O, вважаючи напрямок руху за годинниковою стрілкою додатнім. Знаходимо дугові координати точки в задані моменти часу:

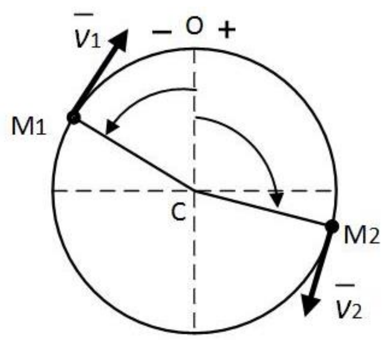


Рис. 1.12

$$S_1 = \overset{\smile}{OM}_1 = \frac{\pi R}{6}(1^3 - 2 \cdot 1) = -\frac{\pi R}{6}, \text{ м},$$

$$S_2 = \overset{\smile}{OM}_2 = \frac{\pi R}{6}(2^3 - 2 \cdot 2) = \frac{2}{3}\pi R, \text{ м}.$$

Положення точок M_1 і M_2 на траєкторії покажемо за допомогою кутів (рис. 1.12):

$$\angle OCM_1 = \frac{\overset{\smile}{OM}_1}{R} = -\frac{\pi}{6}, \text{ рад},$$

$$\angle OCM_2 = \frac{\overset{\smile}{OM}_2}{R} = \frac{2}{3}\pi, \text{ рад}.$$

Знаходимо величини швидкості в задані моменти часу:

$$v = \frac{dS}{dt} = \dot{S} = \frac{\pi R}{6}(3t^2 - 2),$$

$$v_1 = \frac{\pi R}{6}(3 \cdot 1^2 - 2) = \frac{2\pi}{6}1 = 0{,}33\pi, \text{ м/с};$$

$$v_2 = \frac{\pi R}{6}(3 \cdot 2^2 - 2) = \frac{2\pi}{6}10 = 3{,}33\pi, \text{ м/с.}$$

Так як $v_1 > 0$, $v_2 > 0$, то вектори швидкостей будуть направлені в бік зростання S по дотичній до траєкторії (рис.1.12).

Відповідь. $v_1 = 0{,}33\pi$, м/с, $v_2 = 3{,}33\pi$, м/с.

1.8 Прискорення точки при натуральному способі задавання руху.

Для знаходження прискорення диференціюємо вираз (1.15) за часом:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\bar{\tau}) = \frac{dv}{dt}\bar{\tau} + v\frac{d\bar{\tau}}{dt}, \quad (1.17)$$

у цьому виразі $v\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{v^2}{\rho}\bar{n}$, де ρ – радіус кривини траєкторії в даному положенні точки.

Тоді формула (1.17) матиме вигляд

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt}\bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\bar{n} \quad (1.18)$$

Прискорення точки складається з двох взаємно перпендикулярних складових. Одна $\frac{dv}{dt}\bar{\tau}$ направлена по дотичній до траєкторії , а друга $\frac{v^2}{\rho}\bar{n}$ – по нормалі до цієї траєкторії в бік її вгнутості. Ці складові називають відповідно *дотичним* $(\bar{a}_\tau)$ і *нормальним* $(\bar{a}_n)$ *прискореннями точки*. Вони лежать в дотичній площині (рис. 1.13). Проекція прискорення точки на бінормаль рівна нулю, так як вектор прискорення лежить в дотичній площині:

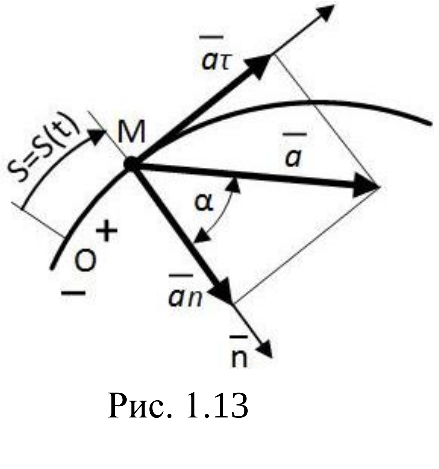


Рис. 1.13

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n \quad (1.19)$$

Вектор дотичного прискорення

$$\bar{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\bar{\tau} = a_\tau\bar{\tau} \quad (1.20)$$

Модуль дотичного прискорення

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \quad (1.21)$$

Вектор нормального прискорення

$$\bar{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\bar{n} \quad (1.22)$$

Модуль нормального прискорення

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \tag{1.23}$$

Модуль прискорення рівний:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \tag{1.24}$$

Кут відхилення вектора прискорення від нормалі складає (рис. 1.13):

$$tg\alpha = \frac{a_\tau}{a_n} \tag{1.25}$$

Дотичне прискорення характеризує зміну швидкості за модулем, а нормальне — зміну швидкості за напрямком.

Дотичне і нормальне прискорення точки можна визначити під час її руху в площині через проекції швидкості та прискорення в декартових координатах, використовуючи вираз (1.10), (1.21), (1.24):

$$a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v} \tag{1.26}$$

$$a_n = \frac{|v_x a_y - v_y a_x|}{v} \tag{1.27}$$

*Приклад 1.*7 Використовуючи умову прикладу 1.6, знайти нормальне, дотичне та повне прискорення точки.

Розв'язок. Застосовуючи формули (1.21), (1.23), (1.24), одержимо

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{\pi R}{6} 6t = \pi R t,\ a_1^\tau = 2\pi \text{ м/с}^2,\ a_2^\tau = 4\pi \text{ м/с}^2.$$

$$a_1^n = \frac{v_1^2}{R} = \frac{(0{,}33\pi)^2}{2} = 0{,}0554\pi^2 = 0{,}546 \text{ м/с}^2,$$

$$a_2^n = \frac{v_2^2}{R} = \frac{(3{,}33\pi)^2}{2} = 5{,}54\pi^2 = 54{,}62 \text{ м/с}^2,$$

$$a_1 = \sqrt{(a_1^\tau)^2 + (a_1^n)^2} = \sqrt{(2\pi)^2 + (0{,}0554\pi^2)^2} = 6{,}3 \text{ м/с}^2,$$

$$a_2 = \sqrt{(a_2^\tau)^2 + (a_2^n)^2} = \sqrt{(4\pi)^2 + (5{,}54\pi^2)^2} = 54{,}98 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь. $a_1^\tau = 2\pi$ м/с^2, $a_2^\tau = 4\pi$ м/с^2, $a_1^n = 0{,}546$ м/с^2, $a_2^n = 54{,}62$ м/с^2, $a_1 = 6{,}3$ м/с^2, $a_2 = 54{,}98$ м/с^2.

1.9 Класифікація руху за прискоренням

1. $a_\tau = 0, a_n = 0$. Рух прямолінійний і рівномірний (інерційний).

2. $a_\tau = 0, a_n \neq 0$. Рух криволінійний і рівномірний (рис. 1.14).

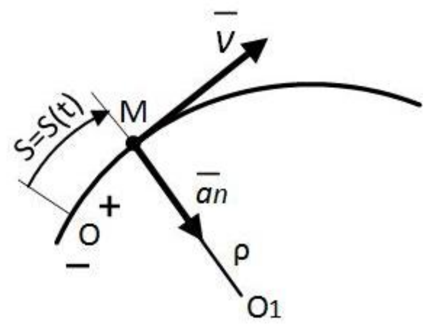


Рис. 1.14

3. $a_\tau \neq 0, a_n = 0$. Рух прямолінійний і нерівномірний:
а) прямолінійний, прискорений (рис. 1.15);

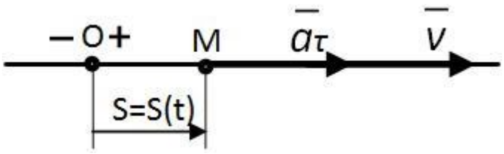


Рис. 1.15

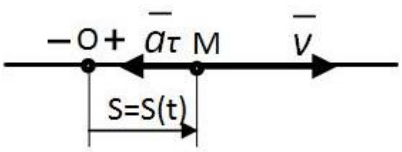


Рис. 1.16

б) прямолінійний, сповільнений (рис. 1.16).

4. $a_\tau \neq 0, a_n \neq 0$. Рух криволінійний і нерівномірний:
а) криволінійний, прискорений ($a_\tau > 0, v > 0$) (рис. 1.17);

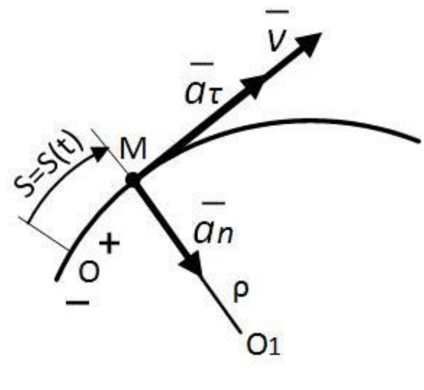


Рис. 1.17

б) криволінійний, сповільнений (рис. 1.18, *а, б)*

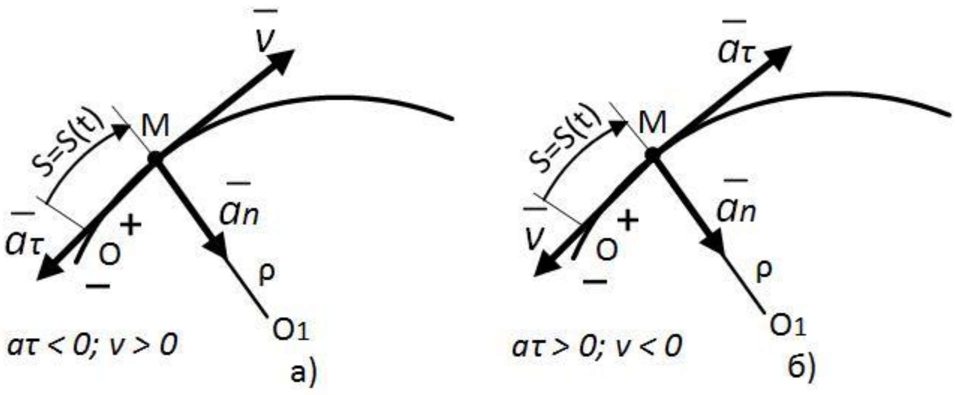


Рис. 1.18

1.10 Рівняння руху точки

Рівняння рівномірного руху вздовж траєкторії будь-якої форми, $v = const$

$$S = vt \qquad (1.28)$$

Рівняння рівнозмінного руху вздовж траєкторії будь-якої форми, $a_\tau = const$

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2} \qquad (1.29)$$

де S_0 – початкове положення; v_0 – початкова швидкість.
Якщо $a_\tau > 0$, то рух рівноприскорений.
Якщо $a_\tau < 0$, то рух рівносповільнений.

Швидкість рівнозмінного руху

$$v = v_0 + a_\tau t \qquad (1.30)$$

<u>*Приклад 1.8*</u> Від'їжджаючи від станції потяг, рухаючись рівноприскорено по заокругленню радіуса 900 м, за час t = 30 с досяг швидкості $v = 15$ м/с. Знайти шлях, пройдений потягом та його повне прискорення.

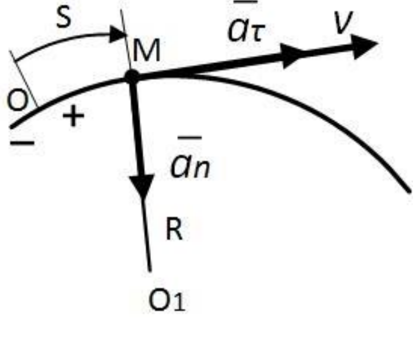


Рис. 1.19

<u>*Розв'язок.*</u> За початок відліку приймемо положення потяга в момент відходу від станції (рис. 1.19). Початкові умови руху: $S_0 = 0, v_0 = 0$. Застосуємо для розв'язку формули (1.23), (1.29), (1.30)

$$v = a_\tau t \ \Rightarrow a_\tau = \frac{v}{t} = \frac{15}{30} = 0{,}5 \text{ м/с}^2,$$

$$S = \frac{a_\tau t^2}{2} = \frac{0{,}5 \cdot 30^2}{2} = 225 \text{ м}^2,$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{15^2}{900} = 0{,}25 \text{ м/с}^2,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 0{,}56 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь. $S = 225$ м^2, $a = 0{,}56$ м/с^2.

Приклад 1.9 Потяг рухається зі швидкістю 20 м/с. При гальмуванні прискорення рівне 0,4 м/с^2. Знайти час і шлях гальмування.

Розв'язок. Застосуємо формули (1.29), (1.30) при початкових умовах руху $S_0 = 0, v_0 = 20$ м/с:

$$v = v_0 - a_\tau t, \quad S = S_0 + v_0 t - \frac{a_\tau t^2}{2}.$$

Так як потяг зупинився, то $v = 0$, тоді

$$v = v_0 - a_\tau t = 0 \implies t = \frac{v_0}{a_\tau} = \frac{20}{0{,}4} = 50 \text{ с}.$$

$$S = 20 \cdot 50 - \frac{0{,}4 \cdot 50^2}{2} = 500 \text{ м}.$$

Відповідь. $S = 500$ м, $t = 50$ с.

Приклад 1.10 Знайти прискорення точки через 2 с після початку руху зі стану спокою, якщо рух задано рівняннями: $x = 3t^2$ м, $y = 4t^2$ м.

Розв'язок. Застосуємо формули (1.26), (1.27). Знаходимо проекції швидкості і прискорення на координатні осі:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 6t = 12 \text{ м/с}, \; v_y = \frac{dy}{dt} = 8t = 16 \text{ м/с},$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 20 \text{ м/с};$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 6 \text{ м/с}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 8 \text{ м/с},$$

$$a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v} = \frac{12 \cdot 6 + 16 \cdot 8}{20} = 10 \text{ м/с}^2,$$

$$a_n = \frac{|v_x a_y - v_y a_x|}{v} = \frac{|12 \cdot 8 - 16 \cdot 6|}{20} = \frac{|96 - 96|}{20} = 0,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 10 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь. $a_\tau = 10$ м/с^2, $a_n = 0$, $a = 10$ м/с^2.

1.11 Перехід від координатного до натурального способу задавання руху

Задано рух точки координатним способом: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$. Для переходу від координатного способу до натурального необхідно:

1. Встановити траєкторію, якщо можливо, тобто одержати рівняння траєкторії в явному виді:

$$y = \varphi_1(x),\ z = \varphi_2(x).$$

2. Визначити закон руху точки вздовж траєкторії $S = S(t)$ за формулою:

$$S = \int_0^t \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}dt$$

3. Встановити початок відліку, підставивши в рівняння руху початковий час. Якщо цей час не задано, підставляють $t_0 = 0$.

4. Визначити додатній напрямок руху, який можна взнати або за вектором швидкості, або, задаючи значення часу в рівнянні руху, щоб одержати нову точку на траєкторії.

<u>*Приклад 1.11*</u> Перейти до натурального способу задавання руху, якщо задані рівняння руху точки в координатній формі:

а) $x = 3t^2 - 6$ см, б) $y = -4t^2 + 4$ см.

<u>*Розв'язок.*</u> Для натурального способу задавання необхідно знати:

1. Траєкторію.
2. Закон руху.
3. Початок відліку.
4. Додатній напрямок руху.

1. Траєкторію руху знайдемо, виключивши час з рівнянь руху:

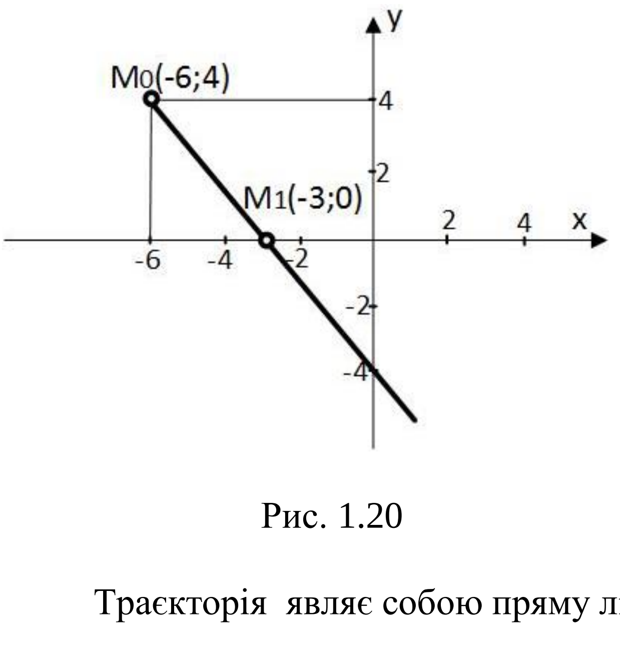


Рис. 1.20

із а) $t^2 = \dfrac{x+6}{3}$, із б) $t^2 = \dfrac{-y+4}{4}$,

звідки одержимо

$$\frac{x+6}{3} = \frac{-y+4}{4},$$

або

$$3y + 4x + 12 = 0.$$

Траєкторія являє собою пряму лінію (рис. 1.20), обмежену точкою M_0.

2. Закон руху знаходимо за наступною формулою:

$$S = \int_0^t \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}dt,$$

де $\dot{x} = 6t; \dot{y} = 8t;$

$$S = \int_0^t \sqrt{(6t)^2 + (-8t)^2}\,dt = \int_0^t \sqrt{36t^2 + 64t^2}\,dt = \int_0^t 10t\,dt = 5t^2\Big|_0^t = 5t^2$$

3. Початок відліку знаходимо з рівнянь руху, підставивши в них час, рівний нулю:

$$x_0 = -6 \text{ см},\ y_0 = 4 \text{ см}.$$

4. Додатній напрямок руху визначимо підставивши в рівняння руху час, рівний 1 с:

$$x_1 = 3 - 6 = -3 \text{ см},$$
$$y_1 = 4 - 4 = 0.$$

Таким чином ми виконали перехід від координатного способу задавання руху до натурального.

ЛЕКЦІЯ 2. НАЙПРОСТІШІ РУХИ ТВЕРДОГО ТІЛА

2.1 Поступальний рух твердого тіла

Поступальним називається такий рух твердого тіла, при якому пряма, яка з'єднує дві будь-які точки цього тіла, переміщується, залишаючись паралельною своєму початковому напрямку.

Точки твердого тіла, яке здійснює поступальний рух, переміщуються як по прямолінійним, так і по криволінійним траєкторіям.

Приклад 2.1 Автомобіль рухається по прямолінійній ділянці. Кузов автомобіля рухається поступально. Траєкторіями всіх точок кузова є прямі лінії.

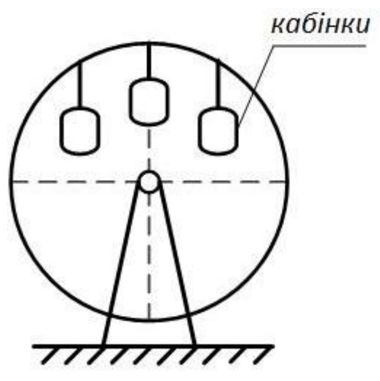


Рис. 2.1

Приклад 2.2 Колесо огляду обертається навколо горизонтальної осі. Під час обертання кабінки знаходяться в вертикальному положенні, тобто здійснюють поступальний рух. Траєкторії руху всіх точок кабінки – коло (рис. 2.1).

Поступальний рух твердого тіла характеризується задаванням руху однієї його точки, зазвичай центра тяжіння, і може бути досліджений будь-яким з вивчених раніше способів задавання руху точки.

Для задавання поступального руху тіла в декартовій системі координат достатньо записати:

$$x_C = f_1(t)$$

$$y_C = f_2(t)$$

$$z_C = f_3(t)$$

Представлені рівняння – *закон поступального руху тіла* та будь-якої його точки.

Властивості поступального руху твердого тіла визначаються теоремою:

При поступальному русі твердого тіла всі його точки описують одинакові траєкторії і в кожний момент часу мають однакові за величиною і напрямком швидкості та прискорення.

Швидкість і прискорення твердого тіла при поступальному русі знаходять за формулами, які застосовують в кінематиці точки.

Приклад.2.3 Точка *A* шарнірного механізму $OABO_1$ рухається за законом $S = 0{,}5\pi t^2$, (рис. 2.2). Знайти швидкість і прискорення точки *C* стержня *AB*, якщо $AC = BC$, $O_1B = OA = 0{,}4$ м, $t = 2$ с.

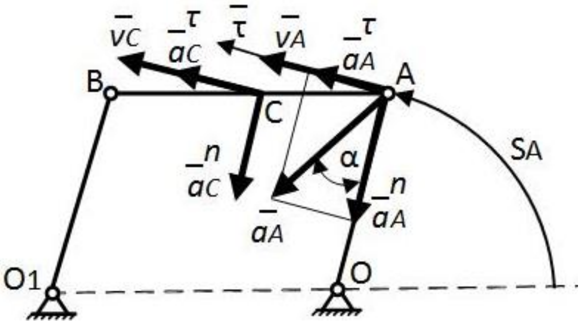


Рис. 2.2

Розв'язок. Стержень *AB* здійснює поступальний рух, так як в будь-який момент часу пряма *AB* залишається паралельною самій собі. Отже, швидкості та прискорення точок *A, B, C* будуть однаковими:

$$v_C = v_A = \frac{dS}{dt} = \pi t = 2\pi \text{ м/с, при } t = 2 \text{ с;}$$

$$a_A^{\tau} = \frac{dv_A}{dt} = \pi = 3{,}14 \text{ м/с}^2,$$

$$a_A^n = \frac{v_A^2}{AO} = \frac{4\pi^2}{0{,}4} = 10\pi^2 = 98{,}6 \text{ м/с}^2,$$

$$a_C = a_A = \sqrt{(a_A^{\tau})^2 + (a_A^n)^2} = \sqrt{3{,}14^2 + 98{,}6^2} = 98{,}65 \text{ м/с}^2.$$

$$\bar{V}_A = V_A \cdot \bar{\tau};\; \bar{a}_A^{\tau} = a_A^{\tau} \cdot \bar{\tau};\; \bar{a}_A^n = a_A^n \cdot \bar{n};$$

$$tg\alpha = \frac{a_A^{\tau}}{a_A^n}.$$

2.2 Обертальний рух твердого тіла

Обертальним рухом твердого тіла називається такий рух, при якому всі точки, які належать деякій прямій, незмінно зв'язаній з тілом, залишаються нерухомими в даній системі відліку.

Ця нерухома пряма називається віссю обертання. Точки тіла, які не належать осі обертання, рухаються в площинах, перпендикулярних осі обертання, описуючи кола з центрами на цій осі. $\bar{V}_A = 0, \bar{V}_B = 0$.

Направимо вісь *z* вздовж осі обертання (рис. 2.3). Проведемо через вісь дві площини: нерухому (*Н*) і жорстко зв'язану з тілом рухому (*П*).

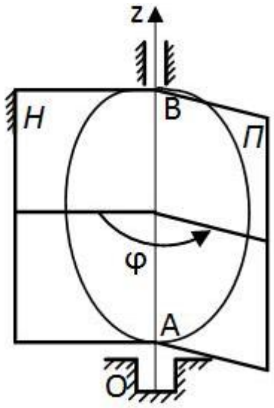


Рис. 2.3

Положення тіла буде визначено, якщо задано кут між площинами в залежності від часу:

$$\varphi = \varphi(t).$$

Цей кут називають *кутом обертання тіла*. Для однозначного визначення положення тіла необхідно крім величини знати напрямок відліку кута обертання. Додатнім напрямком відліку вважають поворот тіла проти ходу годинникової стрілки, якщо дивитись з кінця осі *Oz*.

Кут обертання вимірюють в радіанах.

Якщо відомо число обертів *n* за якийсь проміжок часу, то кут повороту рівний:

$$\varphi = 2\pi n \tag{2.1}$$

Кутова швидкість характеризує величину і напрямок зміни кута обертання за одиницю часу в даний момент часу.

Величина кутової швидкості рівна першій похідній від кута обертання за часом:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \tag{2.2}$$

Знак похідної визначає напрямок обертання. Якщо $\omega > 0$, то обертання відбувається проти ходу годинникової стрілки. Якщо $\omega < 0$, то обертання – за ходом годинникової стрілки.

Кутове прискорення характеризує величину і напрямок зміни кутової швидкості за одиницю часу в даний момент часу.

Величина кутового прискорення рівна першій похідній від кутової швидкості за часом або другій похідній від кута обертання за часом:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \tag{2.3}$$

або

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$

Кутові швидкість і прискорення можна представити в вигляді векторів, які прикладаються до будь-якої точки на осі обертання, тобто це ковзні вектори:

$$\bar{\omega} = \omega\bar{k} = \frac{d\varphi}{dt}\bar{k}; \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon\bar{k} = \frac{d\omega}{dt}\bar{k} \tag{2.4}$$

де $\bar{k}$ – одиничний вектор осі Oz.

Напрямок векторів кутових швидкості та прискорення визначається знаком похідних.

На схемах кутові швидкість та прискорення також зображають у вигляді кругових стрілок (рис. 2.4).

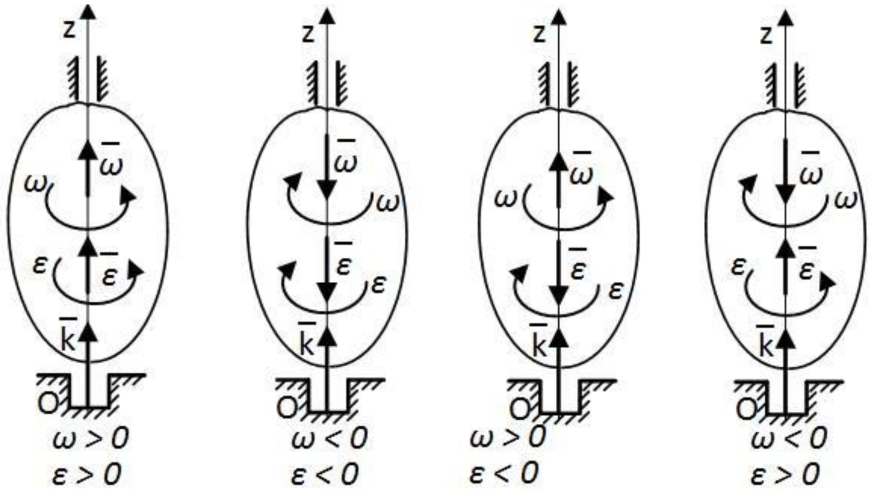


Рис. 2.4

Кутові швидкість та прискорення – головні характеристики обертального руху і однакові для всіх точок твердого тіла в даний момент часу.

Кожна точка тіла, яке обертається має лінійні швидкість і прискорення.

Виберемо довільну точку M твердого тіла $(|\bar{r}_M| = h)$, яке обертається навколо нерухомої осі Oz (рис. 2.5).

Рух точки M можна описати радіусом-вектором, який має постійний модуль для вибраної точки:

$$\bar{r} = \bar{\rho} + \bar{r}_M \tag{2.5}$$

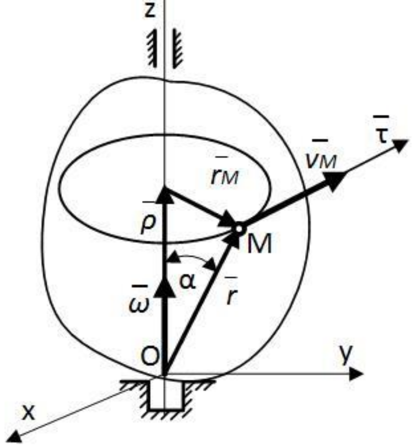


Рис. 2.5

Диференціюючи рівняння (2.2.5) за часом, знаходимо швидкість:

$$\bar{v}_M = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\rho} + \bar{r}_M) = \frac{d\bar{\rho}}{dt} + \frac{d\bar{r}_M}{dt}, \tag{2.6}$$

де $\dfrac{d\bar{\rho}}{dt} = 0$, так як вектор $\bar{\rho}$ постійний за величиною і напрямком;

$\frac{d\bar{r}_M}{dt} = |\bar{r}_M|\frac{d\varphi}{dt}\bar{\tau} = h\omega\bar{\tau}$ як похідна вектора постійного модуля за скалярним аргументом.

Тоді $$\bar{v}_M = h\omega\bar{\tau} = v\bar{\tau}, \qquad (2.7)$$

де модуль швидкості v дорівнює

$$v = h\omega \qquad (2.8)$$

h – відстань від точки до осі обертання.

Вектор швидкості буде направлений по дотичній до траєкторії точки M відповідно до напрямку кутової швидкості.

<u>*Приклад 2.4*</u> Точка A, яка лежить на ободі диска, має швидкість $v_A = 40$ см/с. Точка B, яка належить диску, має швидкість $v_B = 10$ см/с (рис. 2.6). Визначити кутову швидкість диска і його радіус, якщо відстань AB = 15 см.

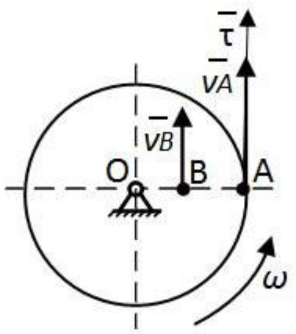


Рис. 2.6

<u>*Розв'язок.*</u> Застосуємо формулу (2.8)

$$v_A = \omega OA, OA = R,$$

$$v_B = \omega OB, OB = R - AB.$$

Тоді $\omega = \frac{v_A}{OA} = \frac{v_B}{OB}$, або $\omega = \frac{v_A}{R} = \frac{v_B}{R - AB}$

Звідки $v_A(R - AB) = v_B R$

$$v_A R - v_B R = v_A AB,$$

$$R = \frac{v_A AB}{v_A - v_B} = \frac{40 \cdot 15}{40 - 10} = 20 \text{ см}, \quad \omega = \frac{v_A}{R} = \frac{40}{20} = 2 \text{ рад/с}.$$

<u>*Відповідь.*</u> R = 20 см, ω = 2 рад/с.

2.2.1 Вектори швидкості та прискорення точок тіла

З рис. 2.5 видно, що $|\bar{r}_M| = h$ і $h = r\sin\alpha$. Тоді $v = h\omega = \omega r \sin\alpha$. Цей вираз є модулем векторного добутку $\bar{\omega} \times \bar{r}$, тобто $v = |\bar{\omega} \times \bar{r}|$. Напрямок вектора швидкості $\bar{v}$ визначається векторним добутком. Отже:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \qquad (2.9)$$

Швидкість будь-якої точки твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, рівна векторному добутку вектора кутової швидкості на радіус-вектор цієї точки, проведений з довільної точки на осі обертання.

Формулу (2.9) називають *формулою Ейлера.*

Визначимо прискорення точки M:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}$$

так як $\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\varepsilon}$, а $\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}$, то

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v} \qquad (2.10)$$

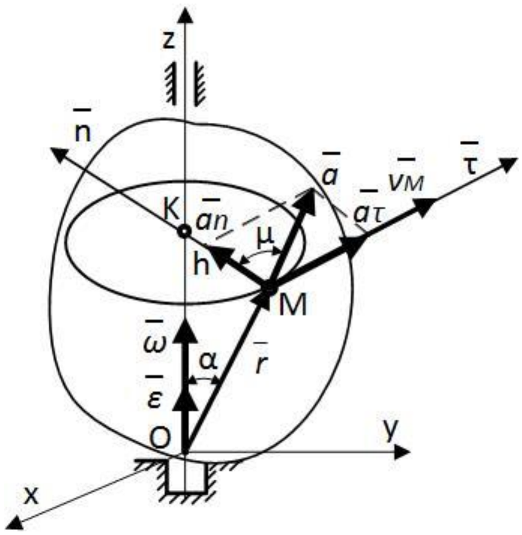


Рис. 2.7

Розглянемо складові, які входять в цей вираз. Вектор $\bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ згідно з правилом векторного добутку направлений по дотичній до траєкторії точки *M* (рис. 2.7):

$$\bar{a}_\tau = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} \qquad (2.11)$$

Величина дотичного прискорення

$$a_\tau = \varepsilon r sin\alpha, \quad a_\tau = \varepsilon h \qquad (2.12)$$

Вектор $\bar{\omega} \times \bar{v}$ знаходиться в площині кола радіуса *KM* = *h*, направлений від точки *M* до осі обертання і є нормальним прискоренням точки *M*.

$$\bar{a}_n = \bar{\omega} \times \bar{v} \qquad (2.13)$$

Величина нормального прискорення

$$a_n = \omega v sin(\bar{\omega}, \bar{v}) = \omega v = \omega \cdot \omega h = \omega^2 h$$

де $\angle\bar{\omega}, \bar{v} = 90^0, \quad sin90^0 = 1, \ v = \omega h$

$$a_n = \omega^2 h \qquad (2.14)$$

Модуль повного прискорення точки твердого тіла, яке обертається

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \qquad (2.15)$$

Кут μ між вектором повного прискорення точки і нормаллю до траєкторії рівний:

$$tg\mu = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \qquad (2.16)$$

Вирази (2.8) і (2.15) показують, що швидкості і прискорення точок твердого тіла, яке обертається пропорціональні відстаням від цих точок до осі обертання, а з формули (2.16) слідує, що кут відхилення повного прискорення від нормалі в кожний момент часу один и той же для всіх точок тіла.

2.2.2 Рівномірне обертання

Рівномірним називають обертання, при якому кутова швидкість постійна за модулем і напрямком :

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = const,$$

звідки $d\varphi = \omega dt$.

Після інтегрування одержимо

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \tag{2.17}$$

Рівняння (2.17) називають *законом рівномірного обертання*.

При рівномірному обертанні кутову швидкість можна визначити, якщо задано число обертів за хвилину за формулою:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \tag{2.18}$$

де n - число обертів за хвилину.

<u>*Приклад 2.*</u>5 Вантаж 1 опускається за законом $x = 2{,}4t^2 - 4t$, м. Визначити кутову швидкість, кутове прискорення барабана, швидкість і прискорення точки M в момент часу $t = 1$ с, якщо $R = 3r = 0{,}6$ м (рис. 2.8).

<u>*Розв'язок.*</u> Визначимо швидкість вантажу:

$$v = \frac{dx}{dt} = 4{,}8t - 4$$

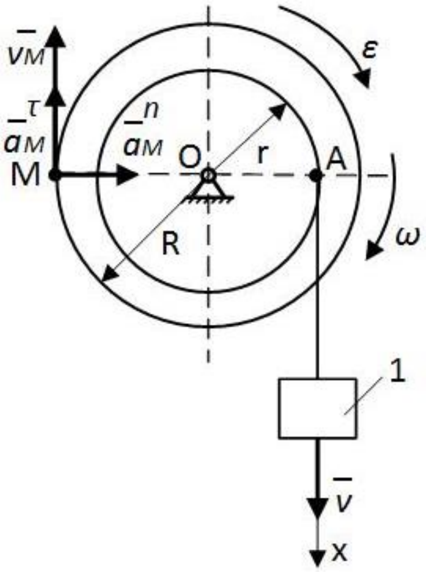


Рис. 2.8

Знаходимо кутову швидкість і кутове прискорення:

$$\omega = \frac{v}{t} = \frac{4{,}8t-4}{0{,}2} = 24t - 20,$$

при $t = 1$ с $\omega = 4$ рад/с.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 24 \text{ рад/с}^2.$$

Швидкість точки M рівна:

$$v_M = \omega R = 2{,}4 \text{ м/с}.$$

Тангенціальне прискорення точки M:

$$a_M^\tau = \varepsilon R = 14{,}4 \text{ м/с}^2.$$

Нормальне прискорення точки *M:*

$$a_M^n = \omega^2 R = 9{,}6 \text{ м/с}^2.$$

Модуль повного прискорення точки M можна знайти за формулою (2.15):

$$a_M = \sqrt{(a_M^\tau)^2 + (a_M^n)^2} = \sqrt{14{,}4^2 + 9{,}6^2} = 17{,}31 \text{ м/с}^2.$$

$$a_M = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \qquad h = R = 0{,}6 \text{ м},$$

$$a_M = 0{,}6\sqrt{24^2 + 4^4} = 17{,}31 \text{ м/с}^2.$$

<u>*Відповідь.*</u> ω = 4 рад/с, ε = 24 рад/с^2, v_M= 2,4 м/с, a_M= 17,31 м/с^2.

2.2.3 Рівнозмінне обертання

Рівнозмінним називають обертання, при якому кутове прискорення постійне за величиною та напрямком:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = const.$$

Звідки $$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon dt \;\Rightarrow\; \omega = \omega_0 + \varepsilon t \qquad (2.19)$$

Враховуємо, що $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, розділяємо змінні та інтегруємо

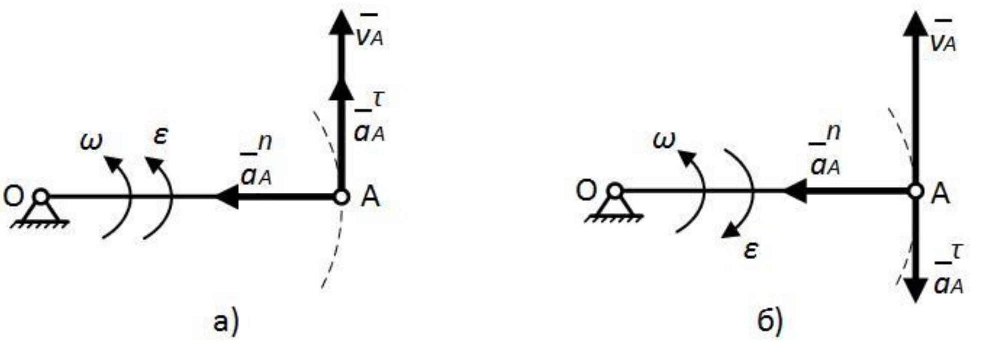


Рис. 2.9

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon t)dt.$$

Одержимо

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \qquad (2.20)$$

Рівняння (2.20) – *закон рівнозмінного обертання*.

Якщо ω і ε мають однакові знаки, то обертання *рівноприскорене* (рис. 2.9, а). Швидкість і тангенціальне прискорення направлені в одному напрямку.

Якщо ω і ε мають різні знаки, то обертання *рівносповільнене*. Швидкість і тангенціальне прискорення направлені в протилежних напрямках (рис. 2.9, б). Нормальне прискорення в обох випадках направлене до центру обертання.

<u>*Приклад 2.6*</u> Диск, обертаючись рівноприскорено зі стану спокою, зробив 14400 обертів за 4 хвилини. Знайти кутову швидкість і кутове прискорення диска.

<u>*Розв'язок.*</u> Початкові умови руху: $\varphi_0 = 0,\ \omega_0 = 0,\ \varepsilon = const.$ Рівняння (2.19), (2.20) матимуть вигляд

$$\omega = \varepsilon t, \quad \varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

Використовуючи формулу (2.1) $\varphi = 2\pi n$, знаходимо кутове прискорення диска:

$$2\pi n = \frac{\varepsilon t^2}{2} \implies \varepsilon = \frac{4\pi n}{t^2} = \frac{4\pi \cdot 14400}{(4\cdot 60)^2} = \pi \text{ рад/с}^2.$$

Кутова швидкість рівна:

$$\omega = 240\pi \text{ рад/с}.$$

<u>*Відповідь:*</u> $\omega = 240\pi$ рад/с, $\varepsilon = \pi$ рад/с^2.

ЛЕКЦІЯ 3. СКЛАДНИЙ РУХ ТОЧКИ

Складним рухом називають такий рух, при якому точка одночасно здійснює два чи більше рухів.

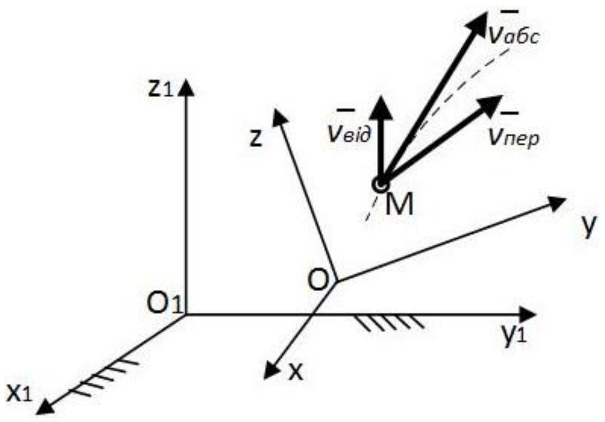


Рис. 3.1

Складний рух точки доцільно розглядати одночасно відносно двох систем відліку, одна з яких вважається основною або умовно нерухомою, а друга певним чином рухається відносно першої (рис. 3.1).

Абсолютним рухом називають рух точки M відносно основної системи відліку $O_1x_1y_1z_1$, яку умовно приймають за нерухому.

Відносним рухом називають рух точки M відносно рухомої системи відліку $Oxyz$.

Переносним рухом називають рух рухомої системи відліку $Oxyz$ відносно основної (нерухомої) системи відліку $O_1x_1y_1z_1$.

<u>*Приклад 3.1*</u> Людина іде по вагону метро, який рухається. Рух людини можна розглядати як складний, який складається з двох рухів: рух людини разом з вагоном та рух людини по вагону. Якщо основну, нерухому систему координат

зв'язати з платформою станції метро, то рух людини відносно цієї системи координат буде абсолютним. Рух людини відносно вагона, зв'язаного з рухомою системою координат, буде відносним. Рух вагона, з яким жорстко зв'язана рухома система координат, тобто рух рухомої системи відліку разом з людиною, називають переносним.

<u>*Приклад 3.2*</u> Рух поршня в двигуні рухомого автомобіля можна розглядати як складний. Рух поршня відносно якої-небудь нерухомої точки на дорозі, яку приймають за початок нерухомої, основної системи координат, буде абсолютним. Рух поршня відносно автомобіля, з яким жорстко зв'язана рухома система координат, буде відносним. Рух автомобіля, з яким зв'язана рухома система координат, відносно нерухомої системи буде переносним.

3.1 Теорема про додавання швидкостей

Нехай $O_1x_1y_1z_1$ – основна система координат, а $Oxyz$ – рухома система координат.

Вектор $\bar{r} = \bar{r}(t) = x\bar{i} + y\bar{i} + z\bar{k}$ задає рух точки M відносно рухомої системи координат $Oxyz$; вектор $\bar{r}_0 = \bar{r}_0(t)$ визначає рух початку рухомої системи координат $Oxyz$ відносно основної системи координат $O_1x_1y_1z_1$, а вектор $\bar{\rho} = \bar{\rho}(t)$ описує рух точки M відносно основної системи координат $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 3.2).

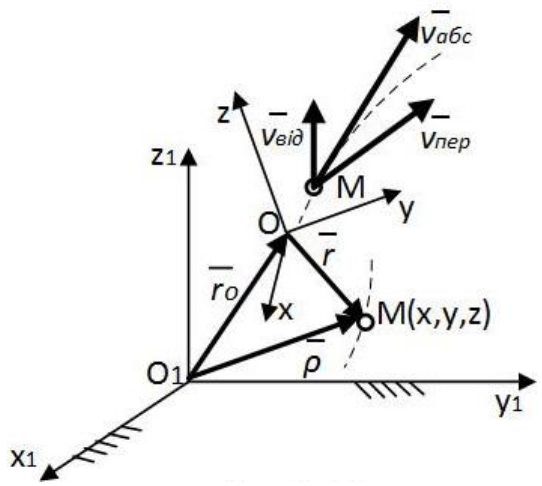


Рис. 3.2

Сформулюємо кілька визначень.

Абсолютною швидкістю називають швидкість точки M відносно основної системи координат $O_1x_1y_1z_1$ і позначають $\bar{v}_{\text{абс}}$.

Відносною швидкістю називають швидкість точки M відносно рухомої системи координат $OXYZ$ і позначають $\bar{v}_{\text{від}}$.

Переносною швидкістю називають швидкість тієї точки рухомої системи координат, з якою в даний момент співпадає рухома точка M, і позначають $\bar{v}_{\text{пер}}$.

Абсолютна швидкість точки в складному русі рівна геометричній сумі переносної та відносної швидкостей

$$\bar{v}_{\text{абс}} = \bar{v}_{\text{від}} + \bar{v}_{\text{пер}} \qquad (3.1)$$

Модуль абсолютної швидкості в загальному випадку знаходять проектуванням формули (3.1) на осі координат, так як кут між векторами відносної і переносної швидкостей може бути від 0 до 180^0:

$$v_{\text{абс}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{3.2}$$

де

$$v_x = v_{\text{від}x} + v_{\text{пер}x}, \;\; v_y = v_{\text{від}y} + v_{\text{пер}y}.$$

Якщо відомий кут між векторами $\bar{v}_{\text{від}}$ та $\bar{v}_{\text{пер}}$, то значення абсолютної швидкості можна знаходити за формулою:

$$v_{\text{абс}} = \sqrt{v_{\text{пер}}^2 + v_{\text{від}}^2 + 2v_{\text{пер}} \cdot v_{\text{від}} \cdot cos\left(\bar{v}_{\text{пер}}, \bar{v}_{\text{від}}\right)} \tag{3.3}$$

Знаходження швидкостей відносного та переносного рухів починають з визначення положення точки на траєкторії відносного руху. Потім подумки зупиняють відносний рух та знаходять швидкість тієї точки рухомої системи координат, в якій зафіксована рухома точка. Це буде переносна швидкість. Для знаходження відносної швидкості подумки зупиняють рух рухомої системи координат, тобто переносний рух, і відомими способами знаходять швидкість точки відносно рухомої системи координат.

<u>*Приклад 3.3*</u> Диск радіуса *R* = 50 см обертається навколо нерухомої осі за законом $\varphi = 3t^3 - 6t^2$, рад. По ободу рухається точка *M* за законом $OM = S = \frac{\pi}{2}R(2t^2 - t^3)$ см (рис. 3.3, а). Визначити абсолютну швидкість точки в момент часу $t_1 = 1$ с.

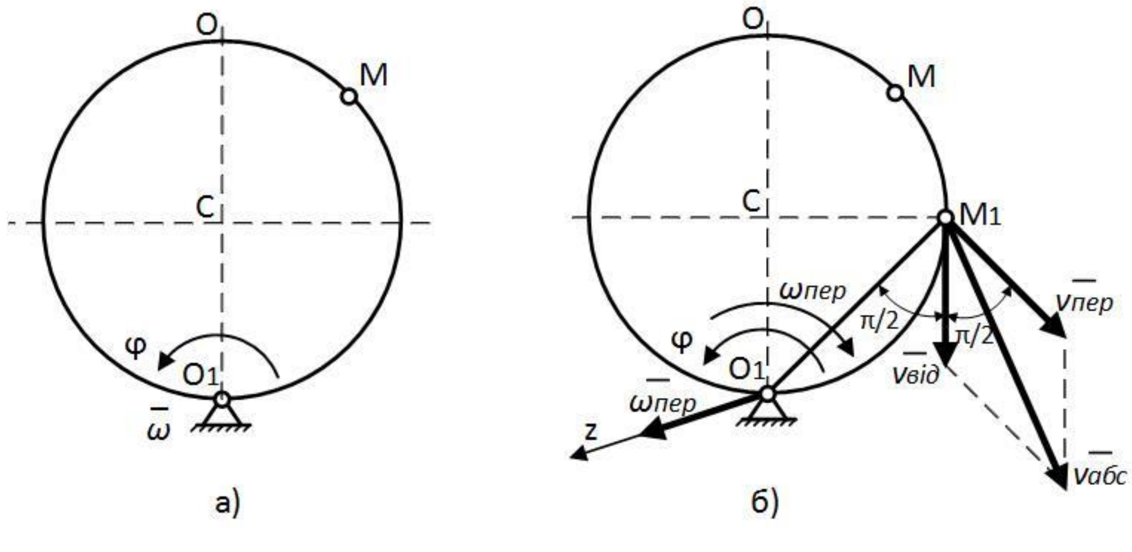


Рис. 3.3

<u>*Розв'язок.*</u> Точка *M* здійснює складний рух. Рух точки *M* по ободу диска буде відносним, а обертання диска разом з точкою *M* – переносним рухом. Абсолютну швидкість точки *M* знаходимо за формулою (3.1)

Визначимо положення точки *M* на траєкторії відносного руху.

При $t_1 = 1$ с

$$OM_1 = S = \frac{\pi R}{2}(2t^2 - t^3) = \frac{\pi R}{2}.$$

Знаходимо кут $\angle OCM_1 = \frac{OM_1}{R} = \frac{\pi}{2}$.

Знаходимо швидкість відносного руху

$$v_{\text{від}} = \frac{dS}{dt} = \frac{\pi R}{2}(4t - 3t^2).$$

При $t_1 = 1$ с

$$v_{\text{від}} = \frac{50\pi}{2}(4 - 3) = 25\pi = 78{,}5 \text{ см/с}.$$

Так як $v_{\text{від}} > 0$, то вектор $\bar{v}_{\text{від}}$ направлений по дотичній до кола в точці M_1 в бік збільшення дуги OM (рис. 3.3).

Знаходимо швидкість переносного руху

$$v_{\text{пер}} = |\omega_{\text{пер}}| h,$$

де $\omega_{\text{пер}} = \frac{d\varphi}{dt} = 9t^2 - 12t$.

При $t_1 = 1$ с $\omega_{\text{пер}} = -3$ рад/с. Мінус показує, що напрямок $\omega_{\text{пер}}$ протилежний напрямку додатного відліку кута φ.

Так як

$$h = O_1M_1 = R\sqrt{2} = 50\sqrt{2} = 70{,}5 \text{ см},$$

то

$$v_{\text{пер}} = |-3| \cdot 70{,}5 = 211{,}5 \text{ см/с}.$$

Вектор $\bar{v}_{\text{пер}}$ перпендикулярний вектору $\overline{O_1M_1}$ і направлений відповідно до кутової швидкості (рис. 2.3.3, б). Так як $\angle(\bar{v}_{\text{від}}, \bar{v}_{\text{пер}}) = 45^0$, то

$$v_{\text{абс}} = \sqrt{v_{\text{пер}}^2 + v_{\text{від}}^2 + 2v_{\text{пер}} \cdot v_{\text{від}} \cdot cos\,45^0} = 272{,}89 \text{ см/с}.$$

Відповідь. $v_{\text{абс}} = 272{,}89$ см/с.

3.2 Теорема про додавання прискорень (теорема Коріоліса)

Абсолютне прискорення точки в складному русі рівне геометричній сумі відносного, переносного та коріолісова прискорень:

$$\bar{a}_{\text{абс}} = \bar{a}_{\text{від}} + \bar{a}_{\text{пер}} + \bar{a}_{\text{кор}} \tag{3.4}$$

де $\bar{a}_{\text{від}}$ — прискорення відносного руху;

$\bar{a}_{\text{пер}}$ — прискорення переносного руху;

$\bar{a}_{\text{кор}}$— прискорення Коріоліса.

$$\bar{a}_{\text{кор}} = 2(\bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{v}_{\text{від}}) \tag{3.5}$$

Прискорення Коріоліса характеризує:

1. зміну величини переносної швидкості точки внаслідок її відносного руху;
2. зміну напрямку вектора відносної швидкості внаслідок обертального переносного руху.

Напрямок прискорення Коріоліса визначають або за *правилом векторного добутку* (рис. 3.4), або за *правилом Жуковського* (рис. 3.5).

Правило векторного добутку:

- прискорення Коріоліса направлене перпендикулярно площині, яка проходить через вектори $\overline{\omega}_{\text{пер}}$ і $\overline{v}_{\text{від}}$ в той бік, звідки видно поворот від $\overline{\omega}_{\text{пер}}$ до $\overline{v}_{\text{від}}$ на найменший кут проти ходу годинникової стрілки.

На рисунку 3.4 поворот вектора $\overline{\omega}_{\text{пер}}$ до вектора $\overline{v}_{\text{від}}$ проти ходу годинникової стрілки на найменший кут видно з боку від'ємних значень осі *x*, куди і направлений вектор прискорення Коріоліса ($\overline{a}_{\text{кор}} \parallel Ax$).

Правило Жуковського:

- проектуємо вектор відносної швидкості $\overline{v}_{\text{від}}$ на площину, перпендикулярну вектору переносної кутової швидкості, і повертаємо цю проекцію в тій же площині на кут 90° в бік переносної кутової швидкості (рис. 3.5).

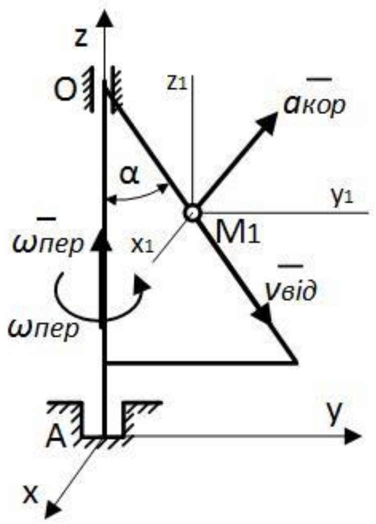


Рис. 3.4

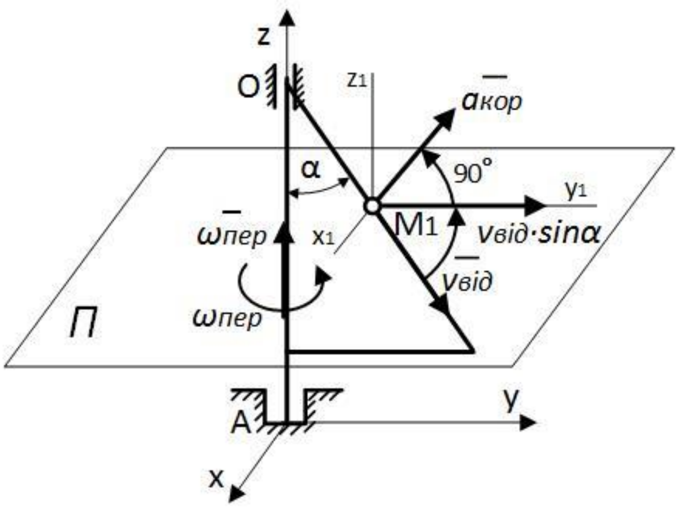


Рис. 3.5

Проекція вектора відносної швидкості на площину *П,* перпендикулярну вектору кутової швидкості $\overline{\omega}_{\text{пер}}$, рівна $v_{\text{від}} sin\alpha$. Проекцію повертаємо проти ходу годинникової стрілки на 90° відповідно до напрямку переносної кутової швидкості, яка показана круговою стрілкою на рис. 3.5. Вектор прискорення Коріоліса буде направлений так же, як і на рис. 3.4, тобто в бік від'ємних значень осі *x*.

Модуль прискорення Коріоліса:

$$a_{\text{кор}} = 2\omega_{\text{пер}} v_{\text{від}} \sin(\bar{\omega}_{\text{пер}}, \bar{v}_{\text{від}}) \tag{3.6}$$

Рівність нулю прискорення Коріоліса можлива, якщо:

1. $\omega_{\text{пер}} = 0$; переносний рух поступальний;
2. $v_{\text{від}} = 0$; відносна швидкість в даний момент часу рівна нулю;
3. $\sin(\bar{\omega}_{\text{пер}}, \bar{v}_{\text{від}}) = 0$; вектор кутової швидкості переносного руху $\bar{\omega}_{\text{пер}}$ паралельний вектору відносної швидкості $\bar{v}_{\text{від}}$.

При обертальному переносному та криволінійному відносному рухах вираз (3.4) матиме вигляд

$$\bar{a}_{\text{абс}} = \bar{a}^{n}_{\text{від}} + \bar{a}^{\tau}_{\text{від}} + \bar{a}^{n}_{\text{пер}} + \bar{a}^{\tau}_{\text{пер}} + \bar{a}_{\text{кор}} \tag{3.7}$$

Модуль абсолютного прискорення знаходимо, проектуючи (3.7) на вибрані осі координат:

$$a_{\text{абс}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{3.8}$$

При поступальному переносному і криволінійному відносному рухах вираз (3.4) прийме вигляд

$$\bar{a}_{\text{абс}} = \bar{a}^{n}_{\text{від}} + \bar{a}^{\tau}_{\text{від}} + \bar{a}_{\text{пер}} \tag{3.9}$$

Приклад 3.4. Використовуючи умову прикладу 3.3, визначити абсолютне прискорення точки.

Розв'язок. Прискорення знаходимо за формулою (3.7), визначаючи величини, які входять в неї.

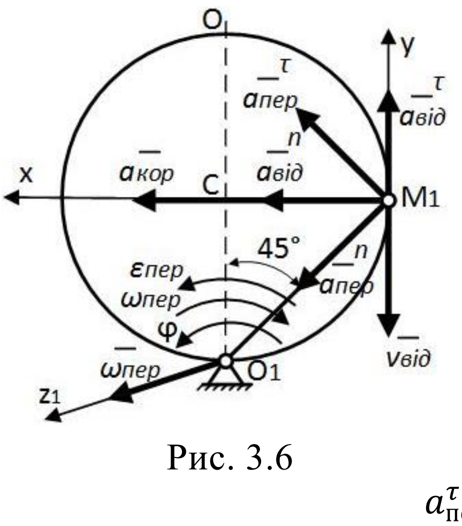


Рис. 3.6

Нормальне переносне прискорення

$a^{n}_{\text{пер}} = \omega^2_{\text{пер}} h = 3^2 \cdot 70{,}5 = 634{,}5$ см/с^2.

Тангенціальне переносне прискорення

$$a^{\tau}_{\text{пер}} = \varepsilon_{\text{пер}} h, \text{ де}$$

$$\varepsilon_{\text{пер}} = \frac{d\omega_{\text{пер}}}{dt} = \frac{d}{dt}(9t^2 - 12t) = 18t - 12$$

При $t_1 = 1$ с $\varepsilon_{\text{пер}} = 6$ рад/с^2,

$$a^{\tau}_{\text{пер}} = 6 \cdot 70{,}5 = 423 \text{ см/с}^2.$$

Кутове прискорення направлене протилежно кутовій швидкості (рис. 3.6), так як похідна має інший знак. Вектор $\bar{a}^{n}_{\text{пер}}$ направлений вздовж M_1O_1 до центру переносного обертання. Вектор $\bar{a}^{\tau}_{\text{пер}}$ перпендикулярний

M_1O_1 і направлений відповідно до кутового прискорення.

Тангенціальне відносне прискорення

$$a^{\tau}_{\text{від}} = \frac{dv_{\text{від}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi R}{2}(4t - 3t^2)\right) = \frac{\pi R}{2}(4 - 6t).$$

При $t_1 = 1$ с $a^{\tau}_{\text{від}} = -\pi R = -50\pi = -157$ см/с^2.

Нормальне відносне прискорення

$$a^{n}_{\text{від}} = \frac{v^2_{\text{від}}}{R} = \frac{(25\pi)^2}{50} = 123{,}25 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\bar{a}^{n}_{\text{від}}$ направлений вздовж *M_1C* від точки *M_1* до точки *C*. Вектор $\bar{a}^{\tau}_{\text{від}}$ направлений протилежно вектору $\bar{v}_{\text{від}}$, так як $a^{\tau}_{\text{від}}$ має від'ємне значення.

Знаходимо прискорення Коріоліса:

$$a_{\text{кор}} = 2|\bar{\omega}_{\text{пер}}||\bar{v}_{\text{від}}|\sin(\bar{\omega}_{\text{пер}}, \bar{v}_{\text{від}}),\ \angle(\bar{\omega}_{\text{пер}}, \bar{v}_{\text{від}}) = 90^0,$$
$$a_{\text{кор}} = 2 \cdot 3 \cdot 78{,}5 = 471 \text{ см/с}^2.$$

Напрямок $\bar{a}_{\text{кор}}$ знаходимо за правилом Жуковського. Так як вектор $\bar{v}_{\text{від}}$ знаходиться в площині, перпендикулярній переносній осі обертання, то повернемо $\bar{v}_{\text{від}}$ на 90° в напрямку $\omega_{\text{пер}}$, тобто за ходом годинникової стрілки. Вектор $\bar{a}_{\text{кор}}$ буде направлений від *M_1* до С.

Проектуємо на вибрані координатні осі складові прискорення:

$$a_x = a^{\tau}_{\text{пер}} cos45^0 + a^{n}_{\text{пер}} cos45^0 + a^{n}_{\text{від}} + a_{\text{кор}} = 1341{,}9 \text{ см/с}^2,$$

$$a_y = a^{\tau}_{\text{пер}} cos45^0 - a^{n}_{\text{пер}} cos45^0 + a^{\tau}_{\text{від}} = 7{,}47 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{\text{абс}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{1341{,}9^2 + 7{,}47^2} = 1341{,}92 \text{ см/с}^2.$$

Відповідь. $a_{\text{абс}} = 1341{,}92$ см/с^2.

ЛЕКЦІЯ 4 ПЛОСКИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

Плоским або плоскопаралельним називають такий рух твердого тіла, при якому всі його точки переміщуються в площинах, паралельних деякій нерухомій площині.

<u>*Приклад 4.1*</u> Циліндр котиться по поверхні, здійснюючи плоский рух (рис. 4.1). Основа циліндра рухається паралельно площині Oyz. Всі точки, які лежать на перпендикулярах до основи циліндра, тобто паралельно осі x, переміщуються аналогічно точкам, які належать основі. Тому достатньо дослідити рух основи чи іншого перетину, який лежить на площині, паралельній Oyz, щоб визначити рух усього циліндра. Отже, при вивченні плоского руху твердого тіла будемо досліджувати рух плоскої фігури, тобто рух перетину тіла.

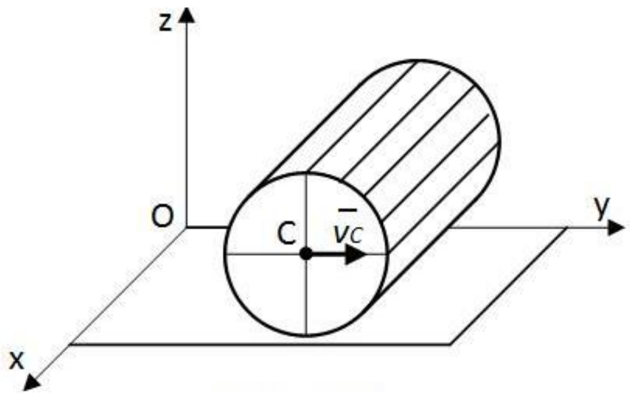


Рис. 4.1

4.1 Рівняння плоского руху твердого тіла

Тіло T здійснює плоский рух відносно площини Oxy. Тоді відрізок AB, який належить точками A і B площинам $П_1$ і $П_2$ ($П_1 \parallel П_2 \parallel Oxy$) і паралельний Oz, здійснює поступальний рух, тому точки A і B мають однакові кінематичні характеристики. Плоский рух твердого тіла зводиться до руху будь-якого перетину $S \parallel Oxy$ (Рис. 4.2).

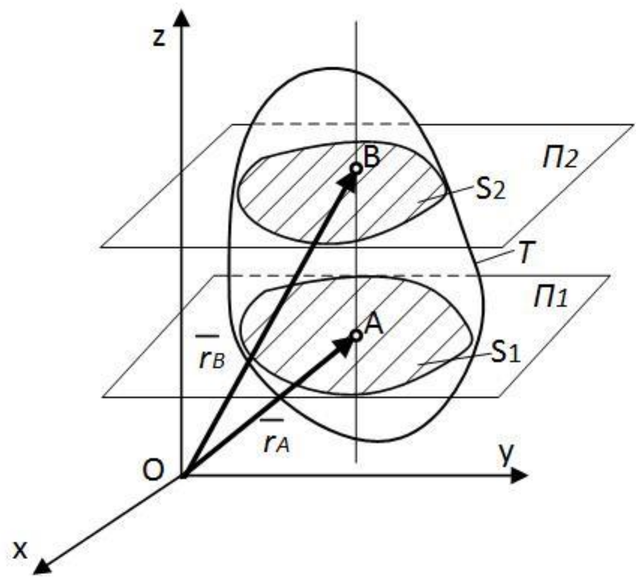


Рис. 4.2

Для задавання руху перетину твердого тіла достатньо описати рух якого-небудь відрізка *CA,* який належить цьому перетину. Положення відрізка *CA* визначається координатами точки *C,* вибраної за полюс, і кутом повороту відрізка, який відраховується від вибраного початкового положення (рис. 4.3).

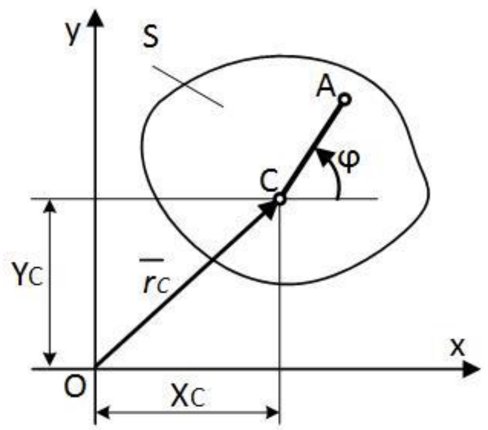


Рис. 4.3

Тоді рівняння плоского руху твердого тіла матимуть вигляд

$$
\begin{aligned}
&\text{а) } X_C = f_1(t)\\
&\text{б) } Y_C = f_2(t) \qquad (4.1)\\
&\text{в) } \varphi = \varphi(t)
\end{aligned}
$$

Вирази а), б) формули (4.1) описують поступальний рух плоскої фігури *S*, який визначається рухом полюса *C*. Поступальний рух плоскої фігури залежить від вибору полюса. Якщо вибрати за полюс точку *A,* то вирази *а), б)* матимуть інший вигляд. Вираз в) формули (4.1) описує обертальний рух плоскої фігури, який не залежить від вибору полюса.

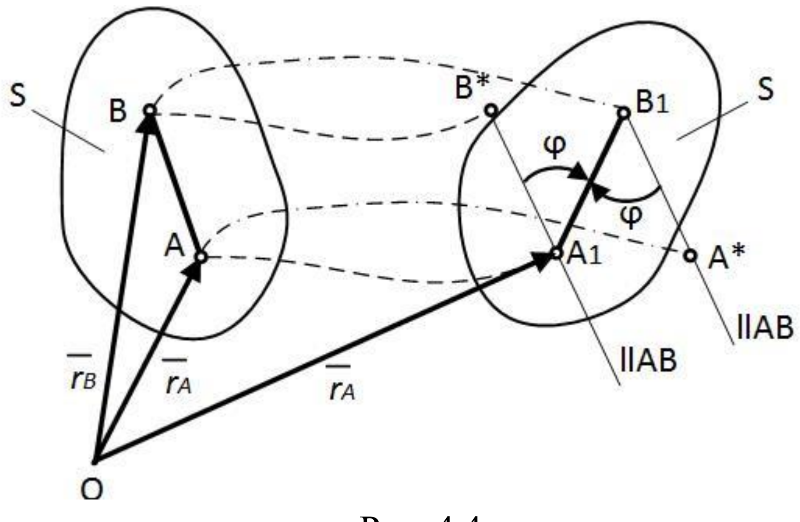


Рис. 4.4

Дійсно, відрізок AB (рис. 4.4) перетину S може потрапити в положення A_1B_1 наступим чином: здійснивши поступальне переміщення з полюсом A $\bar{r}_A = \bar{r}_A(t)$ та обертання отриманого відрізка A_1B^* навколо полюса A_1 на кут $\varphi = \varphi(t)$ до збігання A_1B^* з A_1B_1.

Якщо маємо точку B ($\bar{r}_B = \bar{r}_B(t)$) за полюс, то поступальний рух перетину S визначається відрізком A^*B_1, обертальний – поворотом відрізка A^*B_1 навколо полюсу B_1 на кут $\varphi = \varphi(t)$ до збігання A^*B_1 з A_1B_1.

Це пояснення підтверджує положення про те, що *плоский рух є сукупністю поступального руху разом з довільною точкою – полюсом та обертального навколо полюса.*

Так як обертальна складова руху ($\varphi = \varphi(t)$) від вибору полюса не залежить, то маємо незалежні (вільні) кутову швидкість $\omega = \omega(t)$ та кутове прискорення $\varepsilon = \varepsilon(t)$.

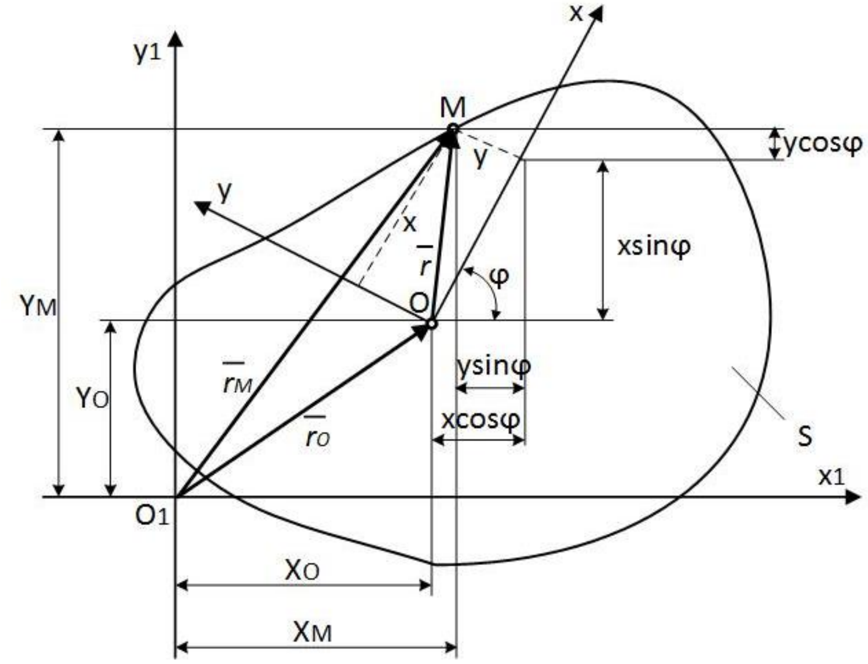


Рис. 4.5

Рух точки *M* перетину *S* можна визначити через координати точки (рис. 4.5)

$$x_M = x_0 + xcos\varphi - ysin\varphi$$
$$y_M = y_0 + xsin\varphi + ycos\varphi$$

Тобто поступальний рух перетину S разом полюсом O ($x_O = x_O(t)$, $y_O = y_O(t)$), який вважається *переносним* та обертальний ($\varphi_0 = \varphi_0(t)$), який вважається *відносним*.

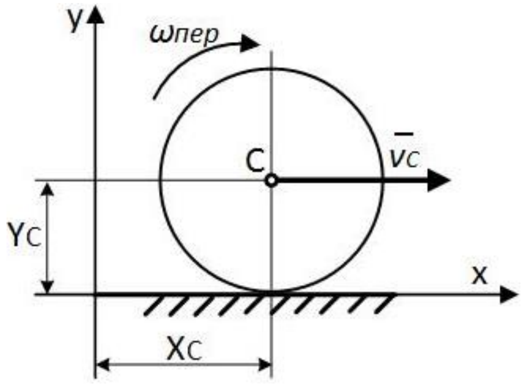


Рис. 4.6

<u>*Приклад 4.2*</u> Колесо радіуса *R = 0,4* м котиться по прямолінійному горизонтальному шляху з постійною кутовою швидкістю *ω = 2* рад/с (рис. 2.4.6). Записати рівняння плоского руху колеса, якщо центр колеса має постійну швидкість: v_C = *0,8* м/с.

<u>*Розв'язок.*</u> Оскільки колесо рухається рівномірно, то координата центра колеса по осі *x* буде рівна:

$$x_C = v_C t = 0{,}8t, \text{ м.}$$

Координата центра колеса по сі y постійна і рівна радіусу:

$$y_C = R = 0{,}4 \text{ м}.$$

Кут повороту колеса при рівномірному обертанні рівний: $\varphi = \omega t = 2t$, рад.

<u>*Відповідь.*</u> $x_C = 0{,}8t$, м; $y_C = 0{,}4$м; $\varphi = 2t$, рад.

4.2 Швидкість точок плоскої фігури

Визначимо положення точки B у вибраній системі відліку, приймаючи за полюс точку A (рис. 4.7):

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{r} \tag{4.2}$$

Вектор $\bar{r}$ постійного модуля (відстань між точками A і B не змінюється) міняє свій напрямок внаслідок обертання плоскої фігури навколо полюса A.

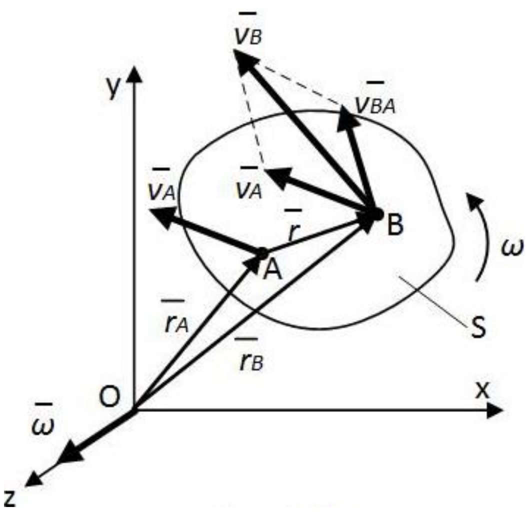


Рис. 4.7

Диференціюємо рівняння (4.2) за часом, одержуємо:

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt},$$

де $\bar{v}_B = \frac{d\bar{r}_B}{dt}$ – швидкість вибраної точки B;

$\bar{v}_A = \frac{d\bar{r}_A}{dt}$ – швидкість полюса A;

$\bar{v}_{BA} = \frac{d\bar{r}}{dt}$ – обертальна швидкість точки B навколо полюса A, яку визначимо за формулою Ейлера:

$$\bar{v}_{BA} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

Згідно з правилом векторного добутку вектор $\bar{v}_{BA}$ лежить в площині фігури, перпендикулярний BA ($\bar{v}_{BA} \perp \overline{BA}$) і направлений в бік обертання плоскої фігури, тобто відповідно до напрямку ω. Модуль вектора $\bar{v}_{BA}$ рівний:

$$v_{BA} = \omega r sin(\bar{\omega}, \bar{r}).$$

Так як $\bar{\omega} \perp \bar{r}$, то $sin(\bar{\omega}, \bar{r}) = 1$. Тому $v_{BA} = \omega r$.

Одержимо

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} \tag{4.3}$$

або

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r} \tag{4.4}$$

Швидкість будь-якої точки тіла при плоскому русі дорівнює геометричній сумі швидкості полюса і обертальної швидкості цієї точки навколо полюса, тобто переносної та відносної швидкостей.

Вважаючи рух точки *B* складним, маємо $\bar{r}_B = \bar{r}_A + x\bar{\imath} + y\bar{\jmath}$.

$$\bar{v}_B = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + x\frac{d\bar{\imath}}{dt} + y\frac{d\bar{\jmath}}{dt} = \bar{v}_A + \left(x(\bar{\omega} \times \bar{\imath}) + y(\bar{\omega} \times \bar{\jmath})\right) =$$
$$\bar{v}_A + \left(\bar{\omega} \times (x\bar{\imath} + y\bar{\jmath})\right) = \bar{v}_A + (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}.$$

Так як вектор швидкості $\bar{v}_{BA}$ перпендикулярний відрізку, який з'єднує точки *A* і *B*, то з цього слідує:

Проекції швидкостей двох точок твердого тіла на пряму, що з'єднує ці точки, рівні між собою. При цьому проекції повинні мати однаковий знак.

Нехай точка *A* перетину *S* має вектор швидкості $\bar{v}_A$ не перпендикулярний відрізку *AB*, тоді згідно (4.3) $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$ ($\bar{v}_{BA} \perp \overline{BA}$). Проектуючи це рівняння на напрямок *AB* (рис. 4.8), маємо $v_B cos\beta = v_A cos\varphi$, що показує наявність точки перетину швидкостей $\bar{v}_A$ та $\bar{v}_B$.

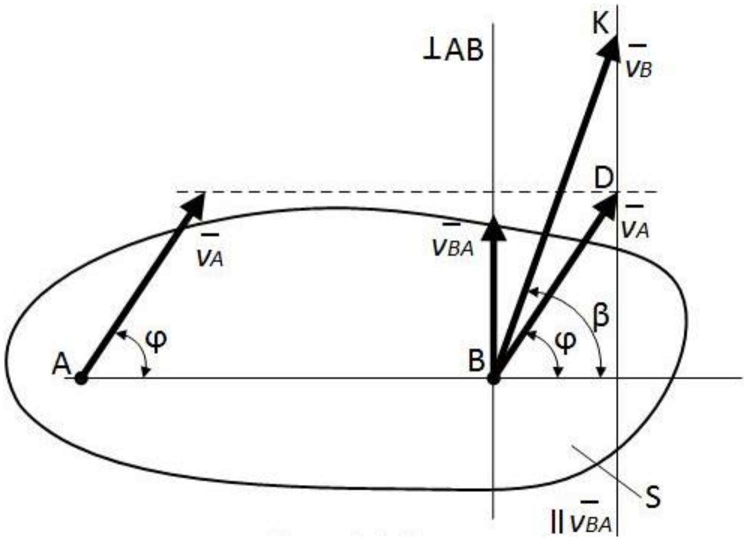


Рис. 4.8

<u>*Приклад 4.3*</u> Визначити швидкість точки *M*, яка знаходиться на ободі колеса, використовуючи умову прикладу 4.2.

<u>*Розв'язок.*</u> Застосуємо формулу (4.3). За полюс приймемо точку *C*, швидкість якої відома, тоді:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_C + \bar{v}_{MC}.$$

Обертальна швидкість точки *M* відносно полюса *C* рівна:

$$v_{MC} = \omega MC = 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8 \text{ м/с} \quad (MC = R).$$

Вектор $\bar{v}_{MC}$ перпендикулярний відрізку *MC* і направлений відповідно до кутової швидкості. Тому вектор $\bar{v}_{MC}$ відносно полюса *C* повинен показувати напрямок кутової швидкості (рис. 4.9).

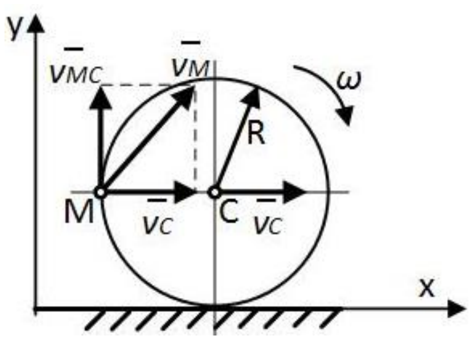


Рис. 4.9

Так як $\bar{v}_{MC} \perp \bar{v}_C$, то $v_M = \sqrt{v_C^2 + v_{MC}^2} = 1{,}13$ м/с,

$$\cos(\bar{v}_M, \bar{v}_C) = \frac{v_C}{v_M} = 0{,}70,\ \angle \bar{v}_M, \bar{v}_C = 45^0.$$

Відповідь. $v_M = 1{,}13$ м/с.

4.3 Миттєвий центр швидкостей

Миттєвим центром швидкостей (МЦШ) називається точка в площині руху плоскої фігури, швидкість якої в дану мить рівна нулю.

Доведемо, що коли кутова швидкість плоскої фігури не рівна нулю, то така точка існує. Відома швидкість точки *A* і $\omega \neq 0$. Повернемо вектор $\bar{v}_A$ на 90° в напрямку обертання і проведемо промінь *AK*. Від точки *A* відкладемо відрізок AP_V

$$AP_V = \frac{v_A}{\omega}$$

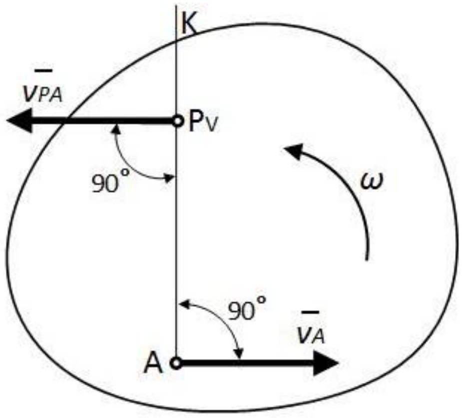


Рис. 4.10

Визначимо обертальну швидкість точки P_V навколо точки *A,* прийнявши її за полюс:

$$v_{PA} = \omega AP_V = \omega \frac{v_A}{\omega} = v_A$$

Вектор $\bar{v}_{PA}$ перпендикулярний AP_V і направлений відповідно до кутової швидкості (рис. 4.10), тобто $\bar{v}_{PA} = -\,\bar{v}_A$. Записуємо рівняння (2.4.3) теореми про додавання швидкостей плоскої фігури для точки P_V, прийнявши за полюс точку *A*:

$$\bar{v}_{P_V} = \bar{v}_A + \bar{v}_{PA} = \bar{v}_A - \bar{v}_A = 0$$

Швидкість точки P_V рівна нулю, отже точка P_V – *миттєвий центр швидкостей*. Якщо за полюс вибрати точку P_V, то рівняння (4.3) матиме вигляд

$$\bar{v}_A = \bar{v}_P + \bar{v}_{AP}$$

Однак $\bar{v}_{P_V} = 0, \bar{v}_{AP} = \bar{\omega} \times \overline{P_V A}$, тоді $\bar{v}_A = \bar{\omega} \times \overline{P_V A}$

З даної формули слідує, що швидкості точок тіла при плоскому русі розподіляються так, як і при обертанні. *МЦШ* являє собою миттєву нерухому вісь. Тому вектори швидкостей точок плоскої фігури перпендикулярні відрізкам, які з'єднують ці точки з *МЦШ*, і направлені відповідно до кутової швидкості, а модулі швидкостей пропорціональні відстаням точок до *МЦШ* (рис. 4.11)

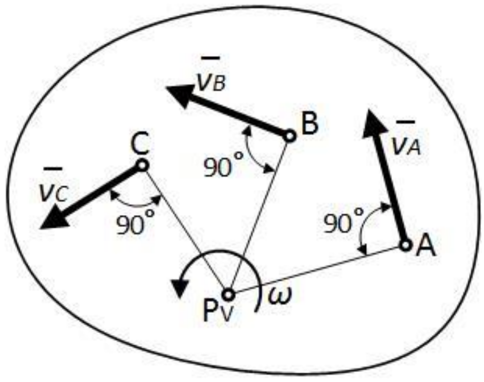


Рис. 4.11

$$v_A = \omega AP_V,\ v_B = \omega BP_V,\ v_C = \omega CP_V$$

Звідки

$$\omega = \frac{v_A}{AP_V} = \frac{v_B}{BP_V} = \frac{v_C}{CP_V}$$

Відношення швидкості будь-якої точки плоскої фігури до її відстані до МЦШ дорівнює кутовій швидкості обертання.

Якщо відомі напрямки векторів швидкостей двох точок плоскої фігури, то *МЦШ* знаходиться в точці перетину перпендикулярів, проведених до векторів швидкостей в точках їх прикладання.

Якщо відомі *МЦШ* і кутова швидкість обертання, то вектор швидкості будь-якої точки буде перпендикулярний відрізку, який з'єднує *МЦШ* з даною точкою, і направлений відповідно до кутової швидкості. Модуль швидкості рівний добутку кутової швидкості на відстань від точки до *МЦШ*.

4.4 Окремі випадки визначення МЦШ

а) *Колесо котиться без ковзання по нерухомій поверхні.*

МЦШ знаходиться в точці дотику колеса с нерухомою поверхнею (рис. 4.12).

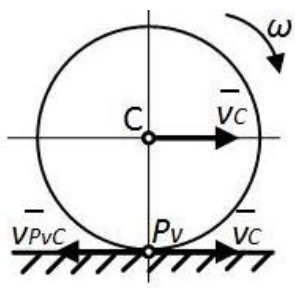


Рис. 4.12

$$\omega = \frac{v_C}{CP_V}$$

оскільки $\bar{v}_{P_V} = \bar{v}_C + \bar{v}_{P_VC}$;

$$v_{P_VC} = \omega \cdot CP_V = \frac{V_C}{CP_V} \cdot CP_V = v_C, \text{ тому } \bar{v}_{P_V} = 0.$$

Точка P_V – миттєвий центр швидкостей.

б) *Відомі швидкості двох точок або величина і напрямок швидкості одної точки* ($\bar{v}_A$) *і напрямок другої.*

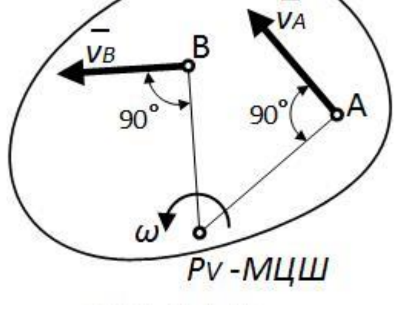


Рис. 4.13

Для знаходження *МЦШ* проводимо перпендикуляри до векторів швидкостей в точках *A* і *B*. Точка перетину перпендикулярів буде *МЦШ* (рис. 4.13).

$$\omega = \frac{v_A}{AP_V};$$

$$v_B = \omega BP_V.$$

в) *Відомі швидкості точок A і B механізму* $v_A \neq v_B, \bar{v}_A \parallel \bar{v}_B$.

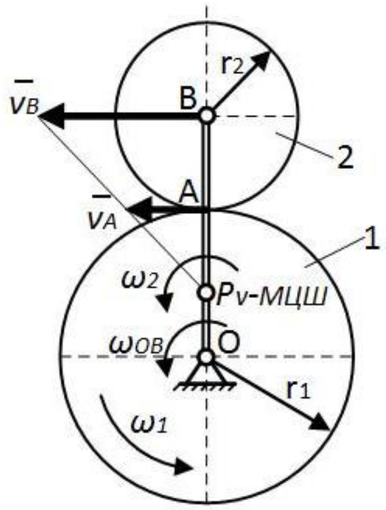


Рис. 4.14

$$v_B = \omega_{OB}(r_1 + r_2), v_A = \omega_1 r_1, v_B > v_A.$$

МЦШ знаходиться на перетині двох прямих, одна з яких проведена через точки *A* і *B,* друга – через кінці векторів швидкостей. Колесо *1* і кривошип *OB* обертаються навколо точки *O*. Колесо *2* здійснює плоский рух: (рис. 4.14).

$$\omega_2 = \frac{v_B}{BP_V} = \frac{v_A}{AP_V}, \quad BP_V = AP_V + r_2$$

$$v_B AP_V = v_A BP_V = v_A(AP_V + r_2),\ \text{або}$$

$$AP_V(v_B - v_A) = v_A r_2 \ \text{звідки}\ AP_V = \frac{v_A r_2}{v_B - v_A}.$$

Відкладаємо на прямій *BO* відрізок AP_V і одержуємо точку P_V (*МЦШ*).

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AP_V} = \frac{v_A(v_B - v_A)}{v_A r_2} = \frac{v_B - v_A}{r_2}$$

Напрямок кутової швидкості ω_2 визначається напрямками швидкостей (рис. 4.14).

г) *Відома кутова швидкість кривошипа OB і кутова швидкість колеса 1* (рис. 4.15) $v_A \neq v_B; \bar{v}_A \parallel \bar{v}_B; v_A > v_B$

$$v_A = \omega_1 r_1, v_B = \omega_{OB}(r_1 + r_2)$$

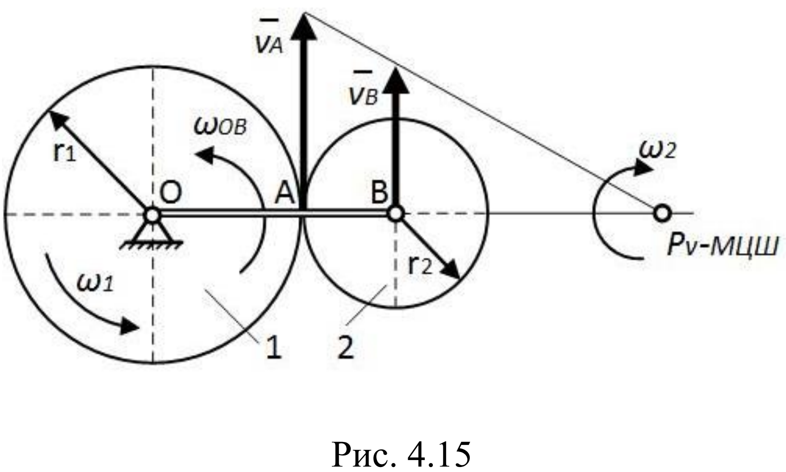


Рис. 4.15

Колесо *1* і кривошип *OB* обертаються навколо точки *O*. Колесо *2* здійснює плоский рух:

$$\omega_2 = \frac{v_B}{BP_V} = \frac{v_A}{AP_V}, \ \ AP_V = BP_V + r_2$$

$$v_B AP_V = v_A BP_V; \ v_B(BP_V + r_2) = v_A BP_V, \text{ звідки}$$

$$BP_V = \frac{v_B r_2}{v_A - v_B}$$

Відкладаємо на прямій *AB* відрізок BP_V і одержуємо точку P_V (*МЦШ*).

$$\omega_2 = \frac{v_B}{BP_V} = \frac{v_B(v_A - v_B)}{v_B r_2} = \frac{v_A - v_B}{r_2}$$

Напрямок кутової швидкості визначається векторами швидкостей (рис. 4.15).

д*) Відомо, що вектори швидкостей точок A і B паралельні і протилежно направлені* (рис. 4.16)

$$v_A = \omega_1 r_1, v_B = \omega_{OB}(r_1 + r_2)$$

Колесо *1* і кривошип *OB* обертаються навколо точки *O*. Колесо *2* здійснює плоский рух. *МЦШ* знаходиться в точці перетину прямої, яка з'єднує кінці векторів швидкостей точок *A* і *B,* і прямої *AB:*

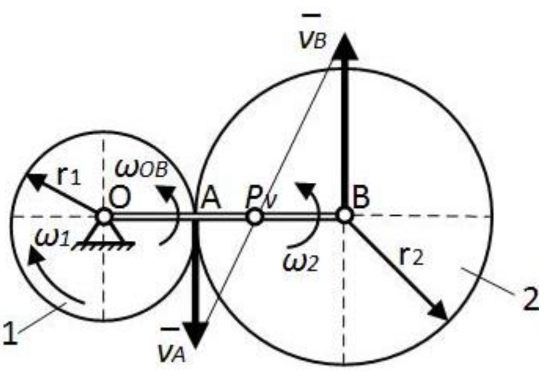


Рис. 4.16

$$\omega_2 = \frac{v_B}{BP_V} = \frac{v_A}{AP_V}, \ \ BP_V = r_2 - AP_V,$$

$$v_B AP_V = v_A BP_V = v_A(r_2 - AP_V), \text{ звідки}$$

$$AP_V = \frac{v_A r_2}{v_B + v_A}$$

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AP_V} = \frac{v_A(v_B + v_A)}{v_A r_2} = \frac{v_B + v_A}{r_2}$$

Напрямок кутової швидкості ω_2 визначається векторами швидкостей (рис. 4.16).

Приклад 4.4 В положенні механізму, схема якого наведена на рис. 2.4.17, визначити кутову швидкість шатуна *AB* і швидкості точок *B* і *C,* якщо $\omega_{OA} = 2$ рад/с, *OA = 0,2* м, *AB = 1,6* м, *BC = 0,8* м, *h = 0,8* м.

Розв'язок. Знайдемо швидкість точки *A:*

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4 \text{ м/с},$$

$$\bar{v}_A \perp \overline{AO}$$

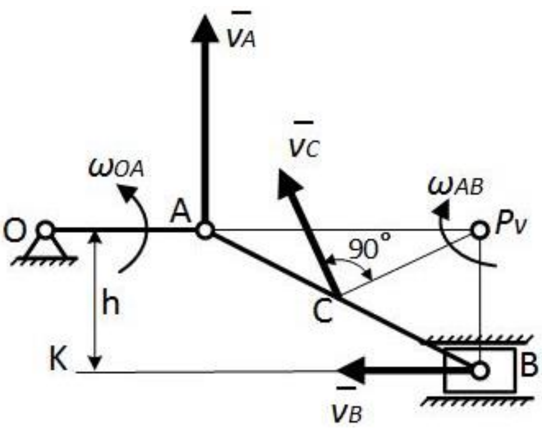


Рис. 4.17

Швидкість повзуна B має бути направлена по прямій KB. Миттєвий центр швидкостей шатуна AB знаходиться в точці P_V перетину перпендикулярів, поставлених до напрямків векторів швидкостей точок A і B.

Кутова швидкість шатуна AB рівна:

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_V} = \frac{v_B}{BP_V} = \frac{v_C}{CP_V}$$

Визначимо величини AP_V, BP_V, CP_V:

$$AP_V = \sqrt{AB^2 - BP_V{}^2} = \sqrt{1{,}6^2 - 0{,}8^2} = 1{,}39 \text{ м}, \; BP_V = h = 0{,}8 \text{ м},$$

$$cos\angle P_VBC = \frac{h}{AB} = \frac{0{,}8}{1{,}6} = 0{,}5, \qquad \angle P_VBC = 60^0.$$

Тоді ΔP_VBC рівносторонній, а отже $CP_V = BP_V = BC = 0{,}8$ м.

Знаходимо: $$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_V} = \frac{0{,}4}{1{,}39} = 0{,}29 \text{ рад/с},$$

$$v_B = \omega_{AB} BP_V = 0{,}29 \cdot 0{,}8 = 0{,}23 \text{ м/с},$$

$$v_C = \omega_{AB} CP_V = 0{,}29 \cdot 0{,}8 = 0{,}23 \text{ м/с}.$$

Напрямок кутової швидкості шатуна ω_{AB} визначається за напрямком обертання вектора $\bar{v}_A$ швидкості точки A відносно миттєвого центра швидкостей. Кутова швидкість шатуна AB направлена за годинниковою стрілкою. Швидкості точок B і C повинні показувати такий же напрямок. Для побудови вектора $\bar{v}_C$ проведемо перпендикуляр до відрізка CP_V і направимо вектор $\bar{v}_C$ відповідно з напрямком ω_{AB}.

*Відповідь***.** $\omega_{AB} = 0{,}29$ рад/с, $v_B = v_C = 0{,}23$ м/с.

Приклад 4.5 Колесо котиться без ковзання по прямолінійному шляху. Швидкість центра колеса рівна *20* м/с, Радіус колеса *1* м. Знайти швидкості точок *A, B, D* і кутову швидкість колеса (рис. 4.18).

Розв'язок. Миттєвий центр швидкостей знаходиться в точці P_V дотику колеса і нерухомої поверхні:

$$\omega = \frac{v_C}{CP_V} = \frac{v_C}{R} = \frac{20}{1} \text{ рад/с}.$$

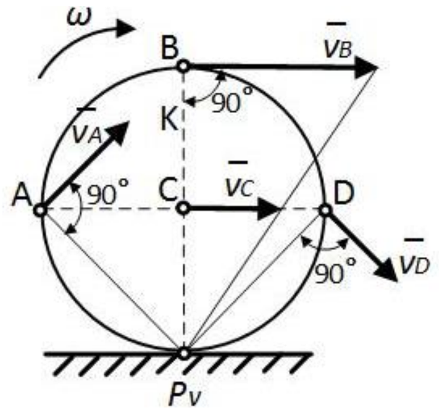


Рис. 4.18

Кутова швидкість направлена за годинниковою стрілкою. Знаходимо відстані від точок *A, B, D* до *МЦШ*:

$$AP_V = DP_V = R\sqrt{2} = 1\sqrt{2} = 1{,}41 \text{ м},$$

$$BP_V = 2R = 2\text{м},$$

$$v_A = v_D = \omega AP_V = 20 \cdot 1{,}41 = 28{,}2 \text{ м/с},$$

$$v_B = \omega BP_V = 20 \cdot 2 = 40 \text{ м/с}.$$

Вектор $\bar{v}_A$ перпендикулярний прямій AP_V, а вектор $\bar{v}_B$ перпендикулярний прямій BP_V. Вектор $\bar{v}_D$ перпендикулярний DP_V. Напрямок векторів $\bar{v}_A, \bar{v}_B, \bar{v}_D$ повинен відповідати кутовій швидкості колеса (рис. 4.18).

<u>*Відповідь.*</u> $v_A = 28{,}2$ м/с, $v_D = 28{,}2$ м/с, $v_B = 40$ м/с.

4.5 Прискорення точок плоскої фігури

Для визначення прискорення диференціюємо рівняння (4.4) за часом:

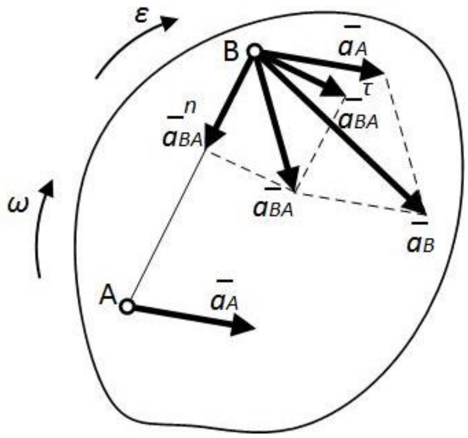


Рис. 4.19

$$\frac{d\bar{v}_B}{dt} = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + (\frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt})$$

де

$$\bar{a}_B = \frac{d\bar{v}_B}{dt}, \quad \bar{a}_A = \frac{d\bar{v}_A}{dt}, \quad \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\varepsilon}, \quad \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{v}_{BA}$$

Тоді

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}_{BA}$$

де $\bar{\varepsilon} \times \bar{r} = \bar{a}_{BA}^{\tau}$ – дотична складова прискорення точки *B* при обертанні плоскої фігури навколо полюса *A;*

$\bar{\omega} \times \bar{v}_{BA} = \bar{a}_{BA}^{n}$ – нормальна складова прискорення точки B при обертанні плоскої фігури навколо полюса *A*.

Вектори $\bar{a}_{BA}^{\tau}$ і $\bar{a}_{BA}^{n}$ згідно з правилом векторного добутку будуть направлені як показано на рис. 4.19.

Вектор $\bar{a}_{BA}^{\tau}$ перпендикулярний відрізку $\overline{BA}$ і направлений відповідно до кутового прискорення. Вектор $\bar{a}_{BA}^{n}$ направлений від точки *B* до полюсу *A*. Модулі цих прискорень:

$$a_{BA}^{n} = \omega^2 \cdot AB, \quad a_{BA}^{\tau} = \varepsilon \cdot AB.$$

Одержимо

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{n} + \bar{a}_{BA}^{\tau} \tag{4.5}$$

або

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} = \bar{a}_A^{n} + \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n} + \bar{a}_{BA}^{\tau} \tag{4.6}$$

Прискорення будь-якої точки плоскої фігури дорівнює геометричній сумі прискорення полюса і прискорення даної точки при обертанні плоскої фігури навколо полюса.

Для знаходження модуля прискорення точки будуємо, згідно рівняння (4.6), план прискорень (багатокутник прискорень) або проектуємо це рівняння на вибрані осі координат.

Приклад 4.6 Використовуючи умову прикладу 4.4, визначити прискорення точок *B* і С.

Розв'язок. За полюс виберемо точку *A*, так як прискорення цієї точки можна знайти (рис. 4.20):

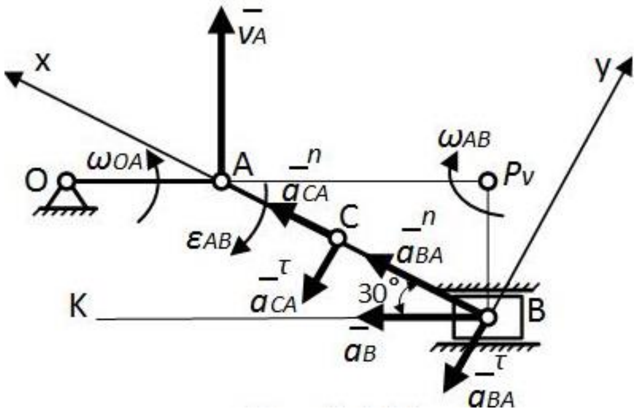


Рис. 4.20

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^{n} + \bar{a}_A^{\tau},$$

де $a_A^{\tau} = \varepsilon \cdot AO = 0$, так як кривошип *OA* обертається рівномірно, $\omega_{OA} = const$, $\varepsilon_{OA} = 0$;

$a_A^{n} = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 2^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}8$, м/с^2.

Вектор $\bar{a}_A^{n}$ направлений вздовж $\overline{AO}$ від точки *A* до точки *O*.

Застосуємо формулу (2.4.6), задаючи напрям вектора $\bar{a}_B$ (рис. 2.4.20) паралельно напрямку руху повзуна *B*:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{n} + \bar{a}_{BA}^{\tau} \tag{4.7}$$

Знаходимо $\bar{a}_{BA}^{n}$ і $\bar{a}_{BA}^{\tau}$:

$a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_{AB} \cdot AB$, так як ε_{AB} невідомо, то задаємо напрям вектора $\bar{a}_{BA}^{\tau}$, враховуючи, що $\bar{a}_{BA}^{\tau} \perp \overline{BA}$.

$a_{BA}^{n} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0{,}29^2 \cdot 1{,}6 = 0{,}135$ м/с^2.

Вектор $\bar{a}_{BA}^{n}$ направлений вздовж $\overline{BA}$ від точки B до полюса A. Проектуємо вираз (4.7) на вибрані осі (x, y):

$$\text{вісь } x\text{: } a_B cos30^0 = a_{BA}^{n} + a_A^n cos30^0 \tag{4.8}$$

$$\text{вісь } y\text{: } -a_B cos60^0 = -a_A^n cos60^0 - a_{BA}^{\tau} \tag{4.9}$$

Знаходимо з (4.8)

$$a_B = \frac{a_{BA}^{n} + a_A^n cos30^0}{cos30^0} = \frac{0{,}135 + 0{,}8 \cdot 0{,}87}{0{,}87} = 0{,}96 \text{ м/с}^2,$$

з (4.9) маємо:

$$a_{BA}^{\tau} = a_B cos60^0 - a_A^n cos60^0 = 0{,}96 \cdot 0{,}5 - 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}08 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\bar{a}_{BA}^{\tau}$ направлений в напрямку, вибраному на рис. 4.20.

Визначимо кутове прискорення шатуна AB:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^{\tau}}{AB} = \frac{0{,}08}{1{,}6} = 0{,}05 \text{ рад/с}^2.$$

Напрямок ε_{AB} буде за годинниковою стрілкою.

Визначимо прискорення точки C, вибравши за полюс точку A.

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA}^{\tau} + \bar{a}_{CA}^{n} \tag{4.10}$$

Знаходимо $\bar{a}_{CA}^{\tau}$ і $\bar{a}_{CA}^{n}$:

$a_{CA}^{\tau} = \varepsilon_{AB} AC = 0{,}05 \cdot 0{,}8 = 0{,}04$ м/с^2, $\bar{a}_{CA}^{\tau} \perp \overline{CA}$ і направлений згідно з ε_{AB}.

$a_{CA}^{n} = \omega_{AB}^2 \cdot AC = 0{,}29^2 \cdot 0{,}8 = 0{,}068$ м/с^2, вектор $\bar{a}_{CA}^{n}$ направлений вздовж CA від точки C до полюсу A.

Проектуємо вираз (4.10) на осі координат:

$$a_{Cx} = a_A^n cos30^0 + a_{CA}^{n} = 0{,}8 \cdot 0{,}87 + 0{,}068 = 0{,}764 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{Cy} = -a_A^n cos60^0 - a_{CA}^{\tau} = -0{,}8 \cdot 0{,}5 + 0{,}04 = -0{,}04 \text{ м/с}^2,$$

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = \sqrt{(0{,}764)^2 + (-0{,}44)^2} = 0{,}88 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: $a_B = 0{,}96$ м/с^2, $a_C = 0{,}88$ м/с^2.

4.6 *Миттєвий центр прискорень*

Миттєвий центр прискорень (МЦП) — це точка в площині руху плоскої фігури, прискорення якої у даний час рівне нулю.

Для знаходження *МЦП* треба знати:

- прискорення довільної точки, яку вважатимемо полюсом $\bar{a}_A$;
- кутову швидкість плоскої фігури ω;
- кутове прискорення ε (рис. 4.21).

Обчислюємо довжину відрізка AP_a за формулою $AP_a = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}}$ та відкладаємо його під кутом $\mu = arctg\,\frac{\varepsilon}{\omega^2}$ в напрямку ε. Прискорений рух рис. 4.21, а; сповільнений рух рис. 4.21, б.

Тоді $\bar{a}_{P_a} = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{P_aA} + \bar{a}^\tau_{P_aA}$, де $a^n_{P_aA} = \omega^2 \cdot AP_a$, $a^\tau_{P_aA} = \varepsilon \cdot AP_a$.

Маємо

$$a_{P_aA} = \sqrt{(a^n_{P_aA})^2 + (a^\tau_{P_aA})^2} = \sqrt{(\omega^2 \cdot AP_a)^2 + (\varepsilon \cdot AP_a)^2} = AP_a\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2},$$

але $AP_a = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}}$, тому $\bar{a}_{P_aA} = -\bar{a}_A$, оскільки $tg\mu = \frac{a^\tau_{P_aA}}{a^n_{P_aA}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$, то $\bar{a}_{P_a} = 0$. Точка P_a – миттєвий центр прискорень.

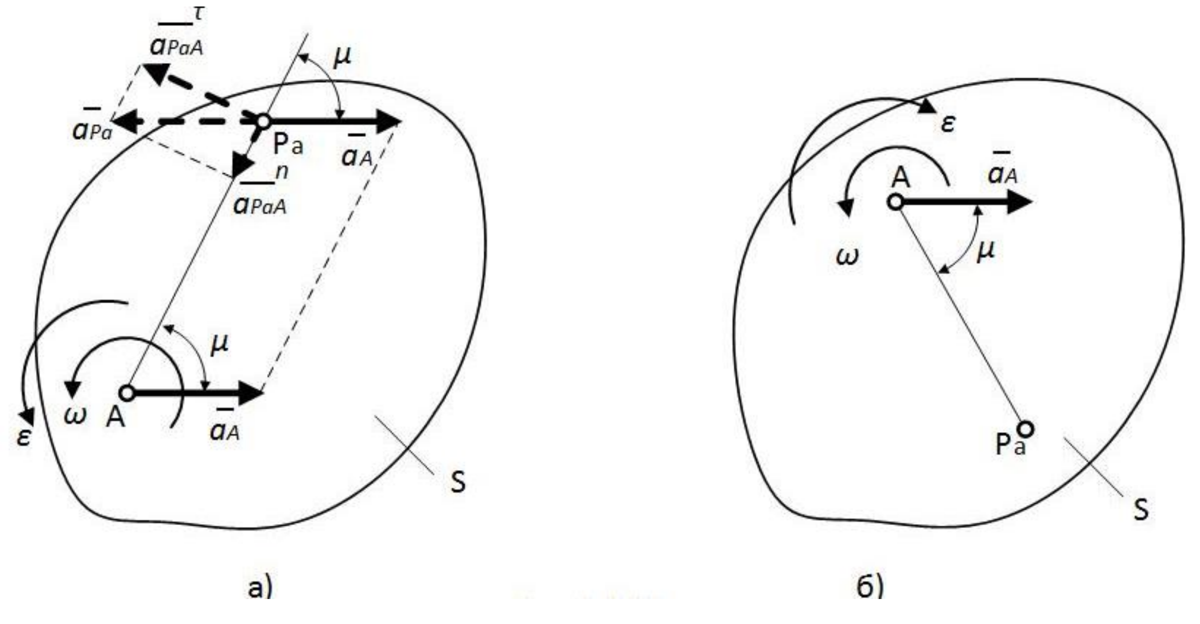


Рис. 4.21

Окремі випадки руху плоскої фігури:

1. Якщо $\omega = 0$; $\varepsilon = 0$ миттєвого центра прискорень не існує. Перетин S рухається поступально.

2. Якщо $\omega = 0$; $\varepsilon \neq 0$, кут $\mu = \frac{\pi}{2}$, всі прискорення точок плоского перетину S перпендикулярні до відрізків, які з'єднують ці точки з миттєвим центром прискорень P_a (рис. 4.22).

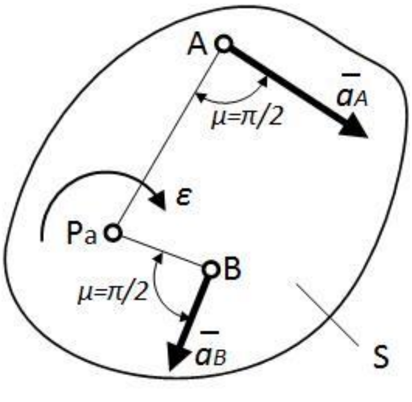


Рис. 4.22

$$a^{\tau}_{AP_a} = \varepsilon \cdot P_aA,\ a^{n}_{AP_a} = 0,$$

$$a^{\tau}_{BP_a} = \varepsilon \cdot P_aB,$$

$$\varepsilon = \frac{a^{\tau}_{BP_a}}{P_aB} = \frac{a^{\tau}_{AP_a}}{P_aA}$$

3. Якщо $\omega \neq 0$; $\varepsilon = 0$, кут $\mu = 0$, прискорення всіх точок плоского перетину S напрямлені до миттєвого центру прискорень (рис. 4.23).

$$a^{n}_{AP_a} = \omega^2 \cdot P_aA,\ a^{\tau}_{AP_a} = 0$$

$$a^{n}_{BP_a} = \omega^2 \cdot P_aB,$$

$$\omega^2 = \frac{a^{n}_{BP_a}}{P_aB} = \frac{a^{n}_{AP_a}}{P_aA}.$$

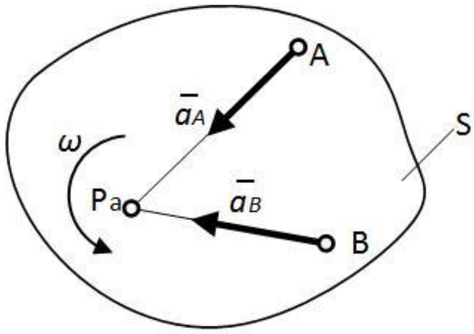


Рис. 4.23

Для знаходження *МЦП*, якщо відомі прискорення точки плоскої фігури, кутова швидкість та кутове прискорення необхідно (рис. 4.24):

1. Визначити кут μ за формулою: $tg\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$.

2. Повернути вектор прискорення точки на кут μ в напрямку кутового прискорення.

3. Відкласти відрізок AP_a: $AP_a = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}}$ в напрямку повернутого вектора прискорення $\bar{a}_A$.

За допомогою *МЦП* можна знайти прискорення будь-якої точки. Для цього знаходимо величину прискорення точки B: $a_B = BP_a\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}$. Від відрізка BP_a під кутом μ відкладаємо в напрямку, протилежному кутовому прискоренню, вектор прискорення точки B (рис. 4.24).

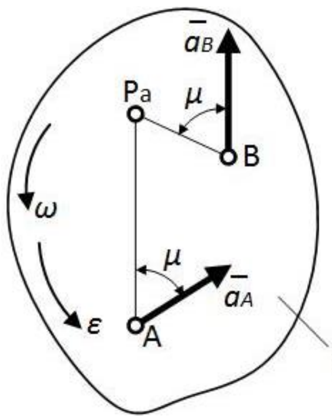


Рис. 4.24

МЦП і *МЦШ* в загальному випадку – різні точки.

Приклад 4.7 Колесо радіуса $R = 0{,}5$ м котиться без ковзання рівносповільнено по прямолінійному горизонтальному шляху. Швидкість центра колеса $v_C = 0{,}5$ м/с, прискорення центра $a_C = 0{,}5$ м/с^2. Знайти прискорення точки *А* за допомогою *МЦП* та за теоремою про прискорення точок плоскої фігури.

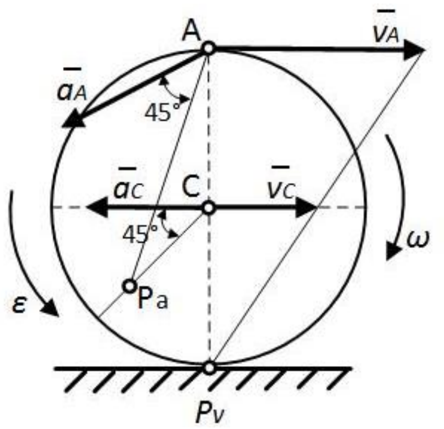


Рис. 4.25

Розв'язок. Знаходимо кутові швидкість і прискорення колеса:

$$\omega = \frac{v_C}{R} = \frac{0{,}5}{0{,}5} = 1 \text{ рад/с}, \varepsilon = \frac{a_C}{R} = \frac{0{,}5}{0{,}5} = 1 \text{ рад/с}^2.$$

Кутова швидкість направлена за годинниковою стрілкою, так як вектор швидкості $\bar{v}_C$ відносно *МЦШ* повертається за годинниковою стрілкою. Кутове прискорення направлене протилежно відповідно до напрямку вектора прискорення центра колеса $\bar{a}_C$.

I спосіб. Знайдемо кут μ:

$$tg\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = 1,\ \mu = arctg1 = 45^0.$$

Повернемо $\bar{a}_C$ на кут 45° за напрямком кутового прискорення. Визначимо відстань від точки *С* до *МЦП* (рис. 4.25) (рух сповільнений):

$$CP_a = \frac{a_C}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{1+1}} = 0{,}36 \text{ м},$$

Знаходимо відстань точки *А* до *МЦП* з ΔACP_a:

$$AP_a = \sqrt{{CP_a}^2 + AC^2 - 2CP_a \cdot AC cos135^0} =$$
$$\sqrt{0{,}36^2 + 0{,}5^2 - 2 \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}707} = 0{,}8 \text{ м}.$$

В точці *А* від відрізка AP_a відкладемо вектор прискорення точки *А* під кутом μ в напрямку, протилежному кутовому прискоренню. Величина a_A прискорення точки *А* рівна:

$$a_A = AP_a\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0{,}8\sqrt{1^2 + 1^2} = 1{,}12 \text{ м/с}^2.$$

II спосіб. Застосуємо формулу (4.5), прийнявши за полюс точку С:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_C + \bar{a}_{AC}^n + \bar{a}_{AC}^\tau \qquad (4.11)$$

Знаходимо $\bar{a}_{AC}^n, \bar{a}_{AC}^\tau$:

$$a_{AC}^\tau = \varepsilon AC = \varepsilon R = 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5 \text{ м/с}^2,$$

$\bar{a}_{AC}^{\tau} \perp \overline{AC}$ і направлений відповідно до кутового прискорення (рис. 4.26):

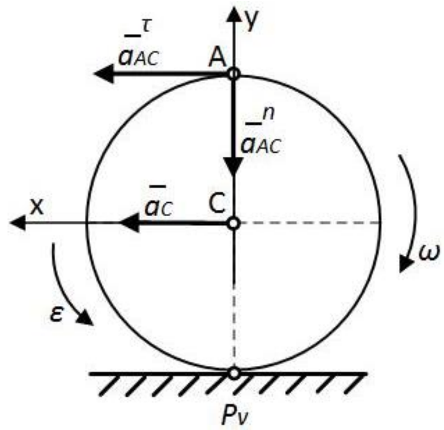


Рис. 4.26

$$a_{AC}^{n} = \omega^2 AC = \omega^2 R = 1^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\bar{a}_{AC}^{n}$ направлений від точки A до полюсу C (рис. 4.26). Проектуємо вираз (2.4.11) на вибрані осі координат:

$$a_{Ax} = a_C + a_{AC}^{\tau} = 0{,}5 + 0{,}5 = 1 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{Ay} = -a_{AC}^{n} = -0{,}5 \text{ м/с}^2,$$

$$a_A = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2} = \sqrt{1^2 + (-0{,}5)^2} = 1{,}12 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь. $a_A = 1{,}12$ м/с^2.

4.7 План швидкостей

Визначення швидкостей різних точок рухомої плоскої фігури легко може бути виконано *графічно* за допомогою побудови *плану швидкостей*.

План швидкостей – це графічне зображення з єдиного центра векторів абсолютних швидкостей точок фігури в фіксований момент її руху.

План швидкостей може бути побудований, якщо:

- *відома швидкість однієї точки плоскої фігури і напрям швидкості іншої точки*;
- *відома швидкість однієї точки плоскої фігури і миттєва кутова швидкість фігури.*

Нехай відомі швидкості $\bar{v}_A,\ \bar{v}_B,\ \bar{v}_C$ і $\bar{v}_D$ вершин прямокутника *ABCD* (рис. 4.27, а). Для побудови плану швидкостей з довільної точки p – *початку плану швидкостей* (рис. 4.27, б), відкладемо вектори $\overline{pa}, \overline{pb}, \overline{pc}$ і $\overline{pd}$, які в обраному масштабі будуть зображати швидкості $\bar{v}_A,\ \bar{v}_B,\ \bar{v}_C$ і $\bar{v}_D$. Отримані точки a , b , c і d , які називаються *вершинами плану швид*костей, з'єднаємо між собою прямими лініями.

Встановимо *властивості* і *правила побудови* плану швидкостей.

За теоремою про швидкості точок плоскої фігури (рівняння (4.3)), якщо за полюс прийняти точку *A*, то для точки *B* маємо:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}, \tag{4.12}$$

де $\bar{v}_A$ – вектор абсолютної швидкості точки A;

$\bar{v}_{BA}$ – вектор відносної швидкості точки B у її обертальному русі разом з тілом навколо точки A, напрямлений перпендикулярно до AB і за модулем рівний $v_{BA} = \omega \cdot AB$.

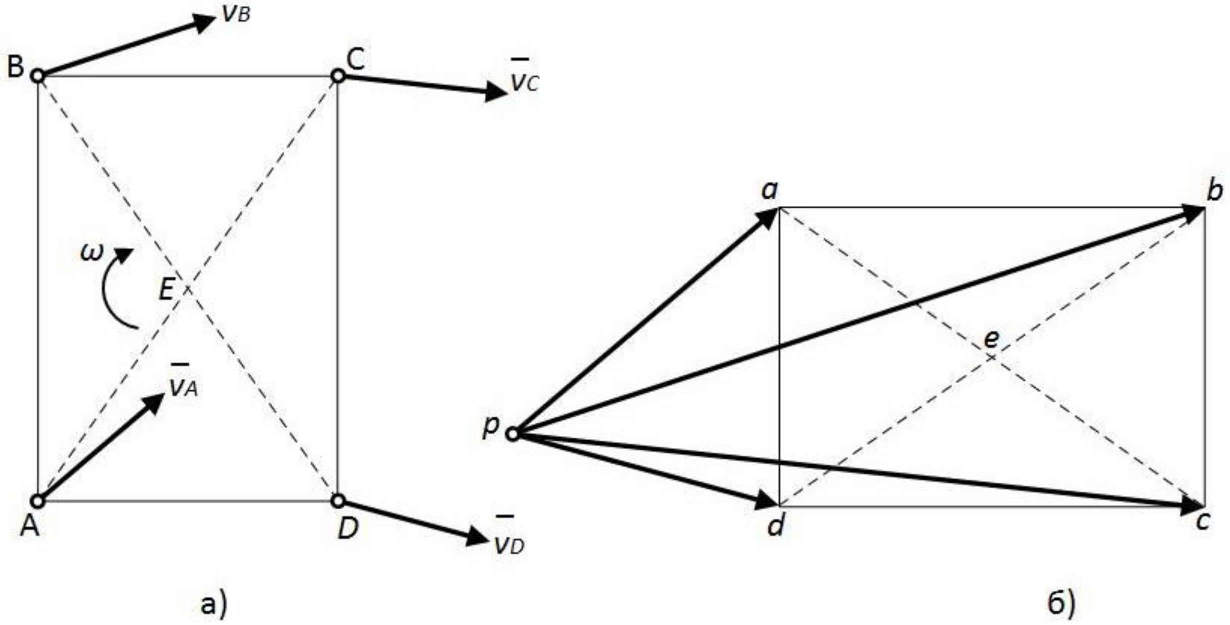


Рис. 4.27

З іншого боку для векторів трикутника pab плану швидкостей (рис. 4.27, б) можна записати:

$$\overline{pb} = \overline{pa} + \overline{ab} \tag{4.13}$$

Враховуючи, що вектори $\overline{pb}$ і $\overline{pa}$ зображають в обраному масштабі абсолютні швидкості $\bar{v}_B$ і $\bar{v}_A$, та порівнюючи рівняння (4.12) і (4.13), можна зробити висновок, що вектор $\overline{ab}$ зображає в масштабі швидкість $\bar{v}_{BA}$.

Таким чином, вектор $\overline{ab}$ плану швидкостей направлений перпендикулярно до сторони AB фігури і за модулем дорівнює:

$$ab = \frac{v_{BA}}{\mu_v} = \frac{\omega \cdot AB}{\mu_v},$$

де μ_v – масштабний коефіцієнт, який прийнятий при побудові плану швидкостей. Аналогічно:

$$\overline{bc} \perp BC, \;\; bc = \frac{v_{CB}}{\mu_v} = \frac{\omega \cdot BC}{\mu_v}$$

$$\overline{cd} \perp CD, \;\; cd = \frac{v_{DC}}{\mu_v} = \frac{\omega \cdot CD}{\mu_v} \tag{4.14}$$

$$\overline{da} \perp DA, \;\; da = \frac{v_{AD}}{\mu_v} = \frac{\omega \cdot DA}{\mu_v}$$

Звідси миттєва швидкість обертання плоскої фігури:

$$\omega = \frac{ab \cdot \mu_v}{AB} = \frac{bc \cdot \mu_v}{BC} = \frac{cd \cdot \mu_v}{CD} = \frac{da \cdot \mu_v}{DA}. \tag{4.15}$$

Вектор $\overline{ab}$ згідно рівнянню (4.12) направлений на плані швидкостей від точки a до точки b. Якщо цей вектор перенести в точку *B* фігури, то можна визначити напрям обертання точки *B* навколо точки *A* разом з фігурою (в даному випадку, за ходом годинникової стрілки). Напрям же миттєвої кутової швидкості ω плоскої фігури буде збігатися з напрямом її обертання.

З розглянутого слідує:

• *вектори абсолютних швидкостей точок виходять з початку плану швидкостей – p*;

• *відрізки, що з'єднують кінці векторів абсолютних швидкостей на плані швидкостей, перпендикулярні відрізкам що з'єднують відповідні точки тіла і відповідають швидкостям обертання точок разом з плоскою фігурою навколо полюса*;

• (*правило подібності*) *багатокутник з вершинами abcd плану швидкостей подібний до багатокутника ABCD фігури і повернутий відносно останнього на* 90^0 *в бік обертального руху плоскої фігури.*

<u>*Приклад 4.8*</u> Знайти кутову швидкість ω_2 шатуна *2* і швидкість точки *C* повзуна *3* кривошипо-шатунного механізму (рис. 4.28), якщо: $\omega_1 = 10$ рад/с, *OB = 0,06* м, $\alpha = 30^0, \beta = 120^0$.

<u>*Розв'язок*</u>. Враховуючи, що кривошип *1* обертається навколо нерухомої точки *O* з кутовою швидкістю ω_1, визначаємо швидкість точки *B*, яка з'єднує кривошип *OB* і шатун *BC*:

$$v_B = \omega_1 \cdot OB = 10 \cdot 0{,}06 = 0{,}6 \text{ м/с}.$$

Направлена швидкість $\bar{v}_B$ перпендикулярно до *OB* в бік кутової швидкості ω_1.

Другою точкою шатуна *2*, швидкість якої можна визначити, є точка *C*, оскільки вона, крім шатуна, одночасно належить і повзуну *3*, що рухається поступально в горизонтальних направляючих. Тобто напрям цієї швидкості відомий.

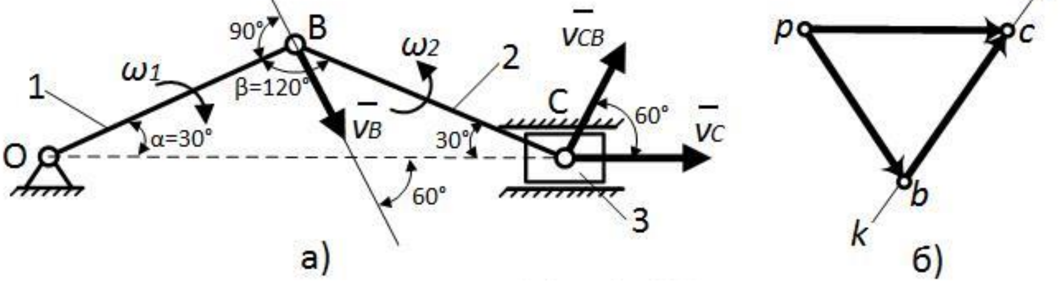


Рис. 4.28

Для визначення швидкості точки *C* записуємо теорему швидкостей при плоскопаралельному русі, приймаючи за полюс точку *B* , швидкість якої відома:

$$\bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{v}_{CB} \qquad (*)$$

де $\bar{v}_{CB}$ – відносна швидкість точки *C* у її обертальному русі разом з шатуном *2* навколо точки *B*; вектор $\bar{v}_{CB}$ направлений перпендикулярно до *BC* ;

$\bar{v}_C$ – абсолютна швидкість точки *C*, яка рухається прямолінійно разом з повзуном *3* в горизонтальних направляючих.

Будуємо план швидкостей (рис. 4.28, б). Для цього вибираємо масштаб:

$$\mu_v = \frac{v_B}{pb} = \frac{0{,}6\ \text{м/с}}{20\ \text{мм}} = 0{,}03\ \frac{\text{м}}{\text{с}\cdot\text{мм}}.$$

Масштабний коефіцієнт μ_v показує, яка *швидкість в одному міліметрі плану швидкостей*.

З довільної точки *p* (початку плану швидкостей) відкладемо вектор $\overline{pb}$, який в вибраному масштабі зображає вектор швидкості $\bar{v}_B$. Через точку *b* згідно з рівнянням (*) проведемо лінію *kl* паралельну вектору $\bar{v}_{CB}$, величина якого невідома.

Вектор, що на плані швидкостей зображає абсолютну швидкість точки *C*, виходить з початку плану *p* паралельно *OC* (лінії вздовж якої направлена швидкість $\bar{v}_C$) до перетину з лінією *kl* в точці *c*. Напрям цього вектора $\overline{pc}$ від *p* до *c*.

Визначимо напрям вектора $\overline{bc}$, який на плані швидкостей зображає відносну швидкість $\bar{v}_{CB}$. Оскільки, згідно рівнянню (*), вектор $\bar{v}_{CB}$ треба додати до вектора $\bar{v}_B$, який на плані швидкостей зображено вектором $\overline{pb}$, то вектор $\overline{bc}$ направлений від точки *b* до точки *c* .

Отриманий векторний трикутник *pbc* являє собою план швидкостей для кривошипо-шатунного механізму в заданому положенні. Сторони цього трикутника в вибраному масштабі зображають:

$\overline{pb}$ – абсолютну швидкість точки *B* ($\bar{v}_B$);

$\overline{bc}$ – відносну швидкість точки *C* у її обертанні разом з шатуном *BC* навколо точки *B* ($\bar{v}_{CB}$);

$\overline{pc}$ – абсолютну швидкість точки *C* ($\bar{v}_C$).

Знайдені напрями швидкостей $\bar{v}_{CB}$ і $\bar{v}_C$ переносимо з плану швидкостей в точку *C* на рис. 4.28, а.

Так як план швидкостей побудований в масштабі, то для знаходження модулів швидкостей потрібно виміряти довжину відповідних векторів і помножити її на масштабний коефіцієнт, одержимо:

$$v_C = pc \cdot \mu_v = 20\ \text{мм} \cdot 0{,}03\ \frac{\text{м}}{\text{с}\cdot\text{мм}} = 0{,}6\ \text{м/с},$$

$$v_{CB} = bc \cdot \mu_v = 20\ \text{мм} \cdot 0{,}03\ \frac{\text{м}}{\text{с}\cdot\text{мм}} = 0{,}6\ \text{м/с}.$$

Визначимо миттєву кутову швидкість шатуна *2*. Оскільки $v_{CB} = \omega_2 \cdot CB$, то:

$$\omega_2 = \frac{v_{CB}}{CB} = \frac{0{,}6}{0{,}06} = 10 \text{ рад/с},$$

де $CB = AB = 0{,}06$ м , виходячи з того, що трикутник *ABC* (рис. 4.28, а) рівнобедрений.

Напрям кутової швидкості ω_2 визначається напрямом вектору $\bar{v}_{CB}$. В даному випадку ω_2 направлена проти ходу годинникової стрілки.

Відповідь: $\omega_2 = 10$ рад/с, $v_C = 0{,}6$ м/с.

4.8 План прискорень

Розглянемо графічний спосіб визначення прискорень точок плоскої фігури за допомогою *плану прискорень*.

План прискорень – це графічне зображення векторів прискорень точок плоскої фігури у фіксований момент часу.

Побудова плану прискорень базується на представлені прискорення будь-якої точки *B* плоскої фігури у вигляді суми трьох векторів:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau \tag{4.16}$$

де $\bar{a}_A$ – прискорення точки фігури, яку прийнято за полюс;

$\bar{a}_{BA}^n$ – відносне нормальне (доцентрове) прискорення точки *B* у її відносному обертальному русі разом з плоскою фігурою навколо полюса *A*. Направлене це прискорення від точки *B* до точки *A* і за модулем дорівнює $a_{BA}^n = \omega^2 \cdot BA$;

$\bar{a}_{BA}^\tau$ – відносне тангенціальне (дотичне) прискорення точки *B* у її відносному обертальному русі разом з плоскою фігурою навколо полюса *A*. Направлене це прискорення перпендикулярно до $\bar{a}_{BA}^n$ (відрізку *AB*) в бік кутового прискорення тіла ε і за модулем дорівнює: $a_{BA}^\tau = \varepsilon \cdot BA$.

Оскільки для визначення величини $\bar{a}_{BA}^n$ треба знати кутову швидкість ω плоскої фігури, то, якщо вона не задана, *попередньо треба побудувати план швидкостей*. З плану швидкостей і знаходять кутову швидкість відносного обертального руху.

Для побудови плану прискорень необхідно знати *прискорення деякої точки плоскої фігури (наприклад, $\bar{a}_A$), яку обирають за полюс*.

Крім того, має бути відомо:

Випадок 1 - напрям прискорення точки В фігури, для якої записують векторне рівняння (4.16).

Випадок 2 - прискорення $\overline{a}_C$ точки С фігури, відносно якої, як полюса, можна записати для точки В друге векторне рівняння, аналогічне (4.16).

Випадок 3 - в точці В до фігури приєднане інше тіло, відносно точки якого можна записати друге векторне рівняння для точки В, аналогічне (4.16).

<u>*Приклад 2.4.9*</u> Знайти прискорення точок *B* і *C* трикутника *ABC* (рис. 4.29, а). Відомі прискорення точки *A*, напрям прискорення точки *B* і кутова швидкість трикутника *ABC*, тобто дані відповідають випадку 1.

<u>*Розв'язок.*</u> Записуємо векторну рівність (4.16) для точки *B*, прийнявши за полюс точку *A* і будуємо, згідно цієї рівності, план прискорень. Для цього вибираємо масштаб побудови $\mu_a = \frac{a_A}{\pi a}$ і з довільної точки π (*початку плану прискорень*) проводимо вектор $\overline{\pi a}$, який в масштабі буде зображати прискорення $\overline{a}_A$ (рис. 4.29, б). З кінця побудованого вектора (точки *a*) проводимо вектор $\overline{an}_{BA}$, який в тому ж масштабі буде зображати прискорення $\overline{a}_{BA}^n$.

Величину прискорення $\overline{a}_{BA}^n$ визначимо зрівняння: $a_{BA}^n = \omega^2 \cdot BA$. Довжину вектора $\overline{an}_{BA}$ знаходимо враховуючи вибраний масштаб: $an_{BA} = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a}$, а направлений цей вектор вздовж *BA* від точки *B* до точки *A*.

До нормального прискорення додаємо, згідно рівнянню (4.16), тангенціальне прискорення $\overline{a}_{BA}^\tau$. Оскільки величина (модуль) цього прискорення невідома, то через точку n_{BA} (кінець вектора $\overline{an}_{BA}$) проведемо лінію mk перпендикулярно до *BA*, вздовж якої і буде напрямлений вектор $\overline{a}_{BA}^\tau$.

Лінія, вздовж якої направлене абсолютне прискорення точки *B*, відома з умови задачі. Так як всі абсолютні прискорення точок на плані виходять з початку плану π, то через цей початок проводимо пряму, паралельну лінії прискорення точки *B*.

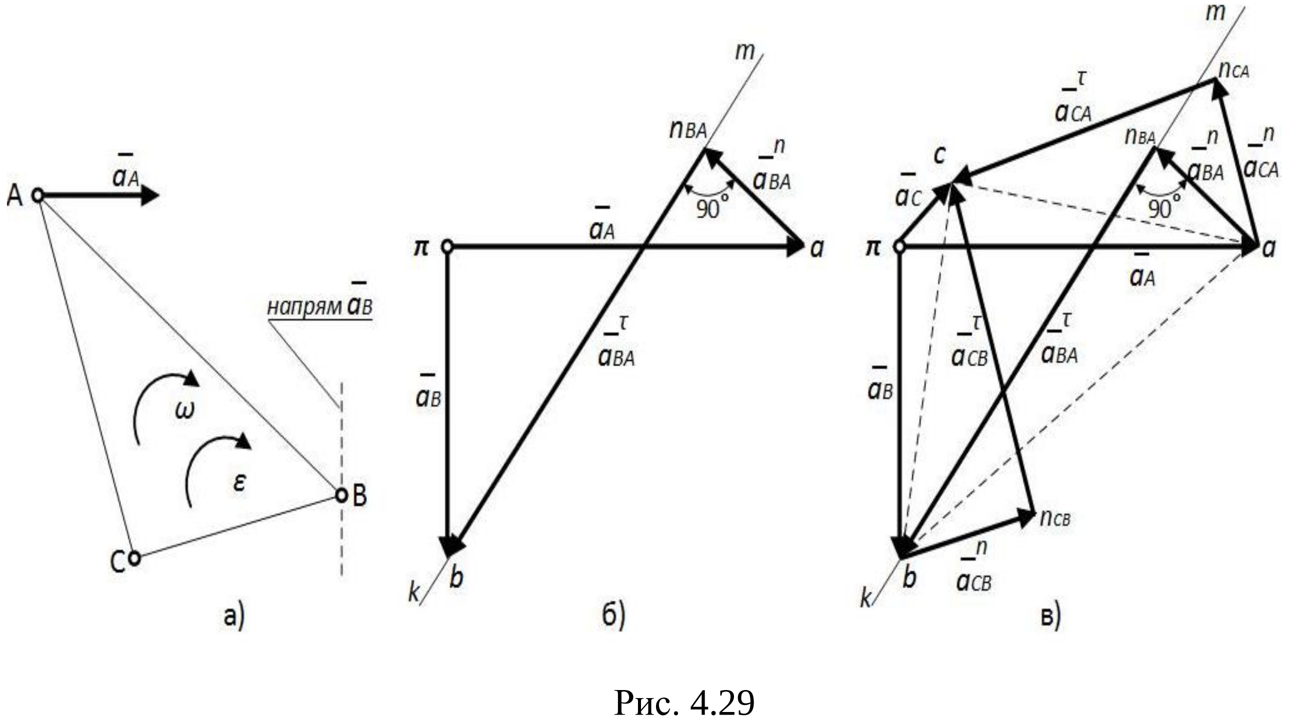


Рис. 4.29

Точка перетину лінії *mk* і лінії прискорення точки B (яку позначимо літерою b) і буде рішенням рівняння (4.16), а вектор $\overline{\pi b}$ відповідає прискоренню точки B. Величину цього прискорення знаходимо враховуючи вибраний масштаб:

$$a_B = \pi b \cdot \mu_a.$$

Для визначення прискорення точки C скористаємося тим, що відомі вже прискорення двох точок фігури A і B (випадок 2).

Записуємо векторні рівняння для прискорення точки C відносно полюсів A і B:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA}^n + \bar{a}_{CA}^\tau \quad (4.17)$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^\tau \quad (4.18)$$

де $\bar{a}_{CA}^n$ і $\bar{a}_{CB}^n$ – відносні нормальні прискорення точки C у її відносному обертальному русі навколо точок A і B відповідно;

$\bar{a}_{CA}^\tau$ і $\bar{a}_{CB}^\tau$ – відносні тангенціальні прискорення точки C у її відносному обертальному русі навколо точок A і B відповідно.

Першим розв’язуємо рівняння (4.17). Так як вектор прискорення $\bar{a}_A$ точки A на плані вже побудований (рис. 4.29, в), то з його кінця (точки a) проводимо вектор $\overline{an}_{CA}$, який напрямлений від точки C до точки A і за модулем дорівнює: $a_{CA}^n = \omega^2 \cdot CA$. Довжину цього вектора знаходимо враховуючи вибраний масштаб: $an_{\mathrm{CA}} = \frac{a_{\mathrm{CA}}^n}{\mu_a}$. Наступним, згідно рівняння (4.17), потрібно побудувати вектор $\bar{a}_{CA}^\tau$. Через кінець вектора $\overline{an}_{CA}$ (точку n_{CA}) проводимо пряму, перпендикулярну до CA, вздовж якої буде напрямлене прискорення $\bar{a}_{CA}^\tau$ і на якій буде лежати точка кінця вектора $\bar{a}_C$. Так як величина вектора $\bar{a}_{CA}^\tau$ невідома, то закінчити побудову поки що неможливо, тому продовжуємо побудову плану прискорень згідно з рівнянням (4.18).

Вектор прискорення $\bar{a}_B$ точки B на плані вже побудований, тому з його кінця, точки b, відкладаємо вектор $\overline{bn}_{CB}$ (прискорення $\bar{a}_{CB}^n$), який направлений від C до B і за модулем дорівнює: $a_{CB}^n = \omega^2 \cdot CB$. Довжину цього вектора знаходимо враховуючи вибраний масштаб: $bn_{CB} = \frac{a_{CB}^n}{\mu_a}$. Наступним, згідно рівняння (4.18), потрібно побудувати вектор $\bar{a}_{CB}^\tau$. Через кінець вектора $\overline{bn}_{CB}$ (точку n_{CB}) проводимо пряму, перпендикулярну до CB, вздовж якої буде направлене прискорення $\bar{a}_{CB}^\tau$ і на якій буде лежати точка кінця вектора $\bar{a}_C$.

Отже, кінець вектора $\bar{a}_C$ буде знаходитись на перетині ліній, вздовж яких направлені тангенціальні прискорення $\bar{a}_{CA}^\tau$ і $\bar{a}_{CB}^\tau$. Отриманий вектор $\overline{\pi c}$ на плані прискорень в масштабі зображає абсолютне прискорення точки C. Модуль цього прискорення обчислюємо, вимірявши в міліметрах довжину вектора $\overline{\pi c}$ та врахувавши масштабний коефіцієнт:

$$a_C = \pi c \cdot \mu_a.$$

Вектори $\overline{\pi a}$, $\overline{\pi b}$ і $\overline{\pi c}$, які виходять з початку плану прискорень, визначають абсолютні прискорення точок A, B і C – $\bar{a}_A$, $\bar{a}_B$ і $\bar{a}_C$ відповідно. Вектори $\overline{n_{BA}b}$, $\overline{n_{CA}c}$ і $\overline{n_{CB}c}$ визначають тангенціальні прискорення точок у їх обертальному русі навколо полюсів – $\bar{a}_{BA}^{\tau}$, $\bar{a}_{CA}^{\tau}$ і $\bar{a}_{CB}^{\tau}$ відповідно. Для знаходження модулів цих прискорень вимірюємо довжину їх векторів в міліметрах та враховуємо масштаб побудови:

$$a_{BA}^{\tau} = n_{BA}b \cdot \mu_a; \;\; a_{CA}^{\tau} = n_{CA}c \cdot \mu_a; \;\; a_{CB}^{\tau} = n_{CB}c \cdot \mu_a.$$

Знаючи a_{BA}^{τ}, a_{CA}^{τ} чи a_{CB}^{τ} можна визначити величину кутового прискорення ε трикутника ABC:

$$\varepsilon = \frac{a_{BA}^{\tau}}{BA}\text{, або } \varepsilon = \frac{a_{CA}^{\tau}}{CA}\text{, або } \varepsilon = \frac{a_{CB}^{\tau}}{CB}.$$

Для визначення напряму кутового прискорення ε потрібно перенести вектор тангенціального прискорення $\bar{a}_{BA}^{\tau}$ в точку B трикутника ABC і напрям цього вектора покаже напрям кутового прискорення. В даному випадку, кутове прискорення ε направлене за ходом годинникової стрілки.

Трикутник *abc*, який утворився на плані прискорень, буде подібним до заданого трикутника *ABC*.

Таким чином, для плану прискорень справедливе *правило подібності:*

фігура, яку утворюють кінці векторів абсолютних прискорень точок тіла на плані прискорень подібна до фігури, яку однойменні точки утворюють на тілі.

Приклад 4.10 Знайти прискорення точки *C* повзуна *3* кривошипо-шатунного механізму і кутове прискорення ε_2 шатуна *2*, механізму (рис. 4.30, а) якщо: $\omega_1 = 10$ рад/с, *OB = 0,06* м, $\alpha = 30^0, \beta = 120^0$, кривошип обертається рівномірно ($\omega_1 = const$).

Розв'язок. План швидкостей для цього механізму був побудований в прикладі 4.8 (рис. 4.28, б) та визначена кутова швидкість шатуна $\omega_2 = 10$ рад/с.

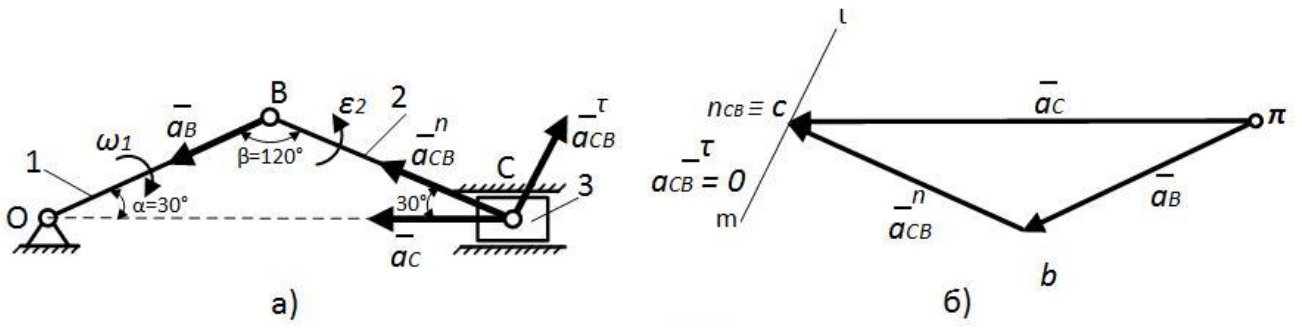


Рис. 4.30

Спочатку знайдемо прискорення точки B механізму, так як вона належить кривошипу *1*, що обертається навколо точки O з відомою кутовою швидкістю. Враховуючи, що кутова швидкість кривошипа постійна ($\omega_1 = const$), то $\varepsilon_1 = 0$ і повне прискорення $\bar{a}_B$ дорівнюватиме нормальному прискоренню $\bar{a}_B^n$ ($a_{BA}^\tau = \varepsilon_1 \cdot OB = 0$) точки B при її обертальному русі навколо O: $\bar{a}_B = \bar{a}_B^n$.

За модулем

$$a_B = a_B^n = \omega_1^2 \cdot OB = 10^2 \cdot 0{,}06 = 6 \text{ м/с}^2.$$

Направлене прискорення $\bar{a}_B$ від точки B до точки O по лінії BO.

Для визначення прискорення точки C записуємо формулу розподілу прискорень при плоскому русі, прийнявши за полюс точку B, прискорення якої вже відоме:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^\tau \qquad (**)$$

де $\bar{a}_C$ – абсолютне прискорення точки C, направлене вздовж напряму руху повзуна *3* в горизонтальних направляючих;

$\bar{a}_B$ – прискорення точки B, відоме за величиною і за напрямом;

$\bar{a}_{CB}^n$ – відносне нормальне прискорення точки C при її обертанні навколо точки B, направлене вздовж CB від точки C до точки B і за модулем дорівнює: $a_{CB}^n = \omega_2^2 \cdot CB = 10^2 \cdot 0{,}06 = 6$ м/с^2;

$\bar{a}_{CB}^\tau$ – тангенціальне прискорення точки C при її обертанні навколо точки B, направлене перпендикулярно шатуну CB і за модулем рівне: $a_{CB}^\tau = \varepsilon_2 \cdot CB$.

Оскільки напрям прискорення точки C відомий, то рівняння (**) достатньо для побудови плану прискорень і визначення $\bar{a}_C$.

За відомою величиною прискорення a_B вибираємо масштаб побудови:

$$\mu_a = \frac{a_B}{\pi b} = \frac{6 \text{ м/с}^2}{30 \text{ мм}} = 0{,}2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{мм}},$$

і з довільної точки π (*початку плану прискорень*) проводимо вектор $\overline{\pi b}$, який в масштабі буде зображати прискорення $\bar{a}_B$ (рис. 4.30, б). З кінця побудованого вектора (точки b) проводимо вектор $\overline{bn_{CB}}$, який в тому ж масштабі буде зображати прискорення $\bar{a}_{CB}^n$. Довжину цього вектора знаходимо, враховуючи вибраний масштаб:

$$an_{CB} = \frac{a_{CB}^n}{\mu_a} = \frac{6 \text{ м/с}^2}{0{,}2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{мм}}} = 30 \text{ мм}.$$

Наступним потрібно побудувати вектор $\bar{a}_{CB}^\tau$. Через кінець вектора $\overline{an_{CB}}$ (точку n_{CB}) проводимо лінію lm, перпендикулярну до BC, вздовж якої буде направлене тангенціальне прискорення $\bar{a}_{CB}^\tau$ B і на цій лінії буде лежати точка c – кінець вектора абсолютного прискорення точки C механізму. Прискорення $\bar{a}_C$ направлене вздовж горизонтальної направляючої повзуна AC, тому з початку плану π проводимо горизонтальну пряму. Точка перетину c цієї прямої з лінією lm, що проведена перпендикулярно до BC, буде кінцем вектора прискорення точки C, а вектор $\overline{n_{CB}c}$ буде зображати на плані прискорень $\bar{a}_{CB}^\tau$. Але для заданого положення механізму проведена з π горизонтальна пряма перетинає лінію lm в точці n_{CB}. Це означає, що точка c співпадає з точкою n_{CB} і вектор $\overline{n_{CB}c} = 0$, а значить прискорення $\bar{a}_{CB}^\tau = 0$.

З побудованого плану визначимо абсолютну величину прискорення $\bar{a}_C$:

$$a_C = \pi c \cdot \mu_a = 52 \text{ мм} \cdot 0{,}2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{мм}} = 10{,}4 \text{ м/с}^2 .$$

Кутове прискорення ε_2 зв'язане з тангенціальним прискоренням $\bar{a}_{CB}^{\tau}$:

$$a_{CB}^{\tau} = \varepsilon_2 \cdot CB \text{ звідки } \varepsilon_2 = \frac{a_{CB}^{\tau}}{CB} = 0.$$

Отже, в даний момент часу шатун механізму обертається рівномірно.

Відповідь: $a_C = 10{,}4 \text{ м/с}^2$, $\varepsilon_2 = 0$.

ЛЕКЦІЯ 5. РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ТОЧКИ (СФЕРИЧНИЙ РУХ)

5.1 Рівняння руху

Рух твердого тіла, яке має нерухому точку, називають обертанням твердого тіла навколо нерухомої точки.

Цей рух також називають *сферичним*, так як траєкторіями всіх точок тіла є сфери, центр яких знаходиться в нерухомій точці.

Для задавання руху твердого тіла, яке має одну нерухому точку, використовують *кути Ейлера* (рис. 5.1).

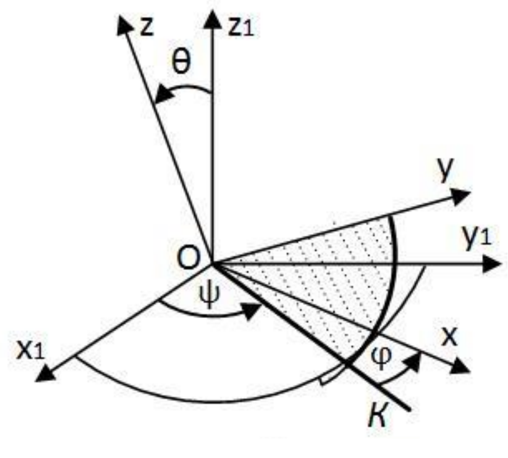


Рис. 5.1

Точка O – початок рухомої і нерухомої систем координат;

$Ox_1y_1z_1$ – нерухома система координат;

$Oxyz$ – рухома система координат, зв'язана з твердим тілом;

OK – лінія вузлів (лінія перетину нерухомої площини Ox_1y_1 і рухомої Oxy);

ψ *– кут прецесії* (кут між віссю $O\,x_1$ і лінією вузлів);

φ *– кут власного обертання* (кут між лінією вузлів і рухомою віссю Ox);

θ *– кут нутації* (кут між нерухомою віссю Oz_1 і рухомою віссю Oz).

Всі кути відкладаються в напрямку проти ходу годинникової стрілки від осей Ox_1, Oz_1 і лінії вузлів OK.

Положення тіла в будь-який момент часу визначається *кутами Ейлера* (прецесії, власного обертання і нутації), які повинні бути однозначними функціями часу:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(t) \\ \theta &= \theta(t) \\ \varphi &= \varphi(t) \end{aligned} \qquad (2.5.1)$$

рівняння (5.1) – *закон обертання твердого тіла навколо нерухомої точки.*

5.2 Кутова швидкість і кутове прискорення

За теоремою Ейлера – Даламбера будь-яке переміщення твердого тіла, яке має одну нерухому точку, можна замінити поворотом навколо осі *OP,* що проходить через цю точку (рис. 2.5.2). Вісь *OP* буде миттєвою віссю обертання, на якій всі точки мають швидкість рівну нулю. Вектор кутової швидкості буде направлений вздовж миттєвої осі обертання в бік, звідки видно поворот тіла проти ходу годинникової стрілки. Модуль вектора кутової швидкості рівний:

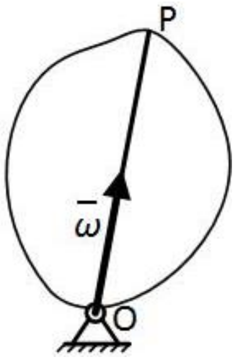


Рис. 5.2

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \qquad (5.2)$$

Вектор кутової швидкості, на відміну від обертального руху навколо нерухомої осі, може змінюватися за модулем і напрямком.

Кутове прискорення – похідна вектора кутової швидкості за часом:

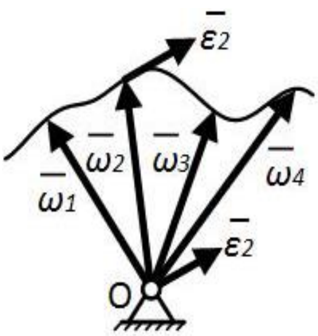


Рис. 5.3

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \qquad (5.3)$$

Вектор кутового прискорення, як похідна вектора за скалярним аргументом, направлений по дотичній до годографа вектора кутової швидкості, який міняється за величиною і напрямком (рис. 5.3). Тому вектор кутового прискорення в загальному випадку не направлений вздовж миттєвої осі обертання, як вектор кутової швидкості.

Вектор кутового прискорення зображають в нерухомій точці паралельно дотичній до годографа вектора кутової швидкості (рис. 5.3).

5.3 Швидкість довільної точки

Швидкості точок твердого тіла при сферичному русі визначають за формулою Ейлера (рис. 5.4):

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \qquad (5.4)$$

де $\overline{\omega}$ – вектор кутової швидкості; $\bar{r}$ – радіус-вектор даної точки відносно нерухомої точки.

Модуль швидкості рівний:

$$v = \omega r sin(\overline{\omega}, \bar{r}) = \omega h, \qquad (5.5)$$

де h – найкоротша відстань точки до миттєвої осі обертання.

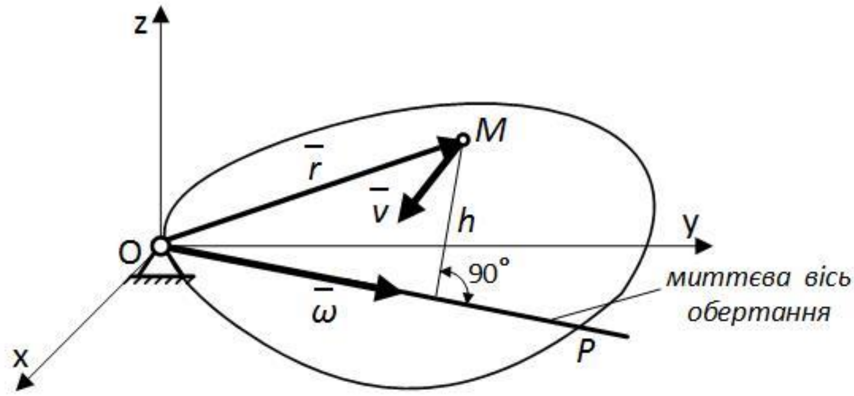


Рис. 5.4

Напрямок вектора швидкості $\bar{v}$ визначається напрямком векторного добутку $(\overline{\omega} \times \bar{r})$, тобто вектор швидкості $\bar{v}$ буде направлений перпендикулярно площині векторів $\overline{\omega}$ і $\bar{r}$, так, що з його кінця поворот вектора $\overline{\omega}$ до вектора $\bar{r}$ видно на найменший кут проти ходу годинникової стрілки (рис. 5.4).

Приклад 5.1 Конус с кутом при вершині $2\alpha = 60^0$ і радіусом основи $r = 20\sqrt{3}$ см котиться без проковзування вздовж нерухомої горизонтальної поверхні. Визначити швидкість точки *A,* якщо швидкість центра основи постійна і рівна$v_C = 90$ см/с.

Розв'язок. Рух конуса сферичний. Миттєва вісь обертання конуса співпадає з твірною *OB,* так як швидкості точок твірної рівні нулю (рис. 5.5).

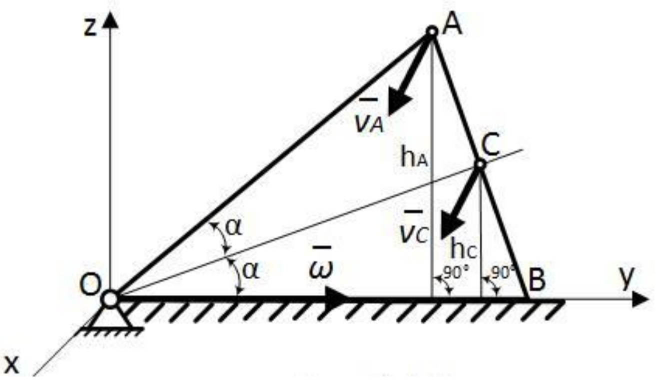


Рис. 5.5

Використовуючи формулу (5.5), знаходимо кутову швидкість обертання конуса навколо миттєвої осі обертання:

$$\omega = \frac{v_C}{h_C}, \qquad \text{де}$$

$$h_C = BCcos30^0 = 20\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = 30 \text{ см.}$$

Тоді $\omega = \frac{90}{30} = 3$ рад/с.

Вектор кутової швидкості направлений вздовж миттєвої осі обертання від точки *O* до точки *B.*

Швидкість точки *A* визначимо як обертальну швидкість навколо миттєвої осі обертання:

$$v_A = \omega h_A,$$

де $h_A = ABcos30^0 = 2rcos30^0 = 2 \cdot 20\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = 60$ см;

$$v_A = 3 \cdot 60 = 180 \text{ см/с.}$$

Вектор швидкості точки *A* направлений аналогічно вектору швидкості точки *C*, тобто перпендикулярно площині *Oxy* відповідно до напрямку кутової швидкості обертання (рис. 5.5).

Відповідь. $v_A = 180$ см/с.

5.4 Прискорення точки

Диференціюємо рівняння (5.4) за часом

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}, \qquad (5.6)$$

де $\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{a}$ – прискорення точки;

$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\varepsilon}$ – кутове прискорення тіла;

$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}$ – швидкість точки.

Тоді $$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}$$

Доданок $\bar{\varepsilon} \times \bar{r} = \bar{a}^{\tau}$ являє собою вектор тангенціального прискорення точки, величина якого рівна:

$$a^{\tau} = \varepsilon r sin(\bar{\varepsilon}, \bar{r}) = \varepsilon h_1, \qquad (5.7)$$

де $h_1 = r sin(\bar{\varepsilon}, \bar{r})$ – відстань від точки до вектора $\bar{\varepsilon}$. Вектор $\bar{a}^{\tau}$ направлений згідно напрямку векторного добутку $(\overline{\varepsilon \times \bar{r}})$ (рис. 5.6).

Доданок $\bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{a}^{n}$ – вектор нормальної складової прискорення, який направлений згідно напрямку векторного добутку, тобто вздовж перпендикуляра h, опущеного з точки на миттєву вісь обертання. Величина цього прискорення рівна:

$$a^{n} = \omega v = \omega^2 h \qquad (5.8)$$

Прискорення точки при сферичному русі рівне геометричній сумі дотичної і нормальної складових прискорення:

$$\bar{a} = \bar{a}^{\tau} + \bar{a}^{n} \qquad (5.9)$$

Так як ці прискорення не перпендикулярні одне одному, то величина прискорення точки рівна:

$$a = \sqrt{(a^{\tau})^2 + (a^{n})^2 + 2a^{\tau}a^{n}\cos(\bar{a}^{\tau}, \bar{a}^{n})} \qquad (5.10)$$

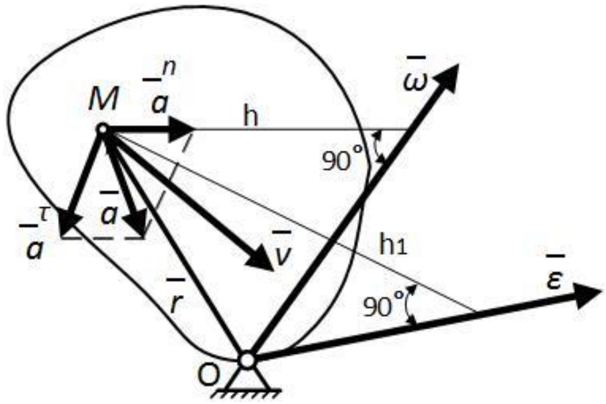


Рис. 5.6

Прискорення точки при сферичному русі рівне геометричній сумі дотичної і нормальної складових прискорення:

$$\bar{a} = \bar{a}^\tau + \bar{a}^n \qquad (5.9)$$

Так як ці прискорення не перпендикулярні одне одному, то величина прискорення точки рівна:

$$a = \sqrt{(a^\tau)^2 + (a^n)^2 + 2a^\tau a^n \cos(\bar{a}^\tau, \bar{a}^n)} \qquad (5.10)$$

<u>*Приклад 5.2*</u> Використовуючи умову прикладу 5.1, знайти прискорення точки *А* (рис. 5.7).

<u>*Розв'язок.*</u> Визначимо кутове прискорення конуса. При коченні конуса по горизонтальній поверхні вектор кутової швидкості буде обертатись навколо вертикальної осі *Oz*. Так як модуль вектора кутової швидкості постійний, то кінець вектора $\bar{\omega}$ описує коло постійного радіуса, рівного модулю вектора кутової швидкості в горизонтальній площині. Кутову швидкість обертання вектора $\bar{\omega}$ навколо осі *Oz* визначимо, як кутову швидкість обертання осі конуса навколо осі *Oz:*

$$\omega_1 = \frac{v_C}{CD},$$

де $CD = OCcos30^0 = BCtg60^0cos30^0 = 20\sqrt{3}\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}$ см,

$$\omega_1 = \frac{90}{30\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} \text{ рад/с.}$$

Вектор $\bar{\omega}_1$ буде направлений протилежно додатному напрямку осі *z*.

Вектор кутового прискорення $\bar{\varepsilon}$ геометрично рівний швидкості кінця вектора кутової швидкості $\bar{\omega}$. Його можна визначити, як обертальну швидкість точки, радіус обертання якої рівний модулю кутової швидкості ω:

$$\varepsilon = \omega_1 \omega = 10\sqrt{3} \cdot 3 = 30\sqrt{3} \text{ рад/с}^2.$$

Вектор кутового прискорення буде знаходитись в площині *Oxy*, прикладений до нерухомої точки і направлений в бік додатного напрямку осі *Ox*.

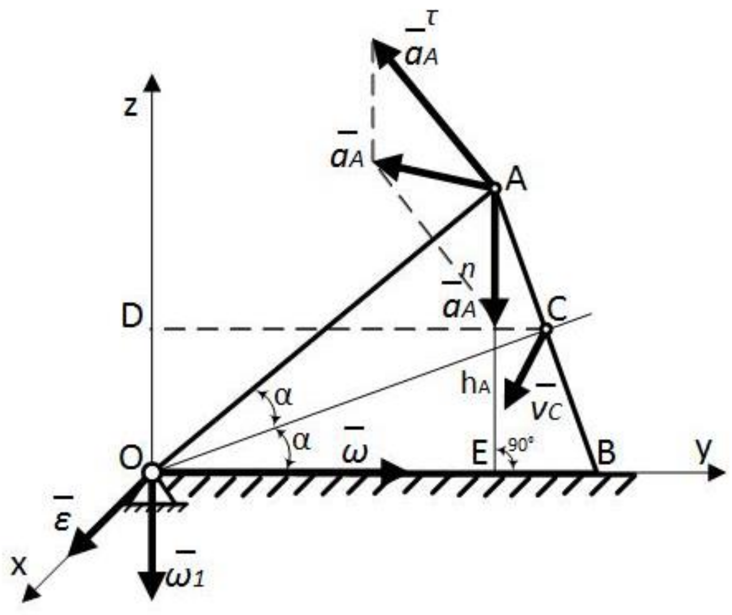


Рис. 5.7

Прискорення точки при сферичному русі рівне: $\bar{a}_A = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n$.

За формулами (5.7), (5.8) знаходимо a_A^τ і a_A^n:

$$a_A^\tau = \varepsilon h_1,$$

де $h_1 = AO = 2r$ – відрізок перпендикуляра, опущеного з точки *A* на вектор кутового прискорення;

$$a_A^\tau = 30\sqrt{3} \cdot 2 \cdot 20\sqrt{3} = 3600 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\bar{a}_A^\tau$, перпендикулярний відрізку AO, знаходиться в площині *zOy* і направлений відповідно до кутового прискорення, тобто якщо дивитись з кінця вектора $\bar{\varepsilon}$, то вектор $\bar{a}_A^\tau$ повинен обертатись проти ходу годинникової стрілки.

$$a_A^n = \omega^2 h,$$

де $h = AE = 2rcos30^0$, тоді

$$a_A^n = \omega^2 2rcos30^0 = 3^2 \cdot 2 \cdot 20\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = 540 \text{см/с}^2.$$

Вектор $\bar{a}_A^n$ направлений вздовж *AE* до миттєвої осі обертання:

$$a_A = \sqrt{(a_A^\tau)^2 + (a_A^n)^2 + 2a_A^\tau a_A^n \cos(\bar{a}_A^\tau, \bar{a}_A^n)}, \quad \angle(\bar{a}_A^\tau, \bar{a}_A^n) = 120^0, \text{ отже}$$

$$a_A = \sqrt{3600^2 + 540^2 + 2 \cdot 3600 \cdot 540 \cdot \cos 120^0} = 3362{,}68 \text{ см/с}^2.$$

Відповідь. $a_A = 3362{,}68$ см/с^2.

ЛЕКЦІЯ 6. РУХ ВІЛЬНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

6.1 Рівняння руху вільного твердого тіла

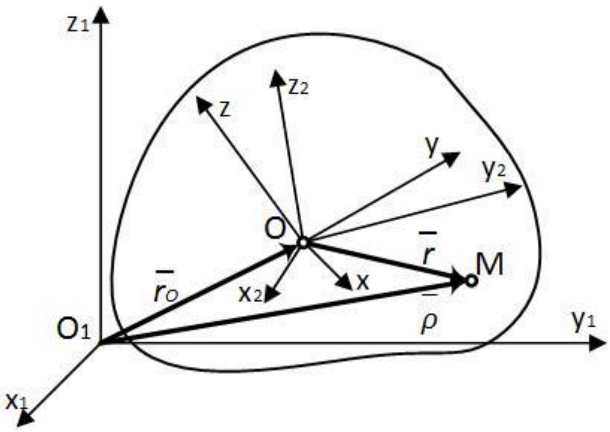


Рис. 6.1

Рух вільного твердого тіла розкладемо на поступальний разом з полюсом відносно нерухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$ і обертальний навколо полюса. В полюсі O введемо дві рухомі системи координат. Система $Ox_2y_2z_2$ має з тілом одну нерухому точку (полюс O) і рухається поступально, а рух другої системи $Oxyz$ описується кутами Ейлера (рис. 6.1).

Рівняння руху вільного твердого тіла мають вигляд:

$$x_O = f_1(t);\; y_O = f_2(t);\; z_O = f_3(t);$$
$$\psi = \psi(t);\; \theta = \theta(t);\; \varphi = \varphi(t) \qquad (6.1)$$

6.2 Швидкість точки твердого тіла

Як видно з рис 6.1, для довільної точки M виконується рівність:

$$\bar{\rho} = \bar{r}_O + \bar{r}$$

Диференціюємо цю рівність за часом:

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{r}_O}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt}$$

де $\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \bar{v}_M$ – швидкість точки M;
$\frac{d\bar{r}_O}{dt} = \bar{v}_O$ – швидкість полюса O;
$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r}$ – швидкість точки M при обертанні тіла навколо полюса O.

$$\bar{v}_M = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r} \qquad (6.2)$$

Швидкість будь-якої точки твердого тіла рівна геометричній сумі швидкості полюса і швидкості цієї точки при обертанні тіла навколо полюса.

6.3 Прискорення довільної точки твердого тіла

Диференціюємо рівняння (6.2) за часом

$$\frac{d\bar{v}_M}{dt} = \frac{d\bar{v}_O}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}$$

де $\frac{d\bar{v}_M}{dt} = \bar{a}_M$ – прискорення точки;
$\frac{d\bar{v}_O}{dt} = \bar{a}_O$ – прискорення початку рухомої системи координат $Ox_2y_2z_2$;
$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\varepsilon}$ – кутове прискорення тіла в рухомій системі координат;
$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}$ – швидкість точки.

Одержимо

$$\bar{a}_M = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v} \qquad (6.3)$$

Прискорення точки вільного твердого тіла рівно геометричній сумі прискорення полюса і прискорення цієї точки в її русі навколо полюса.

ЛЕКЦІЯ 7. СКЛАДНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

Рух твердого тіла називають складним, якщо тіло одночасно здійснює як мінімум два рухи.

Користуючись принципом незалежності рухів, складний рух твердого тіла можна розглядати як сукупність *відносного* та *переносного* рухів.

Відносним рухом твердого тіла називають його рух відносно рухомої системи координат.

Переносним рухом твердого тіла називають його рух разом з рухомою системою координат відносно нерухомої.

7.1 Складання поступальних рухів твердого тіла

При складанні двох поступальних рухів твердого тіла одержуємо *абсолютний поступальний рух зі швидкістю, рівною геометричній сумі швидкостей складових поступальних рухів*:

$$\bar{v}_{\text{абс}} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \qquad (7.1)$$

Якщо перетин *S* твердого тіла рухається поступально з швидкістю $\bar{v}_1$ відносно системи відліку *Oxyz*, яка в свою чергу рухається поступально з швидкістю $\bar{v}_2$ відносно системи відліку $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 7.1).

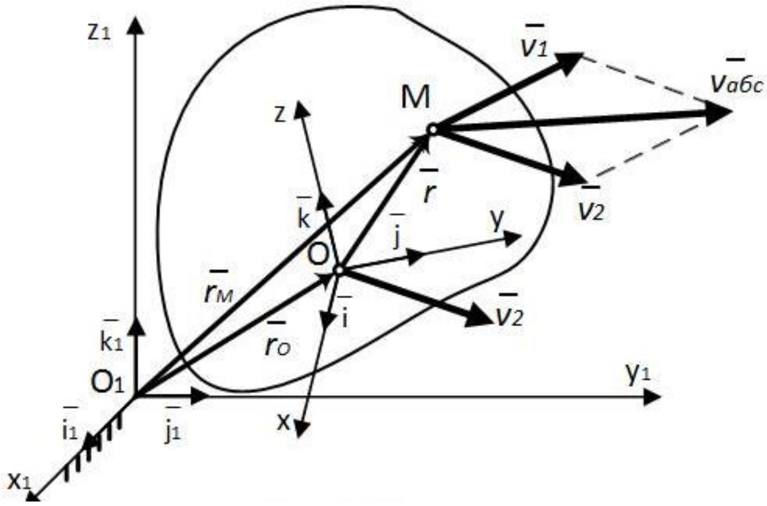


Рис. 7.1

Тоді для довільної точки M

$$\bar{v}_{\text{абс}} = \frac{d}{dt}\left(\bar{r}_O + x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k}\right), \text{де } \frac{d\bar{r}_O}{dt} = \bar{v}_2$$

Оскільки точки O і M довільні, то абсолютні швидкості кожної точки перетину S рівні. Однакові і прискорення точок перетину S. Тому абсолютний рух твердого тіла поступальний.

$$\bar{v}_{\text{абс}} = \bar{v}_2 + \frac{dx}{dt}\bar{\imath} + \frac{dy}{dt}\bar{\jmath} + \frac{dz}{dt}\bar{k}, \quad \text{де} \quad \frac{dx}{dt}\bar{\imath} + \frac{dy}{dt}\bar{\jmath} + \frac{dz}{dt}\bar{k} = \bar{v}_1, \text{тоді}$$

$$\bar{v}_{\text{абс}} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2, \quad v_{\text{абс}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_1 v_2 \cos(\bar{v}_1, \bar{v}_2)}$$

отже твердження (7.1) доведено.

<u>Приклад 7.1</u> Вздовж платформи рухається візок зі швидкістю $v_2 = 2$ м/с. Платформа рухається в той же бік зі швидкістю $v_1 = 1$ м/с. Знайти швидкість візка (рис. 7.2).

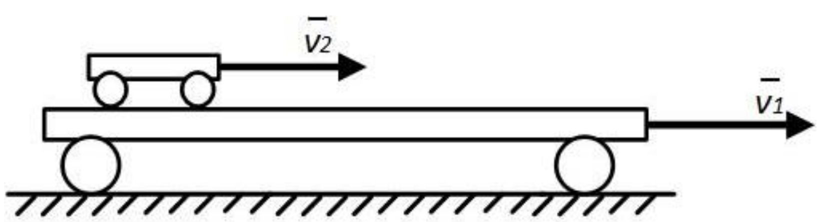


Рис. 7.2

<u>Розв'язок.</u> Швидкості візка і платформи направлені в один бік. Застосуємо формулу (7.1) в скалярному вигляді і одержимо абсолютну швидкість візка: $v = v_1 + v_2 = 2 + 1 = 3$ м/с.

<u>Відповідь.</u> $v = 3$ м/с.

7.2 Складання обертань навколо перетинних осей

При складанні обертань навколо перетинних осей одержуємо обертальний рух, навколо миттєвої осі обертання z, з абсолютною кутовою швидкістю, рівною геометричній сумі кутових швидкостей складових обертань:

$$\overline{\omega}_{\text{абс}} = \overline{\omega}_{\text{пер}} + \overline{\omega}_{\text{від}} \tag{7.2}$$

Якщо $\overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_{\text{від}}$, $\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_{\text{пер}}$, то сукупність двох миттєвих обертань (відносного і переносного) навколо осей, що перетинаються зводиться до абсолютного миттєвого обертання вісь якого проходить через точку перетину осей відносного і переносного обертань ($\bar{v}_0 = 0$).

Миттєва кутова швидкість складного руху дорівнює векторній сумі миттєвих кутових швидкостей відносного $\overline{\omega}_2$ і переносного $\overline{\omega}_1$ обертань. Для довільної точки *M* маємо (рис. 7.3):

$$\bar{v}_{\text{від}} = \overline{\omega}_2 \times \bar{r},\ \ \bar{v}_{\text{пер}} = \overline{\omega}_1 \times \bar{r},\ \ \bar{v}_{\text{абс}} = \bar{v}_{\text{від}} + \bar{v}_{\text{пер}}$$

За теоремою про додавання швидкостей

$$\bar{v}_{\text{абс}} = (\overline{\omega}_2 \times \bar{r}) + (\overline{\omega}_1 \times \bar{r}) = (\overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_1) \times \bar{r} = \overline{\omega}_{\text{абс}} \times \bar{r},$$

де $\overline{\omega}_{\text{абс}} = \overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_1$.

Вектор $\overline{\omega}_{\text{абс}}$ направлений по діагоналі паралелограма побудованого на складових швидкостях і має такий же векторний напрямок обертання.

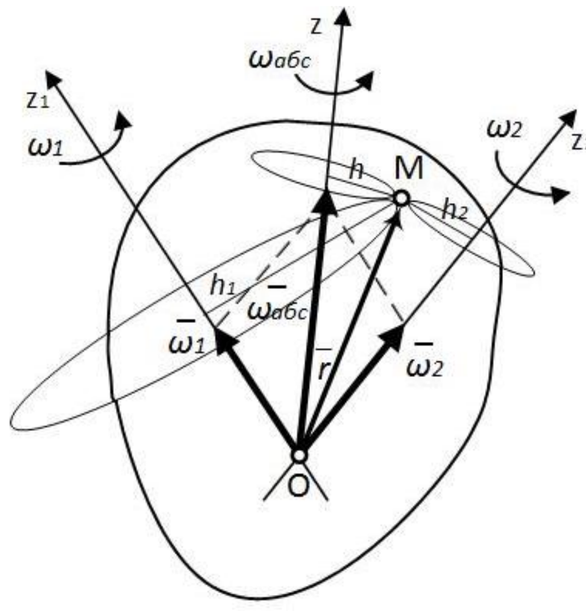


Рис. 7.3

<u>*Приклад 7.2*</u> Знайти абсолютну кутову швидкість рухомого конуса, який рівномірно котиться без ковзання по нерухомому конусу, осі конусів взаємно перпендикулярні (рис. 7.4). Відомо, що $OA = 60$ см, швидкість точки *A,* яка

лежить на осі конуса, $v_A = 120$ см/с і направлена перпендикулярно площині креслення на читача.

Розв'язок. Точка *O* при обертанні конуса залишається нерухомою. Швидкість точки *B* при коченні без ковзання рівна нулю. Миттєва вісь обертання проходить по прямій *OB*. Абсолютна кутова швидкість обертання буде направлена вздовж миттєвої осі обертання *OB*. Кутова швидкість обертання конуса навколо осі *OA* рівна:

$$\omega_1 = \frac{v_A}{AB} = \frac{120\sqrt{3}}{60} = 2\sqrt{3} = 3{,}46 \text{ рад/с},$$

$$AB = OAtg30^0 = \frac{60}{\sqrt{3}}.$$

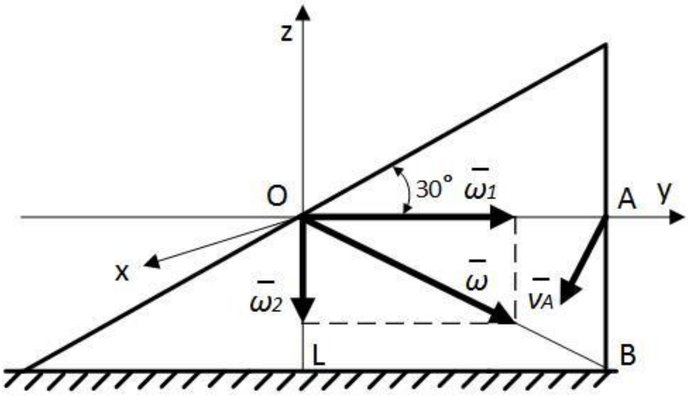


Рис. 7.4

Вектор $\bar{\omega}_1$ буде направлений вздовж *OA* від точки *O* до точки *A*. Кутова швидкість обертання конуса навколо осі *Oz* рівна:

$$\omega_2 = \frac{v_A}{OA} = \frac{120}{60} = 2 \text{ рад/с}.$$

Вектор $\bar{\omega}_2$ буде направлений вздовж осі *Oz* вниз від точки О до точки *L*. Так як $\bar{\omega}_1 \perp \bar{\omega}_2$, то абсолютна кутова швидкість рівна:

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \sqrt{3{,}46^2 + 2^2} = 4 \text{ рад/с}.$$

Вектор абсолютної кутової швидкості направлений вздовж *OB* від точки *O* до точки *B* (рис. 2/7.4).

Відповідь. $\omega = 4$ рад/с.

7.3 Складання обертань навколо паралельних осей з однаковими напрямками кутових швидкостей

Складання двох однаково направлених обертань навколо паралельних осей приводить до одного обертання навколо паралельної миттєвої осі обертання з кутовою швидкістю рівною сумі кутових швидкостей складових обертань.

Миттєва вісь проходить через точку, яка ділить внутрішнім чином відстань між осями на частини, обернено пропорціональні кутовим швидкостям складових обертань. Абсолютне кутове прискорення направлене вздовж миттєвої осі обертання.

Нехай $\overline{\omega}_1 > \overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_1 \parallel \overline{\omega}_2$. В цьому випадку абсолютний рух тіла буде плоскопаралельним, оскільки всі точки тіла T у відносному та в переносному рухах залишаються в площинах, перпендикулярних осям z_1і z_2 (рис. 7.5).

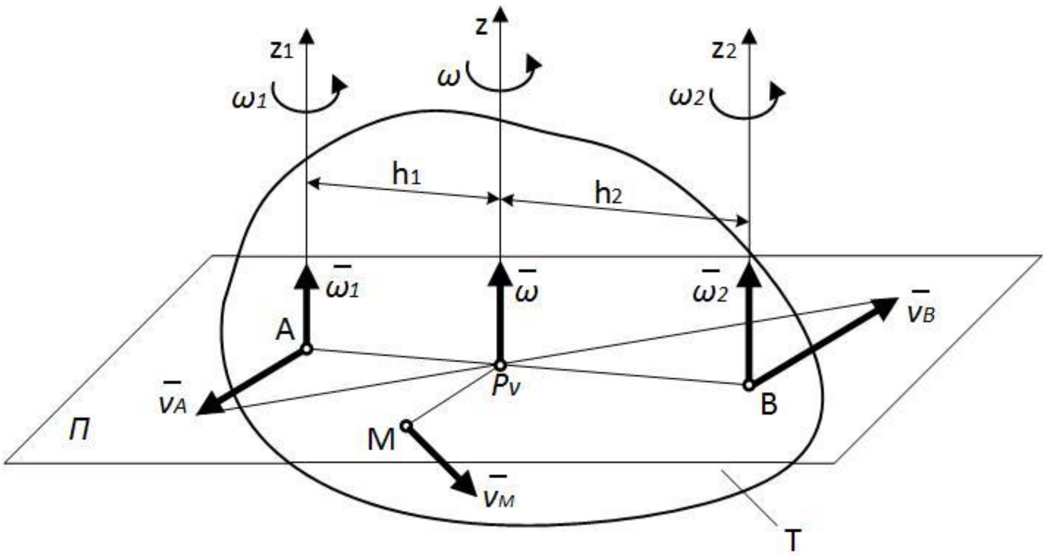


Рис. 7.5

Тоді $\overline{v}_B = \overline{\omega}_1 \times \overline{AB}$, $v_B = \omega_1 \cdot AB$; $\overline{v}_A = \overline{\omega}_2 \times \overline{BA}$, $v_A = \omega_2 \cdot BA$. Вектор $\overline{v}_B \parallel (-\overline{v}_A)$, що відповідає миттєвому обертанню відносно осі z з кутовою швидкістю $\overline{\omega}$, P_v – миттєвий центр швидкостей, $v_{P_v} = 0$.

$$v_B = \omega \cdot P_v B, \; v_A = \omega \cdot P_v A.$$

Маємо

$$\omega = \frac{\omega_2 \cdot AB}{h_1} = \omega_2 \left(1 + \frac{\omega_1 \cdot AB}{\omega} \cdot \frac{\omega}{\omega_2 \cdot AB}\right) = \omega_1 + \omega_2.$$

Таким чином, *при одночасному обертанні твердого тіла навколо двох паралельних осей абсолютним рухом тіла є плоскопаралельний рух*, причому вектор миттєвої кутової швидкості тіла в абсолютному переміщенні рівний сумі векторів кутових швидкостей в переносному та відносному рухах (рис. 7.5).

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_{\text{пер}} + \overline{\omega}_{\text{від}} \qquad (7.3)$$

Швидкість довільної точки M в площині $П$ направлена в напрямку миттєвого обертання

$$v_M = \omega \cdot P_v M, \qquad \overline{v}_M \perp P_v M$$

Крім того цю швидкість можна визначити як $\overline{v}_M = \overline{v}_A + \overline{v}_{MA}$.

Приклад 7.3. Кривошип OA обертається з постійною швидкістю $\omega_{OA} = 2$ рад/с і приводить в рух колесо II (рис. 7.6). Визначити положення миттєвої осі обертання і абсолютну кутову швидкість, якщо $OA = 40$ см, $r_{II} = 10$ см, $\omega_{II} = 6$ рад/с.

Розв'язок. Так як кутові швидкості мають однакові напрямки, то абсолютна кутова швидкість рівна сумі кутових швидкостей кривошипа і колеса II:

$$\omega = \omega_{OA} + \omega_{II} = 2 + 6 = 8 \text{ рад/с.}$$

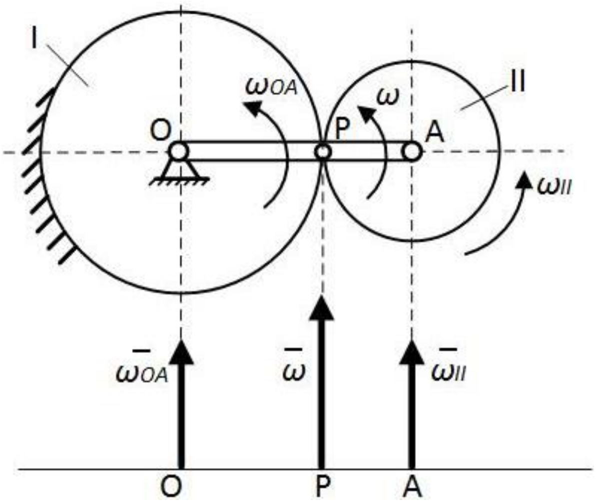


Рис. 7.6

Для визначення положення миттєвої осі обертання складемо пропорцію:

$$\frac{\omega_{OA}}{\omega_{II}} = \frac{AP}{OP}, \qquad AP = AO - OP$$

$$\omega_{OA} OP = \omega_{II} AP = \omega_{II}(AO - OP)$$

$$(\omega_{OA} + \omega_{II})OP = \omega_{II} AO$$

$$OP = \frac{\omega_{II} AO}{\omega_{OA} + \omega_{II}} = \frac{6 \cdot 40}{2+6} = 30 \text{ см.}$$

Отже, миттєва вісь обертання буде проходити через точку дотику рухомого I і нерухомого II коліс (рис. 7.6).

Відповідь. $\omega = 8$ рад/с, $OP = 30$ см.

7.4. Складові обертання мають протилежні напрямки з різними за модулем кутовими швидкостями

Складання двох протилежно направлених обертань з різними кутовими швидкостями приводить до одного обертання навколо паралельної миттєвої осі обертання з кутовою швидкістю, рівною різниці кутових швидкостей складових обертань.

Миттєва вісь обертання проходить через точку, яка ділить зовнішнім чином відстань між осями на частини, обернено пропорціональні кутовим швидкостям складових обертань, і знаходиться за віссю обертання з більшою кутовою швидкістю. Абсолютна кутова швидкість направлена в бік більшої кутової швидкості.

Якщо $\bar{\omega}_1 > \bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_1 \parallel (-\bar{\omega}_2)$, то $\bar{v}_B = \bar{\omega}_1 \times \overline{AB}$, $v_B = \omega_1 \cdot AB$; $\bar{v}_A = \bar{\omega}_2 \times \overline{BA}$, $v_A = \omega_2 \cdot BA$. Тоді $\bar{v}_B \parallel \bar{v}_A$, $v_B > v_A$.

Маємо випадок плоскопаралельного руху еквівалентного миттєвому обертанню відносно миттєвого центру швидкостей P_v, який розташований на перетині продовження відрізка AB з лінією, що проходить через кінці векторів $\bar{v}_A$ і $\bar{v}_B$ (рис. 7.7).

Оскільки $v_B = \omega \cdot P_v B,\ v_A = \omega \cdot P_v A$ маємо

$$\omega = \frac{v_B}{P_v B} = \frac{v_A}{P_v A} = \frac{v_B - v_A}{P_v B - P_v A} = \frac{\omega_1 \cdot AB - \omega_2 \cdot BA}{AB} = \omega_1 - \omega_2,$$

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 \tag{4.7}$$

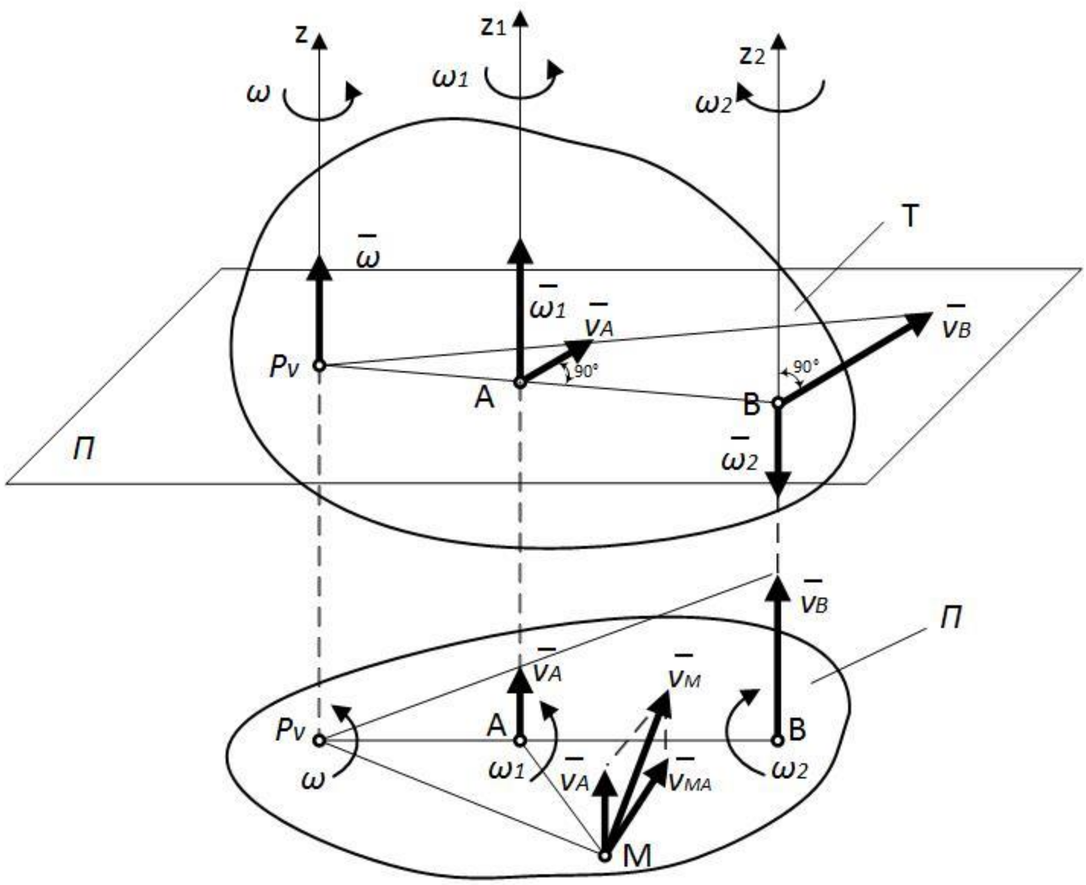


Рис. 7.7

Абсолютне миттєве обертання має напрям більшого із складових обертань.

Швидкість довільної точки *M* (рис. 7.7) дорівнює

$$v_M = \omega \cdot P_v M,\ \bar{v}_M \perp P_v M,\ \bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA}$$

$$\text{або } \bar{v}_M = \bar{v}_B + \bar{v}_{MB}$$

до того ж $\bar{v}_{MA} \perp AM, \bar{v}_{MB} \perp BM.$

Приклад 7.4 Кривошип *OA* довжиною $l = 60$ см обертається з кутовою швидкістю $\omega_1 = 4$ рад/с і приводить в рух колесо радіуса $r = 20$ см (рис. 7.8). Кутова швидкість колеса навколо осі, яка проходить через точку *A,* рівна $\omega_2 = 16$ рад/с. Визначити абсолютну кутову швидкість.

Розв'язок. Так як кутові швидкості обертань колеса навколо осі, яка проходить через точку *A,* і кривошипа навколо осі, яка проходить в точці *O,* направлені в різні боки, то

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 = 12 \text{ рад/с}.$$

Абсолютна кутова швидкість ω направлена в бік більшої кутової швидкості і знаходиться за віссю, яка проходить через точку *A:*

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{AP}{OP}, OP = OA + AP,$$

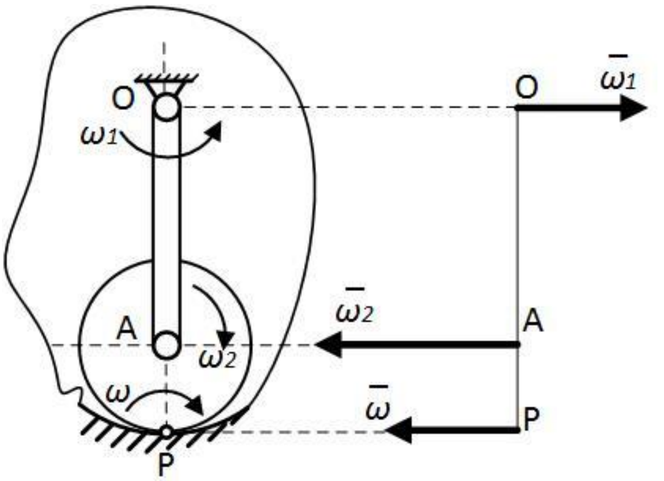


Рис. 7.8

$$\omega_1 OP = \omega_2 AP,$$

$$\omega_1(OA + AP) = \omega_2 AP$$

$$AP(\omega_2 - \omega_1) = \omega_1 OA$$

$$AP = \frac{\omega_1 AO}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{4 \cdot 60}{16 - 4} = 20 \text{ см}.$$

Миттєва вісь обертання знаходиться на відстані *20* см, тобто в точці P, яка є миттєвим центром швидкостей при плоскому русі колеса.

<u>*Відповідь.*</u> $\omega = 12$ рад/с, $AP = 20$ см.

7.5 Пара обертань (обертання мають протилежні напрямки з рівними за модулем кутовими швидкостями)

Парою обертань називають сукупність двох обертань твердого тіла навколо паралельних осей з рівними і протилежно направленими кутовими швидкостями. Абсолютний рух твердого тіла буде миттєво поступальним, тобто швидкості усіх точок будуть одинакові, перпендикулярні осям пари обертань і рівні добутку будь-якої кутової швидкості пари обертань на найкоротшу відстань між осями *AB:*

$$v = \omega_1 \cdot AB = \omega_2 \cdot AB \tag{7.5}$$

Маємо: $\omega_1 = \omega_2$, $\bar{\omega}_1 \parallel (-\bar{\omega}_2)$.

Користуючись принципом незалежності рухів (рис. 7.9) одержимо

$$\bar{v}_B = \bar{\omega}_1 \times \overline{AB}, v_B = \omega_1 \cdot AB; \; \bar{v}_A = \bar{\omega}_2 \times \overline{BA}, v_A = \omega_2 \cdot BA.$$

Тоді $\bar{v}_B \parallel \bar{v}_A$, $v_B = v_A$.

Миттєвий центр швидкостей знаходиться в нескінченності, тобто $\bar{\omega}_{\text{абс}} = 0$.
Швидкість довільної точки M площини $\Pi \perp z_1$, $(z_1 \parallel z_2)$:

$$\bar{v}_M = (\bar{\omega}_1 \times \overline{AM}) + (\bar{\omega}_2 \times \overline{BM}) = \bar{\omega}_{1,2} \times (\overline{AM} - \overline{BM}) = \bar{\omega}_{1,2} \times \overline{AB}.$$

Коли за весь час руху $\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 = 0$, то абсолютний рух буде поступальним. Якщо $\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 = 0$ тільки у визначений час, то тільки в цей час розподіл швидкостей точок тіла буде таким як при його поступальному русі. Вектор $\bar{\omega}_1 \times \overline{AB}$ чи $\bar{\omega}_2 \times \overline{BA}$ можна розглядати як момент пари векторів $\bar{\omega}_1$ і $\bar{\omega}_2$.

$\bar{v}_A = \bar{v}_B = \overline{mom}(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)$ чи в загальному вигляді $\bar{v} = \overline{mom}(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)$ (7.6)

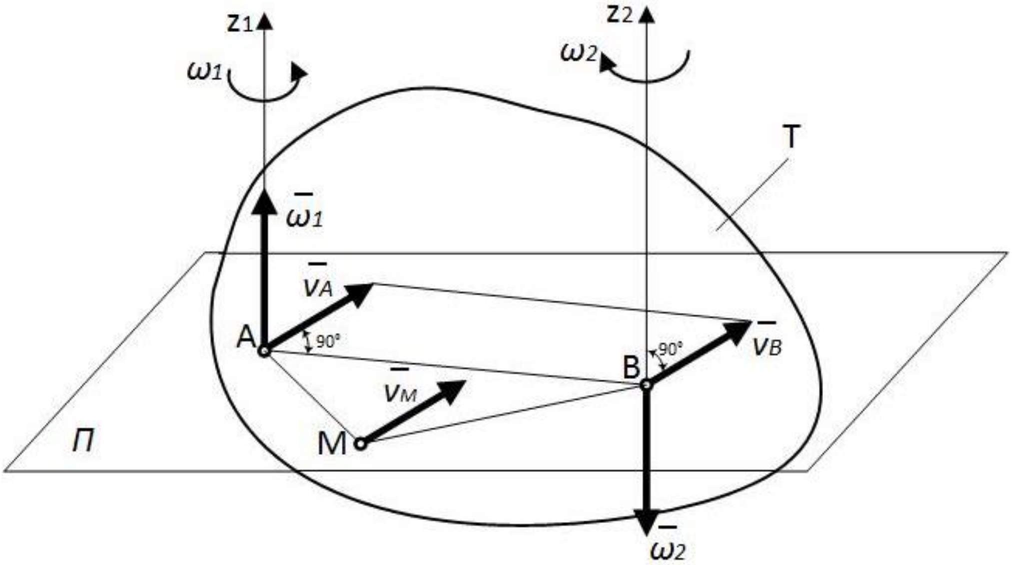


Рис. 7.9

Отже, *у випадку пари обертань швидкості всіх точок твердого тіла в абсолютному русі рівні моменту пари векторів кутових швидкостей* $\bar{\omega}_1$ і $\bar{\omega}_2$, поступальний рух відбувається в напрямку перпендикулярному $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$.

Приклад 7.5 Парою обертань буде рух велосипедної педалі *AB* відносно рами велосипеда (рис. 7.10). Цей рух являє собою сукупність переносного обертання разом з кривошипом O_1O_2 навколо осі O_1 і відносно осі, яка проходить через точку O_2.

Педаль *AB* під час руху залишається паралельною своєму початковому положенню, тобто здійснює поступальний рух внаслідок того, що кутові швидкості складових обертань ω_1 і ω_2 рівні за модулем і протилежні за напрямом.

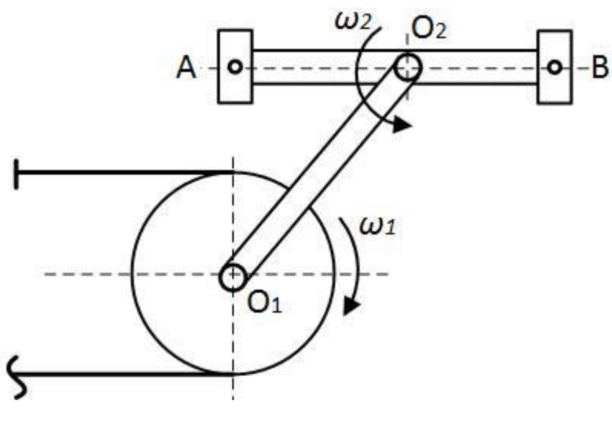


Рис. 7.10

Приклад 7.6. Визначити кутову швидкість шестерні *3* планетарного механізму, якщо радіуси всіх шестерень однакові, а кривошип обертається з постійною кутовою швидкістю ω_0 (рис. 7.11).

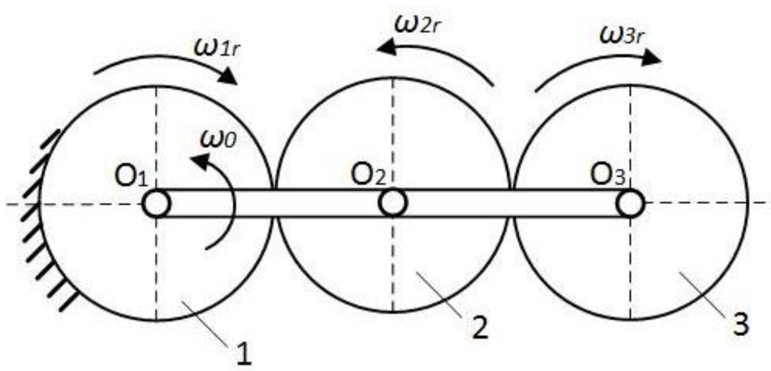


Рис. 7.11

Розв'язок. Переносна кутова швидкість – це кутова швидкість кривошипа ω_0. Знайдемо відносні кутові швидкості шестерень:

$$\omega_{1r} = \omega_1 - \omega_0 = -\omega_0$$

(шестерня *1* нерухома, $\omega_1 = 0$),

$$\omega_{2r} = \omega_2 - \omega_0, \omega_{3r} = \omega_3 - \omega_0.$$

Зачеплення шестерень зовнішні, тому складемо співвідношення:

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}} = -\frac{r_2}{r_1}, \qquad \frac{\omega_{2r}}{\omega_{3r}} = -\frac{r_3}{r_2} \qquad (*)$$

Перемножимо вирази (*): $\frac{\omega_{1r}}{\omega_{3r}} = \frac{r_3}{r_1} = 1$ та підставимо значення ω_{1r} і ω_{3r}

$$\frac{-\omega_0}{\omega_3 - \omega_0} = 1,$$

звідки $\omega_3 = \omega_0 - \omega_0 = 0$, отже, $\omega_{3r} = -\omega_0$.

Так як кутова швидкість шестерні *3* рівна нулю, то вона здійснює поступальний рух. Кутова швидкість кривошипа і кутова швидкість шестерні *3* складають пару обертань, так як вони мають рівні і протилежно направлені кутові швидкості.

7.6 Кінематичний розрахунок зубчатих передач методом Вілліса.

Метод Вілліса застосовують для визначення кутових швидкостей зубчатих механізмів, в яких є зубчаті колеса, які обертаються відносно рухомих осей, тобто *планетарні* або *диференціальні механізми*.

На рис. 7.12, а зображена схема планетарного зубчатого механізму, в якому колесо *1* нерухоме, а інші колеса приводяться в рух кривошипом, який називають *водилом*. Вісь водила співпадає з віссю нерухомого колеса.

На рис. 7.12, б зображена схема диференціального зубчатого механізму, в якому колесо *1* і водило (кривошип) обертаються навколо одної і тої ж осі.

Метод Вілліса оснований на теорії додавання обертань навколо паралельних осей. Зубчаті колеса здійснюють два рухи:

а) відносне обертання зубчатих коліс відносно водила;

б) переносне обертання разом з водилом навколо його осі (переносною кутовою швидкістю для кожного зубчатого колеса буде кутова швидкість водила).

При розрахунках визначають залежність між відносними кутовими швидкостями, які рівні різниці абсолютних і переносних кутових швидкостей. В цьому випадку відношення між відносними кутовими швидкостями обернено пропорціональне радіусам коліс або числу зубців, взятому зі знаком мінус, якщо зачеплення зовнішнє, і зі знаком плюс, якщо зачеплення внутрішнє.

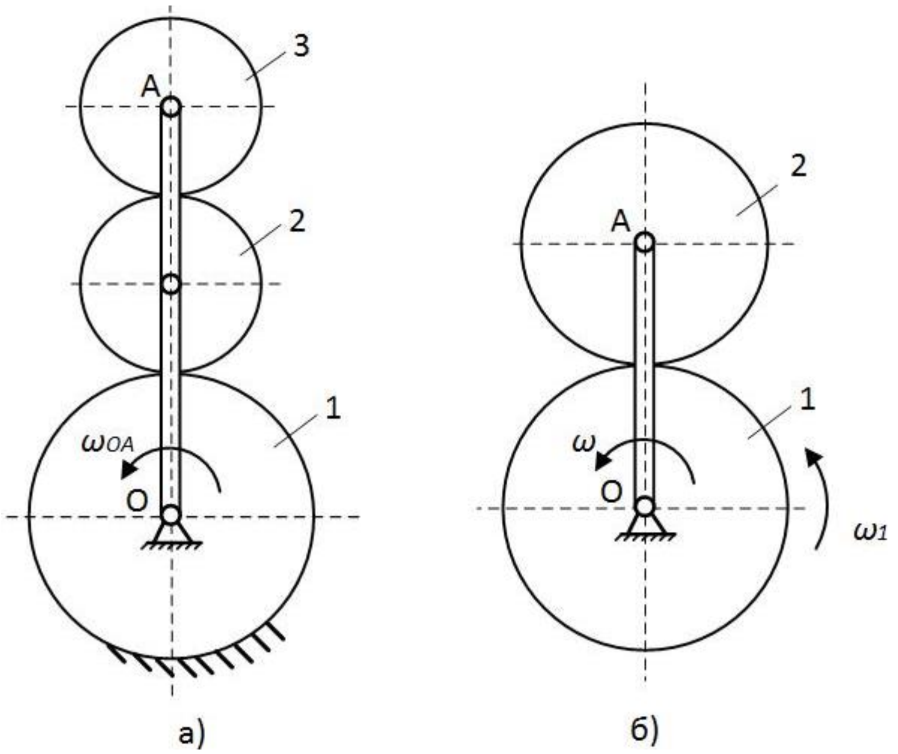


Рис. 7.12

Приклад 7.7 Визначити кутову швидкість колеса *2* диференціального механізму (рис. 7.13), якщо $\omega_{OA} = 4$ рад/с, $\omega_1 = 8$ рад/с, $r_1 = 30$ см, $r_2 = 15$ см.

Розв'язок. В механізмі переносна кутова швидкість – це кутова швидкість кривошипа (водила) *OA.* Тоді відносна швидкість кожного колеса буде рівна (напрямок абсолютної швидкості колеса *2* вибираємо проти годинникової стрілки): $\omega_{1r} = \omega_1 - \omega_{OA}$, $\omega_{2r} = \omega_2 - \omega_{OA}$.

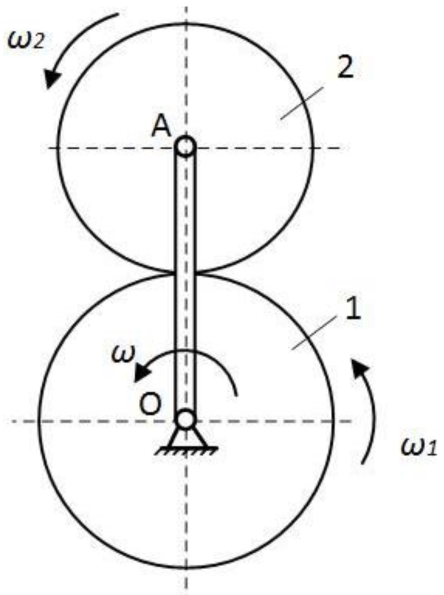


Рис. 7.13

Складемо співвідношення для механізму враховуючи, що колеса *1* і *2* мають зовнішнє зачеплення:

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}} = \frac{\omega_1 - \omega_{OA}}{\omega_2 - \omega_{OA}} = -\frac{r_2}{r_1},$$

звідки $-(\omega_1 - \omega_{OA})\frac{r_1}{r_2} = \omega_2 - \omega_{OA}$

$$\omega_2 = \omega_{OA} - (\omega_1 - \omega_{OA})\frac{r_1}{r_2};$$

$$\omega_2 = 4 - (8 - 4)\frac{30}{15} = -4 \text{ рад/с}.$$

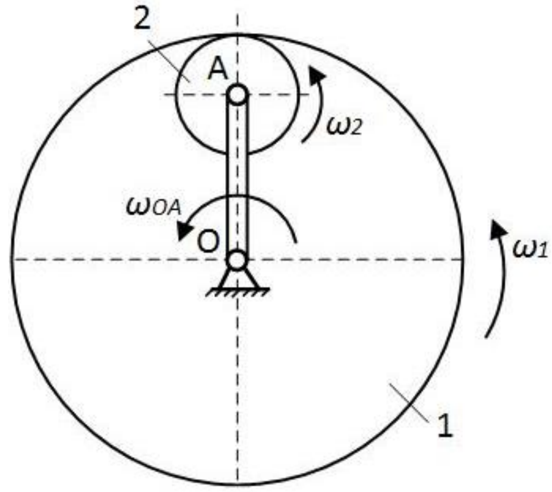
Мінус показує, що колесо *2* обертається за годинниковою стрілкою, тобто протилежно водилу і колесу *1*.

Відповідь. $\omega_2 = -4$ рад/с. Кутова швидкість колеса *2* має напрям, протилежний прийнятому на рис. 2.7.13.

Приклад 7.8 Визначити кутову швидкість колеса *2* диференціального механізму у випадку внутрішнього зачеплення, якщо $\omega_{OA} = 8$ рад/с, $\omega_2 = 12$ рад/с, OA = 60 см, $r_2 = 15$ см. (рис. 7.14).

Розв'язок. Переносна кутова швидкість – це кутова швидкість кривошипа (водила) *OA*. Відносна швидкість кожного колеса рівна (абсолютну кутову швидкість колеса *2* вважаємо направленою проти годинникової стрілки):

$$\omega_{1r} = \omega_1 - \omega_{OA}, \quad \omega_{2r} = \omega_2 - \omega_{OA}$$



Складемо співвідношення для механізму, враховуючи, що колеса *1* і *2* мають внутрішнє зачеплення:

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}} = \frac{\omega_1 - \omega_{OA}}{\omega_2 - \omega_{OA}} = \frac{r_2}{r_1},$$

$$(\omega_1 - \omega_{OA})\frac{r_1}{r_2} = \omega_2 - \omega_{OA},$$

$$\omega_2 = \omega_{OA} + (\omega_1 - \omega_{OA})\frac{r_1}{r_2};$$

$$\omega_2 = 8 + (12 - 8)\frac{60}{15} = 24 \text{ рад/с}.$$

Рис. 7.14

Так як ω_2 додатна, то кутова швидкість колеса *2* направлена проти годинникової стрілки, як було прийнято на рис 7.14.

Відповідь. $\omega_2 = 24$ рад/с.

7.7 Додавання поступального і обертального рухів

Тверде тіло одночасно здійснює переносний поступальний рух зі швидкістю $\bar{v}_0$ і відносний обертальний з кутовою швидкістю $\bar{\omega}_{\text{від}}$. Розглянемо окремі випадки такого руху.

1. *Швидкість поступального переносного руху перпендикулярна осі обертального відносного руху* ($\bar{v}_0 \perp \bar{\omega}_{\text{від}}$)

Додавання поступального переносного і обертального відносного рухів, при яких вектор швидкості поступального руху перпендикулярний вектору кутової швидкості обертального, приводить до одного обертання навколо миттєвої осі, паралельної осі відносного обертання, з кутовою швидкістю, рівною кутовій швидкості обертального руху. Відстань між миттєвою віссю обертання і віссю обертального руху рівна:

$$OP_v = \frac{v_0}{\omega_{\text{від}}} \tag{7.8}$$

<u>*Приклад 7.9*</u> Колесо котиться без ковзання по горизонтальному прямолінійному шляху (рис. 7.15). Швидкість центра колеса $v_0 = 2$ м/с, радіус R = 0,5 м, відносна кутова швидкість $\omega_0 = 4$ рад/с. Знайти результуючий рух і положення миттєвої осі обертання.

<u>*Розв'язок.*</u> Вісь відносного обертання колеса перпендикулярна площині креслення. Швидкість переносного руху перпендикулярна цій осі. Тому два рухи можемо замінити одним обертальним рухом навколо миттєвої осі обертання. Кутова швидкість результуючого абсолютного руху рівна кутовій швидкості відносного обертання:

$$\omega_P = \omega_0 = 4 \text{ рад/с.}$$

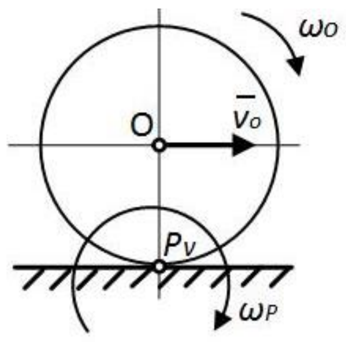


Рис. 7.15

Відстань між осями буде рівна:

$$OP_v = \frac{v_0}{\omega_0} = 0{,}5 \text{ м.}$$

<u>*Відповідь.*</u> Миттєва вісь обертання буде проходити через точку P_v.

2. Швидкість поступального переносного руху паралельна вектору кутової швидкості відносного обертання ($\bar{v}_0 \parallel \bar{\omega}_{\text{від}}$)

Рух, при якому вектор швидкості поступального переносного руху паралельний вектору кутової швидкості відносного обертального руху, називають *гвинтовим* або *кінематичним гвинтом*.

Гвинтовий рух не можна замінити одним результуючим рухом, тобто його не можна спростити. Якщо тіло здійснює гвинтовий рух, то вектори поступальної і кутової швидкостей можуть мати як однакові, так і протилежні напрямки. Гвинтові рухи тіла характеризуються *параметром гвинта,* який рівний:

$$P = \frac{v_0}{\omega_{\text{від}}} \tag{7.10}$$

Параметр гвинта – це переміщення тіла навколо осі гвинтового руху при повороті тіла на 1 рад.

Якщо поступальна швидкість і кутова швидкість змінні, то параметр гвинта також змінний. Гвинтові рухи характеризуються також величиною *кроку гвинта*, тобто *відстанню, на яку переміститься точка тіла при одному обертанні тіла навколо осі гвинтового руху*. Якщо кутова швидкість поступального руху постійна, то крок гвинта можна визначити за наступною формулою:

$$h = 2\pi P = \frac{2\pi v_0}{\omega_{\text{від}}} \tag{7.11}$$

Якщо кутова швидкість і швидкість поступального руху змінні, то рух твердого тіла буде миттєвим гвинтовим рухом.

Приклад 7.10 Вздовж твірної циліндра радіуса R = 20 см рухається тіло з постійною швидкістю $v_M = 10$ см/с (рис. 7.16). Визначити вид руху тіла і крок гвинта, якщо циліндр обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega = 4$ рад/с.

Розв'язок. Складемо рівняння руху точки M в декартовій системі координат:

$$x = Rcos\varphi, y = Rsin\varphi, z = v_M t, \quad \text{де } \varphi = \omega t.$$

Тоді

$$x = Rcos\omega t, y = Rsin\omega t, z = v_M t,$$

або

$$x = 20cos4t, y = 20sin4t, z = 10t \quad (*)$$

Рівняння (*) – це рівняння гвинтової лінії в параметричному вигляді.

Крок гвинта рівний:

$$h = \frac{2\pi v_0}{\omega_{\text{від}}} = \frac{2\cdot 3,14\cdot 10}{4} = 15,7 \text{ см.}$$

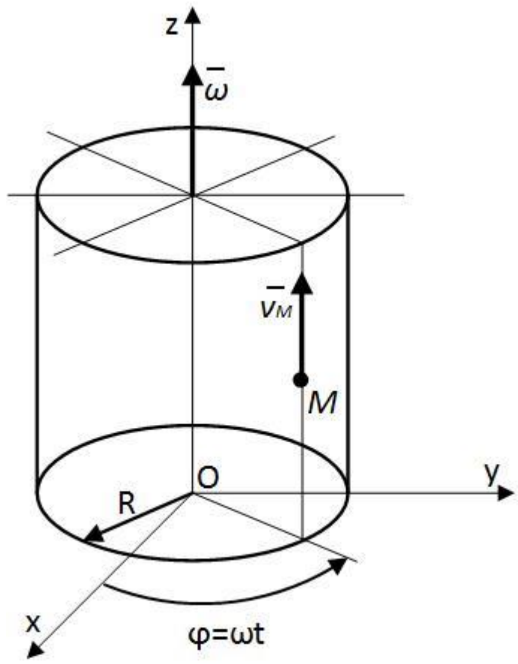


Рис. 7.16

Відповідь. Рух тіла гвинтовий; $h = 15,7$ см.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.:Техніка, 2002. – 512 с.
2. Добронравов В.В., Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1983. – 575 с.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 2001. – 416с.
4. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: В 2 т. – М.: Наука, 1990. – Т.1 – 670 с.; Т.2 – 683 с.
5. Яскілка М.Б. Збірник завдань для розрахунково-графічних робіт з теоретичної механіки: Посібн. – К.: Вища шк., 1999. – 351 с.
6. Сборник коротких задач про теоретической механике / О.Є. Кепе, Я.А. Виба, О.П. Грапис и др.; под ред. О.Є. Кепе. – М.: Высш. шк., 1989. – 386 с.
7. Теоретична механіка. Збірник задач / О.С. Апостолюк, В.М. Воробйов, Д.І. Ільчишина та ін.; За ред. Павловського М.А. – К.:Техніка, 2007. – 400 с.