МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

ДЛЯ СТУДЕНТІВ ІНЖЕНЕРНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Розділ ІІІ. ДИНАМІКА

Затверджено Методичною радою ЧДТУ,
протокол № 7/2015-2016 від 29.06.2016 р.,
згідно з рішенням кафедри МПМТ,
протокол № 6 від 11.02.2016 р.

ЧЕРКАСИ 2016

УДК 531.2 (075.8)
ББК 22.21я73
К 65

К 65 Конспект лекцій з теоретичної механіки для студентів інженерних спеціальностей. Частина ІІІ «Динаміка»/ Упоряд. : Т.І. Веретільник, Л.Д.Мисник ; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси : ЧДТУ, 2016. – 112 с.

В основу видання покладено досвід читання лекцій з теоретичної механіки для машинобудівних та будівельної спеціальностей в Черкаському державному технологічному університеті. Відмінною особливістю даного видання є його лаконічність і спеціальний підбір задач, переважно машинобудівної тематики.

Для студентів інженерних спеціальностей.

УДК 531.2 (075.8)
ББК 22.21я73

Упорядники: **Веретільник Тимофій Іванович,** *к.т.н., професор*
Мисник Людмила Дмитрівна, *к.т.н.*

Рецензент Губарь Є.Я., *к.т.н., доцент*

Н а в ч а л ь н е в и д а н н я

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

ДЛЯ СТУДЕНТІВ ІНЖЕНЕРНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Частина ІІІ. ДИНАМІКА

В авторській редакції

Комп'ютерна обробка Вознюк Т.І.

Формат 60х84 1/16. Times New Roman
Ум. друк. арк. 6,51. Обл.-вид. арк. 6.72. Р.н. 2275.

Черкаський державний технологічний університет
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 896 від 16.04.2002 р.
бульвар Шевченка, 460, м. Черкаси, 18006

ЗМІСТ

ВСТУП

Основні поняття та визначення

Динаміка — це розділ теоретичної механіки, в якому вивчається механічний рух під дією сил, прикладених до матеріальних об'єктів, що рухаються (матеріальних точок, твердих тіл, механічних систем).

Основні поняття динаміки – поняття сили і маси.

Сила – це міра механічної взаємодії між матеріальними об'єктами, що має певне числове значення і напрямок. Сили можуть бути постійними і змінними.

Поняття *маси* є одним з найважливіших властивостей матерії. Воно виникло в зв'язку з вивченням руху матеріальних об'єктів під дією сил. Постійна величина, що характеризує гравітаційну властивість тіл, тобто властивість тіл при вільному падінні мати на даній географічній широті прискорення g, називається гравітаційною або ваговою масою m.

Маса m – скалярна невід'ємна величина.

Так як $m_1 = \frac{P_1}{g}$, $m_2 = \frac{P_2}{g}$, то $\frac{m_1}{m_2} = \frac{P_1}{P_2}$,

тому вагові маси матеріальних тіл можна знаходити шляхом зважування тіл на терезах, прийнявши масу деякого тіла за одиницю маси.

Поряд з гравітаційною масою в механіці розглядається також інертна маса. Це постійна величина, що характеризує здатність тіла під дією даної сили набувати при поступальному русі певного прискорення. Як показали численні досліди, значення гравітаційної і інертної мас одного і того ж тіла рівні між собою, тому в подальшому будемо говорити просто про масу даного матеріального об'єкту.

В динаміці механічний рух розглядають з загальної точки зору – не лише з боку зовнішніх геометричних форм руху, але і виявляють фактори, що викликають ті чи інші види руху.

Динаміка найбільш загальна частина теоретичної механіки, являє собою експериментально-теоретичну наукову дисципліну. Зміст динаміки розвивається так, як і інших дисциплін, що використовують математичні методи.

В основу динаміки покладено деякі вихідні положення (аксіоми), перевірені практикою. На базі цих аксіом, логічним шляхом з використанням математичних методів, виводять різні положення механіки. Ці положення, з одного боку, відображають деякі загальні закони руху матеріальних об'єктів, з іншого – являють собою методи розв'язку різних задач динаміки.

Аксіоми динаміки вперше були сформульовані І. Ньютоном в його класичному творі "Математичні начала натуральної філософії", виданому в 1687 році.

Достовірність положень динаміки, покладених в основу створення методів вивчення механічного руху матерії, перевіряється практичною діяльністю людства, розвитком техніки. Критерій практики – основа при перевірці будь-якої теорії.

Аксіоми динаміки

В основі класичної механіки лежать припущення, стверджуючі існування абсолютного простору і абсолютного часу. Припускають, що простір має чисто геометричні властивості, які не залежать від матерії та її руху. Час також вважається незалежним. Отже, можна стверджувати, що існує абсолютно нерухома система відліку відносно якої можна вивчати абсолютний рух матеріальних об’єктів, а також незалежність зміни часу від руху цієї системи відліку.

Перша аксіома динаміки

> Усяка матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху, поки її не спонукають змінити цей стан прикладені сили.

Зміст цього закону, відкритого в 1638 році Г. Галілеєм, полягає в тому, що матеріальна точка ізольована від дії інших матеріальних об’єктів (або при врівноваженні цих дій) не може сама змінити свою швидкість. Ця властивість матеріальної точки називається інерцією.

Таким чином перший закон динаміки встановлює властивість інерції матеріальної точки, тому і називається законом інерції. Даний закон описує найпростіший з можливих механічних рухів – рух матеріальної точки в умовах її повної ізольованості від впливу інших матеріальних тіл.

Отже, $\bar{v} = const$, а в стані спокою $\bar{v} = 0$, якщо $\bar{F} = 0$.

Такий кінематичний стан точки називається інерціальним. Кінематично інерціальний стан точки можна виразити так: прискорення точки дорівнює нулю $\bar{a} = 0$.

Те, що сила є причиною зміни спокою було відомо ще в давнину. Однак те, що сила є причиною зміни стану рівномірного і прямолінійного руху матеріальної точки було відкриттям, яке дало початок механікі як науці.

В формулюванні першого закону не вказана система відліку, відносно якої встановлюється стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху матеріальної точки, а без цього закон не має певного змісту.

Ньютон, формулюючи закон, розглядав як постулат існування абсолютного простору завжди однорідного, ізотропного, нерухомого і абсолютного руху відносно нього. Але в дійсності не існує абсолютного простору і абсолютного руху, а отже не існує і абсолютно нерухомої системи відліку. Дослід показує, що з високим ступенем точності цей закон справедливий в системах координат незмінно зв’язаних з “нерухомими зорями”, з меншим ступенем точності, але достатнім при розгляді переважної більшості технічних задач, він справедливий в системах координат незмінно зв’язаних з Землею.

Системи відліку в яких справедливий перший закон Ньютона називаються інерціальними системами відліку. Отже, інерціальні системи відліку – це такі системи відліку, відносно яких всі матеріальні точки без дії на них інших матеріальних об’єктів (або при врівноваженні цих дій) перебувають в стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху.

Враховуючи сказане, першу аксіому динаміки сформулюємо так:

матеріальна точка, рух якої вивчається відносно деякої інерціальної системи відліку, при відсутності будь-якої дії на неї з боку інших матеріальних об’єктів, перебуває відносно цієї системи відліку в стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху, тобто в інерціальному стані.

При цьому зазначимо, що час в тій чи іншій інерціальній системі відліку відраховується однаково. Наприклад, дві події, які здаються одночасними при спостереженні відносно певної інерціальної системи відліку повинні вважатись одночасними і для будь-якого спостереження відносно іншої інерціальної системи відліку.

Друга аксіома динаміки

Зміна кількості руху матеріальної точки пропорціональна прикладеній силі і відбувається в напрямку дії сили.

Під кількістю руху матеріальної точки в даній інерціальній системі відліку розуміємо вектор рівний добутку маси точки на її швидкість.

Математично другий закон Ньютона може бути записаний у вигляді:

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{F} \tag{1}$$

В класичній механіці маса матеріальної точки вважається сталою, незалежною від швидкості, тобто

$$m = m_o, \tag{2}$$

де m_o – маса точки при швидкості $\bar{v}_o$, рівній нулю;

m – маса точки при швидкості $\bar{v}$, не рівній нулю.

Згідно рівності (1) і (2) маємо:

$$m\bar{a} = \bar{F}, \tag{3}$$

тобто добуток маси матеріальної точки на її прискорення дорівнює діючій силі.

Так як маса m є скалярною і невід’ємною величиною, то згідно рівняння (3) прискорення $\bar{a}$ направлене вздовж лінії дії сили $\bar{F}$ в тому ж напрямку що і діюча сила. Рівняння (3) називають *основним рівнянням динаміки.*

Матеріальна точка може змінити інерціальний свій стан відносно інерціальної системи відліку, тобто набути прискорення, тільки під впливом іншого матеріального об’єкта. При цьому величина прискорення точки залежить не лише від впливу сили, але й від інертності точки. Властивість матеріальної точки чинити опір зміні її стану спокою або рівномірного і прямолінійного руху називається властивістю *інертності*. Інертність пропорціональна масі точки.

Характеристикою впливу на матеріальну точку з боку іншого матеріального об’єкта є сила.

Згідно рівняння (3) аксіому, що встановлює залежність між прискоренням матеріальної точки, її масою та діючою на точку силою, можна сформулювати так:

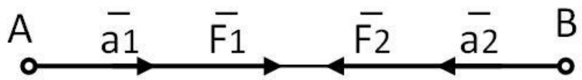
прискорення, якого набуває матеріальна точка відносно інерціальної системи відліку, пропорціональне діючій на точку силі, має однаковий з нею напрямок і обернено пропорціональне масі точки.

Звідси випливає, що масою матеріальної точки називається фізична величина, яка є мірою її інертних і гравітаційних властивостей.

Третя аксіома динаміки

Будь-яка дія викликає рівну за величиною і протилежно направлену протидію, тобто сили взаємодії двох матеріальних точок рівні за модулем і направлені вздовж однієї прямої в протилежних напрямках.

З цього закону випливає, що сили виникають попарно; в природі не має односторонньо прикладених сил, а існує тільки взаємодія. Сили взаємодії між вільними матеріальними точками, як сили прикладені до різних об’єктів, не утворюють врівноважені системи.



Позначимо масу матеріальної точки *A* – m_1, а масу матеріальної точки *B* – m_2. Прискорення цих точок $\bar{a}_1$ і $\bar{a}_2$ відповідно. Тоді, згідно другого і третього законів, припускаючи, що до точок *A* і *B* ніякі інші сили крім сил взаємодії не прикладено, матимемо

$$m_1\bar{a}_1 = -m_2\bar{a}_2,$$

звідки $$m_1\bar{a}_1 = m_2\bar{a}_2,$$ або $$\frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Таким чином, модулі прискорень, яких надають одна одній взаємодіючі точки *A* і *B*, обернено пропорціональні масам цих точок. Направлені прискорення вздовж прямої *AB* в протилежних напрямках.

Четверта аксіома динаміки

Якщо на матеріальну точку діє одночасно кілька сил, то прискорення цієї точки дорівнює сумі тих прискорень, які точка мала б під дією кожної сили окремо.

Система сил, прикладених до матеріальної точки, еквівалентна одній силі, що дорівнює головному вектору цієї системи сил. Нехай на матеріальну точку діють сили $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$. Прискорення, якого надає матеріальній точці кожна з цих сил діючи окремо, незалежно одна від одної $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$. Згідно з другою аксіомою

$$m\bar{a}_1 = \bar{F}_1, m\bar{a}_2 = \bar{F}_2, \dots, m\bar{a}_n = \bar{F}_n,$$

а згідно з четвертою аксіомою – прискорення a, якого набуває точка під дією суми сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ дорівнює

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_n = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k$$

.

Помножимо останню рівність на масу матеріальної точки:

$$m\bar{a} = m\bar{a}_1 + m\bar{a}_2 + \dots + m\bar{a}_n = m\sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k.$$

Враховуючи наведені рівняння та згідно з другою аксіомою одержуємо:

$$m\bar{a} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \bar{R}$$

або

$$m\bar{a} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k = \bar{R} \qquad (4)$$

Рівність (4) називають *основним рівнянням динаміки точки* у випадку дії на точку кількох сил.

Система сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$, прикладених до матеріальної точки, діє так як одна сила $\bar{R}$, рівна їх геометричній сумі.

Закони динаміки незалежні. Справедливість їх підтверджується практикою. Вони відіграють велику роль при дослідженні рухів тіл з швидкостями незначними порівняно з швидкістю світла.

ЛЕКЦІЯ 1. ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

1.1 Диференціальні рівняння руху матеріальної точи

Згідно з аксіомою про в'язі можна одержати диференціальні рівняння руху матеріальної точки як вільної, так і невільної, лише потрібно до діючих на точку активних сил додати реакцій в'язей. Активні сили і реакцій в'язей під час руху точки можуть залежати, в загальному випадку, не тільки від накладених на точку в'язей, а й від швидкості її руху, положення або часу. В подальшому не будемо робити різниці між вільною і невільною матеріальною точкою.

Розглянемо матеріальну точку *M* масою m, яка під дією системи сил $\bar{F}_k$ *(k = 1,2,…,n)* рухається відносно інерціальної системи відліку *Oxyz* (рис 1.1)

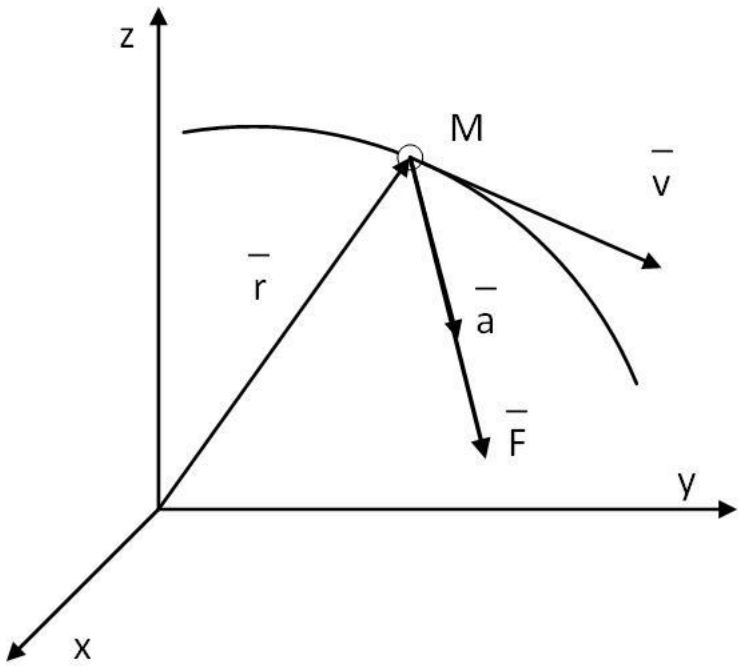


Рис. 1.1

Згідно з другим і четвертим законами Ньютона:

$$m\bar{a} = \bar{F} \tag{1.1}$$

де $\bar{a}$ – прискорення точки *M*;

$\bar{F}$ – рівнодійна діючих на точку сил $\bar{F}_k$.

В загальному випадку сили $\bar{F}_k$ можуть залежати від часу, положення точки *M* в просторі і її швидкості, отже і їх рівнодійна $\bar{F}$ в загальному випадку є функцією часу t, радіуса-вектора $\bar{r}$ і швидкості $\bar{v}$, тобто $\bar{F} = \bar{F}(t, \bar{r}, \bar{v})$.

З кінематики відомо, що прискорення $\bar{a}$ дорівнює другій похідній за часом від радіуса-вектора $\bar{r}$

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}.$$

Враховуючи це диференціальне рівняння руху матеріальної точки (1.1) має вигляд

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F} \qquad \text{або} \qquad m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F}(t,\bar{r},\bar{v}) \tag{1.2}$$

Для скорочення запису, знаючи, що сили це змінні величини, тобто $\bar{F} = \bar{F}(t,\bar{r},\bar{v})$ будемо використовувати просто $\bar{F}$.

Спроектуємо обидві частини рівняння (1.2) на осі координат *Oxyz* та одержимо диференціальні рівняння руху точки в проекціях на ці осі:

$$ma_x = F_x, \qquad ma_y = F_y, \qquad ma_z = F_z.$$

Проекції прискорення на осі координат *Oxyz* можна представити як похідну за часом від проекції швидкості або другу похідну за часом від координат точки, що рухається. Тоді диференціальні рівняння руху матеріальної точки в декартових прямокутних координатах матимуть вигляд:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dv_x}{dt} = F_x, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{dv_y}{dt} = F_y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = m\frac{dv_z}{dt} = F_z \tag{1.3}$$

Окремі випадки

1. Якщо відомо, що матеріальна точка рухається в одній площині, то прийнявши її за координатну площину *Oxy*, матимемо

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dv_x}{dt} = F_x, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{dv_y}{dt} = F_y, \tag{1.4}$$

так як $z = 0$, то і $F_z = 0$.

2. Якщо точка рухається по прямій траєкторії, то направивши вздовж неї координатну вісь *Ox*, одержимо одне диференціальне рівняння прямолінійного руху точки

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dv_x}{dt} = F_x \tag{1.5}$$

так як $y = z = 0$, то і $F_y = F_z = 0$.

3. Для рухомих натуральних осей координат (рис.1.2), проектуючи обидві частини рівняння (1.1) на ці осі, одержимо

$$ma_\tau = F_\tau, \qquad ma_n = F_n, \qquad ma_b = F_b$$

де a_τ, a_n, a_b – проекції прискорення матеріальної точки;

F_τ, F_n, F_b – проекції рівнодійної сили на дотичну, головну нормаль і бінормаль до траєкторії в миттєвому положенні рухомої точки.

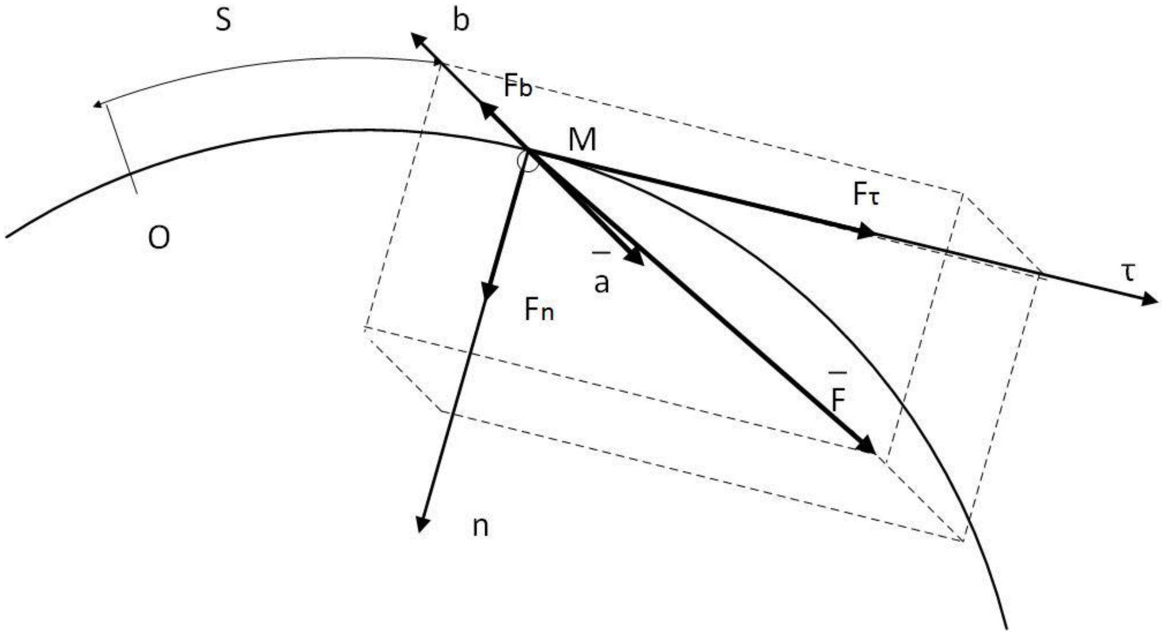


Рис. 1.2

Так як $a_\tau = \frac{d^2S}{dt^2}$, $a_n = \frac{v^2}{\rho}$, $a_b = 0$, де ρ – радіус кривизни траєкторії в місці знаходження точки, диференціальне рівняння руху матеріальної точки в натуральній формі матиме вигляд:

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = F_\tau,\ m\frac{v^2}{\rho} = F_n,\ 0 = F_b \tag{1.6}$$

Але враховуючи, що $\rho = \frac{dS}{d\varphi}$, $\frac{v^2}{\rho} = v \cdot \frac{v}{\rho} = v \cdot \frac{dS}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dS}{d\varphi}} = v \cdot \frac{d\varphi}{dt}$, де $\frac{d\varphi}{dt}$ – кутова швидкість обертання, тоді рівняння (1.6) можна записати у вигляді:

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau,\ mv\frac{d\varphi}{dt} = F_n,\ 0 = F_b \tag{1.7}$$

Ця форма диференціальних рівнянь руху матеріальної точки зручна при дослідженні деяких випадків польоту снарядів і ракет, особливо по траєкторії, що лежить в площині.

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки можна записати для будь-якої іншої системи координат. Для цього потрібно знайти проекції прискорення точки на ці осі координат.

1.2 Дві основні задачі динаміки точки

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки, в тій чи іншій системі координат, дозволяють розв'язати дві основні задачі.

Перша задача: *знаючи масу точки і кінематичні рівняння її руху, знайти діючі на точку сили (рівнодійну всіх сил).*

Дійсно, якщо точка масою m рухається відносно декартової системи координат згідно рівнянь $x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t)$, то проекції сили на ці осі координат знаходять з диференціальних рівнянь руху матеріальної точки (1.3), тобто

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{d^2f_1}{dt^2}, \qquad F_y = m\frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{d^2f_2}{dt^2}, \qquad F_z = m\frac{d^2z}{dt^2} = m\frac{d^2f_3}{dt^2}$$

Знаючи проекції сили на координатні осі, легко знайти модуль сили і косинуси кутів, які утворює вектор сили з осями координат:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = m\sqrt{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2z}{dt^2}}$$

$$cos \propto = \frac{F_x}{F} = \frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{d^2z}{dt^2}}}; cos\beta \ = \frac{F_y}{F} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\sqrt{\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{d^2z}{dt^2}}}; cos\gamma \ = \frac{F_z}{F} \ \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{d^2z}{dt^2}}},$$

де $\propto, \beta, \gamma$ – кути утворені рівнодійною $\bar{F}$ з осями координат *Ox*, *Oy*, *Oz*.

Таким чином розв’язання першої задачі динаміки зводиться до відшукання проекцій прискорень, складання диференціальних рівнянь руху матеріальної точки і обчислення величини сил.

Якщо рух точки задано в натуральній формі, то для обчислення сил необхідно скористатись рівняннями (1.7).

Методика розв’язку першої задачі динаміки:

1) вибрати систему відліку;
2) зобразити поточне положення точки;
3) визначити за заданим законом руху проекції прискорення точки на координатні осі;
4) скласти рівняння руху точки відповідно до вибраної системи відліку;
5) розв’язати рівняння відносно невідомих величин.

Приклад 1.1

Матеріальна точка масою *m* рухається за законом $x = at$, $y = b - at^2$. Визначити силу $\bar{F}$, під дією якої відбувається рух, якщо ця сила залежить тільки від положення точки.

Розв’язок: Рух точки здійснюється в прямокутній декартовій системі координат *Oxy*. Траєкторія руху – парабола, рівняння якої після виключення з рівнянь руху часу *t* має вигляд $y = b - a^{-1}x^2$ (рис. 1.3).

Враховуючи, що дана задача є першою (прямою) задачею динаміки матеріальної точки, визначимо проекції сили $\bar{F}$ з диференціальних рівнянь (1.4). Для проекцій прискорення маємо $\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \frac{d^2y}{dt^2} = -2a$. Тоді $F_x = 0,\ F_y = -2am$. Модуль сили $\bar{F}$ можна записати так: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 2am$.

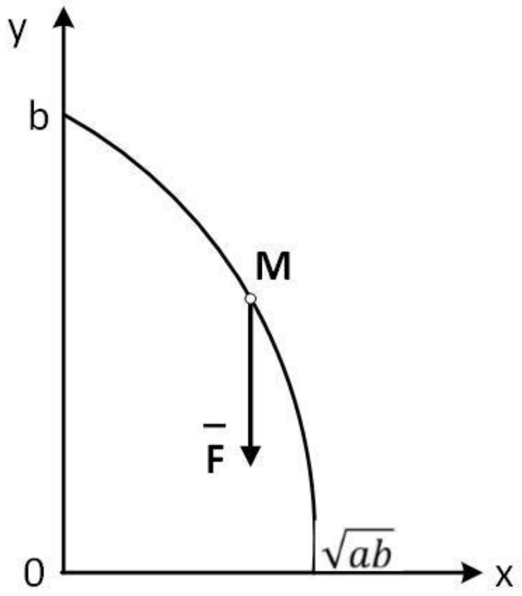


Рис. 1.3

Відповідь.

Точка рухається під дією сталої сили величиною $F = 2am$, яка паралельна осі *Oy* і направлена протилежно до неї.

Друга (обернена) задача: *знаючи масу точки, її початкове положення, початкову швидкість і рівнодійну діючих на точку сил, знайти рівняння руху точки.*

В загальному випадку диференціальні рівняння руху матеріальної точки мають вигляд:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right);$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right); \tag{1.8}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right).$$

Для знаходження рівнянь руху матеріальної точки в прямокутних декартових координатах потрібно проінтегрувати систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку (1.8). З теорії диференціального числення відомо, що рішення одного диференціального рівняння другого порядку має дві довільні сталі. У випадку системи трьох таких рівнянь одержимо шість довільних сталих C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6.

Кожна з координат x, y, z рухомої матеріальної точки (рівняння її руху) залежатиме від часу t і шести довільних сталих, тобто

$$x = f_1(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

$$y = f_2(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \qquad (1.9)$$

$$z = f_3(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

Якщо диференціювати рівняння (1.9) за часом, то знайдемо проекції швидкості матеріальної точки на осі координат

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{df_1}{dt}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{df_2}{dt}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \qquad (1.10)$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{df_3}{dt}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

Таким чином задавання сили не визначає конкретний рух точки, а виділяє цілий клас рухів, що характеризуються шістьма довільними сталими. Діюча сила визначає тільки прискорення рухомої матеріальної точки, а швидкість і положення точки на траєкторії залежать ще і від її початкової швидкості та початкового положення. Так, наприклад, матеріальна точка, рухаючись поблизу поверхні Землі під дією сили тяжіння, має прискорення $\bar{g}$, якщо не враховувати опір повітря. Але вона буде мати різну швидкість і положення в просторі в один і той же момент часу та іншу форму траєкторії в залежності від того з якої точки простору і під яким кутом почався рух та з якою за величиною і напрямком початковою швидкістю.

Для знаходження конкретного руху матеріальної точки потрібно задати додатково умови, які дозволять знайти довільні сталі. Такими умовами є зазвичай початкові умови, тобто в конкретний момент часу ($t=0$) задають координати рухомої матеріальної точки x_o, y_o, z_o та проекції її початкової швидкості v_{xo}, v_{yo}, v_{zo}

$$t = 0,\ x = x_o,\ y = y_o,\ z = z_o,\ \frac{dx}{dt} = v_{xo},\ \frac{dy}{dt} = v_{yo},\ \frac{dz}{dt} = v_{zo}.$$

Використавши ці початкові умови і формули (1.9) та (1.10), одержимо шість рівнянь для знаходження шести довільних сталих

$$x_o = f_1(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

$$y_o = f_2(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

$$z_o = f_3(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

$$v_{xo} = \frac{df_1}{dt}(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

$$v_{yo} = \frac{df_2}{dt}(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

$$v_{zo} = \frac{df_3}{dt}(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

Якщо матеріальна точка рухається в площині *Oxy* існує два диференціальних рівняння руху. До розв'язку цих рівнянь входять чотири довільні сталі, які визначаються з початкових умов

$$t = 0,\ x = x_o,\ y = y_o,\ \frac{dx}{dt} = v_{xo},\ \frac{dy}{dt} = v_{yo}.$$

У випадку прямолінійного руху матеріальної точки існує лише одне диференціальне рівняння і до його розв'язку входять тільки дві довільні сталі

При $t = 0,\ x = x_o,\ \frac{dx}{dt} = v_{xo}$.

Задача інтегрування системи диференціальних рівнянь (1.3) при заданих початкових умовах в загальному випадку досить складна, але знаходження закону руху матеріальної точки при заданих силах є актуальною задачею, тому *другу* задачу динаміки ще називають *основною*.

Методика розв'язку другої (основної) задачі динаміки:

1) складаємо диференціальне рівняння руху. Для його складання у випадку прямолінійного руху потрібно:
   - вибрати початок відліку і провести координатну вісь, направляючи її вздовж траєкторії в напрямку руху;
   - зобразити точку в довільному положенні та показати всі діючі на точку сили;
   - підрахувати суму проекцій всіх сил на координатну вісь і підставити цю суму в праву частину диференціального рівняння руху; при цьому *потрібно обов'язково всі змінні сили виразити через ті величини (t, x або v), від яких ці сили залежать*.
2) інтегруємо отримані диференціальні рівняння руху;
3) визначаємо сталі інтегрування, використовуючи початкові умови;
4) записуємо кінематичний закон руху матеріальної точки.

Приклад 1.2

Сила залежить від часу

Вантаж масою *m* починає рухатися з початковою швидкістю v_o вздовж гладкої горизонтальної поверхні під дією сили $\bar{F}$, значення якої зростає пропорціонально часу за законом $F = kt$ (*k* – константа). Знайти закон руху вантажа.

Розв'язок. Виберемо початок відліку *O* в початковому положенні вантажа і направимо вісь *Ox* в напрямку руху (рис.1.4). Тоді початкові умови будуть: при $t = 0$ $x = 0,\ v_x = v_0$.

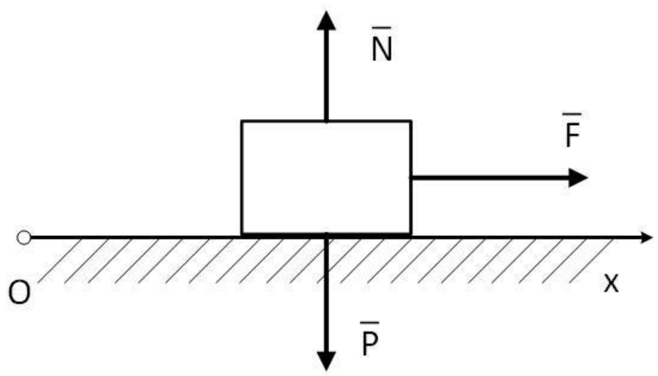


Рис. 1.4

Зображаємо в довільному положенні вантаж і діючі на нього сили $\bar{F}$, $\bar{P}$ (сила тяжіння) і $\bar{N}$ (реакція поверхні). Проекції цих сил на вісь *Ox* мають значення $F_x = F = kt$, $P_x = 0, N_x = 0$ і рівняння (1.5) матиме вигляд

$$m\frac{dv_x}{dt} = kt.$$

Помноживши обидві частини рівняння на *dt*, розділяємо змінні і, проінтегрувавши, одержимо

$$mv_x = \frac{kt^2}{2} + C_1.$$

Підставивши сюди початкові дані, знайдемо, що $C_1 = v_0$. Тоді, замінюючи в отриманому результаті v_x на $\frac{dx}{dt}$, представимо його у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = \frac{kt^2}{2m} + v_0.$$

Помноживши обидві частини рівняння на *dt,* знову розділимо змінні і, інтегруючи, знайдемо

$$x = \frac{kt^3}{6m} + v_0 t + C_2.$$

Підстановка початкових даних дає $C_2 = 0$, і остаточно отримуємо закон руху вантажа у вигляді

$$x = \frac{kt^3}{6m} + v_0 t.$$

Отже, пройдений вантажем шлях буду зростати пропорціонально кубу швидкості.

Приклад 1.3

Сила залежить від швидкості

Човен, маса якого $m = 40$ кг, штовхають, надаючи йому початкову швидкість $v_0 = 0{,}5$ м/с. Вважаючи силу опору води залежною від швидкості $R = \mu v$, де $\mu = 9{,}1$ кг/с, визначити, через скільки часу швидкість човна зменшиться вдвічі та який шлях він пройде за цей час.

Розв'язок. Розмістимо початок відліку *O* в початковому положенні човна і направимо вісь *Ox* в напрямку руху (рис. 1.5). Тоді початкові умови руху будуть: при $t = 0$ $x = 0, v_x = v_0$.

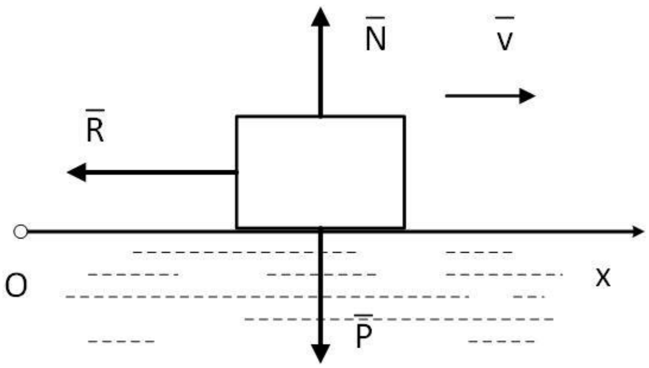


Рис. 1.5

Зобразимо в довільному положенні човен та діючі на нього сили $\bar{P}$, $\bar{N}$ та $\bar{R}$. Проекції цих сил на вісь Ox мають значення $R_x = -R = -\mu v_x,\ P_x = 0, N_x = 0$. Враховуючи, що $v_x = v$, рівняння (1.5) матиме вигляд

$$m\frac{dv}{dt} = = -\mu v.$$

Розділивши змінні $\frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{m}dt$ інтегруємо рівняння та отримуємо

$$lgv = -\frac{\mu}{m}t + C_1.$$

Підставивши сюди початкові дані, знайдемо, що $C_1 = lgv_0$. Тоді маємо

$$lgv = -\frac{\mu}{m}t + lgv_0.$$

Звідси знаходимо

$$t = \frac{m}{\mu}\lg(\frac{v_0}{v})$$

Потрібній час t_1 визначаємо, вважаючи, що $v = 0{,}5v_0$. Цей час, як видно, не залежить у даному випадку від v_0. Так як $lg2 = 0{,}69$, то

$$t_1 = \frac{m}{\mu}\lg\left(\frac{2v_0}{v_0}\right) = \frac{m}{\mu}lg2 \approx 3\ \text{с}.$$

Для знаходження пройденого шляху доцільно знову скласти диференціальне рівняння руху (1.5) та зробити підстановку $\frac{dv}{dt} = \frac{dv\cdot dx}{dt\cdot dx} = v\frac{dv}{dx}$, щоб встановити залежність між x і v. Тоді одержимо

$$mv\frac{dv}{dx} = -\mu v.$$

Звідси, скорочуючи на v та розділяючи змінні, одержимо

$$dv = -\frac{\mu}{m}dx.$$

Інтегруємо одержаний вираз

$$v = -\frac{\mu}{m}x + C_1.$$

Підставивши сюди початкові дані, знайдемо, що $C_1 = v_0$. Отже

$$v = -\frac{\mu}{m}x + v_0.$$

Звідси одержуємо

$$x = \frac{m}{\mu}(v_0 - v).$$

Вважаючи, що $v = 0{,}5v_0$, знаходимо пройдений шлях:

$$x_1 = \frac{m}{\mu}(v_0 - 0{,}5v_0) = 1{,}1 \text{ м}.$$

Щоб знайти шлях, пройдений човном до зупинки потрібно в отриманому рівнянні прийняти $v = 0$. Тоді одержимо

$$x_2 = \frac{m}{\mu}(v_0 - 0) = 2{,}2 \text{ м}.$$

1.3 Диференціальне рівняння прямолінійного руху точки

Диференціальне рівняння прямолінійного руху матеріальної точки вздовж осі *Ox*, згідно рівняння (1.5) має вигляд:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dv_x}{dt} = F_x(t, x, v_x).$$

Початкові умови мають вигляд: при $t = 0,\ x = x_o,\ \frac{dx}{dt} = v_x = v_{xo}$.

Найбільш важливі випадки прямолінійного руху точки коли сила F_x постійна або залежить лише від часу *t*, координати *x* або швидкості v_x.

Якщо сила постійна, то маємо випадок рівнозмінного руху, тобто руху з постійним прискоренням. Від часу сила залежить коли її змінюють шляхом регулювання, як, наприклад, регулюють силу тяги літака змінюючи режим роботи його двигунів. Силу, що залежить від координати *x* може створити стиснута або розтягнута пружина та інші пружні тіла при їх деформації. Сили, що залежать від швидкості руху – це насамперед сили опору, коли точка рухається в якомусь середовищі, що створює опір, наприклад у воді.

Відзначимо, що в перерахованих випадках інтегрування диференціального рівняння (1.5) виконати не складно. В загальному випадку, коли сила одночасно залежить від часу *t*, координати *x* і швидкості v_x, в більшості випадків, диференціальне рівняння можна проінтегрувати лише приблизно.

ЛЕКЦІЯ 2. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО СИСТЕМИ МАТЕРІАЛЬНИХ ТОЧОК

2.1. Сили. Їх класифікація та властивості

Системою матеріальних точок або механічною системою називається певна сукупність матеріальних точок чи тіл, які взаємодіють одне з одним за законом рівності сил дії та протидії. Взаємодія це те головне, що характеризує будь-яку механічну систему.

У динаміці, так само як і в статиці використовують дві класифікації сил, прикладених до системи матеріальних точок, а саме: 1) сили *внутрішні* і *зовнішні*; 2) *активні сили* і *реакції в'язей*.

Зовнішніми силами називаються сили взаємодії між матеріальними точками даної системи та іншими тілами, які до цієї системи не входять. Позначимо зовнішні сили $\bar{F}^e$.

Внутрішніми силами називаються сили взаємодії між точками однієї системи. Позначимо внутрішні сили $\bar{F}^i$. Вони мають такі властивості:

головний вектор і головний момент внутрішніх сил відносно деякого центра O, дорівнюють нулю при будь-якому стані системи.

Для доведення розглянемо систему, яка складається з n матеріальних точок. Виділимо будь-які дві точки системи A і B (рис 2.1) для яких $\bar{F}_1^i + \bar{F}_2^i = 0$, так як сили дії та протидії завжди рівні за модулем, протилежні за напрямком та діють вздовж однієї прямої, яка з'єднує взаємодіючі точки.

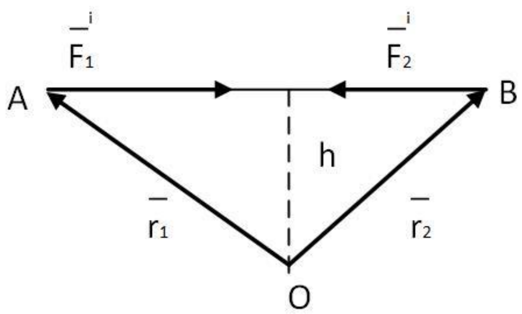


Рис. 2.1

Головний вектор внутрішніх сил $\bar{R}^i$ дорівнює векторній сумі таких сил дії та протидії, так як вся система складається з взаємодіючих точок. Таким чином

$$\bar{R}^i = \sum \bar{F}_k^i = 0 \qquad (2.1)$$

або в проекціях на осі прямокутної декартової системи координат

$$R_x^i = \sum F_{kx}^i = 0; \quad R_y^i = \sum F_{ky}^i = 0; \; R_z^i = \sum F_{kz}^i = 0;$$

Знайдемо суму моментів сил $\bar{F}_1^i$ і $\bar{F}_2^i$ відносно довільного центру O.

$\bar{M}_O(\bar{F}_1^i) + \bar{M}_O(\bar{F}_2^i) = 0$, так як сили мають однакове плече відносно центру O і протилежні напрямки векторних моментів. Головний момент внутрішніх сил $\bar{M}_O^i$ відносно центру O дорівнює векторній сумі таких виразів рівних нулю. Таким чином

$$\bar{M}_O^i = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k^i) = \sum(\bar{r}_k \times \bar{F}_k^i) = 0 \qquad (2.2)$$

В проекціях на осі координат

$$M_x^i = \sum M_x(\bar{F}_k^i) = 0; \; M_y^i = \sum M_y(\bar{F}_k^i) = 0; \; M_z^i = \sum M_z(\bar{F}_k^i) = 0$$

Залежно від складу системи одні й ті самі сили можуть бути або зовнішніми, або внутрішніми. Наприклад, потяг складається з вагонів і тепловоза. Внутрішніми силами тут є сили зчеплення між вагонами, зовнішніми – сили тяжіння, реакції рейок, сили опору повітря. Якщо в розглядувану систему ввести рейки, то реакції рейок будуть вже внутрішніми силами.

2.2 Диференціальні рівняння руху системи матеріальних точок

Розглянемо механічну систему, яка складається з *n* матеріальних точок. Усі сили, діючі на точки системи, поділимо на сили зовнішні і внутрішні (рис 2.2). Позначимо рівнодійну діючих на точку m_k зовнішніх сил – $\bar{F}_k^e$, а рівнодійну внутрішніх сил, діючих на цю ж точку – $\bar{F}_k^i$, тоді згідно другого та четвертого законів динаміки:

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i \qquad (k = 1,2, \dots, n) \qquad (2.3)$$

де m_k – маса точки; $\bar{a}_k$ – прискорення цієї точки.

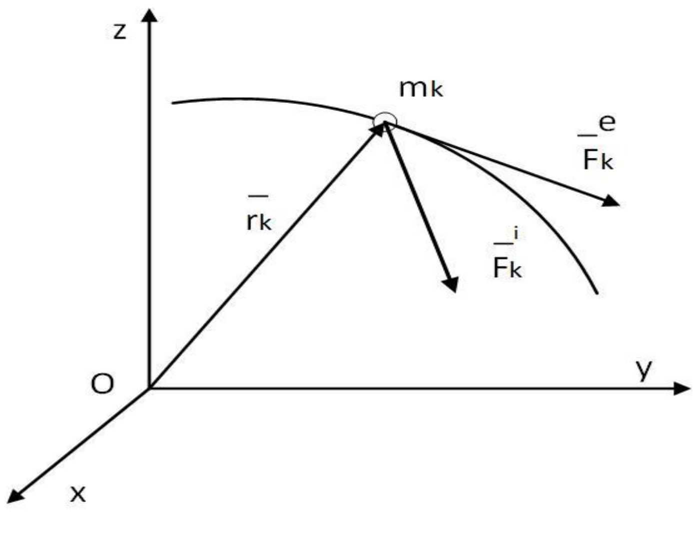


Рис 2.2

Рівняння (2.3) називається диференціальним рівнянням руху механічної системи у векторній формі. Кількість цих рівнянь дорівнює числу n матеріальних точок, що входять до даної системи.

В проекціях на осі координат $Oxyz$:

$$
\begin{aligned}
m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} &= F_{kx}^e + F_{kx}^i \\
m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} &= F_{ky}^e + F_{ky}^i \\
m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} &= F_{kz}^e + F_{kz}^i
\end{aligned} \qquad (2.4)
$$

Рівняння (2.4) називаються диференціальними рівняннями руху механічної системи в координатній формі. Кількість цих рівнянь дорівнює $3n$.

Якщо система невільна, то в праву частину рівнянь (2.3) і (2.4) будуть входити як активні сили так і реакції в'язей, накладених на точки системи. В цих рівняннях проекції сил можуть в загальному випадку залежати від часу t, координат x_k, y_k, z_k і проекцій швидкості v_{xk}, v_{yk}, v_{zk} всіх точок, що входять до даної системи. Для знаходження залежності координат точок від часу (закону руху точок) необхідно виконати подвійне інтегрування рівнянь (2.4).

При інтегруванні з'являється $6n$ довільних сталих. Ці сталі визначають за початковими умовами руху механічної системи.

Знаходження невідомих функцій з рівнянь (2.4) загалом пов'язане зі значними, а іноді й нездоланними математичними труднощами, через те, що в ці рівняння можуть входити невідомі внутрішні сили, які попередньо потрібно визначити. Крім того, складності розв'язання системи рівнянь можуть виникати через її високий порядок і взаємозв'язок окремих рівнянь системи, бо сили, що входять в ці рівняння, можуть залежати від координат не тільки однієї матеріальної точки системи. Тому основна роль цих рівнянь не в застосування до розв'язку конкретних задач динаміки, а в тому, що вони або наслідки з них необхідні для одержання загальних теорем динаміки, які встановлюють взаємозв'язок між основними мірами механічного руху матеріальних об'єктів і мірами механічної дії на ці об'єкти.

2.3 Маса. Центр мас системи

Розглянемо систему матеріальних точок $B_1, B_2, \ldots, B_n$, маси яких $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Положення точок системи відносно системи координат $Oxyz$ характеризується радіус-векторами $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n$ (рис.2.3).

Масою системи, що складається з n матеріальних точок, називається сума мас точок системи

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k$$

При розв'язку задач динаміки особливе значення має геометрична точка C, яку називають *центром мас системи*.

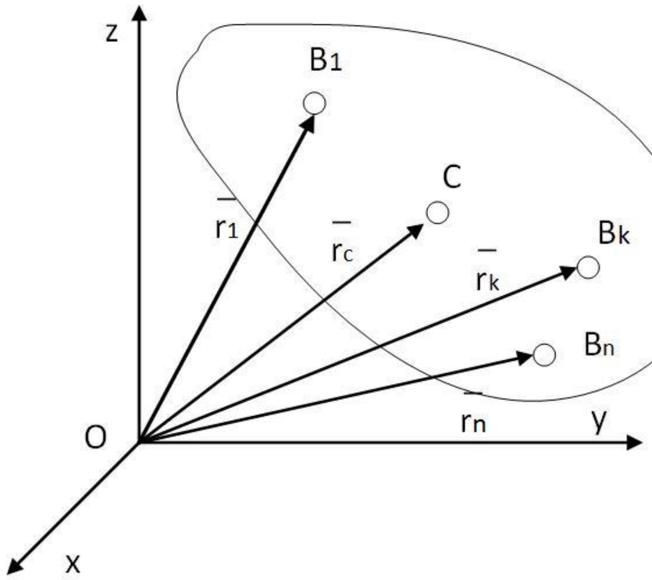


Рис. 2.3

Положення центра мас системи визначається радіус-вектором $\bar{r}_C$:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{r}_k}{M} \tag{2.5}$$

Спроектувавши рівняння (2.5) на осі прямокутної декартової системи координат *Oxyz* одержимо формули для знаходження координат центра мас:

$$X_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{M};\ Y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{M};\ Z_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k z_k}{M} \tag{2.6}$$

Якщо система складається з однієї точки, то її центр мас збігається з цією точкою.

У випадку безперервного розподілу мас (тверде тіло), розбивши його на елементарні частини масою dm знайдемо, що у формулах (2.5), (2.6) сума перетворюється на інтеграл поширений на всю масу:

$$\bar{r}_C = \frac{\int_m \bar{r} dm}{M};\ \ X_C = \frac{\int_m x dm}{M};\ Y_C = \frac{\int_m y dm}{M};\ Z_C = \frac{\int_m z dm}{M}.$$

Положення центра мас *C* характеризує розподіл мас в тілі чи механічній системі.

Якщо система знаходиться біля поверхні Землі, то

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k g \bar{r}_k}{Mg} = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k \bar{r}_k}{P},$$

де $p_k = m_k g$ – вага точки m_k,
$P = Mg$ – вага тіла.

Центр мас системи біля поверхні Землі співпадає з її центром ваги. Поняття центра мас системи більш загальне ніж поняття центра ваги. Центр мас системи існує і в тому випадку, коли система знаходиться поза межами земного тяжіння.

Із формул (2.5) і (2.6) маємо

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{r}_k = M\bar{r}_C;\ \sum_{k=1}^{n} m_k x_k = MX_C;\ \sum_{k=1}^{n} m_k y_k = MY_C; \sum_{k=1}^{n} m_k z_k = MZ_C.$$

Величину $\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{r}_k$ називають *статичним моментом маси системи відносно полюса O*; величини $\sum_{k=1}^{n} m_k x_k$; $\sum_{k=1}^{n} m_k y_k$; $\sum_{k=1}^{n} m_k z_k$ – *статичними моментами маси системи відносно площини yOz, xOz, xOy*.

Приймемо за полюс центр мас системи *C*. Радіус-вектор точки системи масою m_k відносно полюса *C* позначимо $\bar{\rho}_k$. Тоді для статичного моменту маси системи відносно центра мас

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{\rho}_k = M\bar{\rho}_C = 0, \text{ так як } \bar{\rho}_C = 0.$$

Статичний момент маси системи відносно будь-якої площини, що проходить через центр мас системи, теж дорівнює нулю.

2.4 Моменти інерції механічної системи (геометрія мас)

Поряд з центром мас в механіці розглядаються і інші характеристики розподілу мас в системі, які називаються *моментами інерції*.

При обертальному русі матеріальних об'ктів їх моменти інерції відіграють таку ж роль, яку відіграє маса при поступальному русі об'єктів, тобто моменти інерції механічних систем і матеріальних тіл є мірами інертності при їх обертальному русі.

Розглянемо механічну і координатну *Oxyz* системи (рис. 2.4). Позначимо відстань від точки *B* системи (масою m_k) до точки *O* і координатних осей *Ox, Oy*, *Oz* відповідно $\bar{r}_k, a_k, b_k, c_k$.

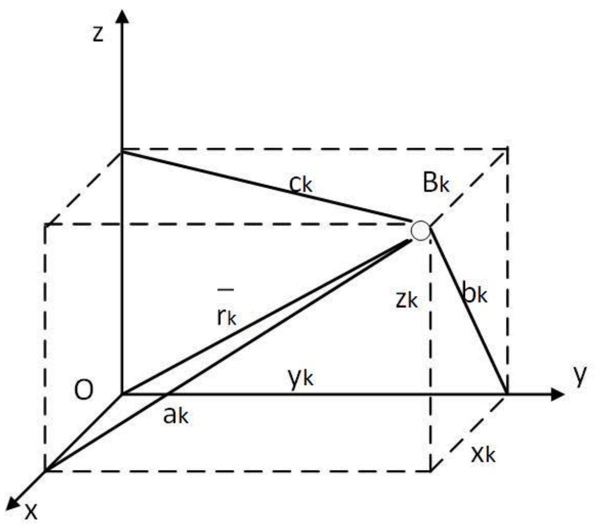


Рис. 2.4

Сума добутків мас точок системи на квадрати їх відстаней від даної точки до точки *O* називається *моментом інерції системи відносно точки O* (або *полярним моментом інерції*):

$$I_O = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) \qquad (2.7)$$

Із визначення слідує, що полярний момент інерції I_O величина невід'ємна, рівна нулю тільки у випадку, коли система складається з однієї матеріальної точки, співпадаючої з точкою *O*.

Моментом інерції механічної системи відносно вісі (або *осьовим моментом інерції*) називається сума добутків мас точок системи на квадрати їх відстаней до певної вісі:

$$\begin{aligned} I_x &= \sum_{k=1}^{n} m_k a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k (y_k^2 + z_k^2) \\ I_y &= \sum_{k=1}^{n} m_k b_k^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + z_k^2) \qquad (2.8) \\ I_z &= \sum_{k=1}^{n} m_k c_k^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2) \end{aligned}$$

З рівнянь (2.8) видно, що осьові моменти інерції величини невід'ємні. Вони дорівнюють нулю лише у випадку, коли всі точки системи розташовані на прямій, яка співпадає з віссю, відносно якої обчислюємо момент інерції.

Момент інерції системи відносно площини *xOy*:

$$I_{xoy} = \sum_{k=1}^{n} m_k z_k^2.$$

Суми $\sum_{k=1}^{n}(m_k x_k y_k)$, $\sum_{k=1}^{n}((m_k y_k z_k)$, $\sum_{k=1}^{n}(m_k z_k x_k)$, що містять добутки координат називаються *відцентровими моментами інерції* (або *добутками інерції*)

$$I_{xy} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k, \;\; I_{yz} = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k z_k, \;\; I_{zx} = \sum_{k=1}^{n} m_k z_k x_k \qquad (2.9)$$

Відцентрові моменти інерції можуть бути величинами додатними, від'ємними і рівними нулю.

Очевидно, що $I_{xy} = I_{yx}$; $I_{yz} = I_{zy}$; $I_{zx} = I_{xz}$.

Додавши осьові моменти інерції, одержимо

$$I_x + I_y + I_z = 2I_O \qquad (2.10)$$

Рівняння (2.10) відображає залежність між полярним та осьовими моментами інерції системи і дає можливість в деяких випадках легко знаходити моменти інерції.

З рівнянь (2.7) – (2.9) випливає, що одиниці вимірювань моментів інерції: $[I]$ = *маса* × *довжина*^{2}. В системі одиниць СІ: $[I]$ = *кг*×*м*^{2}.

При інженерних розрахунках часто користуються поняттям *радіуса інерції*.

Радіусом інерції тіла відносно даної точки O називається лінійна величина ρ_O, яка визначається за формулою

$$\rho_O = \sqrt{\frac{I_O}{M}} \qquad (2.11)$$

де M – маса тіла.

Радіус інерції дорівнює відстані від точки O до тієї точки в якій потрібно розмістити матеріальну точку масою M, щоб її момент інерції відносно точки O був рівний моменту інерції тіла відносно точки O.

Знаючи радіус інерції ρ_O, можна знаходити момент інерції тіла I_O

$$I_O = M\rho_O^2.$$

У випадку безперервного розподілу мас (тверде тіло), розбивши його на елементарні частини масою dm знайдемо, що у формулах (2.7), (2.8) сума перетворюється на інтеграл поширений на всю масу:

$$I_O = \int_M (x^2 + y^2 + z^2)dm \qquad (2.12)$$

$$I_x = \int_M (y^2 + z^2)dm;\ I_y = \int_M (z^2 + x^2)dm;\ \ I_z = \int_M (x^2 + y^2)dm \qquad (2.13)$$

2.5 Обчислення моментів інерції деяких тіл найпростішої форми

Обчислимо моменти інерції однорідного тонкого стержня, однорідного кільця, диска, кулі та пластини.

Момент інерції однорідного тонкого стержня довжиною l і масою M

Знайдемо момент інерції цього стержня відносно осі *Ay*, перпендикулярної до стержня, яка проходить через його кінець *A* (рис. 2.5). Направимо вісь *Ax* вздовж стержня *AB*.

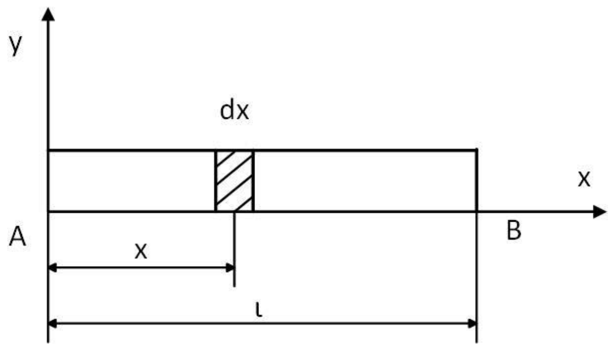


Рис. 2.5

Виділимо на відстані *x* від осі *Ay* елемент стержня *dx*. Тоді елементарна маса

$dm = \gamma dx$, де $\gamma = \frac{M}{l}$ – лінійна густина стержня. Тоді

$$I_y = \int_M x^2 dm = \frac{M}{l}\int_0^l x^2 dx = \frac{Ml^2}{3}.$$

Отже момент інерції стержня відносно осі, що проходить через його кінець

$$I_O = \frac{Ml^2}{3}, \quad (2.14)$$

а радіус інерції стержня відносно осі *Ay*:

$$\rho_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}} = \frac{\sqrt{3}}{3}l.$$

Момент інерції однорідного кільця радіусом R і масою M

Визначимо момент інерції кільця відносно його центра *O* (рис. 2.6).

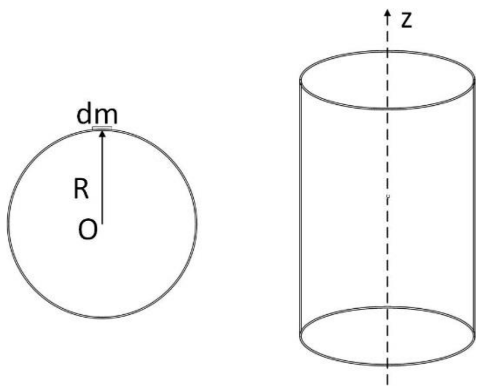


Рис. 2.6

Так як всі точки кільця знаходяться на однаковій відстані від центра *O*, рівній *R*, то $I_O = \int_M R^2 dm = R^2 \int_M dm$, але $\int_M dm = M$, таким чином момент інерції кільця відносно осі, що проходить через його центр

$$I_O = MR^2 \quad (2.15)$$

Очевидно, такий же результат отримаємо і для моменту інерції тонкої циліндричної оболонки масою *M* і радіусом *R* відносно її осі симетрії *Oz*:

$$I_z = MR^2.$$

Момент інерції однорідного диску радіусом R і масою M

Обчислимо момент інерції диску відносно його центру *O*.

Розмістимо початок системи координат в центрі диску і виділимо елементарне кільце масою *dm* товщиною *dr* на відстані *r* від центра диску (рис.2.7), одержимо

$$I_O = \int_M (x^2 + y^2)dm = \int_M r^2 dm.$$

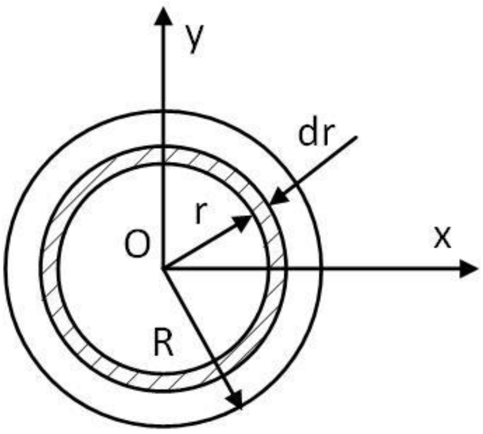


Рис. 2.7

Маса елементарного кільця $dm = \gamma dS$, де $\gamma = \frac{M}{\pi R^2}$ – густина, а dS – елементарна площа рівна $dS = 2\pi r dr$, тоді $dm = \gamma 2\pi r dr$. Момент інерції однорідного диска знайдемо як

$$I_O = \int_O^R r^2 dm = \int_O^R \gamma 2\pi r r^2 dr = 2\pi\gamma \int_O^R r^3 dr = 2\pi\gamma \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^2 \gamma}{2}.$$

Підставивши в одержане рівняння значення густини γ, одержимо, що момент інерції диску відносно осі, яка проходить через його центр

$$I_O = \frac{MR^2}{2} \qquad (2.16)$$

Момент інерції циліндра масою *M*, радіусом основи *R* та висотою *h* відносно його осі симетрії *Oz* можна розглядати як суму моментів інерції паралельних однорідних дисків, отже

$$I_z = \frac{MR^2}{2}.$$

Момент інерції однорідної кулі радіусом R і масою M

Визначимо момент інерції однорідної кулі відносно центра O (рис. 2.8).

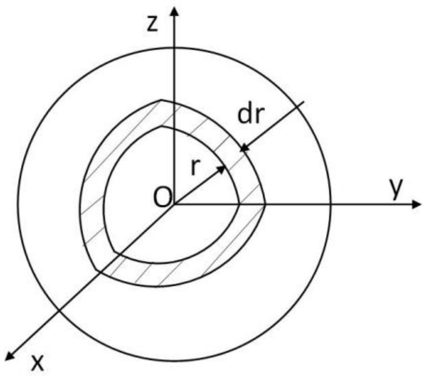


Рис. 2.8

За елемент об'ємом dv приймемо елементарний об'єм розміщений між двома концентричними сферичними поверхнями з центром O, радіусами r і $r+dr$. Для цього елемента $dv = 4\pi r^2 \cdot dr$. Відстань від точок елемента об'єму dv до центра O скрізь одна і та ж рівна r. Тоді

$I_O = \gamma \int_v r^2 dv$ або $I_O = \gamma \int_0^R 4\pi r^4 dr = 4\pi\gamma \frac{R^5}{5}$

Густину γ одержимо поділивши масу кулі на її об'єм: $\gamma = \frac{M}{4/3\pi R^3}$, тоді

$$I_O = 4\pi \frac{M}{4/3\pi R^3} \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{3}{5} M R^2 \qquad (2.17)$$

Якщо O початок системи координат, то $I_x = I_y = I_z$, так як розподіл маси кулі відносно кожної з координатних осей однаковий. Тоді, використовуючи рівняння $2I_O = I_x + I_y + I_z$, знайдемо $2I_O = 3I_x$. Остаточно

$$I_x = \frac{2}{3} I_O = \frac{2}{5} M R^2.$$

Момент інерції прямокутної однорідної тонкої пластини масою M зі сторонами a і b

Обчислимо осьові та відцентрові моменти інерції пластини (рис 2.9). Так як $x=0$, то згідно з формулами (2.13)

$I_x = \int_M (y^2 + z^2) dm;\ I_y = \int_M z^2 dm;\ I_z = \int_M y^2 dm;$

$I_{yz} = \int_M yz dm;\ I_{zx} = 0;\ I_{yx} = 0.$

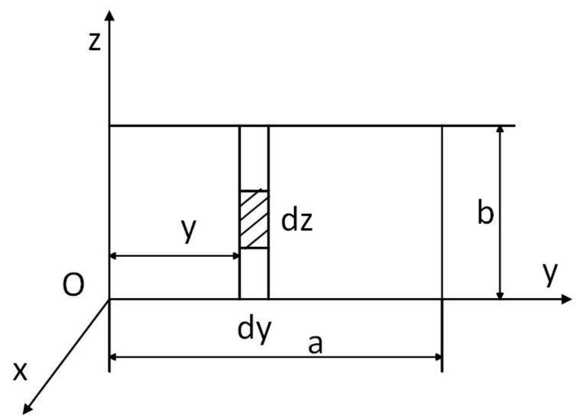


Рис. 2.9

Якщо поверхнева густина γ, то $dm = \gamma dydz = \frac{M}{ab} dydz$, тоді

$$I_y = \frac{M}{ab}\int_0^a dy \int_0^b z^2 dz = \frac{Mb^2}{3}$$
$$I_z = \frac{M}{ab}\int_0^a y^2 dy \int_0^b dz = \frac{Ma^2}{3}$$
$$I_x = I_y + I_z = \frac{M}{3}(a^2 + b^2)$$

$$I_{xy} = \frac{M}{ab}\int_0^a y^2 dy \int_0^b z^2 dz.$$

2.6 Залежність між моментами інерції системи відносно паралельних осей

Теорема: *Момент інерції системи відносно довільної осі дорівнює моменту інерції системи відносно осі, їй паралельної, яка проходить через центр мас системи, плюс добуток маси системи на квадрат відстані між осями.*

Доведення: Уявимо механічну систему масою M. Розмістимо початок системи координат $Oxyz$ в центрі мас C системи. В площині yCz проведемо вісь z^*, паралельну осі Cz. Відстань між осями Cz і z^* позначимо d, а відстані від точки B_k системи до осей Cz і z^* відповідно – a_k і b_k (рис.2.10).

Тоді згідно визначення моменту інерції системи відносно осі

$I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k a_k^2;\quad I_{z^*} = \sum_{k=1}^{n} m_k b_k^2,$

але $a_k^2 = x_k^2 + y_k^2;\quad b_k = (y_k - d)^2 + x_k^2 = x_k^2 + y_k^2 - 2dy_k + d^2$

підставивши ці значення в рівняння моментів інерції одержимо

$$I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2);\ I_{z^*} = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2) + \sum_{k=1}^{n} m_k d^2 - \sum_{k=1}^{n} 2d m_k y_{k,}$$

Остаточно

$$I_{z^*} = I_z + Md^2 \qquad (2.18)$$

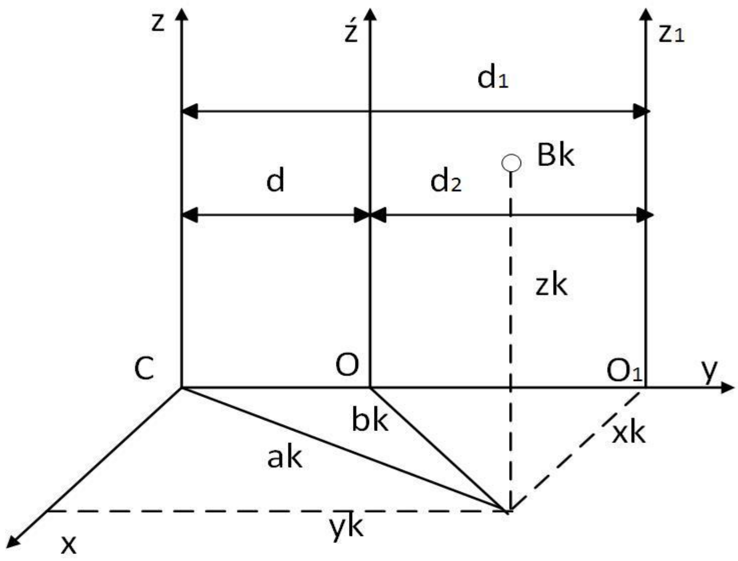


Рис. 2.10

Так як $\sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2) = I_z$, $\sum_{k=1}^{n} m_k d^2 = Md^2$, а $2d \sum_{k=1}^{n} m_k y_k = 0$.

В дійсності $\sum_{k=1}^{n} m_k y_k = My_C$, але $y_C = 0$, так як вісь *Cz* проходить через центр мас системи.

Формула (2.18), очевидно, справедлива також і для твердого тіла. З цієї формули видно, що $I_{z^*} > I_z$. Таким чином, момент інерції системи відносно осі, яка проходить через центр мас, менший за момент інерції системи відносно будь-якої іншої їй паралельної осі.

Якщо взяти вісь O_1z_1, паралельну *Cz* (рис.2.9), то відповідно до (2.18) одержимо

$$I_{O_1 z_1} = I_z + Md_1^2 \qquad (2.19)$$

де d_1 – відстань між паралельними осями *Cz* і O_1z_1.

Виключивши з рівнянь (2.18) і (2.19) момент інерції I_z, одержимо залежність моментів інерції відносно двох паралельних осей, які не проходять через центр мас:

$$I_{O_1 z_1} = I_{z^*} + M(d^2 - d_1^2) = I_{z^*} + Md_2^2.$$

2.7 Головні осі інерції симетричних тіл

Для знаходження головних осей інерції симетричних тіл, розглянемо дві теореми.

Теорема 1: *Вісь матеріальної симетрії тіла є головною віссю інерції тіла для всіх його точок.*

Під віссю матеріальної симетрії тіла розуміємо вісь відносно якої маси елементів розташовані симетрично. Вісь матеріальної симетрії тіла є і віссю геометричної симетрії однорідного тіла. Вісь *Oz* приймемо за вісь матеріальної симетрії тіла. Початок системи координат *O* будь-яка точка цієї осі (рис. 2.11).

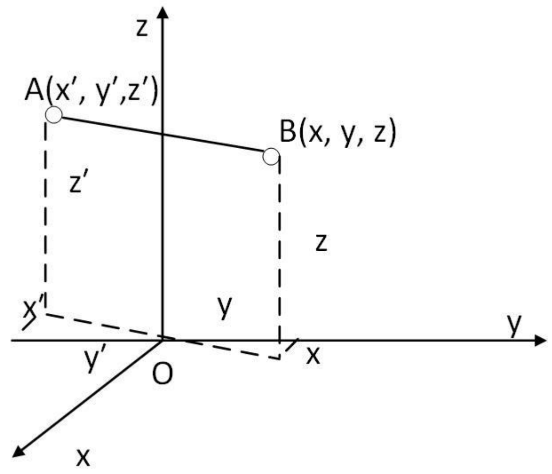


Рис. 2.11

Виберемо точку *B* з координатами x, y, z масою m. Точка *A* з координатами x^*, y^*, z^* масою m, симетрично розташована з точкою *B* відносно осі *Oz*, також належить тілу, при цьому $x^* = -x$, $y^* = -y$, $z^* = z$.

Для цих точок $\sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k = mxz + mx^* z^* = mxz - mxz = 0$.

Маса тіла складається з мас пар таких точок, отже для всього тіла $\sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k = 0$ або $I_{xy} = 0$. Аналогічно можна довести, що $I_{yz} = 0$.

Два відцентрових моменти інерції тіла, що містять координату z, дорівнюють нулю, а отже вісь *Oz* – головна вісь інерції тіла для точки *O*. Точка *O* – будь-яка точка осі *Oz*, і теорема, таким чином, доведена.

Тут $X_C = \frac{\int_M xdm}{M} = 0$; $Y_C = \frac{\int_M ydm}{M} = 0$, тому вісь *Oz* є головною центральною віссю інерції.

Теорема 2: *Якщо тіло має площину матеріальної симетрії, яка проходить через дану точку, то одна з головних осей інерції тіла для цієї точки перпендикулярна до площини симетрії.*

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 1.

2.8 Властивості головних центральних осей інерції тіла

Розмістимо початок системи координат в центрі мас тіла *С*. Осі координат направимо вздовж головних центральних осей інерції тіла. Тоді відцентрові моменти інерції тіла відносно цих осей дорівнюватимуть нулю: $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0.$

На одній з осей, наприклад осі *Oz*, виберемо довільну точку *O*. Цю точку приймемо за початок нової системи координат $O_1x_1y_1z_1$. Вісь O_1x_1 направимо паралельно осі *Cx*, вісь O_1y_1 – осі *Cy*, а вісь O_1z_1 – осі *Cz* (рис 2.12).

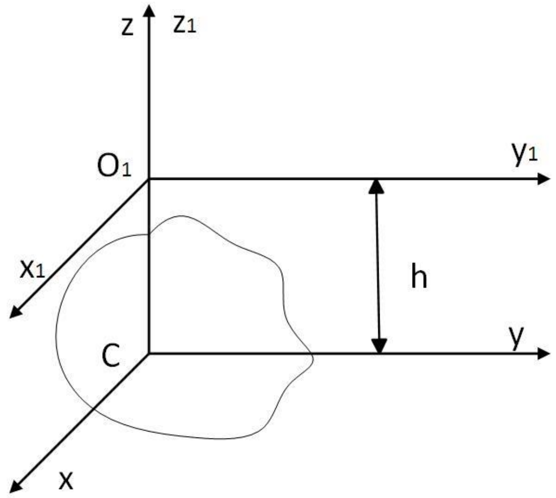


Рис. 2.12

Позначимо відстань *CO₁* між початками систем координат *h*, тоді між координатами точок в системі *Cxyz* і в системі $O_1x_1y_1z_1$ існує залежність

$$x_1 = x;\ \ y_1 = y;\ z_1 = z - h\ (z = z_1 + h).$$

Знайдемо відцентрові моменти інерції відносно осей координат O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1:

$$I_{x_1y_1} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_{1k} y_{1k} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k = I_{xy} = 0$$

$$I_{x_1z_1} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_{1k} z_{1k} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k (z_k - h) = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k - h\sum_{k=1}^{n} m_k x_k = 0,$$

так як $\sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k = I_{xz} = 0;$ $\sum_{k=1}^{n} m_k x_k = MX_C = 0$, тому що $X_C = 0.$

Аналогічно, відцентровий момент інерції відносно осей O_1y_1, O_1z_1: $I_{y_1z_1} = 0.$

Оскільки відцентрові моменти $I_{x_1y_1} = I_{x_1z_1} = I_{y_1z_1} = 0$, то осі O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 – головні осі інерції тіла для точки O_1.

Головні осі інерції тіла в точці, взятій на будь-якій головній центральній осі інерції, паралельні головним центральним осям інерції.

Для точки O_1 на осі *Cz* головна центральна вісь інерції *Cz* і головна вісь інерції тіла O_1z_1 співпадають, при цьому точка O_1 – будь-яка точка осі *Cz*. Тому головна центральна вісь інерції тіла є головною віссю інерції тіла у всіх своїх точках.

ОСНОВНІ (ЗАГАЛЬНІ) ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ

ЛЕКЦІЯ 3. ТЕОРЕМА ПРО РУХ ЦЕНТРА МАС МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

Теорема: *Центр мас системи матеріальних точок рухається як вільна матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи і на яку діють всі зовнішні сили, прикладені до даної системи, тобто*

$$M\bar{a}_C = \bar{R}^e \tag{3.1}$$

Доведення: Розглянемо систему з n матеріальних точок. Положення центра мас цієї системи визначається радіус-вектором $\bar{r}_C$, який знаходимо з рівняння:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{r}_k = M\bar{r}_C.$$

Диференціюємо цю рівність двічі за часом:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2} = M\frac{d^2\bar{r}_C}{dt^2},$$

де $\frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2} = \bar{a}_k$ – прискорення довільної точки системи;

$\frac{d^2\bar{r}_C}{dt^2} = \bar{a}_C$ – прискорення центра мас системи.

Тоді $\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{a}_k = M\,\bar{a}_C$. За другим законом Ньютона $m_k\bar{a}_k = \bar{F}_k$, а $\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k = \bar{R}^e$. Таким чином

$$M\bar{a}_C = \bar{R}^e.$$

Проектуючи це рівняння на осі прямокутної декартової системи координат, матимемо:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e\,;\; M\frac{d^2y}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e\,;\; M\frac{d^2z}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}^e \tag{3.2}$$

З цих рівнянь видно, що лише зовнішні сили визначають закон руху центра мас системи. Та це не означає, що внутрішні сили ніяк не впливають на рух центра мас. Якщо механічна система змінна і на неї накладено зовнішні в’язі, то активні внутрішні сили можуть змінювати реакції в’язей і, таким чином, через в’язі впливати на головний вектор зовнішніх сил, діючих на систему, а отже і на рух центра мас системи. А от на рух центра мас незмінної та ізольованої системи внутрішні сили не впливають.

3.1 Закон збереження руху центра мас

З теореми про рух центру мас можна одержати наступні наслідки.

1. *Якщо, під час руху механічної системи, головний вектор зовнішніх сил, що діють на систему дорівнює нулю* $\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^e = \bar{R}^e = 0$, то $M\bar{a}_C = M\frac{d\bar{v}_C}{dt} = 0$. Звідси $\bar{v}_C = const$.

Отже, якщо головний вектор зовнішніх сил, діючих на систему, дорівнює нуль-вектору, то центр мас системи знаходиться в спокої, або рухається прямолінійно і рівномірно.

2. *Якщо сума проекцій всіх діючих зовнішніх сил на яку-небудь вісь рівна нулю, то проекція швидкості центра мас системи на цю вісь величина стала.*

Зокрема, якщо в початковий момент $v_{C_x} = 0$, то і в будь-яку іншу мить $v_{C_x} = 0$, тобто центр мас системи в цьому випадку вздовж осі *x* переміщуватись не буде ($x_C = const$).

Закон збереження руху центра мас дозволяє знаючи переміщення одної частини системи знайти переміщення іншої її частини.

ЛЕКЦІЯ 4.ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ КІЛЬКОСТІ РУХУ

4.1 Кількість руху точки і системи

Кількістю руху матеріальної точки називають вектор $\bar{q}$ рівний добутку маси точки m на її швидкість $\bar{v}$, тобто

$$\bar{q} = m\bar{v} \tag{4.1}$$

Кількість руху точки у фізиці часто називають імпульсом точки. Напрямок вектора $m\bar{v}$ співпадає з напрямком вектора швидкості точки, тобто по дотичній до траєкторії точки. Розмірність кількості руху в системі СІ *кг·м/с* або *Н·с*.

Якщо розглядаємо механічну систему з *n* точок, то *кількість руху цієї системи $\bar{Q}$ дорівнює сумі кількостей руху всіх точок, що входять в систему, тобто*

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k \bar{v}_k \tag{4.2}$$

Користуючись цим визначенням знайдемо рівняння, за допомогою якого значно легше обчислювати величину $\bar{Q}$.

З рівняння (2.5) маємо $\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{r}_k = M\bar{r}_C$. Взявши від обох частин похідну за часом, матимемо

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = M \frac{d\bar{r}_C}{dt} \text{ або } \sum_{k=1}^{n} m_k \bar{v}_k = M\bar{v}_C.$$

Звідси знаходимо, що

$$\bar{Q} = M\bar{v}_C \,, \tag{4.3}$$

тобто, *кількість руху системи дорівнює добутку маси всієї системи на швидкість її центра мас.*

З формули (4.3) видно, що якщо тіло (чи система) рухається так, що центр мас залишається нерухомим, то кількість руху тіла рівна нулю. Наприклад, кількість руху тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, що проходить через центр мас, буде рівною нулю. Отже, кількість руху можна розглядати як характеристику поступального руху системи (тіла).

4.2 Елементарний і повний імпульс сили

Імпульс сили – векторна міра механічної дії на матеріальну точку з боку інших матеріальних об'єктів за деякий проміжок часу.

Спочатку введемо поняття про елементарний імпульс, тобто про імпульс за елементарний проміжок часу dt.

Елементарним імпульсом сили називається векторна величина $d\bar{S}$, рівна добутку сили $\bar{F}$ на елементарний проміжок часу dt:

$$d\bar{S}=\bar{F}dt \tag{4.4}$$

Направлений елементарний імпульс сили вздовж лінії дії сили.

Імпульс $d\bar{S}$ будь-якої сили $\bar{F}$ за скінчений проміжок часу t_1 обчислюється як границя інтегральної суми відповідних елементарних імпульсів, тобто

$$\bar{S}=\int_0^{t_1} \bar{F}dt \tag{4.5}$$

Імпульс сили за деякий проміжок часу t_1 дорівнює визначеному інтегралу від елементарного імпульсу, взятому в межах від 0 до t_1.

Зокрема, якщо сила $\bar{F}$ постійна і за модулем і за напрямком ($\bar{F} = const$), то $\bar{S} = \bar{F}t_1$. Причому і модуль $S = Ft_1$.

В загальному випадку модуль імпульсу сили може бути обчислений за його проекціями на осі координат:

$$S_x = \int_0^{t_1} F_x dt, \quad S_y = \int_0^{t_1} F_y dt, \quad S_z = \int_0^{t_1} F_z dt. \tag{4.6}$$

Одиницею вимірювання в системі СІ імпульсу сили є *кг·м/с* (або *Н·с*).

4.3 Теорема про зміну кількості руху точки

Теорема про зміну кількості руху встановлює взаємозв'язок між векторною мірою механічного руху даного матеріального об'єкта і векторною мірою дії на нього з боку інших матеріальних об'єктів.

Теорема:

похідна за часом від кількості руху точки дорівнює діючій на точку силі.

Доказ: Так як маса точки постійна, а її прискорення $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$, то рівняння $m\bar{a} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k$, яке виражає основний закон динаміки, можна представити у вигляді

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \tag{4.7}$$

Це рівняння відображає теорему про зміну кількості руху точки в диференціальній формі. В проекціях на осі координат:

$$\frac{d(mv_x)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}; \quad \frac{d(mv_y)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}; \quad \frac{d(mv_z)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}.$$

Якщо обидві частини рівняння (4.7) помножити на dt, то одержимо іншу форму цієї ж теореми – теорему імпульсів в диференціальній формі

$$d(m\bar{v}) = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k dt \tag{4.8}$$

Диференціал від кількості руху точки дорівнює сумі елементарних імпульсів сил, діючих на точку.

Або в проекціях на осі координат

$$d(mv_x) = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} dt; \quad d(mv_y) = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} dt; \quad d(mv_z) = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} dt.$$

Якщо в рухома точка в момент часу *t = 0* має швидкість $\bar{v}_0$, а в момент часу t_1 – швидкість $\bar{v}_1$, то інтегруючи рівняння (4.8) матимемо

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{t_1} \bar{F}_k dt.$$

Інтеграл справа являє собою імпульси діючих сил. Тому остаточно:

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \sum_{k=1}^{n} \bar{S}_k \tag{4.9}$$

Рівняння (4.9) виражає теорему про зміні кількості руху точки а інтегральній формі:

зміна кількості руху точки за деякий проміжок часу дорівнює сумі імпульсів всіх діючих на точку сил за той же проміжок часу.

При розв'язку задач замість векторного рівняння (4.9) користуємося рівняннями в проекціях на осі координат:

$$\begin{aligned} mv_{1x} - mv_{0x} &= \sum_{k=1}^{n} S_{kx}; \\ mv_{1y} - mv_{0y} &= \sum_{k=1}^{n} S_{ky}; \\ mv_{1z} - mv_{0z} &= \sum_{k=1}^{n} S_{kz}. \end{aligned} \qquad (4.10)$$

У випадку прямолінійного руху вздовж осі *Ox*, теорема виражається першим з цих рівнянь.

Рівняння (4.9) і (4.10) можна використовувати для розв'язку задач динаміки, коли в задачі до числа даних та шуканих величин входять: діючі сили, *час руху* точки та її початкова і кінцева швидкості (тобто величини F, t, $\bar{v}_0$, $\bar{v}_1$) причому сили мають бути постійними або залежними тільки від часу.

Приклад 4.1

Вантажу масою m, який лежить на горизонтальній поверхні, надають (поштовхом) початкову швидкість $\bar{v}_0$. Наступний рух вантажу гальмується постійною силою $\bar{F}$. Визначити, через який час вантаж зупиниться.

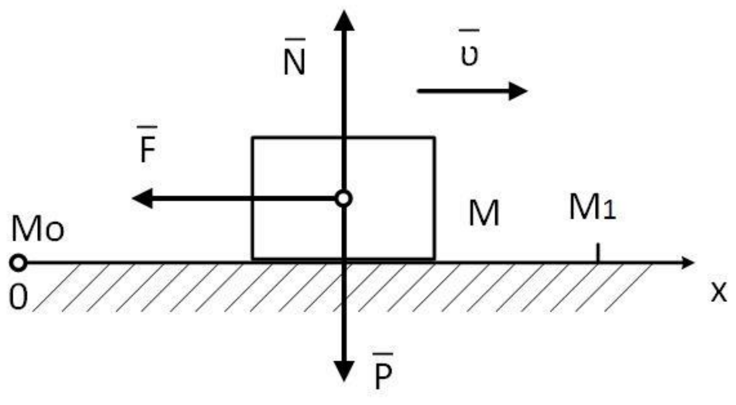


Рис. 4.1

Розв'язок: За даними задачі видно, що для визначення часу руху можна скористатись доведеною теоремою. Зобразимо вантаж в довільному положенні (рис. 4.1). На нього діють: сила тяжіння $\bar{P}$, реакція опорної поверхні $\bar{N}$ і гальмуюча сила $\bar{F}$. Направивши вісь *Ox* в бік руху, складаємо перше з рівнянь (4.10)

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \sum_{k=1}^{n} S_{kx}. \qquad (a)$$

В даному випадку $v_{1x}= 0$ (v_1 – швидкість в момент зупинки), а $v_{0x} = v_0$. З діючих сил проекцію на вісь *Ox* дає тільки сила $\bar{F}$. Так як вона постійна, то $S_x = F_x t_1 = -Ft_1$, де t_1 – час гальмування. Підставляючи ці дані в рівняння (а), одержуємо $-mv_0 = -Ft_1$, звідки час гальмування

$$t_1 = \frac{mv_0}{F}\,. \tag{б}$$

Отже, час гальмування зростає пропорційно початковій швидкості.

4.4 Теорема про зміну кількості руху системи

Теорема:
похідна за часом від кількості руху системи рівна геометричній сумі всіх діючих на систему зовнішніх сил.

Доказ: На кожну точку механічної системи діють зовнішні $\bar{F}_k^e$та внутрішні $\bar{F}_k^i$ сили. Тоді, записавши для кожної точки системи рівняння (4.7), матимемо:

$$\frac{d(m_k\bar{v}_k)}{dt} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i$$

Додавши ці рівняння та враховуючи, що сума похідних дорівнює похідній від суми, одержимо:

$$\frac{d\sum_{k=1}^{n}(m_k\bar{v}_k)}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k^e + \sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k^i\,.$$

Так як за властивостями внутрішніх сил і визначенням кількості руху системи: $\sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k^e = \bar{R}^e$; $\sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k^i = 0$; $d\sum_{k=1}^{n}(m_k\bar{v}_k) = \bar{Q}$, то

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^e \tag{4.11}$$

Або в проекціях на осі координат

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_x^e; \quad \frac{dQ_y}{dt} = R_y^e; \quad \frac{dQ_z}{dt} = R_z^e. \tag{4.12}$$

Помноживши обидві частини рівняння (4.11) на *dt*, одержимо

$$d\bar{Q} = \bar{R}^e dt$$

Інтегруючи це рівняння за часом, що змінюється від *0* до t_1, одержимо теорему імпульсів для системи в інтегральній формі:

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum_{k=1}^{n}\bar{S}_k^e, \tag{4.13}$$

де $\bar{Q}_0$ – кількість руху системи в момент часу $t = 0$;
$\bar{Q}$ – кількість руху системи в момент часу t_1.
$\bar{S}_k^e$ – імпульс зовнішньої сили, діючої на точку k механічної системи.

Зміна кількості руху механічної системи за деякий проміжок часу дорівнює векторній сумі імпульсів зовнішніх сил, діючих на систему за той же час.

При розв'язку задач замість векторного рівняння (4.13) користуємося рівняннями в проекціях на осі координат:

$$Q_x - Q_{0x} = \sum_{k=1}^{n} S_{kx}^e\ ;\ \ Q_y - Q_{0y} = \sum_{k=1}^{n} S_{ky}^e;\ \ \ Q_z - Q_{0z} = \sum_{k=1}^{n} S_{kz}^e.$$

4.5 Закон збереження кількості руху

Закон збереження кількості руху одержуємо як окремі випадки теореми про зміну кількості руху системи в залежності від особливості зовнішніх сил, діючих на дану систему. Внутрішні сили при цьому можуть бути якими завгодно, так як вони не впливають на зміну кількості руху системи.

1. Нехай векторна сума зовнішніх сил, діючих на систему, дорівнює нулю, тобто $\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^e = \bar{R}^e = 0$, то з рівняння (4.11) слідує, що $\bar{Q} = cons$.

   Якщо сума усіх зовнішніх сил, діючих на систему, рівна нулю, то вектор кількості руху системи буде сталим за модулем і напрямком.

2. Нехай зовнішні сили, діючі на систему, такі, що сума їх проекцій на яку-небудь вісь (наприклад, *Ox*) рівна нулю: $\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e = 0$, то з рівняння (4.12) слідує, що $Q_x = cons$.

   Якщо сума проекцій усіх діючих зовнішніх сил на яку-небудь вісь дорівнює нулю, то проекція кількості руху системи на цю вісь величина стала.

Ці результати і виражають закон збереження кількості руху системи. З них слідує, що внутрішні сили змінити кількість руху системи не можуть.

Закон збереження кількості руху зручно застосовувати в тих випадках, коли за зміною швидкості однієї частини системи потрібно знайти швидкість іншої її частини. Зокрема, цей закон широко використовується в теорії удару.

Приклад 4.2

Куля, масою m, яка летить горизонтально зі швидкістю $\bar{u}$, влучає в встановлений на візку ящик з піском (рис. 4.2). З якою швидкість почне рухатись візок після удару, якщо маса візка разом з ящиком рівна *M* ?

Розв'язок: Розглядатимемо кулю і візок як одну систему. Це дозволить при розв'язку задачі виключити сили, які виникають при ударі кулі по ящику. Сума проекцій прикладених до системи зовнішніх сил на горизонтальну вісь *Ox* рівна нулю. Отже, $Q_x = cons$ або $Q_{1x} = Q_{0x}$, де $\bar{Q}_0$ – кількість руху системи до удару; $\bar{Q}_1$ – після удару. Так як до удару візок був нерухомим, то $Q_{0x} = mu$.

Після удару візок і куля рухаються з загальною швидкістю, яку позначимо через v.Тоді $Q_{1x} = (m + M)v$.

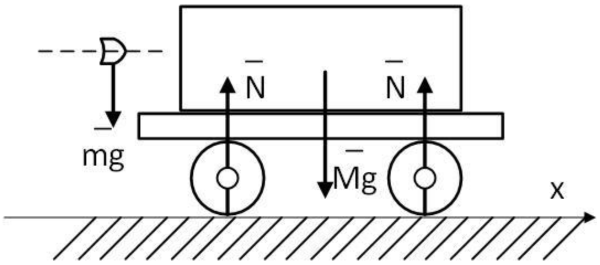


Рис 4.2

Прирівнявши праві частини виразів Q_{1x} і Q_{0x}, знайдемо $v = \frac{mu}{(m+M)}$.

ЛЕКЦІЯ 5.ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ МОМЕНТУ КІЛЬКОСТІ РУХУ

5.1Момент кількості руху точки і системи

В деяких задачах в якості динамічної характеристики руху точки замість вектора кількості руху $m\bar{v}$ розглядають його момент відносно деякого центра чи осі. Ці моменти визначаються так, як і моменти сили.

Моментом кількості руху точки відносно деякого центра O називається векторна величина $\bar{L}_O$, яка визначається рівністю

$$\bar{L}_O = \bar{m}_O(m\bar{v}) = \bar{r} \times m\bar{v}\,, \tag{5.1}$$

де $\bar{r}$ – радіус-вектор рухомої точки, проведений з центра *O* (рис.5.1).

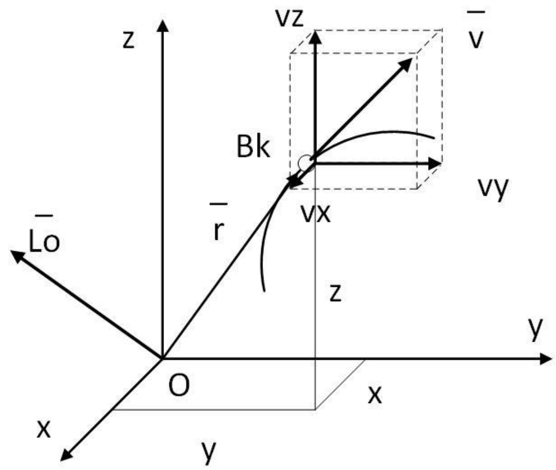


Рис. 5.1

Вектор $\bar{L}_O$ прикладений в точці O, відносно якої він обчислюється, і направлений перпендикулярно площині, що проходить через $\bar{L}_O$ і центр O.

Розмірність кінетичного моменту точки в системі СІ – *кг·м²/с* (або *Н·м·с*).

Проектуючи обидві частини рівняння (5.1) на прямокутні декартові осі координат, одержимо аналітичні рівняння для знаходження моментів кількості руху точки відносно цих осей, якщо точка O початок системи координат:

$$L_x = mom_x(m\bar{v}) = m(yv_z - zv_y) = m(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt})$$

$$L_y = mom_y(m\bar{v}) = m(zv_x - xv_z) = m(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}) \qquad (5.2)$$

$$L_z = mom_z(m\bar{v}) = m(xv_y - yv_x) = m(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}).$$

Головним моментом кількості руху (кінетичним моментом) механічної системи відносно даного центра називається вектор $\bar{K}_O$, рівний сумі моментів кількості руху всіх точок системи відносно цього центра, тобто

$$\bar{K}_O = \sum_{k=1}^{n} \bar{L}_{Ok} = \sum_{k=1}^{n}(\bar{r}_k \times m_k\bar{v}_k) = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_O(m_k\bar{v}_k) \qquad (5.3)$$

де $\bar{r}_k$ – радіус-вектор точки B_k;

$m_k\bar{v}_k$ – кількість руху точки B_k.

Якщо спроектувати обидві частини рівняння (5.3) на прямокутні декартові осі координат, то одержимо проекції кінетичного моменту на осі або кінетичні моменти відносно осей координат:

$$K_x = \sum_{k=1}^{n} mom_x(m_k\bar{v}_k) = \sum_{k=1}^{n} m_k(y_k\frac{dz}{dt} - z_k\frac{dy}{dt})$$

$$K_y = \sum_{k=1}^{n} mom_y(m_k\bar{v}_k) = \sum_{k=1}^{n} m_k(z_k\frac{dx}{dt} - x_k\frac{dz}{dt}) \qquad (5.4)$$

$$K_z = \sum_{k=1}^{n} mom_z(m_k\bar{v}_k) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k\frac{dy}{dt} - y_k\frac{dx}{dt}).$$

5.2 Кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомої осі обертання

Розглянемо тіло, яке обертається навколо нерухомої осі Oz з кутовою швидкістю ω (рис 5.2).

У будь-якої точки тіла, яка знаходиться на відстані h_k від осі обертання, швидкість $v_k = \omega h_k$. Отже, для цієї точки момент кількості руху відносно осі *Oz*:

$$m_z(m_k\bar{v}_k) = m_k v_k h_k = m_k h_k^2 \omega$$

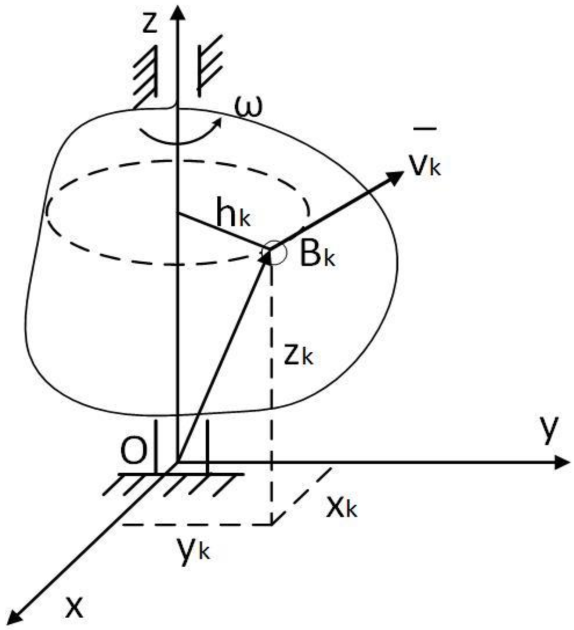


Рис. 5.2

Тоді, для всього тіла, виносячи спільний множник ω за дужки, одержимо

$$K_z = \sum_{k=1}^{n} mom_z(m_k\bar{v}_k) = (\sum_{k=1}^{n} m_k h_k^2)\omega.$$

Величина в дужках являє собою момент інерції тіла відносно осі *Oz*. Остаточно знаходимо

$$K_z = I_z\omega. \quad (5.5)$$

Кінетичний момент тіла, яке обертається, відносно осі обертання дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно цієї осі на кутову швидкість тіла.

Якщо система складається з кількох тіл, які обертаються навколо однієї осі, то

$$K_z = I_{z1}\omega_1 + I_{z2}\omega_2 + \cdots + I_{zn}\omega_n. \quad (5.6)$$

5.3 Теорема про зміну моменту кількості руху точки

Теорема:
похідна за часом від моменту кількості руху точки відносно будь-якого нерухомого центру O дорівнює моменту рівнодіючої сил, діючих на точку, відносно того ж центру:

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \bar{m}_O(\bar{F}) \tag{5.7}$$

Доказ: Момент кількості руху точки визначається рівністю (5.1):

$$\bar{m}_O(m\bar{v}) = \bar{r} \times m\bar{v}.$$

Диференціюємо цю рівність за часом. Одержимо:

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v}\right) + \left(\bar{r} \times m\frac{d\bar{v}}{dt}\right) = (\bar{v} \times m\bar{v}) + (\bar{r} \times m\bar{a}).$$

Але $\bar{v} \times m\bar{v} = 0$ як векторний добуток двох паралельних векторів, а $m\bar{a} = \bar{F}$, де при дії кількох сил $\bar{F} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k$. Отже,

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \bar{r} \times \bar{F} \quad \text{або} \quad \frac{d\bar{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}[\bar{m}_O(m\bar{v})] = \bar{m}_O(\bar{F}).$$

Порівнюючи рівняння (4.7) і (5.7), бачимо, що моменти векторів $m\bar{v}$ і $\bar{F}$ зв'язані такою ж залежністю, якою зв'язані самі вектори $m\bar{v}$ і $\bar{F}$.

Якщо спроектувати обидві частини рівняння (5.7) на яку-небудь вісь *Oz*, яка проходить через центр *O*, одержимо

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}[m_z(m\bar{v})] = m_z(\bar{F}). \tag{5.8}$$

Ця рівність виражає *теорему про зміну моменту кількості руху точки відносно осі.*

З рівняння (5.7) слідує, що якщо $\bar{m}_O(\bar{F}) = 0$, то $\bar{m}_O(m\bar{v}) = const$, тобто, якщо *момент діючої сили відносно деякого центра дорівнює нулю, то момент кількості руху точки відносно цього центра величина стала.* Такий результат має місце в практично важливому випадку руху під дією центральної сили.

Приклад 5.1

Кулька *M* прив'язана до нитки *MBA*, частина *BA* якої протягнута через вертикальну трубку (рис. 5.3). В момент, коли кулька знаходиться на відстані h_O від осі *z* трубки, їй надають початкову швидкість $\bar{v}_O$, перпендикулярну площині *MBA*. Одночасно нитку починають повільно втягувати в трубку. Знайти, яку швидкість $\bar{v}_1$ матиме кулька, коли її відстань від осі *z* стане рівною h_1.

Розв'язок: На кульку діють сила тяжіння $\bar{P}$ і реакція нитки $\bar{T}$.

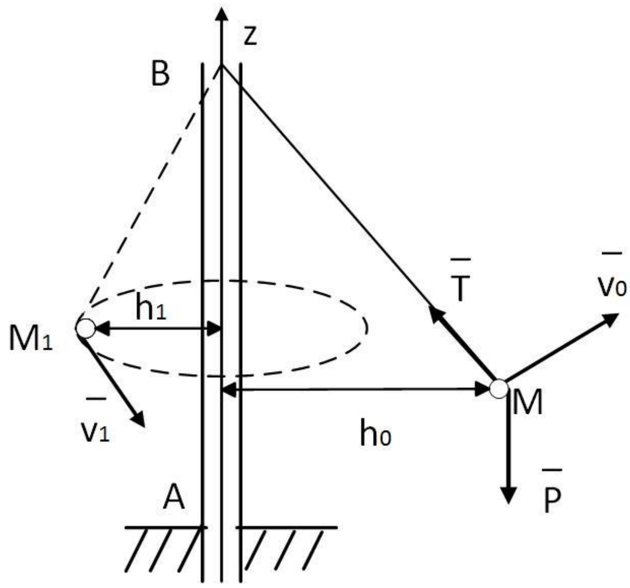


Рис. 5.3

Моменти цих сил відносно осі z рівні нулю, так як сила $\bar{P}$ паралельна осі z, а сила $\bar{T}$ цю вісь перетинає. Тоді згідно рівняння (5.8) $\frac{d}{dt}[m_z(m\bar{v})] = 0$, звідки $m_z(m\bar{v}) = mvh = const$. Так як маса m постійна, то під час руху кульки $v_0 h_0 = v_1 h_1$. Отже

$$v_1 = \frac{v_0 h_0}{h_1}.$$

При наближенні кульки до осі її швидкість зростає.

5.4 Теорема про зміну головного моменту кількості руху системи (теорема моментів)

Теорема про зміну моменту кількості руху, доведена для однієї матеріальної точки, буде справедливою для кожної з точок системи. Отже, якщо розглянути точку системи масою m_k, яка має швидкість $\bar{v}_k$, то для неї буде

$$\frac{d}{dt}[\bar{m}_O(m_k\bar{v}_k)] = \bar{m}_O(\bar{F}_k^e) + \bar{m}_O(\bar{F}_k^i),$$

де $\bar{F}_k^e$ і $\bar{F}_k^i$ – рівнодіючі всіх зовнішніх і внутрішніх сил, діючих на дану точку.

Склавши такі рівняння для всіх точок системи, та додавши їх, одержимо

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}[\bar{m}_O(m_k\bar{v}_k)] = \sum_{k=1}^{n}\bar{m}_O(\bar{F}_k^e) + \sum_{k=1}^{n}\bar{m}_O(\bar{F}_k^i).$$

Але остання сума за властивістю внутрішніх сил системи рівна нулю. Тоді, враховуючи рівність (5.3), остаточно знайдемо

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_O(\bar{F}_k^e). \qquad (5.9)$$

Одержане рівняння виражає *теорему моментів* для системи:

Похідна за часом від головного моменту кількості руху системи відносно деякого нерухомого центра рівна сумі моментів всіх зовнішніх сил системи відносно того ж центра.

Проектуючи обидві частини рівняння (5.9) на нерухомі осі *Oxyz*, одержимо

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_x(\bar{F}_k^e), \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_y(\bar{F}_k^e), \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\bar{F}_k^e). \qquad (5.10)$$

Рівняння (5.10) виражають теорему моментів відносно будь-якої нерухомої осі.

Доведену теорему широко використовують при вивченні обертального руху тіл для розв'язку задач динаміки, коли в задачі до числа даних та шуканих величин входять: діючі сили, *час руху* тіл, початкова і кінцева швидкості (тобто величини F, t, ω_0, ω_1) причому сили мають бути постійними або залежними тільки від часу.

Приклад 5.2

На барабан вагою *P* і радіусом *r* (рис. 5.4) намотана нитка з вантажем вагою *Q* на кінці. Нехтуючи вагою нитки, визначити кутове прискорення барабана при вертикальному переміщенні вантажа, якщо радіус інерції барабана відносно його осі рівний ρ і на барабан діє постійний момент опору $M_{\text{тер}}$.

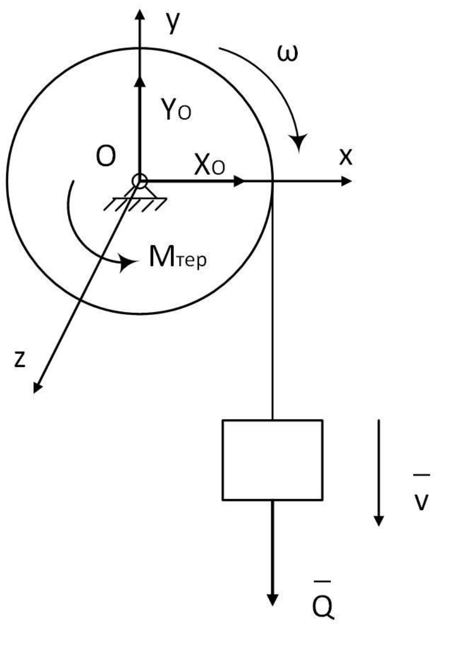


Рис. 5.4

Розв'язок: Розглянемо систему барабан – вантаж; тоді невідомі сили натягу нитки будуть внутрішніми. Скористаємось теоремою моментів відносно осі *Oz*:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\bar{F}_k^e). \qquad \text{(a)}$$

Для даної системи $K_z = K_z^{\text{вант}} + K_z^{\text{бар}}$. Вантаж рухається поступально і його швидкість $v = \omega r$. Барабан обертається навколо нерухомої осі *Oz* і для нього $I_z = (P/g)\rho^2$. Тоді

$$K_z^{\text{вант}} = \left(Q/g\right) vr, \quad K_z^{\text{бар}} = \left(P/g\right)\rho^2\omega \quad \text{і} \quad K_z = (Qr^2 + P\rho^2)\omega/g.$$

Для моментів сил одержимо $\sum_{k=1}^{n} m_O(\bar{F}_k^e) = Qr - M_{\text{тер}}$.

Підставляючи всі ці величини в рівняння (а), знайдемо

$$\frac{Qr^2 + P\rho^2}{g}\frac{d\omega}{dt} = Qr - M_{\text{тер}}$$

звідси

$$\varepsilon = \frac{\left(Qr - M_{\text{тер}}\right)g}{Qr^2 + P\rho^2}$$

5.5 Закон збереження головного моменту кількості руху

З теореми моментів можна одержати наступні наслідки.

1. Нехай сума моментів відносно центра *O* усіх зовнішніх сил, діючих на систему, дорівнює нулю

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{m}_O(\bar{F}_k^e) = 0.$$

Тоді з рівняння (5.9) слідує, що при цьому $\bar{K}_O = const$.

Отже,

якщо сума моментів відносно даного центра усіх прикладених до системи зовнішніх сил дорівнює нулю, то головний момент кількості руху системи відносно цього центра буде чисельно і за напрямком сталий.

2. Нехай зовнішні сили, діючі на систему, такі, що сума їх моментів відносно деякої нерухомої осі *Oz* дорівнює нулю

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(\bar{F}_k^e) = 0.$$

Тоді з рівняння (5.10) слідує, що при цьому $K_z = const$.

Таким чином,

якщо сума моментів усіх діючих на систему зовнішніх сил відносно будь-якої осі дорівнює нулю, то головний момент кількості руху системи відносно цієї осі буде величиною сталою.

Ці результати виражають *закон збереження головного моменту кількості руху системи.* З них слідує, що внутрішні сили змінити головний момент кількості руху не можуть.

Розглянемо систему, яка обертається навколо нерухомої осі *Oz*. Тоді за формулою (5.5) $K_z = I_z\omega$. Якщо в цьому випадку $\sum_{k=1}^{n} m_z(\bar{F}_k^e) = 0$, то

$$I_z\omega = const.$$

Звідси робимо наступні висновки:

а) якщо система *незмінна* (абсолютно тверде тіло), то $I_z = const$ і, отже, $\omega = const$, тобто тверде тіло, закріплене на осі, обертається з постійною кутовою швидкістю;

б) якщо система *змінна*, то під дією внутрішніх (або зовнішніх) сил окремі її точки можуть віддалятися від осі, що викликає збільшення I_z, або наближатися до осі, що приведе до зменшення I_z. Але, так як $I_z\omega = const$, то при збільшенні моменту інерції кутова швидкість системи буде зменшуватись, а при зменшенні моменту інерції – збільшуватися. Таким чином, дією внутрішніх сил можна змінити кутову швидкість системи, так як сталість K_z не означає сталості ω.

Закон збереження моменту кількості руху дозволяє за зміною або за швидкістю переміщення одної частини системи визначити зміну кутової швидкості (або кут повороту) іншої її частини. При цьому з розгляду виключаються всі наперед невідомі внутрішні сили, а також зовнішні сили, які перетинають вісь обертання або їй паралельні.

Приклад 5.3

Для демонстрації закону збереження моменту кількості руху зручно користуватись простим приладом, так званою “платформою Жуковського”. Це кругла горизонтальна платформа на сферичних опорних підшипниках, яка може з малим тертям обертатись навколо вертикальної осі *Oz*. Для людини, яка стоїть на такій платформі, $\sum_{k=1}^{n} m_z(\bar{F}_k^e) = 0$ і, отже, $I_z\omega = const$. Якщо людина, розвівши руки в різні боки, поштовхом надасть собі обертального руху навколо вертикальної осі, а потім опустить руки, то величина I_z зменшиться і, значить, кутова швидкість обертання збільшиться. Такий спосіб збільшення кутової швидкості широко використовують в балеті, при виконанні сальто і т. п.

Також, людина, яка стоїть на платформі нерухомо ($K_z = 0$), може повернутись в будь-який бік, обертаючи витягнуту горизонтально руку в протилежному напрямку. Кутова швидкість людини при цьому буде такою, щоб в сумі величина K_z системи залишалась рівною нулю.

Приклад 5.4

Горизонтальна трубка може вільно обертатись навколо осі *Oz*. Всередині трубки, на відстані a від осі знаходиться кулька масою m (рис. 5.5). В деякий момент часу трубці надали кутову швидкість ω_O. Визначити кутову швидкість трубки в момент часу, коли кулька вилітає з трубки. Момент інерції трубки відносно осі *Oz* дорівнює I_z. Довжина трубки *L*. Тертям в опорах знехтувати.

Розв'язок: Розглянемо систему кулька – трубка і скористаємось теоремою моментів відносно осі *Oz*:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\bar{F}_k^e).$$

На систему діють сили тяжіння кульки $\bar{p}$, трубки $\bar{P}$, реакції підп'ятника X_A,

Y_A, Z_A і підшипника X_B, Y_B. Моменти цих сил відносно осі *Oz* рівні нулю, так як сили $\bar{p}$ і $\bar{P}$ паралельні осі *Oz*, а реакції опор цю вісь перетинають. Тоді згідно рівняння (5.10) $\frac{dK_z}{dt} = 0$, звідки

$$K_z = const, \text{ або } K_{zO} = K_{z1}. \qquad \text{(a)}$$

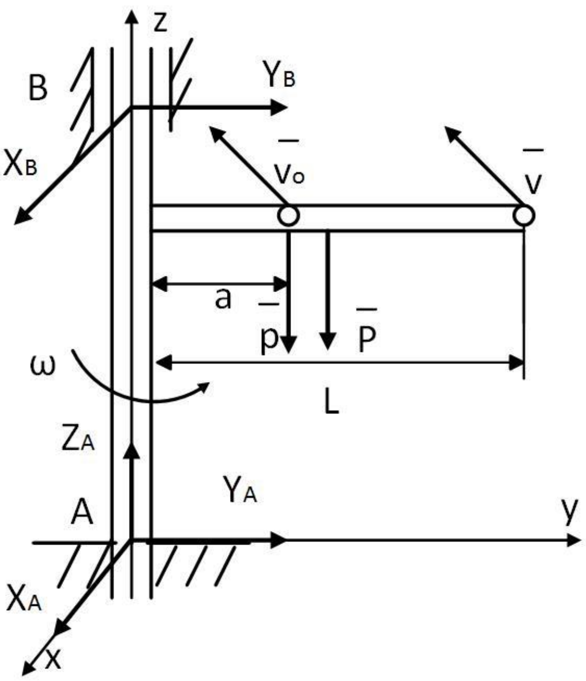


Рис. 5.5

Для даної системи $K_z = K_z^{\text{кульки}} + K_z^{\text{трубки}}$. Кулька рухається поступально і її швидкість на початку $v_O = \omega_O a$, в момент вильту з трубки $v = \omega L$. Трубка обертається навколо нерухомої осі *Oz*.

Тоді на початку руху

$$K_{zO}^{\text{кульки}} = m v_O a = m\omega_O a^2, \quad K_{zO}^{\text{трубки}} = I_Z \omega_O \quad \text{і} \quad K_{zO} = m\omega_O a^2 + I_Z\omega_O.$$

В момент вильоту кульки

$$K_{z1}^{\text{кульки}} = mvL = m\omega L^2, \quad K_{z1}^{\text{трубки}} = I_Z\omega \quad \text{і} \quad K_{z1} = m\omega L^2 + I_Z\omega\ .$$

Підставляючи всі ці величини в рівняння (а), знайдемо

$$\omega_O(I_z + ma^2) = \omega(I_z + mL^2).$$

Остаточно

$$\omega = \frac{I_z + ma^2}{I_z + mL^2}\omega_O$$

ЛЕКЦІЯ 6.ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ

6.1 Робота сили

Для характеристики дії, яку спричиняє сила на тіло при деякому його переміщенні, вводиться поняття про роботу сили.

Робота сили – скалярна величина, що характеризує міру механічного впливу на матеріальну точку з боку інших матеріальних об'єктів на даному переміщенні точки.

Спочатку введемо поняття про елементарну роботу сили.

Елементарну роботу сили $\bar{F}$, прикладеної в точці B (рис.6.1), на елементарному переміщенні dS знаходимо з виразу

$$dA = F_\tau dS \tag{6.1}$$

де F_τ – проекція сили $\bar{F}$ на напрямок швидкості точки або на напрямок елементарного переміщення, яке вважається направленим вздовж лінії швидкості точки.

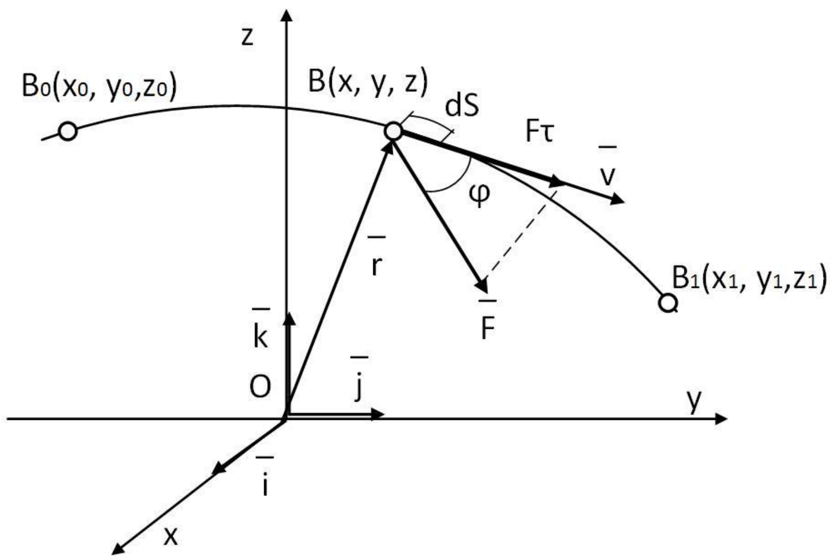


Рис. 6.1

Елементарна робота сили може бути від'ємною і додатною. Знак роботи визначається знаком проекції сили F_τ, так як переміщення dS додатнє.

При $F_\tau > 0$ елементарна робота $dA > 0$, а при $F_\tau < 0$ і $dA < 0$.

Так як $F_\tau = F cos\varphi$, де φ – кут між силою $\bar{F}$ і напрямом швидкості точки $\bar{v}$, то рівняння (6.1) можна записати у вигляді

$$dA = F cos\varphi dS \tag{6.2}$$

У рівнянні (6.2) величини F і dS додатні, а знак dA залежить від знаку $cos\varphi$. Якщо φ – гострий кут, то dA додатна; якщо φ – тупий кут, то dA від'ємна. Отже, *елементарна робота сили дорівнює добутку елементарного переміщення на проекцію сили на напрямок цього переміщення.*

Зокрема: 1. $\varphi = 0^0$, $dA = FdS$;
2. $\varphi = 90^0$, $dA = Fcos0^0 dS = 0$;
3. $\varphi = 180^0$, $dA = -FdS$.

Як видно, робота нормальної складової до швидкості сили F_n, завжди дорівнює нулю.

З кінематики відомо, що $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$; $v = |\bar{v}| = \frac{dS}{dt}$; $dS = |d\bar{r}| = vt$, тоді

$$dA = F|d\bar{r}|cos\varphi = \bar{F} \cdot d\bar{r} \tag{6.3}$$

Елементарна робота сили дорівнює скалярному добутку сили на вектор елементарного переміщення точки її прикладання.

Так як $d\bar{r} = \bar{v}\, dt$, то

$$dA = \bar{F} \cdot d\bar{r} = \bar{F}\bar{v}dt. \tag{6.4}$$

Елементарна робота сили дорівнює скалярному добутку елементарного імпульсу сили на швидкість точки.

Якщо у рівнянні (6.3) представити скалярний добуток через проекції векторів $\bar{F}$ і $d\bar{r}$ на осі координат і врахувати, що $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$, то одержимо *аналітичний вираз елементарної роботи*

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz \tag{6.5}$$

В якому x, y і z – координати точки прикладання сили $\bar{F}$.

Хоча рівняння (6.5) за формою нагадує повний диференціал функції координат точки, в дійсності елементарна робота в загальному випадку не є повним диференціалом. Тому в цьому рівнянні dA треба розуміти як безкінечно малу величину.

Робота сили $\bar{F}$ на будь-якому скінченному переміщенні $B_O B_1$ (рис. 6.1) обчислюється як границя інтегральної суми відповідних елементарних робіт

$$A_{(B_O B_1)} = \int_{(B_O)}^{(B_1)} F_\tau dS, \tag{6.6}$$

або

$$A_{(B_O B_1)} = \int_{(B_O)}^{(B_1)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \tag{6.7}$$

Отже,

робота сили на будь-якому переміщенні B_OB_1 рівна взятому вздовж цього переміщення інтегралу від елементарної роботи.

Якщо величина F_τ постійна ($F_\tau = const$), то з (6.6) позначаючи переміщення B_OB_1 через S_1, одержимо

$$A_{(B_OB_1)} = F_\tau\, S_1 \tag{6.8}$$

Одиниця вимірювання роботи в системі СІ – *джоуль* (*Дж = Н/м = кг·м²/с²*).

6.2 Приклади обчислення робіт

6.2.1 Робота сили тяжіння

Нехай точка B, на яку діє сила тяжіння $\bar{P}$, переміщується з положення B_O (x_O, y_O, z_O) в положення B_1 (x_1, y_1, z_1). Виберемо координатні осі так, щоб вісь Oz була направлена вертикально вгору (рис. 6.2). Тоді $P_x = 0$, $P_y = 0$, $P_z = -P$.

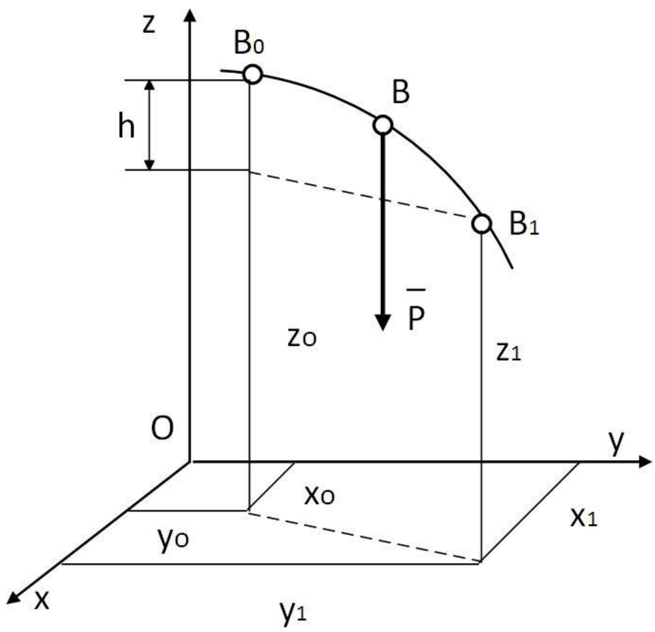


Рис. 6.2

Підставляючи ці значення в формулу (6.7), одержимо, враховуючи, що змінною інтегрування є z:

$$A_{(B_OB_1)} = \int_{z_O}^{z_1}(-P)dz = P(\,z_O - z_1).$$

Якщо точка B_O вище точки B_1, то $\qquad z_O - z_1 = h,$

де h – вертикальне переміщення точки;
якщо ж точка B_O нижче точки B_1, то $z_O - z_1 = -(z_1 - z_O) = -h.$
Остаточно одержимо

$$A_{(B_O B_1)} = \pm Ph. \tag{6.8}$$

Отже,
робота сили тяжіння рівна взятому зі знаком плюс чи мінус добутку модуля сили на вертикальне переміщення точки її прикладання.

Робота додатна, якщо початкова точка *вище* кінцевої, і від'ємна, якщо початкова точка *нижче* кінцевої.

З одержаного результату слідує, що робота сили тяжіння не залежить від виду траєкторії між точками B_O і B_1 і якщо ці точки співпадають, то робота сили тяжіння дорівнює нулю (випадок замкнутого шляху). Сили з такими властивостями називаються *потенціальними*.

6.2.2 Робота сили пружності

Розглянемо вантаж B, який знаходиться на горизонтальній поверхні і прикріплений до вільного кінця пружини (рис. 6.3). На площині відмітимо точкою O положення, яке займає кінець пружини, коли вона не розтягнута ($AO = l_O$ – довжина нерозтягнутої пружини), і приймемо цю точку за початок системи координат. Якщо тепер змістити вантаж від положення рівноваги O, розтягнувши пружину до величини l, то пружина отримає подовження $\lambda = l_O - l$ і на вантаж буде діяти сила пружності $\bar{F}_{\text{пр}}$, направлена до точки O. Сила пружності, за законом Гука, рівна $F_{\text{пр}} = c\lambda$, де c – коефіцієнт жорсткості пружини, *Н/м*.

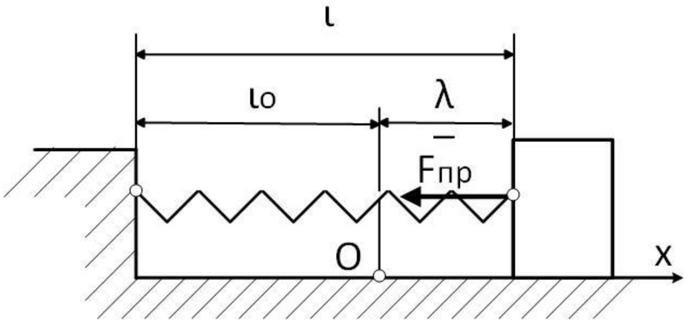


Рис. 6.3

Так як в нашому випадку $\lambda = x$, то $F_{\text{пр}} = c\lambda = c|x|$ і $F_{\text{пр}x} = -cx$.

Остання рівність справедлива і при $x < 0$ (вантаж лівіше точки O); тоді сила $\bar{F}_{\text{пр}}$ направлена вправо і виходить, як і має бути, $F_{\text{пр}x} > 0$.

Знайдемо роботу, яку здійснює сила пружності при переміщенні вантажа з початкового положення $B_O(x_O)$ в кінцеве $B_1(x_1)$. Так як в даному випадку $F_{\text{пр}x} = -cx$, $F_{\text{пр}y} = F_{\text{пр}z} = 0$, то, підставляючи ці значення в формулу (6.7), знайдемо

$$A_{(B_O B_1)} = \int_{(B_O)}^{(B_1)} (F_{\text{пр}x} dx + F_{\text{пр}y} dy + F_{\text{пр}z} dz) = \int_{x_O}^{x_1} (-cx) = \frac{c}{2}(x_O^2 - x_1^2).$$

В одержаному рівнянні x_O являє собою початкове подовження пружини випадку λ_O, а x_1 – кінцеве подовження пружини λ_1. Отже,

$$A_{(B_O B_1)} = \frac{c}{2}(\lambda_O^2 - \lambda_1^2), \tag{6.9}$$

тобто,

робота сили пружності дорівнює половині добутку коефіцієнта жорсткості на різницю квадратів початкового і кінцевого подовження (чи стиснення) пружини.

Робота буде додатною, якщо $\lambda_O > \lambda_1$, тобто коли кінець пружини переміщується до положення рівноваги, і від'ємною, якщо $\lambda_O < \lambda_1$, тобто коли кінець пружини віддаляється від положення рівноваги.

Рівняння (6.9) залишається справедливим і у випадку, коли переміщення точки не буде прямолінійним. Таким чином, виявляється, що робота сили $\bar{F}_{\text{пр}}$ залежить тільки від λ_O і λ_1, і не залежить від виду траєкторії точки *B*. Отже, сила пружності також є *потенціальною*.

6.2.3 Робота сили тертя

Розглянемо точку, яка рухається вздовж якої-небудь шорсткої поверхні (рис. 6.4). Діюча на точку сила тертя рівна

$$F_{\text{т}} = fN,$$

де f – коефіцієнт тертя;

N – нормальна реакція поверхні.

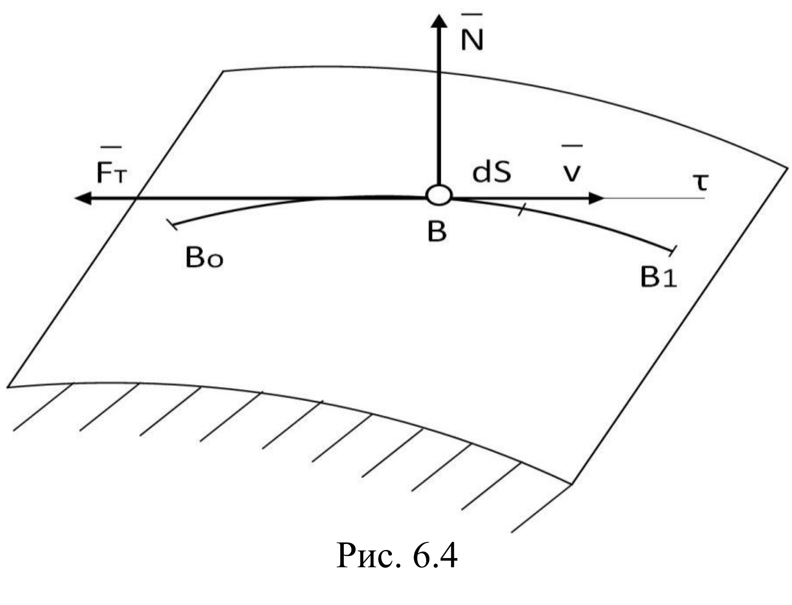


Рис. 6.4

Направлена сила тертя в бік протилежний переміщенню точки. Отже, $F_{\text{т}\tau} = -F_{\text{т}} = -fN$ і елементарна робота цієї сили рівна

$$dA = F_{\text{т}\tau} dS,$$

а за рівнянням (6.6) робота сили тертя на переміщенні $B_O B_1$

$$A_{(B_O B_1)} = -\int_{(B_O)}^{(B_1)} F_{\text{т}} dS = -\int_{(B_O)}^{(B_1)} fN dS.$$

Якщо чисельно сила тертя постійна, то

$$A_{(B_O B_1)} = -F_{\text{т}} S, \tag{6.10}$$

де S – довжина дуги кривої $B_O B_1$, вздовж якої переміщується точка.

Таким чином, робота сили тертя при ковзанні завжди від'ємна. Так як ця робота залежить від довжини дуги $B_O B_1$, то, отже, сила тертя є силою *непотенціальною.*

6.2.4 Робота сил, прикладених до тіла, яке обертається

При обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі швидкість точки B можна обчислити за векторною формулою Ейлера $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$, тоді елементарна робота сили $\bar{F}$ визначатиметься за формулою

$$dA = \bar{F}\bar{v}dt = \bar{F}(\bar{\omega} \times \bar{r})dt.$$

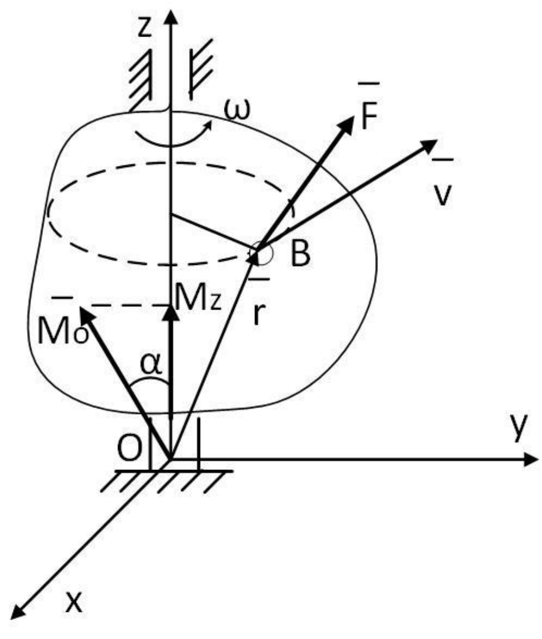


Рис. 6.5

В змішаному векторному добутку, який виражається у вигляді визначника, можна представити співмножники в круговому порядку

$$\bar{F}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{\omega}(\bar{F} \times \bar{r}),$$

Тоді

$$dA = \bar{\omega}(\bar{F} \times \bar{r})dt = \bar{\omega} m_O(\bar{F})dt = \omega dt M_O cos\alpha,$$

так як $\bar{F} \times \bar{r} = m_O(\bar{F})$ – момент сили $\bar{F}$ відносно точки O.

Враховуючи, що $M_O cos\alpha = M_z$ – обертаючий момент сили відносно осі обертання Oz (рис. 6.5) і $\omega dt = d\varphi$, одержимо

$$dA = M_z d\varphi \qquad (6.11)$$

Елементарна робота дорівнює добутку обертаючого моменту на елементарний кут повороту.

При повороті на скінченний кут φ_1 робота

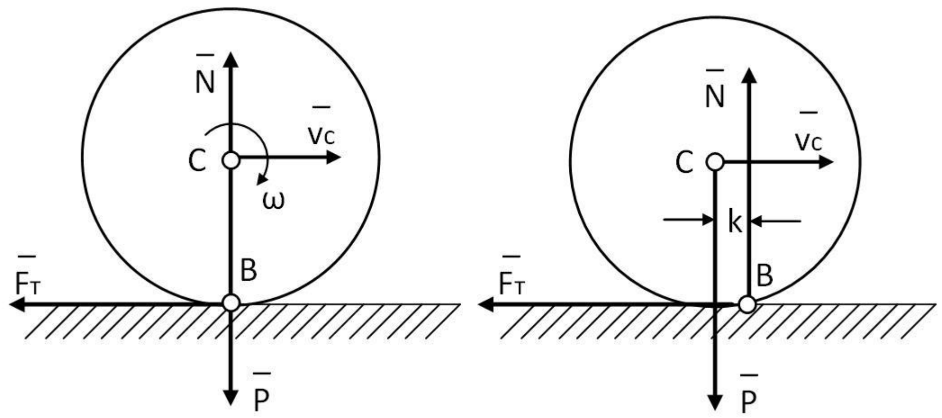
$$A = \int_0^{\varphi_1} M_z d\varphi, \qquad (6.12)$$

а у випадку постійного моменту

$$A = M_z \varphi_1 \qquad (6.13)$$

6.2.5 Робота сил тертя, діючих на тіло, яке котиться

На колесо радіусом R (рис. 6.6), яке котиться по деякій поверхні без ковзання, діє прикладена в точці B сила тертя $\bar{F}_т$. Елементарна робота цієї сили $dA = F_{т\tau} dS_B$. Але точка B в даному випадку співпадає з миттєвим центром швидкостей і $v_B = 0$. Так як $dS_B = v_B dt$, то $dS_B = 0$ і для кожного елементарного переміщення $dA = 0$.



а) б)

Рис. 6.6

Отже, *при коченні без ковзання робота сиди тертя, яка протидіє ковзанню, на будь-якому переміщенні тіла дорівнює нулю.*

З цієї ж причини дорівнює нулю і робота нормальної реакції $\overline{N}$, якщо вважати, що тіло не деформується і сила $\overline{N}$ прикладена в точці *B* (рис.6.6, а).

Опір коченню створює пара сил $\overline{N}$, $\overline{P}$, яка виникає внаслідок деформації поверхонь (рис. 6.6, б), момент якої $M = kN$, де k – коефіцієнт тертя кочення. Тоді за формулою (6.11), враховуючи, що при коченні кут повороту колеса $d\varphi = {dS_C}/{R}$, одержимо

$$dA_{\text{коч}} = -kNd\varphi = -\frac{k}{R}NdS_C, \tag{6.14}$$

де dS_C – елементарне переміщення центра *C* колеса.

Якщо $N = const$, то повна робота сил опору коченню

$$A_{\text{коч}} = -kN\varphi_1 = -\frac{k}{R}NS_C. \tag{6.15}$$

Так як величина ${k}/{R}$ мала, то при наявності інших опорів опором коченню можна в першому наближенні знехтувати.

6.3 Кінетична енергія матеріальної точки і системи

Кінетичною енергією називають скалярну міру механічного руху матеріальних об'єктів.

Кінетичною енергією матеріальної точки або її живою силою називають скалярну величину рівну половині добутку маси точки на квадрат модуля її швидкості, тобто $\frac{mv^2}{2}$.

В системі СІ одиниці вимірювання кінетичної енергії – *джоуль* (*Дж = Н/м = кг·м*^{2}*/с*^{2}*).*

Кінетичною енергією системи називається скалярна величина T рівна сумі кінетичних енергій усіх точок системи:

$$T = \sum_{k=1}^{n}\frac{m_k v_k^2}{2} \tag{6.16}$$

Кінетична енергія є характеристикою і поступального і обертального рухів системи. Головна відмінність величини *T* і введених раніше $\overline{Q}$ і $\overline{K}_O$ полягає в тому, що кінетична енергія є величиною скалярною і притому суттєво додатною. Тому вона не залежить від напряму руху частин системи і не характеризує зміни цих напрямів.

Якщо система складається з кількох тіл, то її кінетична енергія дорівнює сумі кінетичних енергій цих тіл.

Знайдемо формули для обчислення кінетичної енергії тіла в різних випадках руху.

6.3.1 Кінетична енергія тіла при поступальному русі

У цьому випадку всі точки тіла рухаються з однаковими швидкостями, рівними швидкості центра мас. Отже, для будь-якої точки $v_k = v_C$ і рівняння (6.16) дає

$$T_{\text{пост}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k v_C^2}{2}$$

або

$$T_{\text{пост}} = \frac{M v_C^2}{2} \qquad (6.17)$$

Кінетична енергія тіла при поступальному русі дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат швидкості центра мас.

6.3.2 Кінетична енергія тіла при обертальному русі

Якщо тіло обертається навколо осі *Oz* (рис. 6.7), то швидкість будь-якої точки $v_k = \omega h_k$, де h_k – відстань точки до осі обертання, а ω – кутова швидкість тіла.

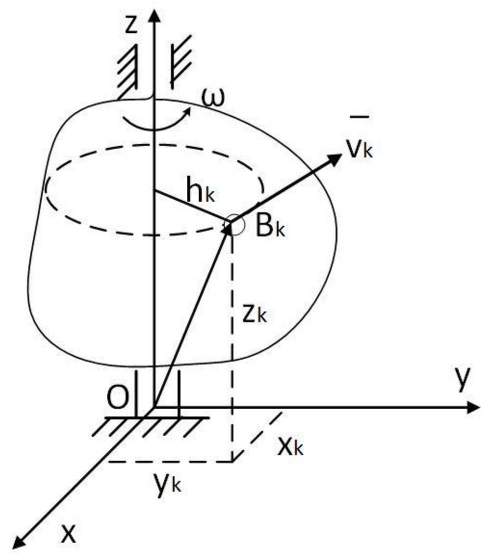


Рис. 6.7

Підставляючи ці значення в рівняння (6.16) і виносячи спільні множники за дужки, одержимо

$$T_{\text{оберт}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \omega^2 h_k^2}{2} = \frac{(\sum_{k=1}^{n} m_k\, h_k^2)\omega^2}{2}$$

Величина, яка стоїть в дужках, являє собою момент інерції тіла відносно осі *Oz*. Таким чином, остаточно знайдемо

$$T_{\text{оберт}} = \frac{I_z \omega^2}{2}, \tag{6.18}$$

Кінетична енергія тіла при обертальному русі дорівнює половині добутку моменту інерції на квадрат його кутової швидкості.

6.3.3 Кінетична енергія тіла при плоскопаралельному русі

При цьому русі швидкості всіх точок тіла в кожний момент часу розподілені так, як би це тіло оберталось навколо осі, перпендикулярної площині руху, і яка проходить через миттєвий центр швидкостей *P* (рис. 6.8).

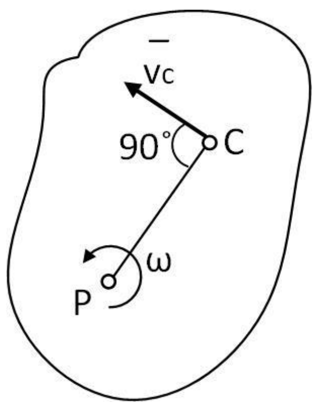


Рис. 6.8

Отже, за формулою (6.18)

$$T_{\text{плоск}} = \frac{I_p \omega^2}{2}, \tag{6.19}$$

де I_p – момент інерції тіла відносно названої вище осі;

ω – кутова швидкість тіла.

Величина I_p буде змінною, так як положення центра *P* під час руху тіла весь час змінюється. Введемо замість I_p постійний момент інерції I_c відносно осі, яка проходить через центр мас *C* тіла. За теоремою про моменти інерції відносно паралельних осей $I_p = I_C + Md^2$, де $d = PC$. Підставимо цей вираз в рівняння (6.19). Враховуючи, що точка P – миттєвий центр швидкостей і, отже, $\omega d = \omega \cdot PC = v_C$, де v_C – швидкість центра мас *C*, остаточно знайдемо

$$T_{\text{плоск}} = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}. \qquad (6.20)$$

При плоскопаралельному русі кінетична енергія тіла дорівнює енергії поступального руху зі швидкістю центра мас плюс кінетична енергія обертального руху навколо центра мас.

6.4 Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

Теорема про зміну кінетичної енергії встановлює взаємозв’язок між скалярною мірою механічного руху даного матеріального об’єкта (*кінетичною енергією*) і скалярною мірою механічного впливу на цей об’єкт з боку інших матеріальних тіл (*роботою*).

Теорема:
Диференціал кінетичної енергії точки дорівнює елементарній роботі діючої на точку сили.

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA.$$

Доказ. Для матеріальної точки масою m, яка рухається під дією сили $\bar{F}$, основний закон динаміки можна записати у вигляді:

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}.$$

Помноживши обидві частини цього рівняння скалярно на диференціал радіуса-вектора точки $d\bar{r}$, матимемо

$$md\bar{v}\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{F}\cdot d\bar{r} \quad \text{або} \quad m\bar{v}d\bar{v} = \bar{F}d\bar{r}.$$

Тут $\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}$. Враховуючи, що $dA = \bar{F}\cdot d\bar{r}$ – елементарна робота, одержимо $m\bar{v}d\bar{v} = dA$. Так як $m\bar{v}d\bar{v} = d\left(\frac{m\bar{v}^2}{2}\right) = d(\frac{mv^2}{2})$, то остаточно

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA. \qquad (6.21)$$

Якщо обидві частини рівняння (6.21) поділити на dt, та врахувавши, що $\frac{dA}{dt} = W$ – потужність, одержимо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = W. \qquad (6.22)$$

Похідна за часом від кінетичної енергії точки дорівнює потужності, підведеної до цієї точки.

Інтегруючи обидві частини рівняння (6.21) в межах, що відповідають переміщенню точки з положення B_O до B_1 (рис. 6.1), одержимо теорему про зміну кінетичної енергії точки в інтегральній формі

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_O^2}{2} = A. \qquad (6.23)$$

Зміна кінетичної енергії точки на деякому переміщенні дорівнює роботі сили, діючої на точку на тому ж переміщенні.

Доведену теорему можна використовувати для розв'язку задач динаміки, коли в задачі до числа заданих і невідомих величин входять: діючі сили, *переміщення точки*, її початкова і кінцева швидкість (тобто величини $\bar{F}$, S, v_O, v_1), причому сили мають постійними або залежними лише від положення (координат) точки.

Приклад 6.1

Вантажу масою m, який лежить на горизонтальній поверхні, надають (поштовхом) початкову швидкість $\bar{v}_0$. Наступний рух вантажу гальмується постійною силою $\bar{F}$. Визначити, який шлях вантаж пройде до зупинки (рис. 6.9, де M_O – початкове положення вантажа, а M_1 – кінцеве.

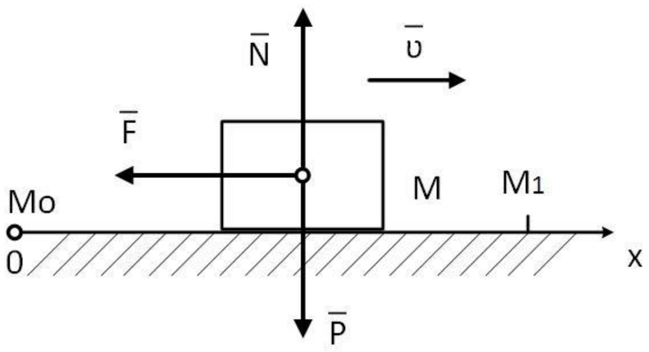


Рис. 6.9

Розв'язок: На вантаж діють: сила тяжіння $\bar{P}$, реакція опорної поверхні $\bar{N}$ і гальмуюча сила $\bar{F}$. Для знаходження гальмівного шляху $S_1 = M_O M_1$, враховуючи, що до умови даної задачі входять S_1, v_O, v_1і постійна сила $\bar{F}$, скористаємося теоремою про зміну кінетичної енергії

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_O^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} A_{(M_O M_1)}.$$

В даному випадку $v_1 = 0$ (v_1 – швидкість вантажа в момент зупинки). Крім того, $A(\bar{P}) = 0$ і $A(\bar{N}) = 0$, так як сили $\bar{P}$ і $\bar{N}$ перпендикулярні переміщенню, $A(\bar{F}) = -FS_1$, так як $\bar{F} = const$. Остаточно одержуємо

$$-\frac{mv_O^2}{2} = -FS_1,$$

звідки знаходимо

$$S_1 = \frac{mv_O^2}{2F}.$$

Гальмівний шлях пропорціональний квадрату початкової швидкості.

6.5 Теорема про зміну кінетичної енергії системи

Теорема:

Диференціал кінетичної енергії системи дорівнює сумі елементарних робіт всіх зовнішніх і внутрішніх сил, діючих на цю систему

$$dT = \sum_{k=1}^{n} dA_k^e + \sum_{k=1}^{n} dA_k^i \qquad (6.24)$$

Дане рівняння виражає теорему про зміну кінетичної енергії в диференціальній формі.

Доказ. Приклавши до точок системи всі зовнішні та внутрішні сили, можна для кожної точки системи записати теорему про зміну кінетичної енергії (6.21)

$$d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \bar{F}_k^e \cdot d\bar{r}_k + \bar{F}_k^i \cdot d\bar{r}_k.$$

Додавши записані *n* рівнянь та винісши диференціал за знак суми, маємо

$$d\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k v_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k^e \cdot d\bar{r}_k + \sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k^i \cdot d\bar{r}_k \qquad \text{або}$$

$$dT = \sum_{k=1}^{n} dA_k^e + \sum_{k=1}^{n} dA_k^i,$$

де $T = \sum_{k=1}^{n}\frac{m_k v_k^2}{2}$ – кінетична енергія системи;

$dA_k^e = \bar{F}_k^e \cdot d\bar{r}_k$ – елементарна робота діючих на точку зовнішніх сил;

$dA_k^i = \bar{F}_k^i \cdot d\bar{r}_k$ – елементарна робота діючих на точку внутрішніх сил.

Якщо обидві частини рівняння (6.24) інтегрувати в межах, що відповідають переміщенню системи з деякого початкового положення, де кінетична енергія дорівнює T_O, в положення, де значення кінетичної енергії стає рівним T, одержимо

$$T - T_o = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i \qquad (6.25)$$

Це рівняння виражає теорему про зміну кінетичної енергії в іншій (інтегральній) формі:

Зміна кінетичної енергії системи при деякому її переміщенні дорівнює сумі робіт на цьому переміщенні всіх прикладених до системи зовнішніх і внутрішніх сил.

Розглянемо важливий окремий випадок *незмінної* системи. *Незмінною* називатимемо механічну систему, в якій відстань між будь-якими двома взаємодіючими точками залишається під час руху постійною (тіла системи абсолютно тверді, нитки, якими вони з’єднані – не розтягуються).

Розглянемо дві точки B_1 і B_2 незмінної системи ($B_1B_2 = const$), діючі одна на одну з силами $\bar{F}_{12}^i$ і $\bar{F}_{21}^i = -\bar{F}_{12}^i$ (див. рис 6.10). Тоді, так як під час руху відрізка B_1B_2 має бути $v_1 cos\alpha_1 = v_2 cos\alpha_2$, то і $ds_1 cos\alpha_1 = ds_2 cos\alpha_2$, так як $ds_1 = v_1 dt,\ ds_2 = v_2 dt$ (v_1, v_2 і ds_1, ds_2 – відповідно швидкості і елементарні переміщення точок B_1 і B_2). Крім того, $F_{12}^i = F_{21}^i$. В результаті для суми елементарних робіт цих сил одержимо

$$dA_1 + dA_2 = F_{12}^i ds_1 cos\alpha_1 - F_{21}^i ds_2 cos\alpha_2 = 0.$$

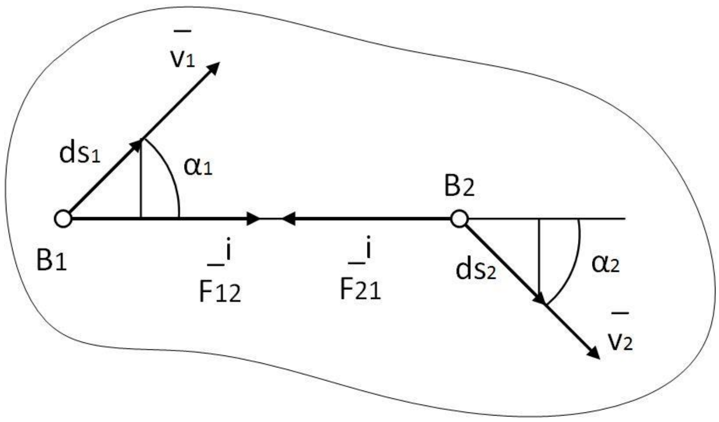


Рис. 6.10

Такий же результат отримаємо і для всіх інших взаємодіючих точок системи. Остаточно приходимо до висновку, що *у випадку незмінної* системи *сума робіт усіх внутрішніх сил дорівнює нулю* і рівняння (6.24) і (6.25) матимуть вигляд

$$dT = \sum_{k=1}^{n} dA_k^e \quad (6.26)$$

$$T - T_o = \sum_{k=1}^{n} A_k^e \quad (6.27)$$

Аналіз основних (загальних) теорем динаміки системи переконує в тому, що тільки теорема про зміну кінетичної енергії системи містить внутрішні сили, які впливають на зміну кінетичної енергії, на відміну від трьох перших теорем, коли внутрішні сили не впливали на зміну кількості руху, на рух центра мас і зміну кінетичного моменту. Отже, кінетична енергія як друга міра механічного руху повніше відображає властивості цього руху системи матеріальних точок.

Приклад 6.2

На циліндричний каток радіусом R і масою M намотана нитка, перекинута через блок O (рис. 6.11) на кінці якої вантаж D масою m. Визначити, яку швидкість v_C матиме центр C катка, пройшовши шлях S, якщо $v_{C_O} = 0$. Знайти, чому дорівнюватиме прискорення a_C цього центра. Коефіцієнт тертя кочення катка дорівнює k, радіус інерції катка відносно його осі дорівнює ρ_C. Масою нитки і блока O знехтувати.

Розв'язок: Для визначення швидкості v_C скористаємося рівнянням

$$T - T_o = \sum_{k=1}^{n} A_k^e. \quad (a)$$

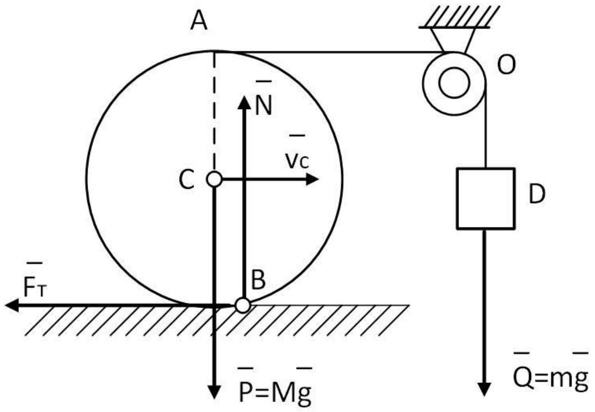


Рис. 6.11

В даному випадку $T_o = 0$, а

$$T = T_{\text{катка}} + T_D,$$

де $T_D = \frac{mv_D^2}{2}$, так як вантаж рухається поступально;

$T_{\text{катка}} = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}$, оскільки рух катка плоскопаралельний; $I_C = M\rho_C^2$.

Точка B – миттєвий центр швидкостей, тому $\omega = \frac{v_C}{R}$ і $v_D = v_A = 2v_C$. Отже,

$$T = \frac{mv_D^2}{2} + \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2} = \frac{v_C^2}{2}\left[4m + M(1 + \frac{\rho_C^2}{R^2})\right].$$

Роботу здійснюють сила $\bar{Q} = m\bar{g}$ і пара $\bar{N}, \bar{P}$ $(\bar{P} = M\bar{g})$. Так як $v_D = 2v_C$, то переміщення вантажа D буде $h = 2S$, де S – переміщення центра C катка, і

$$A(\bar{Q}) = mg2S.$$

Роботу сил опору коченню обчислюємо за рівнянням (6.15), так як $N = P = Mg = const.$ $A = -\frac{k}{R}NS = -\frac{k}{R}MgS.$ Тоді

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^e = mg2S - \frac{k}{R}MgS.$$

Підставляючи знайдені значення в рівняння (а), маємо

$$\frac{v_C^2}{2}\left[4m + M(1 + \frac{\rho_C^2}{R^2})\right] = \left(2m - \frac{kM}{R}\right)gS, \qquad (б)$$

Звідки

$$v_C = \sqrt{\frac{2g(2mR - kM)RS}{4mR^2 + M(R^2 + \rho_C^2)}}.$$

Для визначення прискорення a_C диференціюємо за часом рівняння (б). Остаточно, враховуючи, що $\frac{dS}{dt} = v_C$ і скорочуючи на v_C, знайдемо

$$a_C = \frac{(2mR - kM)Rg}{4mR^2 + M(R^2 + \rho_C^2)}.$$

ЛЕКЦІЯ 7. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

7.1 Принцип Даламбера для матеріальної точки

Розглянуті нами методи розв'язку задач механіки, базуються на рівняннях, які витікають або безпосередньо з законів Ньютона, або ж з загальних теорем, які є наслідками цих законів. Однак цей шлях не єдиний. Рівняння руху або умови рівноваги механічної системи можна отримати, поклавши в основу замість законів Ньютона інші загальні положення, які називають *принципами механіки*. В деяких випадках застосування цих принципів дозволяє знайти ефективні методи розв'язку відповідних задач. Розглянемо принцип запропонований Ж. Даламбером для дослідження руху невільних систем, який одержав назву *принцип Даламбера*.

Знайдемо спочатку вираз принципу для одної матеріальної точки масою m, яка рухається в інерціальній системі відліку *Oxyz* з прискоренням $\bar{a}$ (рис.7.1).

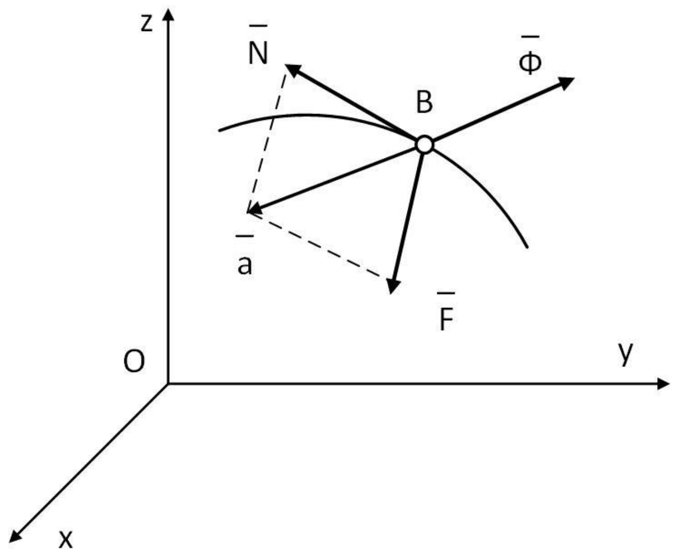


Рис. 7.1

Нехай $\bar{F}$ – рівнодійна активних сил, діючих на точку B, а $\bar{N}$ – рівнодійна реакцій в'язей, накладених на неї, тоді

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{N}. \tag{7.1}$$

Запишемо цю рівність у вигляді

$$\bar{F} + \bar{N} - m\bar{a} = 0 \tag{7.2}$$

і введемо до розгляду вектор

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a}. \tag{7.3}$$

Вектор $\bar{\Phi}$, рівний за модулем добутку маси точки на її прискорення і направлений протилежно прискоренню, називається силою інерції точки.

Згідно рівнянь (7.2) і (7.3)

$$\bar{F} + \bar{N} + \bar{\Phi} = 0 \tag{7.4}$$

Ця рівність виражає *принцип Даламбера* для матеріальної точки:

Якщо в будь-який момент часу до діючих на точку активних сил і реакцій опор приєднати силу інерції, то одержана система сил буде врівноваженою.

Вектор прискорення точки можна розкласти по осям декартової системи координат, або розкласти на дотичне і нормальне прискорення, а отже і силу інерції можна розкласти на такі ж складові (рис.7.2):

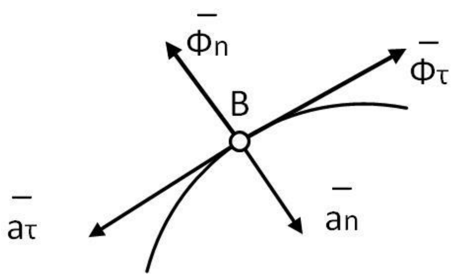


Рис. 7.2

$$\bar{\Phi} = \Phi_x \bar{\imath} + \Phi_y \bar{\jmath} + \Phi_z \bar{k} = \bar{\Phi}_\tau + \bar{\Phi}_n$$

тут $\bar{\Phi}_n = -m\bar{a}_n = -m\frac{v^2}{\rho}\bar{n}$; $\bar{\Phi}_\tau = -m\bar{a}_\tau = -m\frac{dv}{dt}\bar{\tau}$.

Існують різні точки зору на силу інерції. Згідно першої – сила інерції умовно прикладається до точки, щоб рівнянням руху (7.1) надати більш зручну форму умов рівноваги (7.4). Тому силу інерції $\bar{\Phi}$ називають фіктивною, умовною, даламберовою. З цієї точки зору сили інерції в принципі Даламбера не є дійсними, реальними силами.

Згідно другої – більш поширеної – точки зору, сила інерції вважається прикладеною по частинам до "прискорюючих" тіл. Її обґрунтовують наступним чином. Матеріальна точка рухається з прискоренням $\bar{a}$ тому що на неї діють інші тіла з силою рівною $(\bar{F} + \bar{N})$. За законом дії і протидії точка має протидіяти цим тілам з такою ж за величиною, але протилежною за напрямом силою $-(\bar{F} + \bar{N})$, яка згідно рівняння (7.2) дорівнює силі інерції $\bar{\Phi}$, тобто $\bar{\Phi} = -(\bar{F} + \bar{N})$.

Це співвідношення дозволяє вважати, що сила інерції прикладена до "прискорюючих" тіл, які надають точці прискорення. Дійсно, сила інерції $\bar{\Phi}$ є векторною сумою сил дії матеріальної точки на "прискорюючі" її тіла. Вона виступає сумарною оцінкою цієї дії.

Приклад 7.1

Вантаж вагою *P*, підвішений на нитці довжиною *l*, відхиляють від вертикалі на кут α в положення B_O і відпускають без початкової швидкості. Знайти натяг нитки в момент, коли вантаж дійде до найнижчого положення B_1.

Розв'язок: Зобразимо вантаж в тому положенні, для якого потрібно знайти натяг нитки (рис. 7.3). На вантаж діють сила тяжіння $\bar{P}$ і реакція нитки $\bar{T}$. Приєднуємо до цих сил нормальну і тангенціальну сили інерції $\bar{\Phi}_n$ і $\bar{\Phi}_\tau$. Одержана система сил, згідно принципу Даламбера, знаходиться в рівновазі.

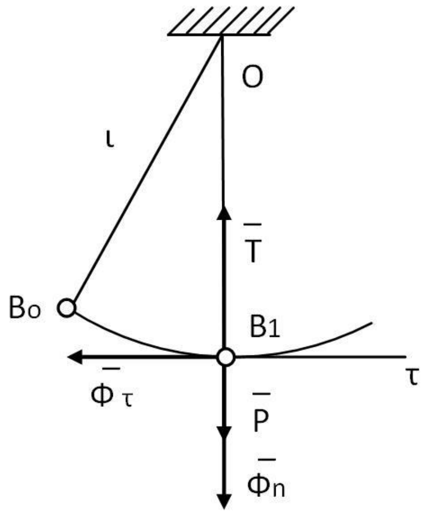


Рис. 7.3

Прирівнюючи до нуля суму проекцій всіх цих сил на нормаль B_1O, одержимо

$$T - P - \Phi_n = 0.$$

Так як $\Phi_n = ma_n = \frac{mv_1^2}{l}$, де v_1 – швидкість вантажу в положенні B_1, то

$$T = P + \Phi_n = P + \frac{mv_1^2}{l}.$$

Рівняння рівноваги в проекції на дотичну вісь дає $\Phi_\tau = 0$. Цей результат одержуємо через те, що в точці B_1 похідна ${dv}/{dt} = 0$, так як в цій точці швидкість має максимальне значення.

7.2 Принцип Даламбера для системи матеріальних точок

Розглянемо механічну систему, яка складається з n матеріальних точок. До кожної точки системи в загальному випадку прикладена рівнодіюча активних сил $\bar{F}_k$ і рівнодіюча реакцій в'язей $\bar{N}_k$. Застосувавши принцип Даламбера до кожної матеріальної точки системи, одержимо

$$\bar{F}_k + \bar{N}_k + \bar{\Phi}_k = 0 \tag{7.5}$$

де $\overline{\Phi}_k = -\,m_k \bar{a}_k$ – сила інерції *k-тої* матеріальної точки системи.

Рівняння (7.5) виражає принцип Даламбера для системи матеріальних точок:

У будь-який момент під час руху механічної системи сума активних сил, реакцій в'язей разом з силою інерції для кожної точки системи утворюють врівноважену систему сил.

Для кожної точки системи B_k рівнодіюча активних сил $\bar{F}_k$ і рівнодіюча реакцій в'язей $\bar{N}_k$ розкладаються на зовнішню $\bar{F}_k^e$ (чи $\bar{N}_k^e$) та внутрішню $\bar{F}_k^i$ (чи $\bar{N}_k^i$) (рис.7.4):

$$\bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i + \bar{N}_k^e + \bar{N}_k^i + \overline{\Phi}_k = 0 \tag{7.6}$$

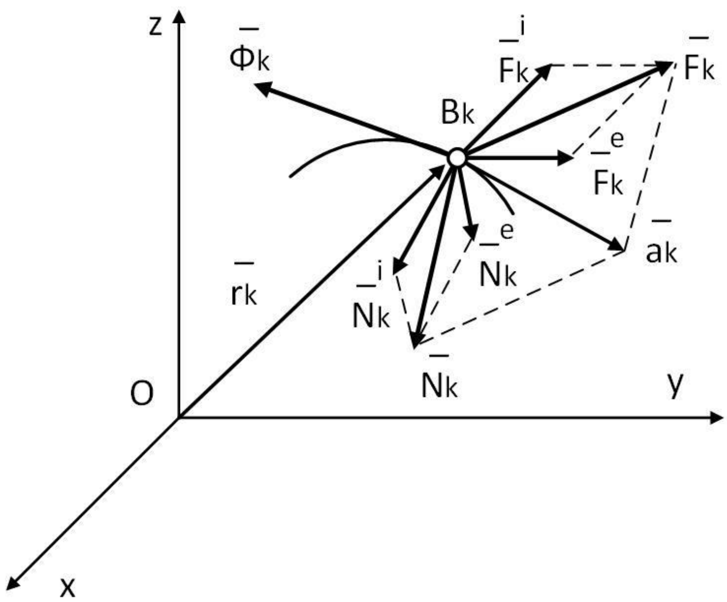


Рис. 7.4

Помножимо обидві частини рівняння (7.6) на радіус-вектор r_k, проведений з початку системи відліку до матеріальної точки B_k, одержимо

$$\bar{r}_k \times (\bar{F}_k^e + \bar{N}_k^e) + \bar{r}_k \times \left(\bar{F}_k^i + \bar{N}_k^i\right) + \bar{r}_k \times \overline{\Phi}_k = 0 \tag{7.7}$$

Запишемо рівняння (7.6) і (7.7) для кожної точки механічної системи та додаємо їх почленно, врахувавши, що за властивістю внутрішніх сил $\sum_{k=1}^{n}(\bar{F}_k^i + \bar{N}_k^i) = 0$ і $\sum_{k=1}^{n}(\bar{r}_k \times (\bar{F}_k^i + \bar{N}_k^i)) = 0$. Остаточно матимемо

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^e + \sum_{k=1}^{n} \bar{N}_k^e + \sum_{k=1}^{n} \overline{\Phi}_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{n}(\bar{r}_k \times \bar{F}_k^e) + \sum_{k=1}^{n}(\bar{r}_k \times \bar{N}_k^e) + \sum_{k=1}^{n}(\bar{r}_k \times \overline{\Phi}_k) = 0.\end{gathered} \tag{7.8}$$

Або

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^e + \sum_{k=1}^{n} \bar{N}_k^e + \sum_{k=1}^{n} \bar{\Phi}_k = 0$$
$$\sum_{k=1}^{n} \bar{m}_O(\bar{F}_k^e) + \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_O(\bar{N}_k^e) + \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_O(\bar{\Phi}_k) = 0. \tag{7.9}$$

Рівняння (7.9), які випливають з принципу Даламбера, подібні до рівнянь рівноваги сил, що розглядалися у статиці. Застосування цих рівнянь спрощує розв'язок задач динаміки, так як вони не містять внутрішніх сил. Метод розв'язку задач динаміки, який базується на застосуванні рівнянь (7.9), називається *методом кінетостатики*, а самі ці рівняння називаються *рівняннями кінетостатики*.

7.3 Головний вектор і головний момент сил інерції системи

В рівняннях кінетостатики ми отримали доданки $\sum_{k=1}^{n} \bar{\Phi}_k$ і $\sum_{k=1}^{n} \bar{m}_O(\bar{\Phi}_k)$.
Введемо позначення

$$\bar{R}^{\text{ін}} = \sum_{k=1}^{n} \bar{\Phi}_k; \quad \bar{M}_O^{\text{ін}} = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_O(\bar{\Phi}_k).$$

Величини $\bar{R}^{\text{ін}}$ і $\bar{M}_O^{\text{ін}}$ являють собою *головний вектор* і *головний момент відносно центра О системи сил інерції*.

Вектор $\bar{R}^{\text{ін}}$ рівний сумі всіх сил інерції $\bar{\Phi}_k$ точок системи називається головним вектором сил інерції цієї системи.

Так як $\bar{\Phi}_k = -m_k\bar{a}_k = -m_k\frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2}$, то $\bar{R}^{\text{ін}} = -\frac{d^2}{dt^2}\sum_{k=1}^{n} m_k\bar{r}_k$.

Але $\sum_{k=1}^{n} m_k\bar{r}_k = M\bar{r}_C$, тоді

$$\bar{R}^{\text{ін}} = -\frac{d^2}{dt^2}M\bar{r}_C = -M\bar{a}_C. \tag{7.10}$$

Головний вектор сил інерції механічної системи (зокрема твердого тіла) рівний добутку маси системи (тіла) на прискорення центра мас і направлений протилежно цьому прискоренню.

В проекціях на осі координат

$$R_x^{\text{ін}} = -M\frac{d^2X_C}{dt^2}; \; R_y^{\text{ін}} = -M\frac{d^2Y_C}{dt^2}; \; R_z^{\text{ін}} = -M\frac{d^2Z_C}{dt^2}.$$

Вектор $\bar{M}_O^{\text{ін}}$ рівний сумі моментів всіх сил інерції $\bar{\Phi}_k$ точок системи відносно центра системи О називається головним моментом сил інерції відносно центра О

$$\bar{M}_O^{\text{ін}} = \sum_{k=1}^{n}(\bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k) = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_O(\bar{\Phi}_k).$$

Так як

$$(\bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k) = -\,\bar{r}_k \times \frac{d}{dt}(m_k\bar{v}_k) = -\frac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k\bar{v}_k), \text{ то}$$

$$\bar{M}_O^{\text{ін}} = -\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}(\bar{r}_k \times m_k\bar{v}_k)\ .$$

Таким чином

$$\bar{M}_O^{\text{ін}} = -\frac{d}{dt}\bar{K}_O \quad \text{і} \quad M_z^{\text{ін}} = -\frac{d}{dt}K_z \tag{7.11}$$

Головний момент сил інерції механічної системи (твердого тіла) відносно будь-якого центра O чи осі z рівний взятій зі знаком мінус першій похідній за часом від кінетичного моменту системи (тіла) відносно того ж центру чи тієї ж осі.

7.4 Приведення сил інерції твердого тіла

Згідно з теоремою про приведення системи сил до даного центру, яка справедлива для будь-яких сил, систему сил інерції *твердого тіла* можна замінити однією силою, рівною $\bar{R}^{\text{ін}}$ і прикладеною в довільно вибраному центрі *O*, і парою з моментом, рівним $\bar{M}_O^{\text{ін}}$. Розглянемо кілька окремих випадків.

1. *Поступальний рух*

У цьому випадку прискорення всіх точок тіла однакові і дорівнюють прискоренню $\bar{a}_C$ центру мас *C* тіла ($\bar{a}_k = \bar{a}_C$). Тоді всі сили інерції $\bar{\Phi}_k = -\,m_k\bar{a}_C$ утворюють систему паралельних сил, аналогічних силам тяжіння $\bar{p}_k = m_k\bar{g}$, і тому як і сили тяжіння, мають рівнодійну, яка проходить через точку *C* (рис. 7.5).

Отже,

при поступальному русі сили інерції твердого тіла приводяться до рівнодіючої, рівної $\bar{R}^{\text{ін}}$, яка проходить через центр мас тіла.

$$\bar{R}^{\text{ін}} = -M\bar{a}_C. \tag{7.11}$$

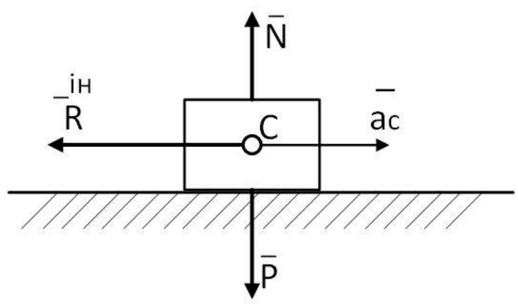


Рис. 7.5

2. *Обертання навколо осі, яка проходить через центр мас тіла*

Якщо тіло обертається навколо осі *Cz*, яка проходить через цент мас *C* тіла, то $\bar{R}^{\text{ін}} = 0$, так як $\bar{a}_C = 0$. Отже, в цьому випадку система сил інерції приводиться тільки до пари з моментом $M_z^{\text{ін}}$, яка лежить в площині симетрії тіла (рис. 7.6).

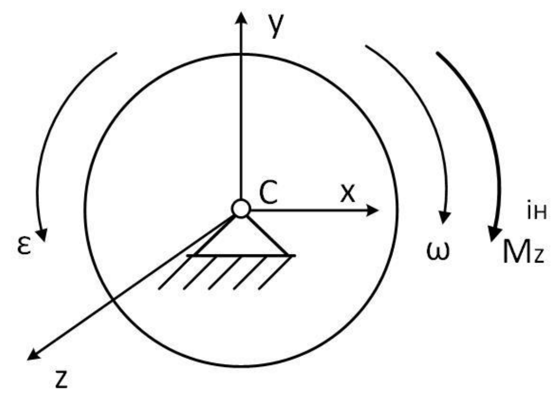


Рис. 7.6

Так як $K_z = I_z\omega$, то

$$M_z^{\text{ін}} = -\frac{d}{dt}K_z = -I_z\frac{d\omega}{dt} = -I_z\varepsilon, \qquad (7.12)$$

де ε – кутове прискорення тіла.

3. Плоскопаралельний рух

Якщо тіло має площину симетрії і рухається паралельно цій площині, то, вочевидь, система сил інерції тіла приведеться до сили рівної $\bar{R}^{\text{ін}}$ і прикладеної в центрі мас *C* тіла, і пари з моментом $M_{Cz}^{\text{ін}} = -I_{Cz}\varepsilon$, які лежать в площині симетрії (рис. 7.7).

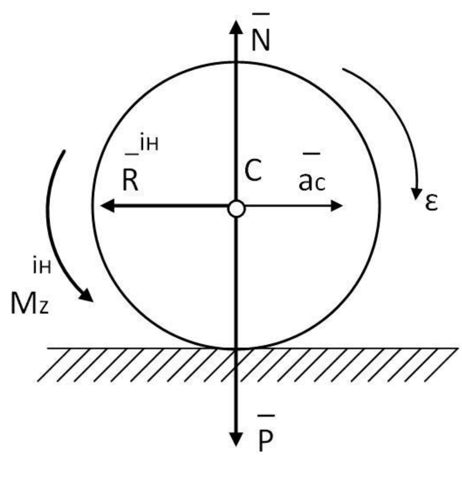


Рис. 7.7

При розв'язку задач за формулами виду (7.12) обчислюється модуль моменту $M_z^{\text{ін}}$, а його напрямок, протилежний ε, вказується на кресленні.

Принцип Даламбера дає єдиний метод складання рівнянь руху будь-якої невільної механічної системи. Ним особливо зручно користуватись для знаходження реакцій в'язей, коли рух системи відомий або може визначений за допомогою рівнянь, які не містять реакцій, наприклад за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії. При цьому з розгляду виключаються всі наперед невідомі внутрішні сили. У випадках, коли потрібно визначити реакції внутрішніх в'язей, систему необхідно роз'єднати на такі частини, по відношенню до яких шукані реакції будуть зовнішніми.

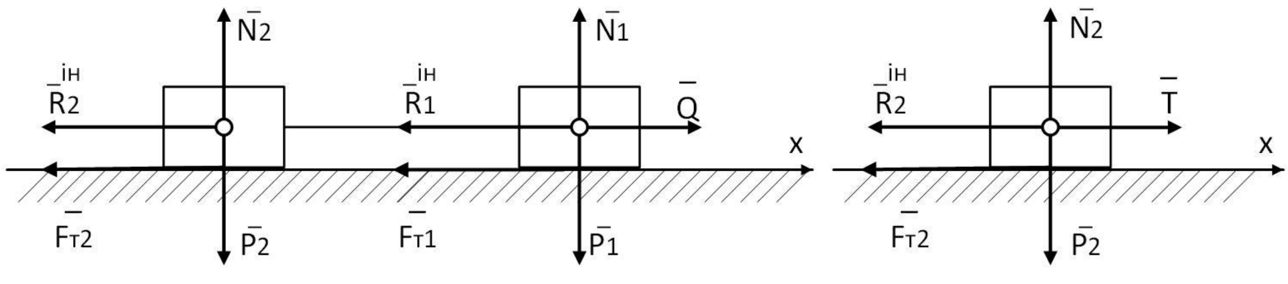
Приклад 7.2

Два вантажі вагою P_1 і P_2 кожен, зв'язані ниткою, рухаються по горизонтальній площині під дією сили $\bar{Q}$, прикладеної до першого вантажу (рис. 7.8, а). Коефіцієнт тертя вантажів по поверхні f. Знайти прискорення вантажів і натяг нитки.

Розв'язок. Зображаємо всі діючі на систему зовнішні сили $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{Q}, \bar{F}_{т1}, \bar{F}_{т2}$ та реакції в'язей $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$. Додаємо до цих сил сили інерції вантажів $\bar{R}_1^{ін}$ і $\bar{R}_2^{ін}$. Так як обидва вантажі рухаються поступально з одним і тим же прискоренням, то за модулем

$$R_1^{ін} = m_1 a = \frac{P_1}{g} a,\ R_2^{ін} = m_2 a = \frac{P_2}{g} a.$$

Напрямки сил показані на кресленні.



а) б)

Рис. 7.8

Сили тертя рівні:

$$F_{т1} = fP_1,\ \ F_{т2} = fP_2.$$

Згідно принципу Даламбера отримана система сил знаходиться в рівновазі. Склавши рівняння рівноваги в проекції на горизонтальну вісь x, знайдемо

$$Q - F_{т1} - F_{т2} - R_1^{ін} - R_2^{ін} = 0$$

Підставивши в це рівняння значення сил, отримаємо

$$Q - f(P_1 + P_2) - \frac{(P_1+P_2)a}{g} = 0$$

Звідси

$$a = \left[\frac{Q}{P_1+P_2} - f\right] g.$$

Очевидно, вантажі будуть рухатися, якщо $f < Q/(P_1 + P_2)$.

Натяг нитки, яка з'єднує вантажі, в даній системі є внутрішньою силою. Для її визначення роз'єднуємо систему і застосовуємо принцип Даламбера до одного з вантажів, наприклад до другого (рис. 7.8, б). На цей вантаж діють сила $\bar{P}_2$, нормальна реакція $\bar{N}_2$, сила тертя $\bar{F}_{\text{т}2}$ і натяг нитки $\bar{T}$. Приєднуючи до них силу інерції $\bar{R}_2^{\text{ін}}$ і складаючи рівняння рівноваги в проекції на горизонтальну вісь x, знаходимо

$$T - F_{\text{т}2} - R_2^{\text{ін}} = 0.$$

Підставляємо в це рівняння значення сил

$$T - fP_2 - \frac{P_2}{g}a = 0.$$

Остаточно, підставляючи сюди знайдене раніше a знаходимо

$$T = QP_2/(P_1 + P_2).$$

Цікаво, що натяг нитки в цьому випадку не залежить від сили тертя і при одній і тій же сумарній вазі системи буде тим меншим, чим менша вага другого (заднього) вантажа. Тому, наприклад, в залізничному потягу вигідніше в голові розміщувати важчі вагони, а в хвості – легші.

Розглянемо чисельний приклад. Нехай $Q = 200\ H, P_1 = 400\ H, P_2 = 100\ H$. Тоді рух можливий, якщо $f < 0{,}4$. Натяг нитки при цьому рівний $40\ H$. Якщо вантажі поміняти місцями, то натяг нитки стане рівним $160\ H$.

ЛЕКЦІЯ 8. ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІЧНИХ РЕАКЦІЙ ПІДШИПНИКІВ ПРИ ОБЕРТАННІ ТВЕРДОГО ТІЛА НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ОСІ

Розглянемо тверде тіло, яке обертається з кутовою швидкістю ω та кутовим прискоренням ε навколо осі, закріпленої підп'ятником в точці A і підшипником в точці B (рис. 8.1). Зв'яжемо з тілом осі $Axyz$, які обертаються разом з ним. Нехай на тіло діють задані сили $\bar{F}_1^e, \bar{F}_2^e, \dots, \bar{F}_n^e$. Позначимо реакції підп'ятника A – X_A, Y_A, Z_A, а реакції підшипника B – X_B, Y_B.

Для визначення динамічних реакцій підп'ятника і підшипника, тобто реакцій, які виникають при обертанні тіла, приєднаємо до всіх діючих на тіло заданих сил і реакцій в'язей сили інерції $\bar{\Phi}_k$ усіх частинок тіла.

Тоді, за *методом кінетостатики*, задані сили, прикладені до тіла, реакцій в'язей і сили інерції, діючі на частинки тіла утворюють врівноважену систему сил.

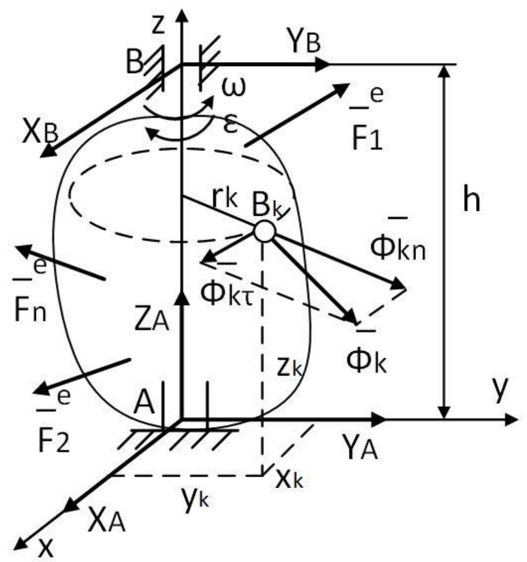


Рис. 8.1

Складаємо згідно принципу Даламбера рівняння (7.9):

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^e + \sum_{k=1}^{n} \bar{N}_{A,B}^e - M\bar{a}_C$$

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{m}_A(\bar{F}_k^e) + \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_A(\bar{N}_{A,B}^e) - \frac{d\bar{K}_A}{dt} = 0 \tag{8.1}$$

Для знаходження головного вектора і головного моменту сил інерції обчислимо сили інерції точки B_k. Тангенціальна сила інерції цієї точки рівна $\Phi_{k\tau} = m_k r_k \varepsilon$, нормальна сила інерції $\Phi_{kn} = m_k r_k \omega^2$. Знайдемо проекції цих сил на осі координат. Для зручності точку B_k а також сили $\bar{\Phi}_{k\tau}$ і $\bar{\Phi}_{kn}$ спроектуємо на площину xAy (рис. 8.2).

$$\Phi_{k\tau x} = m_k r_k \varepsilon \cdot sin\alpha_k = m_k y_k \varepsilon$$
$$\Phi_{k\tau y} = -\, m_k r_k \varepsilon \cdot cos\alpha_k = -\, m_k x_k \varepsilon$$
$$\Phi_{k\tau z} = 0$$
$$\Phi_{knx} = m_k r_k \omega^2 \cdot cos\alpha_k = m_k x_k \omega^2$$
$$\Phi_{kny} = m_k r_k \omega^2 \cdot sin\alpha_k = m_k y_k \omega^2$$
$$\Phi_{knz} = 0$$

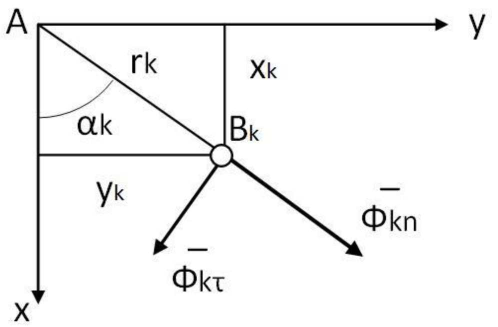


Рис 8.2

Тоді проекції головного вектора сил інерції для всіх точок тіла на осі координат:

$$R_x^{\text{ін}} = \sum_{k=1}^{n} \Phi_{k\tau x} + \sum_{k=1}^{n} \Phi_{knx} = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} m_k x_k \omega^2 =$$

$$\varepsilon \sum_{k=1}^{n} m_k y_k + \omega^2 \sum_{k=1}^{n} m_k x_k = MY_C \varepsilon + MX_C \omega^2; \qquad (8.2)$$

тут M – маса тіла;

X_C, Y_C – координати центра мас тіла.

Аналогічно

$$R_y^{\text{ін}} = \sum_{k=1}^{n} \Phi_{k\tau y} + \sum_{k=1}^{n} \Phi_{kny} = -\sum_{k=1}^{n} m_k x_k \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} m_k y_k \omega^2 =$$

$$-\,\varepsilon \sum_{k=1}^{n} m_k x_k + \omega^2 \sum_{k=1}^{n} m_k y_k = -\, MX_C \varepsilon + MY_C \omega^2; \qquad (8.3)$$

$$R_z^{\text{ін}} = \sum_{k=1}^{n} \Phi_{k\tau z} + \sum_{k=1}^{n} \Phi_{knz} = 0. \qquad (8.4)$$

Знайдемо моменти сил $\overline{\Phi}_{k\tau}$ і $\overline{\Phi}_{kn}$ відносно осей координат:

$$m_x(\Phi_{k\tau}) = \Phi_{k\tau y} z_k = m_k x_k z_k \varepsilon$$
$$m_y(\Phi_{k\tau}) = \Phi_{k\tau x} z_k = m_k y_k z_k \varepsilon$$
$$m_z(\Phi_{k\tau}) = -\, \Phi_{k\tau} r_k = -\, m_k r_k^2 \varepsilon$$
$$m_x(\Phi_{n\tau}) = -\, \Phi_{kny} z_k = -\, m_k y_k z_k \omega^2$$
$$m_y(\Phi_{n\tau}) = \Phi_{knx} z_k = m_k x_k z_k \omega^2$$
$$m_z(\Phi_{n\tau}) = 0.$$

Тепер визначимо головний момент сил інерції відносно осі *Ax*:
$M_x^{\text{ін}} = \sum_{k=1}^{n} m_x(\Phi_{k\tau}) + \sum_{k=1}^{n} m_x(\Phi_{n\tau}) = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k \varepsilon - \sum_{k=1}^{n} m_k y_k z_k \omega^2 =$

$$\varepsilon \sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k - \omega^2 \sum_{k=1}^{n} m_k y_k z_k,$$

де $\sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k = I_{xz}$ – відцентровий момент інерції тіла відносно осей *Ax* і *Ay*;

$\sum_{k=1}^{n} m_k y_k z_k = I_{yz}$ – відцентровий момент інерції тіла відносно осей *Ay* і *Az*.

Тоді остаточно

$$M_x^{\text{ін}} = I_{xz}\varepsilon - I_{yz}\omega^2. \qquad (8.5)$$

Для головних моментів сил інерції відносно осей *Ay* і *Az* аналогічно знайдемо:
$M_y^{\text{ін}} = \sum_{k=1}^{n} m_y(\Phi_{k\tau}) + \sum_{k=1}^{n} m_y(\Phi_{n\tau}) = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k z_k \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k \omega^2 =$

$$\varepsilon \sum_{k=1}^{n} m_k y_k z_k + \omega^2 \sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k$$

Остаточно отримуємо

$$M_y^{\text{ін}} = I_{yz}\varepsilon + I_{xz}\omega^2. \qquad (8.6)$$

$M_z^{\text{ін}} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\Phi_{k\tau}) + \sum_{k=1}^{n} m_z(\Phi_{n\tau}) = -\sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 \varepsilon = -\varepsilon \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 = -I_z\varepsilon$

де $\sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 = I_z$ – момент інерції тіла відносно осі *Az*.

Отже,

$$M_z^{\text{ін}} = -I_z\varepsilon. \qquad (8.7)$$

За принципом Даламбера, знайдемо проекції рівнянь (8.1) на осі координат, враховуючи обчислені значення проекцій головного вектора і головного моменту сил інерції на ці осі.

$$X_A + X_B + \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e + MY_C\varepsilon + MX_C\omega^2 = 0$$

$$Y_A + Y_B + \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e - MX_C\varepsilon + MY_C\omega^2 = 0$$

$$Z_A + \sum_{k=1}^{n} F_{kz}^e = 0 \qquad (8.8)$$

$$-Y_B h + \sum_{k=1}^{n} m_x(\bar{F}_k^e) + I_{xz}\varepsilon - I_{yz}\omega^2 = 0$$

$$X_B h + \sum_{k=1}^{n} m_y(\bar{F}_k^e) + I_{yz}\varepsilon + I_{xz}\omega^2 = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(\bar{F}_k^e) - - I_z\varepsilon = 0$$

Рівняння (8.8) і визначають невідомі *динамічні реакції* в'язей, діючі на вісь тіла, яке обертається. Останнє рівняння не містить невідомих і являє собою диференціальне рівняння обертального руху тіла.

Назвемо *статичними реакціями* ті значення реакцій, які одержимо з рівнянь (8.8), якщо $\omega = 0$ і $\varepsilon = 0$. Як видно, динамічні реакції можуть взагалі бути значно більшими за статичні, причому це залежить не лише від значень ω і ε, але і від величин X_C, Y_C, I_{xz}, I_{yz}, характеризуючих розподіл маси тіла відносно осі обертання *Az*.

З'ясуємо, за яких умов динамічні реакції в'язей, накладених на тіло, дорівнюють статичним реакціям цих в'язей. Щоб одержати ці умови, прирівняємо до нуля в рівняннях (8.8) доданки, що містять ε і ω^2.

$$Y_C\varepsilon + X_C\omega^2 = 0; \quad -X_C\varepsilon + Y_C\omega^2 = 0$$

$$I_{xz}\varepsilon - I_{yz}\omega^2 = 0; \quad I_{yz}\varepsilon + I_{xz}\omega^2 = 0$$

Розв'язавши ці рівності відносно X_C, Y_C та I_{xz}, I_{yz} знаходимо

$$X_C = 0; \quad Y_C = 0 \tag{8.9}$$

Центр ваги тіла має лежати на осі обертання.

$$I_{xz} = 0; \; I_{yz} = 0 \tag{8.10}$$

Вісь обертання тіла повинна бути головною віссю інерції для початку координат A.

Отже, *умови динамічної врівноваженості* тіла, яке обертається.

Динамічні реакції, діючі на вісь тіла, яке обертається, дорівнюватимуть статичним, якщо вісь обертання є головною центральною віссю інерції тіла.

Якщо умова (8.9) виконується, а (8.10) – ні, то тіло буде *врівноважене статично*, але не врівноважене динамічно. Прикладом такої неврівноваженості може бути диск, що обертається навколо нерухомої осі, яка проходить через його центр мас, але не перпендикулярна до площини матеріальної симетрії тіла.

Якщо умова (8.9) не виконується, а (8.10) виконується, то тіло *врівноважене динамічно*, але не врівноважене статично. Прикладом може бути диск, що обертається навколо осі, перпендикулярної до площини матеріальної симетрії диска, але яка не проходить через його центр мас.

Якщо виконуються обидві умови (8.9) і (8.10), то тіло, яке обертається *врівноважене і статично і динамічно*. У цьому випадку вісь обертання тіла називається *вільною*.

Задача динамічного врівноваження тіл, що обертаються є одною з актуальних задач сучасного машинобудування.

В загальному випадку неврівноваженість тіл, які обертаються, можна усунути шляхом приєднання або вилучення двох точкових мас m_1 і m_2, розташованих в довільно вибраних площинах, перпендикулярних до осі обертання. Величини цих мас та їх координати x_1, x_2, y_1, y_2 в площинах $z = z_1 = z_2$ знаходять з рівнянь

$$MX_C + m_1x_1 + m_2x_2 = 0$$

$$MY_C + m_1y_1 + m_2y_2 = 0 \qquad (8.11)$$

$$I_{xz} + m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2 = 0$$

$$I_{yz} + m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2 = 0$$

Одержані рівняння виражають той факт, що після приєднання точкових мас m_1 і m_2 вісь обертання тіла стає головною центральною віссю інерції. Використовуючи рівняння (8.11) потрібно деякі величини, які входять в ці рівняння, задати наперед. Наприклад, можна задати значення m_1, m_2, z. Тоді величини x_1, y_1, x_2, y_2 знаходимо з рівнянь (8.11).

Приклад 8.1

Вісь обертання диска, перпендикулярна його площині (рис. 8.3), зміщена від центра мас на відстань $OC = b$. Вага диска P, кутова швидкість постійна і рівна ω. Визначити динамічні реакції підшипників A і B, якщо $OA = OB = h$.

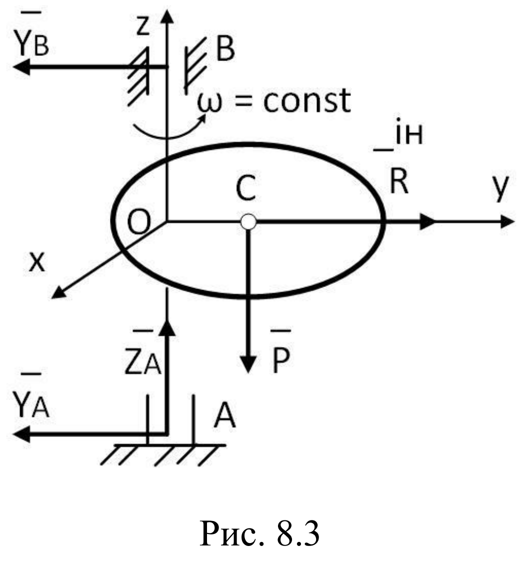


Рис. 8.3

Розв'язок. Проведемо осі *Oxyz*, які обертаються разом з диском, таким чином, щоб вісь *Oy* пройшла через центр мас *C* диска. Тоді вісь *Oz* буде головною віссю інерції диска для точки *O*, так як площина *Oxy* це площина симетрії диска. Тоді $I_{xz} = I_{yz} = 0$ і з формул (8.5 – 8.7) та умови ω = *const* видно, що $\overline{M}_O^{\text{ін}} = 0$. Отже, сили інерції приводяться до однієї рівнодіючої, яка проходить через точку *O* і направлена вздовж лінії *OC* (вздовж осі *Oy*). За модулем

$$R^{\text{ін}} = ma_{Cn} = \left(\frac{P}{g}\right) b\omega^2.$$

Так як сили $\bar{P}$ і $\bar{R}^{\text{ін}}$ лежать в площині *Oyz*, то реакції підшипників лежать в тій же площині, тобто, мають складові $\bar{Y}_A, \bar{Z}_A$ в точці *A* і $\bar{Y}_B$ в точці *B*. Тоді, складаючи на основі принципу Даламбера для всіх діючих сил і сил інерції рівняння рівноваги в проекціях на осі *y* і *z* та рівняння моментів відносно центра *A*, одержимо:

$$R^{\text{ін}} - Y_A - Y_B = 0$$

$$Z_A - P = 0$$

$$Y_B \cdot 2h - P \cdot b - R^{\text{ін}} \cdot h = 0.$$

Розв'язавши ці рівняння, маємо:

$$Y_B = P \cdot b \left(\frac{\omega^2}{2g} + \frac{1}{2h}\right),\ Y_A = P \cdot b \left(\frac{\omega^2}{2g} - \frac{1}{2h}\right),\ Z_A = P.$$

Реакції $\bar{Y}_A$ і $\bar{Y}_B$ увесь час розташовані в площині *Oyz*, яка обертається разом з тілом.

ЛЕКЦІЯ 9. ОСНОВИ АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Аналітична механіка встановлює загальні єдині методи вивчення руху і рівноваги, які використовуються для всіх матеріальних систем. Ці методи являють собою дослідження засобами математичного аналізу всіх можливих рухів матеріальної системи. При цьому рівняння руху виводяться однієї і тієї ж структури, яка не залежить від виду системи та характеру умов, накладених на її рух.

Загальні рівняння аналітичної механіки виявляються зручними і для розв'язку конкретних задач механіки і для загальних досліджень властивостей рухів та процесів. Основоположними поняттями цього розділу механіки є: уявлення про в'язі та їх класифікація, поняття про дійсні й можливі переміщення системи.

9.1 Класифікація в'язей

В'язями називаються обмеження, накладені на рух точок системи.

Якщо на систему не накладено в'язі, вона називається *вільною*, в іншому випадку – *невільною*.

Аналітично в'язі задаються рівняннями, які називають *рівняннями в'язей*. В'язі можуть бути задані певними співвідношеннями між координатами (x_k, y_k, z_k) точок, їх похідними за часом ($\frac{dx_k}{dt}, \frac{dy_k}{dt}, \frac{dz_k}{dt}$) – компонентами швидкостей, другими похідними за часом ($\frac{d^2x_k}{dt^2}, \frac{d^2y_k}{dt^2}, \frac{d^2z_k}{dt^2}$) – компонентами прискорень в даній системі координат і навіть похідними вищих порядків. В ці співвідношення може явно входити і час t.

Обмеження, які накладаються в'язями, можуть мати характер направленості, спеціальне призначення, необхідне для практики, для різних областей техніки. Так, наприклад, керовані механічні системи – це системи з визначеними в'язями, що обумовлюють заданий режим руху. Задачею техніки є реалізація таких в'язей у вигляді відповідних керуючих пристроїв.

Аксіома в'язей в аналітичній механіці дозволяє вважати, що вплив в'язей на положення і рух матеріальних точок здійснюється за допомогою дії сил реакцій в'язей.

Приклавши до точок системи реакції в'язей, формально її можна розглядати як вільну систему точок.

Від характеру в'язей залежить не тільки вид руху системи, але й вибір способів для вивчення руху.

Класифікувати в'язі можна за різними ознаками.

Розділимо в'язі в першу чергу на два класи*: голономні* і *неголономні*.

Голономними (або *інтегрованими*) називають в'язі, рівняння яких не містять похідних за часом від координат точок системи або шляхом інтегрування можуть бути до такого вигляду приведені. Такі в'язі часто називають *геометричними* в'язями.

Голономні в'язі, накладені на систему з n точок, в загальному випадку задаються рівняннями виду:

$$f(t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0 \tag{9.1}$$

Неголономними називають в'язі, задані неінтегрованими диференціальними рівняннями відносно координат, тобто рівняннями, які містять не тільки координати точок системи, але і їх похідні за часом.

Таким чином, *неголономні* в'язі першого порядку задаються рівняннями виду:

$$f\left(t, x_k, y_k, z_k, \frac{dx_k}{dt}, \frac{dy_k}{dt}, \frac{dz_k}{dt}\right) = 0 \tag{9.2}$$

Неголономні в'язі називають також *кінематичними*, так як вони накладають умови не лише на координати точок системи, але й на їх швидкості та прискорення.

В залежності від в'язей механічні системи також розділяють на *голономні* (з голономними в'язями) і *неголономні* (які містять неголономними в'язі).

В'язі, які не змінюються з часом, називаються *стаціонарними*, а ті, які змінюються з часом – *нестаціонарними*.

Рівняння, що виражає голономну, залежну від часу в'язь, має вигляд

$$f(x_k, y_k, z_k, t) = 0 \tag{9.3}$$

Розглянемо приклади голономних систем.

Приклад 9.1

Система складається з двох матеріальних точок B_1 і B_2, з'єднаних між собою невагомим стержнем довжиною l (рис 9.1)

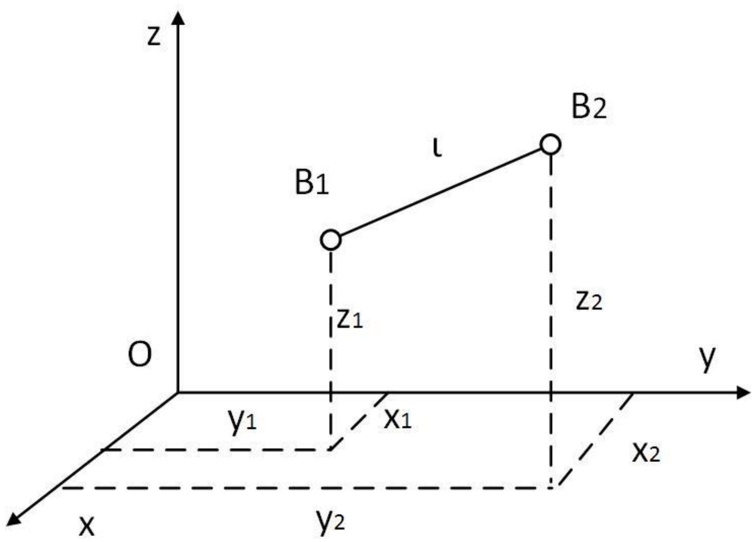


Рис. 9.1

Рівняння цієї голономної стаціонарної в'язі має вигляд:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0.$$

Приклад 9.2

Голономною системою є також колесо, яке котиться вздовж прямолінійної рейки без ковзання (рис. 9.2).

В'язі, накладені на колесо, виражаються рівняннями:

$$PC = r = const$$

$$\bar{v}_P = \bar{v}_C + \bar{\omega} \times \overline{CP} = 0.$$

Проектуючи обидві частини останнього рівняння на осі координат *Ox* і *Oy* та врахувавши, що

$$v_{Cx} = \frac{dx_C}{dt}, \quad (\overline{\omega} \times \overline{CP})_x = -r\frac{d\varphi}{dt}, \quad v_{Cy} = \frac{dy_C}{dt} = 0,$$

одержимо

$$\frac{dx_C}{dt} - r\frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \frac{dy_C}{dt} = 0.$$

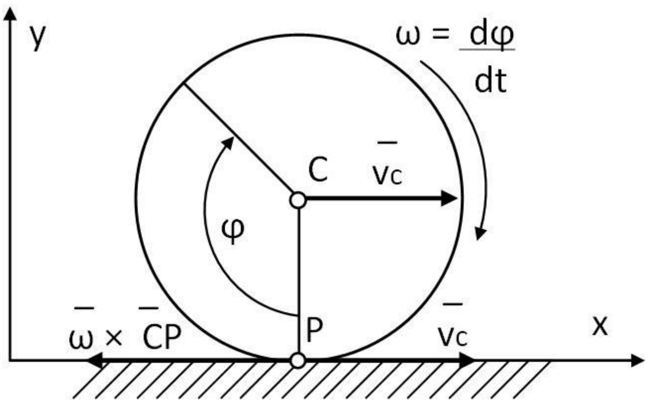


Рис. 9.2

Інтегруємо ці рівняння, врахувавши, що при $t = 0$, $y_C = r$, $\varphi = 0$, $x_C = 0$. Знаходимо

$$x_C = r\varphi, \quad y_C = r.$$

Ці рівняння не містять похідних від координат за часом і самого часу t. Отже, в'язі, накладені на колесо є голономними і стаціонарними.

Розглядають ще в'язі *утримуючі* (накладені ними обмеження зберігаються при будь-якому положенні системи) і *неутримуючі* (від таких зв'язків система може "звільнитись").

Прикладом неутримуючої в'язі може бути сфера по зовнішній стороні якої рухається точка *B* (рис. 9.3).

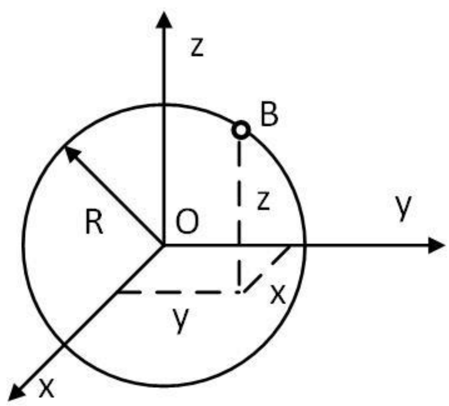


Рис. 9.3

Ця в'язь перешкоджає переміщенню точки B всередину сфери, не перешкоджаючи її переміщенню у зовнішню, по відношенню до сфери, частину простору. Якщо центр сфери O прийняти за початок системи координат $Oxyz$, то вказана в'язь виражається нерівністю

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \geq 0.$$

Знак нерівності показує, що точка B може зійти зі сфери у зовнішню частину простору.

Якщо точка знаходиться всередині, на внутрішній стороні сфери, і може зійти з неї в середину сфери, то в'язь, накладена на точку виражається нерівністю

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \leq 0.$$

В подальшому розглядатимемо тільки механічні системи голономними утримуючими в'язями. Рівняння таких в'язей в загальному випадку мають вигляд рівнянь (9.3).

9.2 Віртуальні переміщення системи. Число ступенів вільності

Розглянемо механічну систему з голономними утримуючими в'язями. Завдяки цим в'язям деякі переміщення для точок системи будуть неможливими. Так, наприклад, для механічної системи, яка складається з двох матеріальних точок, з'єднаних стержнем незмінної довжини (рис. 9.1), неможливими є переміщення при яких відстань між цими точками зміниться – зменшиться чи збільшиться.

Дійсними називають такі переміщення точок системи, що не суперечать в'язям і відбуваються під дією заданих сил.

Такі переміщення відповідають дійсному закону руху системи.

На відміну від дійсних, *віртуальні переміщення* розглядаються незалежно від діючих сил, закону руху системи і являють собою нескінченну сукупність уявних одночасних переміщень точок системи, сумісних із в'язями.

Віртуальними називають уявні нескінченно малі переміщення точок системи, що не суперечать в'язям і відбуваються у фіксований момент часу.

Віртуальні переміщення – поняття геометричні. Вони являють собою нескінченно малі за модулем вектори, залежні лише від структури в'язей, накладених на систему в певний фіксований момент часу, і не залежать ні від діючих сил, ні від часу.

Сукупність віртуальних переміщень точок системи в певний фіксований момент називається *віртуальним переміщенням системи* в цей момент часу.

Віртуальні переміщення точок B_k системи позначають $\delta\bar{r}_k$ на відміну від дійсних переміщень $d\bar{r}_k$ цих точок за нескінченно малий проміжок часу dt.

Проекції віртуальних переміщень на осі координат x, y, z позначають відповідно $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$, модуль віртуального переміщення – δs_k.

Якщо на систему накладені стаціонарні в'язі, то дійсні переміщення точок системи співпадають з одним з віртуальних переміщень цих точок. Якщо ж накладені в'язі нестаціонарні, то дійсні переміщення точок системи ні з одним з віртуальних переміщень не співпадають.

В справедливості цього твердження переконаємось розглянувши приклад. Нехай точка B вимушена залишатись на нерухомій сфері постійного радіуса (рис. 9.4). Тоді будь-яке нескінченно мале переміщення $\delta\bar{r}$ точки лежить в дотичній площині до цієї сфери. І, очевидно, дійсне переміщення $d\bar{r}$ точки B співпадає з одним з віртуальних переміщень цієї точки.

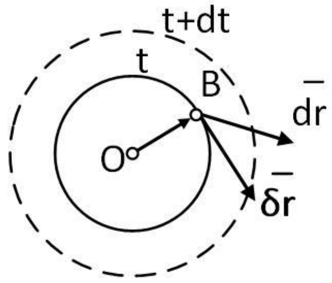


Рис. 9.4

Далі, припустимо, що центр сфери залишається нерухомим, але радіус сфери з часом збільшується. У цьому випадку в'язь, накладена на точку буде нестаціонарною. Віртуальним переміщенням точки буде будь-яке нескінченно мале переміщення $\delta\bar{r}$, яке лежить в дотичній площині до сфери. Дійсне ж переміщення $d\bar{r}$ точки внаслідок зміни радіуса сфери не лежатиме в дотичній до сфери площині і, таким чином не співпадатиме ні з одним з віртуальних переміщень даної точки.

В загальному випадку механічна система може мати множину різних віртуальних переміщень. Однак для будь-якої системи, можна вказати деяке число таких незалежних між собою переміщень, що будь-яке інше віртуальне переміщення може бути через них виражене. Наприклад, для точки, яка знаходиться на якій-небудь площині (поверхні), будь-яке віртуальне переміщення $\delta\bar{r}$ вздовж цієї площини можна виразити через два взаємно перпендикулярних переміщення $\delta\bar{r}_1$ і $\delta\bar{r}_2$ у вигляді $\delta\bar{r} = a\delta\bar{r}_1 + b\delta\bar{r}_2$, де a і b – будь-які додатні чи від'ємні числа.

Число незалежних між собою віртуальних переміщень механічної системи називається числом ступенів вільності цієї системи.

Отже, точка, яка знаходиться на площині має два ступені вільності; одночасно її положення визначається двома незалежними координатами x і y. Вільна матеріальна точка має три ступені вільності (незалежними будуть три віртуальних переміщення вздовж трьох взаємо перпендикулярних осей); одночасно положення точки визначається трьома незалежними координатами x, y, z і т. д.

Цей результат виявляється загальним, тобто

у механічної системи з геометричними в'язями число незалежних координат, які визначають положення системи, співпадає з числом її ступенів вільності.

9.3 Можлива робота сили

Якщо до точки прикладена сила $\bar{F}$, то враховуючи віртуальні переміщення точки з певного її положення, які допускаються в'язями, можна обчислити і величину елементарної роботи сили на тому чи іншому віртуальному переміщенні.

Ця робота і є *можливою елементарною роботою* сили

$$\delta A_{\bar{F}} = \bar{F} \cdot \delta\bar{r} \qquad (9.4)$$

або в координатній формі

$$\delta A_F = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z.$$

Враховуючи рівняння (6.3), вираз для можливої роботи сили можна одержати у вигляді

$$dA_F = |\bar{F}||\delta\bar{r}|cos\varphi = \bar{F} \cdot d\bar{r}, \qquad (9.5)$$

де φ – кут між вектором сили і вектором віртуального переміщення.

Будемо можливу роботу активної сили $\bar{F}^a$ позначати δA^a

$$\delta A^a = \bar{F}^a \cdot \delta\bar{r}\ , \qquad (9.6)$$

а можливу роботу реакції $\bar{N}$ позначати δA^r

$$\delta A^r = \bar{N} \cdot \delta\bar{r}\ . \qquad (9.7)$$

9.4 Ідеальні в'язі

Поняття віртуальних переміщень дає змогу встановити аналітичну умову, що відображає фізичні особливості ідеальних в'язей.

Розв'язуючи задачі механіки, ми розглядали в'язі, фізично здійснювані у вигляді абсолютно гладенької поверхні, абсолютно твердого невагомого стержня, нерозтяжної, невагомої та абсолютно гнучкої нитки тощо. Такі в'язі, внаслідок своїх фізичних властивостей визначають напрямки реакцій. Узагальнюючи їхні властивості та використовуючи поняття про можливі переміщення точок системи, введені раніше, можна дати таке аналітичне визначення ідеальних в'язей.

Ідеальними називають в'язі, алгебрична сума елементарних робіт реакцій яких на будь-яких можливих переміщеннях точок системи дорівнює нулю.

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{N}_k \cdot \delta\bar{r}_k = \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^r = 0. \tag{9.8}$$

Розглянемо приклад ідеальної в'язі: матеріальна точка, яка знаходиться на гладкій нерухомій поверхні або гладкій лінії (рис. 9.5).

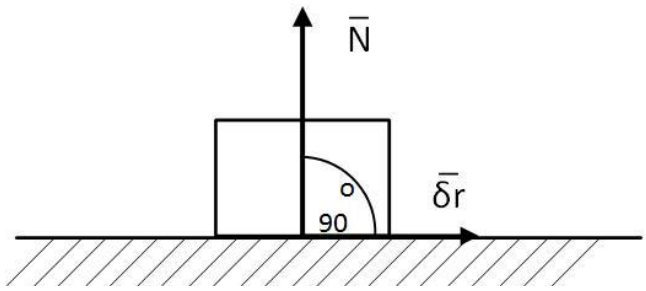


Рис. 9.5

У цьому випадку, як відомо, реакція $\bar{N}$ направлена по нормалі до поверхні в даній точці. Віртуальні переміщення $\delta\bar{r}$ точки лежать в дотичній площині до поверхні і реакція $\bar{N}$ перпендикулярна до віртуального переміщення $\delta\bar{r}$ точки.

Таким чином

$$\delta A(\bar{N}) = \bar{N} \cdot \delta\bar{r} = |\bar{N}| \cdot |\delta\bar{r}| cos\alpha = 0;\ \alpha = 90^0.$$

9.5 Принцип віртуальних переміщень

Принцип віртуальних переміщень – це найзагальніший принцип аналітичної механіки. Він виражає умови рівноваги точки або системи, яка знаходиться під дією заданої системи активних сил.

Для рівноваги механічної системи з ідеальними в'язями необхідно і достатньо, щоб сума елементарних робіт усіх діючих на неї активних сил на будь-якому віртуальному переміщенні системи дорівнювала нулю.

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^a \cdot \delta\bar{r}_k = 0. \tag{9.9}$$

Доведення: Розглянемо механічну систему, яка під дією прикладених до неї активних сил і реакцій ідеальних голономних, стаціонарних і утримуючих в'язей знаходиться в рівновазі. Виділимо довільну точку системи B_k ($k = 1, 2,...,n$). Позначимо рівнодійну прикладених до цієї точки активних сил (зовнішніх та внутрішніх) $\bar{F}_k^a$, а рівнодійну всіх реакцій в'язей (зовнішніх та внутрішніх) $\bar{N}_k$ (рис. 9.6). Так як точка B_k знаходиться в рівновазі, то сума сил $\bar{F}_k^a$ і $\bar{N}_k$ дорівнює нулю.

$$\bar{F}_k^a + \bar{N}_k = 0 \tag{9.10}$$

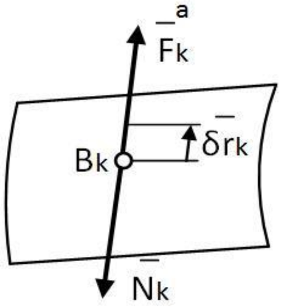


Рис. 9.6

Надаємо системі будь-яке віртуальне переміщення. Тоді точка B_k одержить віртуальне переміщення $\delta\bar{r}_k$. Помноживши обидві частини рівняння (9.10) скалярно на $\delta\bar{r}_k$, одержимо

$$\bar{F}_k^a \cdot \delta\bar{r}_k + \bar{N}_k \cdot \delta\bar{r}_k = 0.$$

Запишемо такі рівняння для кожної точки системи і додаємо їх почленно

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^a \cdot \delta\bar{r}_k + \sum_{k=1}^{n} \bar{N}_k \cdot \delta\bar{r}_k = 0$$

Так як в'язі, накладені на систему ідеальні, то згідно з (9.8)

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{N}_k \cdot \delta\bar{r}_k = 0$$

І, таким чином, умова рівноваги доведена

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^a \cdot \delta\bar{r}_k = \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a = 0$$

Цю рівність можна представити в аналітичній формі:

$$\sum_{k=1}^{n} (F_{kx}^a \cdot \delta x_k + F_{ky}^a \cdot \delta y_k + F_{kz}^a \cdot \delta z_k) = 0$$

Принцип віртуальних переміщень встановлює загальну умову рівноваги механічної системи, яка не потребує розгляду рівноваги окремих частин (тіл) цієї системи і дозволяє при ідеальних в'язях виключити з розгляду всі наперед невідомі реакції в'язей.

Розв'язуючи задачі за допомогою принципу віртуальних переміщень насамперед потрібно визначити число ступенів вільності системи, за числом незалежних віртуальних переміщень.

Для розв'язку задачі потрібно:

1) зобразити всі діючі на систему активні сили;
2) надати системі віртуальне переміщення і показати на кресленні елементарні переміщення δs_k точок прикладання сил чи кути $\delta\varphi_k$ елементарних поворотів тіл, на які діють сили;
3) підрахувати елементарні роботи усіх активних сил на даному переміщенні за формулами:

$$\delta A_k^a = F_{k\tau}^a \cdot \delta s_k = F_k^a \cdot \delta s_k cos\alpha_k \text{ або } \delta A_k^a = m_O(F_k^a)\delta\varphi_k.$$

   та скласти умову (9.9).
4) встановити залежність між величинами δs_k і $\delta\varphi_k$, які входять в рівняння (9.9), і виразити ці величини через яку-небудь одну, що для системи з одним ступенем вільності завжди можна зробити.
   Після заміни всіх величин δs_k, $\delta\varphi_k$ через одну одержимо рівняння з якого і знайдеться невідома величина чи залежність.

Залежності між δs_k і $\delta\varphi_k$ можна знаходити з відповідних геометричних співвідношень чи з кінематичних співвідношень, вважаючи, що система рухається, і визначаючи при даному положенні системи залежність між лінійними v_k чи кутовими ω_k швидкостями відповідних точок чи тіл системи, а потім вважаючи $\delta s_k = v_k dt$, $\delta\varphi_k = \omega_k dt$.

Для системи з кількома ступенями вільності задачу можна розв'язувати, складаючи умову (9.9) для кожного з незалежних віртуальних переміщень системи і перетворюючи його таким же шляхом. В результаті для системи отримаємо стільки умов рівноваги, скільки вона має ступенів вільності.

Приклад 9.3

Вантаж піднімають за допомогою домкрата. Знайти вагу вантажа Q, якщо сила P прикладена до рукоятки домкрата $OA = 0,6$ м дорівнює *160* Н. Відомо, що за один оберт рукоятки гвинт піднімається на $h = 12$ мм (рис. 9.7).

Розв'язок. Покажемо діючі активні сили $\bar{Q}$ і $\bar{P}$. Надаємо системі віртуального переміщення. Якщо точка прикладання сили $\bar{P}$ здійснить елементарне переміщення δs_1, то рукоятка (і разом з нею гвинт) повернеться на елементарний кут $\delta\varphi$, а вантаж підніметься на елементарну відстань δs_2.

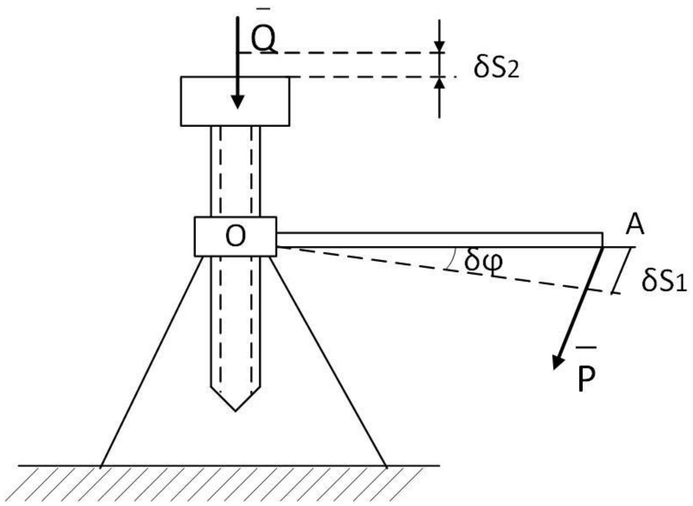


Рис. 9.7

Складаємо рівняння рівноваги

$$P\delta s_1 - Q\delta s_2 = 0 \qquad \text{(a)}$$

Знаходимо залежність між елементарним переміщенням δs_1 і кутом повороту рукоятки $\delta\varphi$:

$$\delta s_1 = \delta\varphi \cdot OA \quad \text{звідки} \;\; \delta\varphi = \frac{\delta s_1}{\delta\varphi}.$$

Тепер знайдемо залежність між кутом повороту $\delta\varphi$ і елементарним переміщенням вантажа δs_2. Так як крок гвинта h = *12* мм, при повному оберті вантаж підніметься на висоту h, а при елементарному куті повороту $\delta\varphi$ лише на δs_2. Тоді, склавши пропорцію, отримаємо

$$\delta s_2 = \frac{h \cdot \delta\varphi}{2\pi} = \frac{h \cdot \delta s_1}{OA \cdot 2\pi}$$

Підставивши знайдені переміщення в рівняння (а), отримаємо

$$P\delta s_1 - Q\frac{h\cdot\delta s_1}{OA\cdot 2\pi} = 0.$$

Звідки маємо

$$Q = P\frac{OA\cdot 2\pi}{h} = 50240\ H.$$

Відмітимо, що методами геометричної статики цю нескладну задачу неможна було б розв’язати, так як деталі механізму невідомі.

9.6 Застосування принципу віртуальних переміщень для визначення реакцій в'язей

Принцип віртуальних переміщень дає змогу визначати невідомі реакції ідеальних в'язей. Для цього треба застосувати аксіому про звільнення від в'язей і замінити дію в'язі шуканою реакцією. При складанні рівняння рівноваги шукану реакцію в'язі слід віднести до активних сил.

Послідовність розв'язку задач з використанням принципу віртуальних переміщень:

- зобразити діючі на систему активні сили;
- відкинути в'язь, реакцію якої потрібно визначити та замінити її реакцією, яка переходить до числа активних сил;
- надати системі віртуального переміщення;
- скласти рівняння рівноваги, тобто записати алгебраїчну суму елементарних робіт сил, що виконуються на віртуальних переміщеннях точок їх прикладання та прирівняти її нулю;
- визначити число ступенів вільності системи та встановити при необхідності залежності між віртуальними переміщеннями;
- у рівняння рівноваги включити залежні віртуальні переміщення і, враховуючи, що віртуальні переміщення не дорівнюють нулю, отримати рівняння, з якого визначити шукану величину.

Приклад 9.4

Складена балка *AD* спирається на рухомі опори *B* і *D* та нерухому опору *A* (рис. 9.8, а). Балки *AC* і *CD* з'єднані між собою шарніром в точці *C*. До балки *CD* прикладена вертикальна сила $\bar{P}$. Визначити реакції опор в точках *B* і *D*.

Розв'язок. Спочатку визначимо реакцію рухомої опори *B*, уявно відкинувши її та замінивши реакцією $\bar{R}_B$ (рис. 9.8, б).

Надаємо віртуальне переміщення δs_B точці *B* вгору. Відповідне положення балки показано на рисунку. Віртуальні переміщення δs_B, δs_C і δs_P пов'язані між собою співвідношеннями

$$\delta s_C = \frac{\delta s_B l_1}{b_1}, \quad \delta s_P = \frac{\delta s_C b_2}{l_2} = \frac{\delta s_B l_1 b_2}{b_1 l_2}, \tag{a}$$

які визначаються з подібності трикутників *ABB'*, *ACC'*, *DCC'* і *DKK'*.

На підставі принципу віртуальних переміщень прирівнюємо до нуля суму робіт активної сили $\bar{P}$ та реакції $\bar{R}_B$ на відповідних віртуальних переміщеннях:

$$R_B \delta s_B - P \delta s_P = 0.$$

Використовуючи рівняння (а), маємо

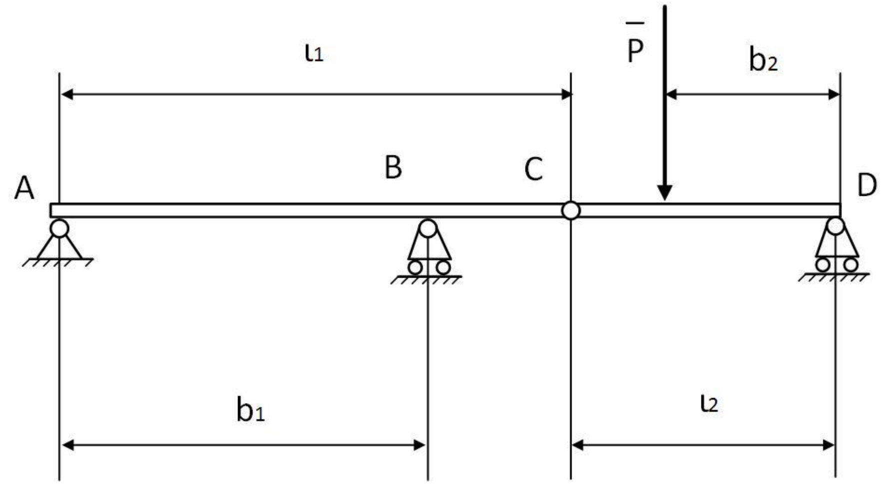
$$R_B \delta s_B - P \frac{\delta s_B l_1 b_2}{b_1 l_2} = 0.$$

Внаслідок того, що віртуальне переміщення $\delta s_B \neq 0$, отримаємо

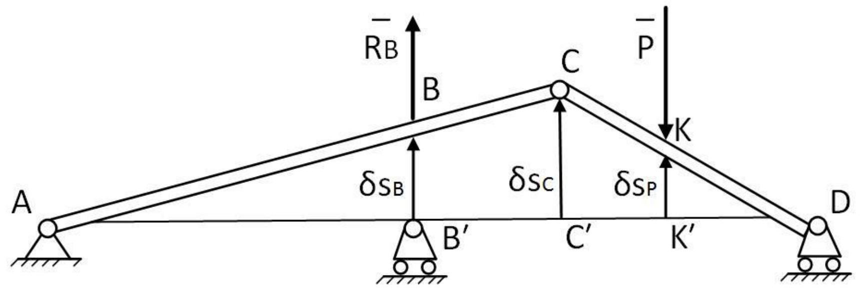
$$R_B - P\frac{l_1 b_2}{b_1 l_2} = 0,$$

звідки

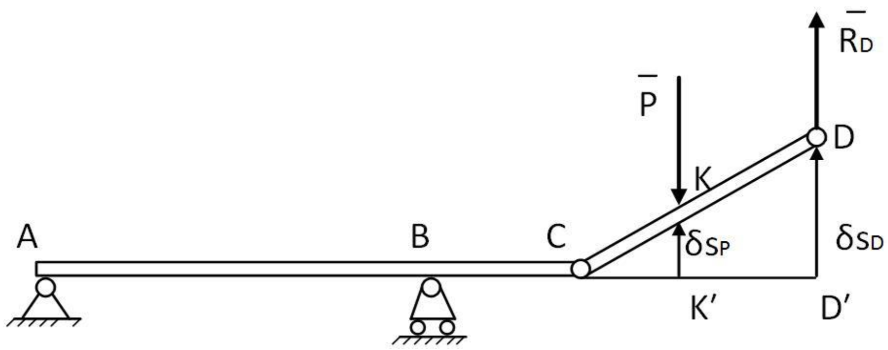
$$R_B = P\frac{l_1 b_2}{b_1 l_2}.$$



а)



б)



в)

Рис. 9.8

Для визначення реакції в рухомій опорі D уявно відкинемо її та замінимо реакцією $\bar{R}_D$ (рисю 9.8, в).

Надаємо віртуальне переміщення δs_D точці D вгору. Позначимо віртуальні переміщення точок прикладання сил $\bar{P}$ і $\bar{R}_D$ відповідно δs_P і δs_D. Зв'язок між віртуальними переміщеннями встановлюємо з подібності відповідних трикутників *CKK′* і *CDD′*:

$$\delta s_P = \frac{\delta s_D l_2}{l_2 - b_2} \qquad (б)$$

Застосуємо принцип віртуальних переміщень та записуємо рівняння

$$R_D \delta s_D - P \delta s_P = 0.$$

Враховуючи рівняння (б), маємо:

$$R_D \delta s_D - P \frac{\delta s_D l_2}{l_2 - b_2} = 0.$$

Так як $\delta s_D \neq 0$, отримаємо

$$R_D - P \frac{l_2}{l_2 - b_2} = 0.$$

Звідки остаточно

$$R_D = P \frac{l_2}{l_2 - b_2}.$$

9.7 Загальне рівняння динаміки. Принцип Даламбера-Лагранжа

Принцип віртуальних переміщень дає загальний метод розв'язку задач статики. З іншого боку, принцип Даламбера дозволяє використовувати методи статики для розв'язку задач динаміки. Отже, застосовуючи ці два принципи одночасно, ми можемо отримати загальний метод розв'язку задач динаміки.

Розглянемо систему матеріальних точок з голономними ідеальними утримуючими в'язями, яка рухається відносно інерціальної системи відліку *Oxyz* під дією активних сил. Якщо до всіх точок системи крім діючих на них активних сил $\bar{F}_k^a$ і реакцій в'язей $\bar{N}_k$ додати відповідні сили інерції $\bar{\Phi}_k = -m_k \bar{a}_k$, то згідно з принципом Даламбера одержана система сил знаходитиметься в рівновазі:

$$\bar{F}_k^a + \bar{N}_k - m_k \bar{a}_k = 0$$

Тоді, застосовуючи до цих сил принцип віртуальних переміщень, надаємо точкам системи віртуальне переміщення $\delta \bar{r}_k$:

$$\bar{F}_k^a \cdot \delta \bar{r}_k + \bar{N}_k \cdot \delta \bar{r}_k - m_k \bar{a}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0.$$

Записуємо такі рівняння для кожної точки системи і додаємо:

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^a \cdot \delta\bar{r}_k + \sum_{k=1}^{n} \bar{N}_k \cdot \delta\bar{r}_k - \sum_{k=1}^{n} m_k\bar{a}_k \cdot \delta\bar{r}_k = 0$$

або

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^r + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{\text{ін}} = 0$$

Так як накладені на систему в'язі ідеальні, то $\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^r = 0$, а отже остаточно

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a + + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{\text{ін}} = 0 \qquad (9.11)$$

З отриманого результату слідує *принцип Даламбера-Лагранжа:*

Під час руху механічної системи з ідеальними зв'язками в кожний момент часу сума елементарних робіт усіх прикладених активних сил і всіх сил інерції на будь-якому віртуальному переміщенні системи дорівнює нулю.

Рівняння (9.11), яке виражає цей принцип, називають *загальним рівнянням динаміки.* Це рівняння для більшості задач дає змогу визначити закон руху механічної системи не визначаючи реакції в'язей.

Методика розв'язку задач з використанням загального рівняння динаміки може бути такою:

- визначаємо число ступенів вільності системи;
- показуємо діючі на систему активні сили;
- робимо припущення про напрямок руху й прискорень точок системи та, виходячи з кінематичних міркувань, знаходимо зв'язок між прискореннями;
- показуємо сили інерції, умовно прикладаючи їх до точок системи. Для твердих тіл систему сил інерції зводимо до головного вектора системи елементарних сил інерції і пари сил, момент якої дорівнює головному моменту сил інерції елементів тіла відносно вибраного центра зведень. Таким чином умовно зупиняємо систему;
- надаємо точкам системи віртуальних переміщень;
- складаємо загальне рівняння динаміки як суму елементарних робіт активних сил, головних векторів сил інерції та їх моментів на відповідних віртуальних переміщеннях;
- встановлюємо зв'язок між віртуальними переміщеннями точок системи;
- підставляємо знайдені незалежні віртуальні переміщення і незалежні прискорення точок системи в загальне рівняння динаміки;

- з одержаного рівняння знаходимо невідомі величини. Задача визначення закону руху системи зводиться до інтегрування диференціального рівняння руху. Якщо визначенню підлягають прискорення точок системи, то задача розв'язується алгебраїчно.

Приклад 9.5

В підйомному механізмі, зображеному на рис. 9.9, до шестерні *1*, яка має вагу P_1 і радіус інерції відносно її осі ρ_1, прикладений обертаючий момент *M*. Визначити прискорення вантажа *3* вагою Q, який піднімають за допомогою мотузки. Барабан, на який намотується мотузка, жорстко скріплений з другою шестернею; їх загальна вага дорівнює P_2, а радіус інерції відносно осі обертання ρ_2. Радіуси шестерень рівні відповідно r_1 і r_2, а радіус барабана *R*.

Розв'язок. Зображаємо діючу на систему активну силу $\bar{Q}$ і обертаючий момент *M* (сили $\bar{P}_1$ і $\bar{P}_2$ роботи не виконують); приєднуємо до них силу інерції вантажа $\bar{R}_3^{\text{ін}}$ і пари з моментами $M_1^{\text{ін}}$ і $M_2^{\text{ін}}$ до яких приводяться сили інерції тіл, які обертаються. Ці величини за модулем рівні:

$$R_3^{\text{ін}} = \frac{Q}{g} a_3,\ M_1^{\text{ін}} = \frac{P_1}{g} \rho_1^2 \varepsilon_1,\ M_2^{\text{ін}} = \frac{P_2}{g} \rho_2^2 \varepsilon_2.$$

Напрямки всіх величин показані на кресленні.

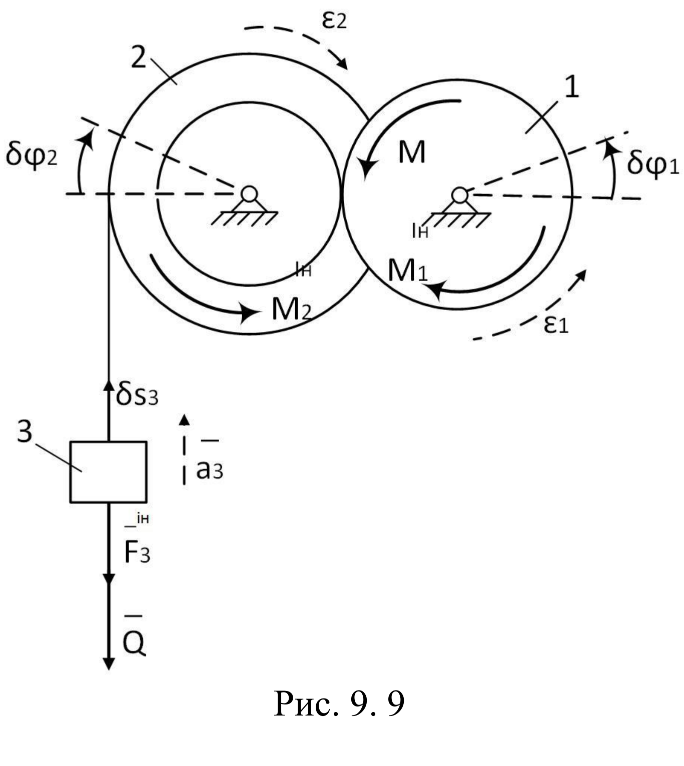


Рис. 9. 9

Надаємо системі віртуальне переміщення і складаємо рівняння (9.11), одержимо

$$-Q\delta s_3 - F_3^{\text{ін}}\delta s_3 + M\delta\varphi_1 - M_1^{\text{ін}}\delta\varphi_1 - M_2^{\text{ін}}\delta\varphi_2 = 0.$$

Виражаючи всі переміщення через $\delta\varphi_2$, знайдемо, що

$$\delta s_3 = r\delta\varphi_2, \quad \frac{\delta\varphi_1}{\delta\varphi_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}, \quad \delta\varphi_1 = \frac{r_2}{r_1}\delta\varphi_2.$$

Остаточно рівняння руху матиме вигляд

$$Q\left(1 + \frac{a_3}{g}\right)r + \frac{P_2}{g}\rho_2^2\varepsilon_2 + \frac{P_1}{g}\rho_1^2\varepsilon_1\frac{r_2}{r_1} - M\frac{r_2}{r_1} = 0.$$

Кутові прискорення ε_1 і ε_2 виразимо через шукане прискорення a_3. Враховуючи, що ε_1, ε_2 зв'язані між собою так як і ω_1, ω_2, отримаємо:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_3}{R}, \qquad \varepsilon_1 = \frac{r_2\varepsilon_2}{r_1} = \frac{r_2 a_3}{R r_1}$$

Тоді остаточно

$$a_3 = \frac{\frac{Rr_2}{r_1}M - R^2 Q}{R^2 Q + \rho_2^2 P_2 + \frac{\rho_1^2 r_2^2}{r_1^2}P_1}g.$$

ЛЕКЦІЯ 10. ЕЛЕМЕНТАРНА ТЕОРІЯ УДАРУ

10.1 Основне рівняння теорії удару

Під час руху тіла (точки) під дією сил, розглянутих раніше, швидкості точок тіла змінюються безперервно, тобто кожному нескінченно малому проміжку часу відповідає нескінченно малий приріст швидкості.

Дійсно, якщо імпульс будь-якої сили F_k за проміжок часу τ представити у вигляді $F_k^{\text{ср}}\tau$, де $F_k^{\text{ср}}$ – деяке середнє значення сили за час τ, то теорема про зміну кількості руху точки, на яку діє сила F_k, матиме вигляд

$$m(\bar{v}_1 - \bar{v}_0) = \sum_{k=1}^{n} F_k^{\text{ср}}\tau \qquad (10.1)$$

З рівняння (10.1) видно, що коли час τ нескінченно малий (наближається до нуля), то при звичайних силах приріст швидкості $\Delta\bar{v} = \bar{v}_1 - \bar{v}_0$, буде теж величиною нескінченно малою. Але, якщо в числі діючих сил будуть дуже великі сили, то приріст швидкості за малий проміжок часу τ виявиться величиною скінченною.

Явище, при якому швидкості точок тіла за дуже малий проміжок часу τ змінюється на скінченну величину називається ударом.

Сили, під дією яких відбувається удар, називаються *ударними силами* $F_{\text{уд}}$, а дуже малий проміжок часу τ, за який відбувається удар, – *часом удару.*

Так як ударні сили дуже великі і за час удару значно змінюються, то в теорії удару як міра взаємодії тіл розглядаються не самі ударні сили, а їх імпульси.

Ударний імпульс є величина скінчена:

$$S_{уд} = \int_0^{\tau} \bar{F}_{уд} \cdot dt = \bar{F}_{уд}^{сер} \cdot \tau$$

При цьому імпульси неударних сил за час τ будуть величинами дуже малими і ними практично можна знехтувати.

Далі будемо позначати швидкості точок на початку удару $\bar{v}$, а швидкості в кінці удару $\bar{u}$. Тоді рівняння (10.1) матиме вигляд

$$m(\bar{u} - \bar{v}) = \sum_{k=1}^{n} \bar{S}_k \tag{10.2}$$

Цей результат виражає теорему про зміну кількості руху точки при ударі:

Зміна кількості руху точки за час удару дорівнює сумі діючих на точку ударних імпульсів.

Рівняння (10.2) називають *основним рівнянням теорії удару*. Воно відіграє в теорії удару таку ж роль, як основне рівняння динаміки $m\bar{a} = \bar{F}$ при вивченні рухів під дією неударних сил.

Переміщення точки за час удару рівне $v_{сер} \cdot \tau$, тобто величина дуже мала, якою практично нехтують.

Отже, з отриманих результатів слідує:

- дією неударних сил (наприклад, сили тяжіння) за час удару можна знехтувати;
- переміщеннями точок тіла за час удару можна знехтувати і вважати тіло під час удару нерухомим;
- зміна швидкості точок тіла за час удару визначається основним рівнянням теорії удару.

10.2 Загальні теореми теорії удару

10.2.1 Теорема про зміну кількості руху системи при ударі

Розглянемо систему, яка складається з n матеріальних точок. Позначимо рівнодійну зовнішніх ударних імпульсів, прикладених до точки масою m_k, $\bar{S}_k^e$, а рівнодійну внутрішніх ударних імпульсів – $\bar{S}_k^i$, тоді згідно з рівнянням (10.2):

$$m_k(\bar{u}_k - \bar{v}_k) = \bar{S}_k^e + \bar{S}_k^i.$$

Складаємо такі рівняння для кожної точки системи і додаємо їх:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{u}_k - \sum_{k=1}^{n} m_k \bar{v}_k = \sum_{k=1}^{n} \bar{S}_k^e + \sum_{k=1}^{n} \bar{S}_k^i.$$

Суми в лівій частині рівняння, являють собою кількість руху системи в кінці та на початку удару, які позначимо $\bar{Q}_1$ і $\bar{Q}_0$. Сума внутрішніх ударних імпульсів за властивостями внутрішніх сил дорівнює нулю. Тоді одержуємо:

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum_{k=1}^{n} \bar{S}_k^e \tag{10.3}$$

Зміна кількості руху системи за час удару дорівнює сумі всіх зовнішніх ударних імпульсів, діючих на систему.

В проекціях на осі прямокутної декартової системи координат:

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum_{k=1}^{n} S_{kx}^e; \; Q_{1y} - Q_{0y} = \sum_{k=1}^{n} S_{ky}^e; \; Q_{1z} - Q_{0z} = \sum_{k=1}^{n} S_{kz}^e.$$

Якщо геометрична сума всіх зовнішніх ударних імпульсів дорівнює нулю, то за рівнянням (10.3), кількість руху системи за час удару не змінюється. Отже, внутрішні ударні імпульси не можуть змінити кількість руху системи. В цьому полягає *закон збереження ударних імпульсів*.

10.2.2 Теорема про зміну головного моменту кількості руху системи (теорема моментів) при ударі

Розглядаємо систему для кожної точки якої масою m_k, згідно з попередніми міркуваннями, справедливе рівняння

$$m_k \bar{u}_k - m_k \bar{v}_k = \bar{S}_k^e + \bar{S}_k^i$$

Вектори, що входять до цього рівняння, прикладені до точки, яка за час удару залишається нерухомою. Тоді, взявши моменти всіх векторів відносно деякого центра O, за теоремою про момент рівнодійної одержимо:

$$\bar{m}_O(m_k \bar{u}_k) - \bar{m}_O(m_k \bar{v}_k) = \bar{m}_O(\bar{S}_k^e) + \bar{m}_O(\bar{S}_k^i)$$

Складаємо такі рівняння для всіх точок системи і додаємо їх:

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{m}_O(m_k \bar{u}_k) - \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_O(m_k \bar{v}_k) = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_O(\bar{S}_k^e) + \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_O(\bar{S}_k^i).$$

Суми в лівій частині рівняння є головними моментами кількості руху системи відносно центра O в кінці та на початку удару, які позначимо $\bar{K}_1$ і $\bar{K}_0$. Сума моментів внутрішніх ударних імпульсів за властивостями моментів внутрішніх сил дорівнює нулю. Тоді одержуємо:

$$\bar{K}_1 - \bar{K}_0 = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_O(\bar{S}_k^e) \tag{10.4}$$

Зміна головного моменту кількості руху системи відносно будь-якого центра О за час удару дорівнює сумі моментів відносно того ж центра О усіх діючих на систему зовнішніх ударних імпульсів.

В проекціях на осі прямокутної декартової системи координат:

$$\begin{aligned} K_{1x} - K_{0x} &= \sum_{k=1}^{n} m_x(\bar{S}_k^e) \\ K_{1y} - K_{0y} &= \sum_{k=1}^{n} m_y(\bar{S}_k^e) \\ K_{1z} - K_{0z} &= \sum_{k=1}^{n} m_z(\bar{S}_k^e) \end{aligned} \tag{10.5}$$

З рівнянь (10.4) і (10.5) слідує, що якщо сума моментів зовнішніх ударних імпульсів відносно будь-якого центра (або осі) дорівнює нулю, то головний момент кількості руху системи відносно цього центра (або осі) за час удару не змінюється.

$$\bar{K}_1 - \bar{K}_0 = const$$

Отже, внутрішні ударні імпульси не можуть змінити головний момент кількості руху системи.

10.3 Коефіцієнт відновлення при ударі

Величина ударного імпульсу при співударі двох тіл залежить не тільки від маси тіл і їх швидкості до удару, але й від пружних властивостей цих тіл, які характеризуються коефіцієнтом відновлення.

Розглянемо кулю, яка падає вертикально на нерухому горизонтальну плиту. Прямий удар, який при цьому відбувається, можна розділити на дві стадії.

Під час першої стадії швидкості частинок кулі, які в момент початку удару рівні $\bar{v}$, (рух кулі вважаємо поступальним і прямолінійним) зменшуються до нуля. Куля при цьому деформується (плиту вважаємо абсолютно жорсткою) і вся її початкова кінетична енергія $Mv^2/2$ переходить у внутрішню потенціальну енергію деформованого тіла.

Під час другої стадії удару куля під дією внутрішніх пружних сил починає відновлювати свою форму. При цьому її внутрішня потенціальна енергія переходить в кінетичну енергію руху частинок кулі. В кінці удару швидкості частинок тіла стануть рівними $\bar{u}$, а кінетична енергія кулі $Mu^2/2$.

Енергія кулі повністю не відновлюється так як частина її витрачається на залишкову деформацію кулі, її нагрівання та звук. Тому швидкість $\bar{u}$ менша за $\bar{v}$.

$$\bar{u} < \bar{v}$$

Знайдемо відношення швидкості кулі після удару до її швидкості до удару

$$k = \frac{u}{v}$$

Величина k, рівна при прямому ударі тіла об нерухому перешкоду відношенню модуля швидкості тіла в кінці удару до модуля швидкості на початку удару, називається *коефіцієнтом відновлення при ударі*. Значення коефіцієнта відновлення для різних тіл визначається дослідним шляхом.

Розглянемо граничні випадки *цілком пружного удару* $(k = 1)$ при якому механічна енергія тіла повністю відновлюється і *цілком не пружного удару* $(k = 0)$, коли удар закінчується в першій стадії і вся механічна енергія тіла витрачається на його деформування та нагрівання.

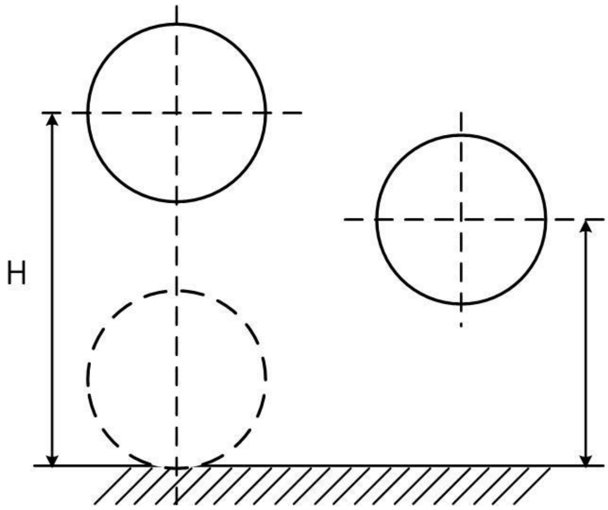


Рис. 10.1

Експериментально величину k можна знайти якщо розглянути кулю вільно падаючу на плиту з попередньо виміряної висоти H і визначити за допомогою вимірювального приладу висоту підйому кулі h після удару (рис. 10.1). Тоді за формулою Галілея $v = \sqrt{2gH}$, а $u = \sqrt{2gh}$. Тоді

$$k = \frac{u}{v} = \sqrt{\frac{h}{H}}$$

10.4 Удар тіла об нерухому перешкоду

Розглянемо тіло (кулю) масою M, яке ударяється об нерухому плиту. Діючою на тіло ударною силою буде реакція плити. Імпульс цієї сили за час удару позначимо S. Нормаль до поверхні тіла в точці його дотику до плити проходить через центр мас тіла (для кулі це буде завжди). Такий удар називається *центральним*. Якщо швидкість $\bar{v}$ центра мас тіла на початку удару направлена по нормалі n до плити, то удар буде *прямим*, інакше – *косим*.

1. Випадок прямого удару (рис. 10.2).

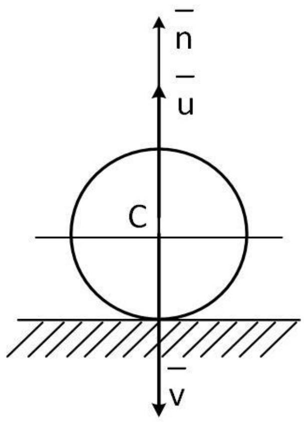


Рис. 10.2

Знайдемо кількість руху кулі на початку і після удару $\bar{Q}_0 = M\bar{v}$; $\bar{Q}_1 = M\bar{u}$. Складаємо рівняння (10.3) в проекції на нормаль n, одержимо

$$M(u_n - v_n) = S_n.$$

При прямому ударі з врахуванням напряму одиничного орта $\bar{n}$ маємо $u_n = u,\ v_n = -v,\ S_n = S$, тоді

$$M(u + v) = S, \text{ але } u = kv.$$

З одержаних рівнянь при заданих $M,\ v,\ k$ знайдемо невідомі u і S.

$$S = M(k + 1)v.$$

Як видно, ударний імпульс буде тим більшим, чим більший коефіцієнт відновлення k. Для знаходження середнього значення ударної сили (реакції плити), потрібно знати час удару τ, який можна визначити експериментально.

2. Випадок косого удару (рис. 10.3).

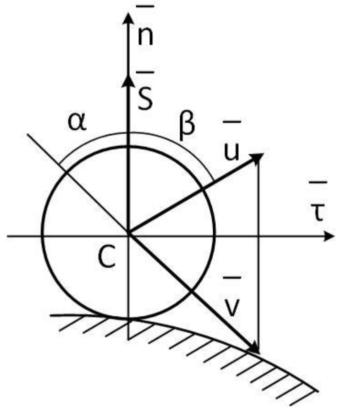


Рис. 10.3

У цьому випадку швидкість $\bar{v}$ центра мас тіла на початку удару утворює з нормаллю до плити кут α, а швидкість $\bar{u}$ в кінці удару – кут β.

Тоді рівняння (10.3) в проекціях на дотичну вісь $\bar{\tau}$ і нормаль $\bar{n}$ матиме вигляд

$$M(u_\tau - v_\tau) = 0; M(u_n - v_n) = S.$$

Коефіцієнт відновлення в даному випадку дорівнює відношенню модулів u_n та v_n, так як удар відбувається лише по напряму нормалі до поверхні (тертям нехтуємо). Тоді, з врахуванням знаків проекцій, одержимо $u_n = -kv_n$.

Остаточно знаходимо:

$$u_\tau = v_\tau, \qquad u_n = -kv_n, \qquad S = M|v_n|tg\beta$$

З одержаних виразів можна знайти модуль і напрямок швидкості в кінці удару і ударний імпульс, якщо величини M, v, α, та k відомі. Зокрема:

$v_\tau = |v_n|tg\alpha, \;\; u_\tau = |u_n|tg\beta$. Тоді $|u_n|tg\beta = |v_n|tg\alpha$, звідки

$$k = \frac{u_n}{v_n} = \frac{tg\alpha}{tg\beta}$$

Отже, при *косому ударі відношення тангенса кута падіння до тангенса кута відбиття дорівнює коефіцієнту відновлення*.

Так як $k < 1$ то $\alpha < \beta$, тобто кут падіння завжди менше кута відбивання.

10.5 Прямий центральний удар двох тіл (удар куль)

При співударі двох тіл удар називається *прямим* і *центральним* коли загальна нормаль до поверхонь тіл в точці дотику проходить через їх центри мас і коли швидкості центрів мас на початку удару направлені вздовж цієї загальної нормалі.

Таким, зокрема, буде удар двох однорідних куль центри яких до удару рухаються вздовж однієї і тієї ж прямої.

Позначимо маси тіл, які співударяються *M₁* і *M₂*, швидкості їх центрів мас на початку удару v_1 і v_2, а в кінці удару u_1 і u_2 (рис. 10.4).

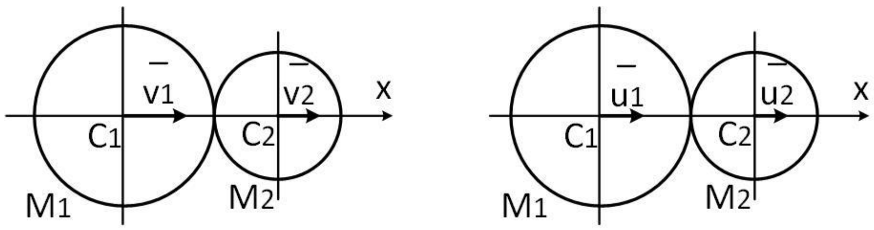


Рис. 10.4

Проведемо через центри мас C_1 і C_2 координатну вісь C_1x направлену завжди від C_1 до C_2. Тоді для того, щоб відбувся удар має бути $v_{1x} > v_{2x}$ (інакше перше тіло не наздожене друге). Крім того повинно бути $u_{1x} \leq u_{2x}$, так як тіло яке наносить удар не може випередити те тіло по якому ударяють.

Вважаючи M_1, M_2, v_1, v_2, k відомими, знайдемо u_1 і u_2. Для цього застосуємо теорему про зміну кількості руху до тіл, які ударяються, розглядаючи їх як одну систему. Тоді ударні сили, діючі між тілами, будуть внутрішніми і $\sum_{k=1}^{n} S_{kx}^{e} = 0$, а отже $Q_{1x} = Q_{0x}$, або

$$M_1 u_{1x} + M_2 u_{2x} = M_1 v_{1x} + M_2 v_{2x} \qquad (10.6)$$

Друге рівняння для знаходження невідомих швидкостей знайдемо з виразу коефіцієнта відновлення.

При співударі двох тіл інтенсивність удару (ударний імпульс) залежить не від абсолютного значення швидкості кожного з тіл, а від того на скільки швидкість тіла, яке наносить удар, перевищує швидкість тіла по якому ударяють, тобто від різниці $v_{1x} - v_{2x}$.

Тому при ударі двох тіл, якщо врахувати, що завжди $v_{1x} > v_{2x}$, а $u_{1x} \leq u_{2x}$, одержимо

$$k = \left|\frac{u_{1x} - u_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}}\right| = -\frac{u_{1x} - u_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}}$$

або

$$u_{1x} - u_{2x} = -\,k(v_{1x} - v_{2x}) \qquad (10.7)$$

Система рівнянь (10.6) і (10.7) дозволяє розв’язати поставлену задачу.

Ударний імпульс знайдемо склавши рівняння $Q_{1x} - Q_{2x} = \sum_{k=1}^{n} S_{kx}^{e}$ для якого-небудь одного з тіл, наприклад першого. Тоді

$$M_1(u_{1x} - v_{1x}) = S_{1x},\ S_{2x} = -\,S_{1x} \qquad (10.8)$$

Розглянемо два граничних випадка.

1. *Цілком непружний удар* ($k = 0$).

У цьому випадку з рівнянь (10.6) і (10.7) знаходимо

$$u_{1x} = u_{2x} = \frac{M_1 v_{1x} + M_2 v_{2x}}{M_1 + M_2} \tag{10.9}$$

Обидва тіла після удару рухаються з одною швидкістю. Діючий на систему ударний імпульс при цьому дорівнює

$$S_{2x} = -S_{1x} = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}(v_{1x} - v_{2x})$$

2. *Цілком пружний удар* ($k = 1$).

З рівнянь (10.6) і (10.7) знаходимо:

$$\begin{gathered} u_{1x} = v_{1x} - \frac{2M_2}{M_1 + M_2}(v_{1x} - v_{2x}) \\ u_{2x} = v_{2x} + \frac{2M_2}{M_1 + M_2}(v_{1x} - v_{2x}) \end{gathered} \tag{10.10}$$

Ударний імпульс, діючий на кулі

$$S_{2x} = -S_{1x} = \frac{2M_1 M_2}{M_1 + M_2}(v_{1x} - v_{2x})$$

Отже, при цілком пружному ударі ударний імпульс вдвоє більший, ніж при цілком непружному. Зокрема, коли $M_1 = M_2$, з рівнянь (10.10) одержимо

$$u_{1x} = v_{2x}, u_{2x} = v_{1x}$$

Таким чином, дві кулі однакової маси при цілком пружному ударі обмінюються швидкостями.

10.6 Втрата кінетичної енергії при цілком непружному ударі двох тіл. Теорема Карно.

При непружному ударі відбувається втрата кінетичної енергії тіл, які співударяються. Найбільшу величину ця втрата має при цілком непружному ударі. Знайдемо величину втраченої системою кінетичної енергії при цілком непружному ударі двох тіл. Вважаючи, що тіла, які співударяються рухаються поступально і позначивши їх загальну швидкість після цілком непружного удару

u, одержимо значення кінетичної енергії системи на початку та в кінці удару

$$T_0 = \frac{1}{2}(M_1 v_{1x}^2 + M_2 v_{2x}^2); \quad T_1 = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)u_x^2$$

Втрачена при ударі кінетична енергія рівна $T_0 - T_1$.
Представимо цю різницю у вигляді $T_0 - T_1 = T_0 - 2T_1 + T_1$.
Так як з формули (10.9) слідує, що

$$(M_1 + M_2)u_x = M_1 v_{1x} + M_2 v_{2x},$$

звідси маємо

$$2T_1 = (M_1 + M_2)u_x^2 = (M_1 v_{1x} + M_2 v_{2x})u_x$$

Розв'язавши останні рівняння разом, знаходимо

$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2}(M_1 v_{1x}^2 + M_2 v_{2x}^2 - 2M_1 v_{1x} u_x - 2M_2 v_{2x} u_x + M_1 u_x^2 + M_2 u_x^2)$$

$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2}M_1(v_{1x} - u_x)^2 + \frac{1}{2}M_2(v_{2x} - u_x)^2 \qquad (10.11)$$

Різниці $(v_{1x} - u_x)$ та $(v_{2x} - u_x)$ показують на скільки зменшилась при ударі швидкість кожного з тіл. Їх можна назвати *втраченими при ударі швидкостями*. Рівняння (10.11) виражає *теорему Карно*:

Кінетична енергія, втрачена системою тіл при цілком непружному ударі, дорівнює тій кінетичній енергії, яку мала б система якби її тіла рухались з втраченими швидкостями.

Розглянемо окремий випадок удару по початково нерухомому тілу. В цьому випадку $v_2 = 0$ і $T_0 = \frac{1}{2}M_1 v_1^2$, а $u = \frac{M_1 v_1}{M_1 + M_2}$. Тоді

$$T_1 = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)u^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_1^2 v_1^2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \cdot \frac{M_1 v_1^2}{2}$$

або

$$T_1 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \cdot T_0 \qquad (10.12)$$

Рівняння (10.12) показує, яка енергія залишається у системи після удару. Розглянемо два цікавих граничних випадки.

1. Маса тіла яке наносить удар набагато більша маси тіла по якому ударяють ($M_1 \gg M_2$).

В цьому випадку можна вважати $M_1 + M_2 \approx M_1$ і з рівняння (10.12) маємо $T_1 \approx T_0$.

Отже, хоча удар і є цілком непружним, втрати кінетичної енергії при ударі практично не відбувається і система після удару рухається майже з тією ж кінетичною енергією, яку мала на початку удару.

На практиці такий результат можна, очевидно, одержати при забиванні цвяхів, паль та ін.

2. Маса тіла по якому ударяють набагато більша маси тіла, яке наносить удар ($M_1 \ll M_2$).

В цьому випадку можна вважати $\frac{M_1}{M_1+M_2} \approx 0$ і з рівняння (10.12) отримуємо $T_1 \approx 0$.

Отже, при такому ударі майже вся кінетична енергія витрачається на деформацію тіл. По закінченню удару тіла можна вважати нерухомими.

Практично такий результат маємо при куванні, клепанні та ін. Маса поковки разом з ковадлом набагато більша за масу молота.

10.7 Удар по тілу, яке обертається

Розглянемо тіло, яке має вісь обертання *Az* (рис. 10.5).

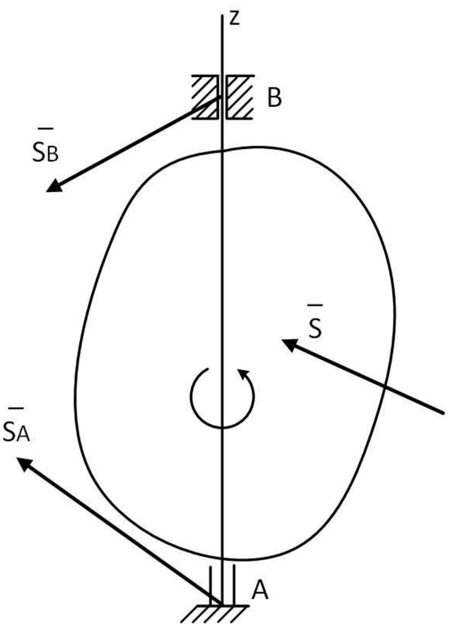


Рис. 10.5

Нехай в деякий момент часу до тіла прикладають ударний імпульс $\bar{S}$. Тоді згідно з рівнянням (10.4)

$$K_{1z} - K_{0z} = m_z(\bar{S})$$

так як моменти відносно осі *Az* імпульсивних реакцій $\bar{S}_A$ і $\bar{S}_B$, які виникають в підшипниках будуть рівні нулю.

Якщо на початку удару тіло має кутову швидкість ω_0, а в кінці удару його кутова швидкість стала ω_1, то

$$K_{0z} = I_z\omega_0; \; K_{1z} = I_z\omega_1$$

І остаточно отримаємо

$$I_z(\omega_1 - \omega_0) = m_z(\bar{S}), \quad \text{або}$$

$$\omega_1 = \omega_0 + \frac{m_z(\bar{S})}{I_z} \qquad (10.13)$$

Рівняння (10.13) дозволяє визначити зміну кутової швидкості при ударі. З неї слідує, що

Кутова швидкість тіла за час удару змінюється на величину, рівну відношенню моменту ударного імпульсу до моменту інерції тіла відносно осі обертання.

Знайдемо чому рівні при ударі імпульсивні реакції підп'ятника *A* і підшипника *B*. Проведемо осі *Axyz* так, щоб центр мас *C* тіла лежав в площині *Ayz* (рис. 10.6). Зобразимо імпульсивні реакції їх складовими вздовж цих осей.

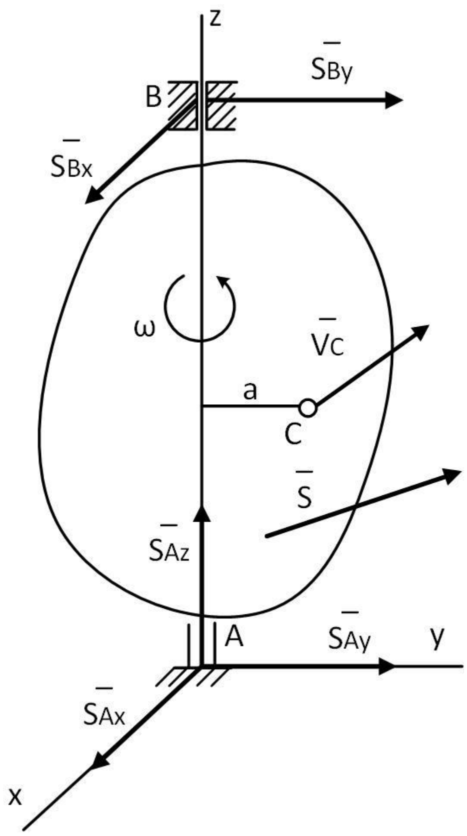


Рис. 10.6

Нехай $AB = b$, відстань точки *C* від осі *Az* рівна a. Складемо рівняння (10.3) в проекціях на всі три осі координат, а рівняння (10.5) в проекціях на осі *Ax* і *Ay* (рівняння в проекції на вісь *Az* уже використано при отриманні рівняння (10.13). Так як тіло за час удару не переміщується, вектори $\bar{v}_C$ і $\bar{u}_C$ будуть паралельні осі *Ax*; отже, $Q_{0x} = -Mv_C = -Ma\omega, Q_{1x} = -Ma\omega_1, Q_y = Q_z = 0$. Використовуючи одночасно при складанні рівнянь (10.5) формули $K_x = -I_{xz}\omega$, $K_y = -I_{yz}\omega$, отримаємо

$$-Ma(\omega_1 - \omega) = S_{Ax} + S_{Bx} + S_x,$$

$$0 = S_{Ay} + S_{By} + S_y, 0 = S_{Az} + S_z, \qquad (10.14)$$

$$-I_{xz}(\omega_1 - \omega) = -S_{By}b + m_x(\bar{S}),$$

$$-I_{yz}(\omega_1 - \omega) = -S_{Bx}b + m_y(\bar{S}).$$

Рівняння (10.14) служать для визначення невідомих імпульсивних реакцій S_{Ax}, S_{Ay}, S_{Az}, S_{Bx} і S_{By}. Різницю $\omega_1 - \omega$ знаходимо з рівняння (10.13).

10.8 Центр удару

Поява при ударі імпульсивних реакцій небажана, так як може призвести до прискорення зносу або навіть до руйнування частин конструкцій (підшипників, валу та ін.). Знайдемо, чи можна ударити по тілу, закріпленому на осі, так, щоб імпульсивні реакції в підшипниках *A* і *B* взагалі не виникали. Для цього знайдемо, за яких умов можна задовольнити рівнянням (10.14), поклавши в них $\bar{S}_A = \bar{S}_B = 0$. Якщо $\bar{S}_A = \bar{S}_B = 0$, то 2-ге і 3-тє з рівнянь (10.14) матимуть вигляд: $S_y = 0, S_z = 0$. Щоб задовольнити цим рівнянням, потрібно направити імпульс $\bar{S}$ перпендикулярно площині *Ayz*, тобто (за прийнятою умовою) площині, яка проходить через вісь обертання і центр мас тіла. Припустимо, що імпульс $\bar{S}$ має такий напрям (рис. 10.7).

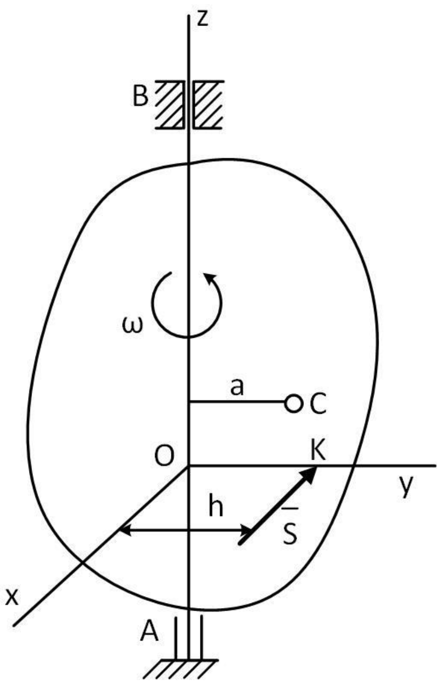


Рис. 10.7

Так як при $\bar{S}_A = \bar{S}_B = 0$ вид системи (10.14) не залежить від вибору на осі *Az* початку координат, проведемо для спрощення подальших розрахунків площину *Oxy* так, щоб імпульс $\bar{S}$ лежав в цій площині. Тоді $m_x(\bar{S}) = m_y(\bar{S}) = 0$ і останні два рівняння системи при $\bar{S}_B = 0$ (10.14) дадуть $I_{xz} = I_{yz} = 0$. Це означає, що площина *Oxy*, в якій лежить імпульс $\bar{S}$, повинна проходити через таку точку *O*, для якої вісь z є головною віссю інерції тіла; зокрема, умови $I_{xz} = I_{yz} = 0$ будуть виконуватись, якщо площина *Oxy* буде для тіла віссю симетрії.

Розглянемо 1-ше з рівнянь (10.14). Так як $\bar{S}_A = \bar{S}_B = 0$ і $S_x = S$ (рис. 10.7), воно матиме вигляд $Ma(\omega_1 - \omega) = S$. Одночасно рівняння (10.13), так як в нашому випадку $m_z(\bar{S}) = Sh$, дає $I_z(\omega_1 - \omega_0) = Sh$. Виключаючи з двох отриманих рівнянь різницю $(\omega_1 - \omega_0)$, знаходимо

$$h = \frac{I_z}{Ma} \qquad (10.15)$$

Рівняння (10.15) визначає, на якій відстані h від осі *z* має бути прикладений ударний імпульс.

Отже, для того щоб при ударі по тілу, закріпленому на осі *z*, в точках закріплення на цій осі не виникало імпульсивних реакцій, потрібно:

1) щоб ударний імпульс був розташований в площині *Oxy*, перпендикулярній осі *z*, яка проходить через таку точку *O* тіла, для якої вісь *z* є головною віссю інерції (зокрема, площина *Oxy* може площиною симетрії тіла);
2) щоб удар був направлений перпендикулярно площині, яка проходить через вісь обертання *z* і центр мас *C* тіла;
3) щоб ударний імпульс був прикладений на відстані $h = \frac{I_z}{Ma}$ від осі (з того боку від осі, де знаходиться центр мас).

Точка *K*, через яку при цьому проходитиме ударний імпульс, який не викликає ударних реакцій в точках закріплення осі, називається *центром удару*.

Приклад 10.1

При роботі з ручним з ручним молотом його потрібно брати за рукоятку в такому місці, щоб точка, якою наноситься удар, була відносно руки центром удару. Інакше руку буде “обпікати”.

Приклад 10.2

Мішень являє собою тонку однорідну пластину, яка може обертатися навколо осі *Az* (рис. 10.8). Форма мішені – прямокутний трикутник *ABD* з катетами *AB* = l_1, *AD* = l_2. Визначити, де у мішені знаходиться центр удару, якщо відомо, що для пластини *ABD* осьовий момент інерції $I_z = \frac{Ml_1^2}{6}$, а відцентровий – $I_{yz} = \frac{Ml_1 l_2}{12}$ (*M* – маса пластини, осі *Ayz* – в площині пластини).

Розв’язок. Так як у трикутної пластини *ABD* центр ваги *C* знаходиться на відстані $a = \frac{l_1}{3}$ від осі *Az*, то за формулою (10.15) відстань центра удару *K* від тієї ж осі буде

$$h = \frac{I_z}{Ma} = \frac{3I_z}{Ml_1} = \frac{l_1}{2}.$$

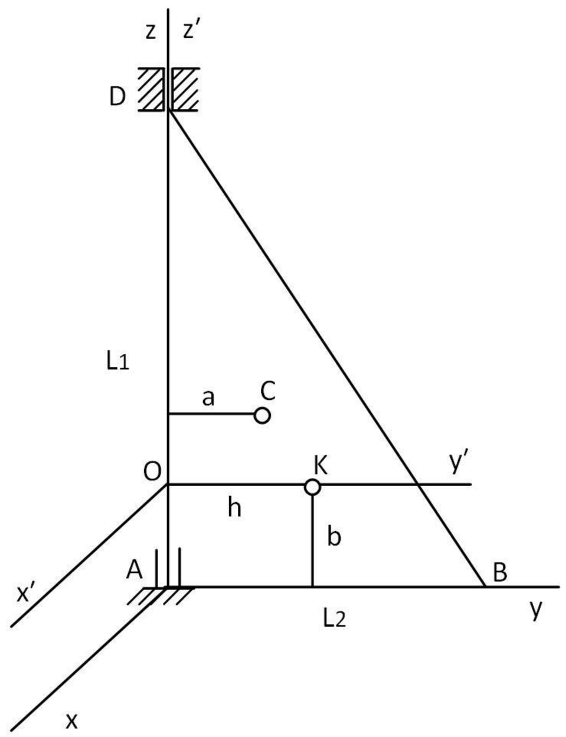


Рис. 10.8

Залишається визначити, на якій відстані b знаходиться центр удару від осі Ay. Для цього потрібно знайти на осі Az точку O, для якої ця вісь буде головною. Якщо через точку O провести осі $Ox'y'z'$, паралельні осям $Axyz$, то точка O буде головною, коли $I_{x'z'} = \sum_{k=1}^{n} m_k x'_k z'_k = 0$ і $I_{y'z'} = \sum_{k=1}^{n} m_k y'_k z'_k = 0$.

Перша умова, вочевидь, завжди виконується, так як для пластини всі $x'_k = 0$. Щоб знайти, коли виконується друга умова, скористаємось тим, що нам відомо значення $I_{yz} = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k z_k$ і що $y'_k = y_k$, а $z'_k = z_k - b$. Тоді $I_{y'z'} = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k (z_k - b) = I_{yz} - (\sum_{k=1}^{n} m_k y_k) b = I_{yz} - M y_C b$, де $y_C = a = l_1/3$. Отже, $I_{y'z'} = 0$, якщо $b = I_{yz}/(Ma) = l_2/4$.

Значить, центр удару знаходиться в точці K з координатами $y = h = l_1/2$, $z = b = l_2/4$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 2001. – 416с.
3. Яскілка М.Б. Збірник завдань для розрахунково-графічних робіт з теоретичної механіки: Посібн. – К.: Вища шк., 1999. – 351 с.
4. Сборник коротких задач про теоретической механике / О.Є. Кепе, Я.А. Виба, О.П. Грапис и др.; под ред. О.Є. Кепе. – М.: Высш. шк., 1989. – 386 с.
5. Теоретична механіка. Збірник задач / О.С. Апостолюк, В.М. Воробйов, Д.І. Ільчишина та ін.; За ред. Павловського М.А. – К.: Техніка, 2007. – 400 с.
6. Теоретична механіка. Ч. ІІ. Динаміка. Основи аналітичної механіки / [Литвинов О.І., Михайлович Я.М., Бойко А.В., Березовий М.Г.]. - К.: Агроосвіта, 2013. - 576 с.
7. Конспект лекцій із теоретичної механіки: навчальний посібник / Б. О. Іванов, М. В. Максюта. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2012. – 207 с.