МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

РІВНОВАГА ТІЛ З ВРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ СПОКОЮ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ТА ЗАВДАННЯ

З ДИСЦИПЛІНИ **«ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»**

ДЛЯ СТУДЕНТІВ МЕХАНІЧНИХ ТА БУДІВЕЛЬНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Затверджено Методичною радою ЧДТУ,
протокол № 7/2015-2016 від 29.06.2016 р.,
згідно з рішенням кафедри МПМТ,
протокол № 8 від 25.05.2016 р.

Черкаси 2016

УДК 531.01(07)
Р 49

Р 49 Рівновага тіл з врахуванням тертя спокою : методичні рекомендації та завдання з дисципліни «Теоретична механіка» для студентів механічних та будівельних спеціальностей / Упоряд. : Л.Д. Мисник, О.В. Манзюра ; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси : ЧДТУ, 2016. – 22 с.

Упорядникиі: **Мисник** Людмила Дмитрівна, *к.т.н., доцент,*
Манзюра Олександр Васильович, *старший викладач*

Рецензент Веретільник Т.І., к.т.н., доцент

Навчальне видання

РІВНОВАГА ТІЛ З ВРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ СПОКОЮ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ І ЗАВДАННЯ

З ДИСЦИПЛІНИ **"ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА"**
ДЛЯ СТУДЕНТІВ МЕХАНІЧНИХ ТА БУДІВЕЛЬНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

В авторській редакції

Комп'ютерна обробка Вознюк Т.І.

Формат 60х84 1/16. Times New Roman
Ум. друк. арк. 1,28. Обл.-вид. арк. 1,32. Р.н. 2277.

Черкаський державний технологічний університет
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 896 від 16.04.2002 р.
бульвар Шевченка, 460, м. Черкаси, 18006

ЗМІСТ

Вступ

Досвід показує, що при прагненні рухати одне тіло по поверхні іншого в площини зіткнення тіл виникає сила опору їх відносному рухові. Цей опір називають *силою тертя*.

Залежно від взаємних рухів тіл розрізняють:

1. тертя ковзання, що відповідає поступальному руху стичних тіл одне відносно другого;
2. тертя кочення (наприклад, колеса по рейці);
3. тертя крутіння (наприклад у підп’ятнику), що має за своєю природою багато спільного з тертям ковзання.

1. Тертя ковзання

Припущення про ідеально гладеньку поверхню суперечить практиці.

Дійсно, дотик двох тіл відбувається не в одній лише точці. Обидва тіла зазнають при цьому малі деформації, внаслідок яких вони дотикаються по певній поверхні. Дослід переконує в тому, що крім нормальної складової реакції $\bar{N}$ виникає ще дотична $\bar{F}_\tau$, яка називається силою тертя $\bar{F}_{\text{тр}}$ ковзання (рис. 1). Розрізнюють тертя спокою, або статичне тертя, що відбувається при відносному спокої статичних тіл, і тертя руху, що відбувається при відносному русі цих тіл. Наближені закони тертя ковзання або закони тертя першого роду встановили Г. Амонтон і Ш. Кулон. Ці закони відповідають простим дослідам, на основі яких вони встановлені.

Наприклад, тіло вагою $\bar{P}$ починає рухатися під дією сили $\bar{Q}$. Нехай у початковий момент тіло перебувало у спокої. Якщо поступово збільшувати силу $\bar{Q}$, то тіло все одно залишається у спокої. Отже, горизонтальна складова реакції стола $\bar{F}_\tau = \bar{F}_{\text{тр}}$ врівноважує прикладену силу $\bar{Q}$ і зростає разом з нею доти, доки рівновага не порушиться. Це відбудеться тоді, коли сила тертя досягне свого максимального значення $\bar{F}_{\text{тр}}^{max}$.

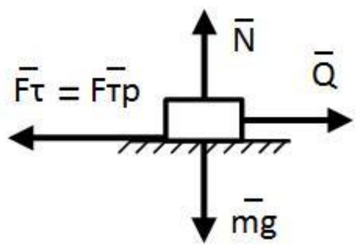


Рис. 1

1.1 Закони Амонтона-Кулона

1. Сила тертя ковзання знаходиться в спільній дотичній площині до поверхонь тіл, які стикаються, і напрямлена в бік, протилежний напряму можливого ковзання тіла під дією активних сил. Сила тертя залежить від активних сил, а її модуль змінюється від нуля до максимального значенням, якого вона досягає в момент виходу тіла з положення рівноваги, тобто:

$$0 \leq F_{\text{тр}} \leq F_{\text{тр}}^{max}$$

$F_{\text{тр}}^{max}$ – називається *граничною силою тертя*.

2. Гранична сила тертя ковзання пропорційна нормальній реакції (нормальному тиску), тобто

$$F_{\text{тр}}^{max} = f \cdot N$$

де f – безрозмірний коефіцієнтом тертя ковзання, який не залежить від нормальної реакції.

3. Гранична сила тертя ковзання за інших рівних умов не залежить від площі зіткнення поверхонь, що труться. З цього закону випливає, що для того, щоб зрушити, наприклад цеглину, необхідно прикласти одну і ту ж саму, силу, незалежно, від того, якою гранню вона покладена на поверхню, широкою чи вузькою.

4. Коефіцієнт тертя ковзання залежить від матеріалу і фізичного стану поверхонь, що труться, тобто від величини і характеру шорсткості, вологості, температури та інших умов. Коефіцієнт тертя встановлюється експериментально. Значення його для різних матеріалів наведено у довідниках.

Вважається, що коефіцієнт тертя не залежить від швидкості руху.

1.2 Кут тертя. Область рівноваги

Багато завдань на рівновагу тіла на шорсткій поверхні, тобто за наявності тертя, зручно вирішувати геометрично. Для цього введемо поняття кута і конуса тертя.

Реакція реальної (шорсткої) в’язі $\bar{R}$ складається з двох складових: нормальній реакції $\bar{N}$ і перпендикулярної до неї сили тертя $\bar{F}_{\text{тр}}$. Як наслідок, реакція в’язі $\bar{R}$ відхиляється від нормалі до поверхні на деякий кут φ (рис. 2,а). При зміні сили тертя від нуля до максимальної ($0 \leq \bar{F}_{\text{тр}} \leq \bar{F}_{\text{тр}}^{max}$), сила реакції $\bar{R}$ змінюється від $\bar{N}$ до $\bar{R}^{max}$ ($\bar{N} \leq \bar{R} \leq \bar{R}^{max}$), а її кут з нормаллю зростає від нуля до деякого граничного значення φ_{C} ($0 \leq \varphi \leq \varphi_{\text{C}}$) (рис. 2, б).

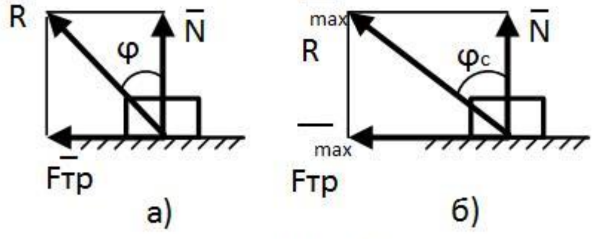


Рис. 2

Кутом тертя називається найбільший кут φ_{C} між граничною силою реакції шорсткої в’язі $\bar{R}^{max}$ і нормальною реакцією $\bar{N}$:

$$tg\varphi = \frac{F_{\text{тр}}^{max}}{N};\ F_{\text{тр}}^{max} = f \cdot N \implies tg\varphi = f$$

Кут тертя φ_{C} залежить від коефіцієнта тертя f.

При зміні напряму прикладання активної сили $\bar{Q}$ буде змінюватись напрям сили тертя $\bar{F}_{\text{тр}}$, а реакція $\bar{R}$ поверхні буде описувати конусну поверхню (рис. 3).

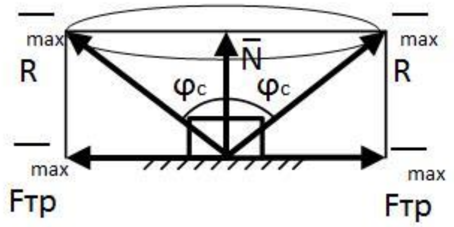


Рис. 3

Конус, вершина якого знаходиться в точці дотику тіла з поверхнею, а твірна з нормаллю до поверхні утворює кут тертя, називається *конусом тертя*.

Якщо коефіцієнт тертя в усіх напрямках однаковий, то конус тертя буде круговим.

Область, обмежена конусом тертя, називається *областю рівноваги*.

Така назва пояснюється тим, що, якщо активні сили, котрі діють на тіло, зводяться до рівнодійної, лінія дії якої знаходиться в області, обмеженій конусом тертя, то якою б великою вона не була, тіло перебуватиме в стані спокою.

Для доведення цього розглянемо тіло на шорсткій поверхні. Позначимо рівнодійну активних сил, що діють на тіло, $\bar{Q}$ і нехай вона утворює кут α з нормаллю до поверхні (рис. 4).

Умовою не ковзання тіла по поверхні є

$$Qsin\alpha \leq F_{\text{тр}}^{max}$$

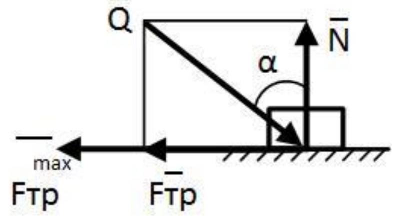


Рис. 4

Так як $F_{\text{тр}}^{max} = f \cdot N = fQcos\alpha$, то умова спокою набуває вигляду

$Qsin\alpha \leq fQcos\alpha \Rightarrow \frac{sin\alpha}{cos\alpha} \leq f$, а враховуючи, що $f = tg\varphi$, отримуємо

$tg\alpha \leq tg\varphi$ або $\alpha \leq \varphi$.

З отриманої нерівності випливає, що, якщо до тіла, яке знаходиться на шорсткій поверхні, прикладено силу $\bar{Q}$, котра утворює з нормаллю до поверхні кут, менший від кута тертя, то тіло буде знаходитись у стані спокою.

Для рівноваги твердого тіла на шорсткій поверхні необхідно і достатньо, щоб лінія дії рівнодійної активних сил, що діють на тверде тіло, проходила всередині конуса тертя або по його твірний через його вершину. Тіло не можна вивести з рівноваги будь-якою за модулем активною силою, якщо її лінія дії проходить усередині конуса тертя. Цим пояснюються такі відомі в техніці явища, як заклинювання або самогальмування.

У багатьох випадках сили тертя розглядають як джерела шкідливих опорів руху машин чи приладів. Проте в ряді інших випадків, навпаки, без сил тертя рух неможливий. Саме така роль тертя при ходьбі людини, русі всіх видів колісних транспортних машин, прокатних станів та ін.

1.3 Рівновага при наявності тертя

При розв'язанні задач статики за наявності сил тертя ковзання реакцію шорсткої в'язі зображають двома її складовими $\bar{N}$ і $F_{\text{тр}}^{max}$. Потім складають звичайні рівняння рівноваги, які відповідають діючій в задачі системі сил, і приєднують до них рівняння $F_{\text{тр}}^{max} = f \cdot N$. З одержаної таким чином системи рівнянь і знаходять потрібні величини.

Якщо задачу розв'язують геометричним способом, то реакцію шорсткої в'язі зручно зображати однією силою $\bar{R}^{max}$, яка в граничному положенні рівноваги відхилена від нормалі на кут φ_{C}.

Розглянемо приклади розв'язку задач на рівновагу з врахуванням тертя.

Приклад 1

Тіло вагою $P=100$ *Н* утримується в рівновазі силою Q на шорсткій похилій площині, нахиленій під кутом $\alpha = 45^0$. Сила Q діє на тіло під кутом $\beta = 15^0$ до площини (рис 5).

Визначити:

1) силу тертя ковзання, якщо $Q = 7$ *Н*;

2) величину сили Q, при якій тіло перебуватиме в стані спокою, якщо коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,6$.

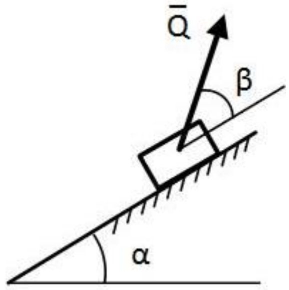


Рис. 5

1) Реакцію шорсткої поверхні зображаємо у вигляді нормальної складової реакції опори $\bar{N}$ та сили тертя ковзання $F_{\text{тр}}^{max}$ (рис. 6). Так як відразу визначити напрям можливого руху тіла неможливо, то зображаємо силу тертя вздовж поверхні в довільному напрямі, наприклад донизу. Вводимо систему координат *Oxy*.

Для визначення сили $F_{\text{тр}}^{max}$ складаємо рівняння рівноваги

$$\sum_{k=1}^{n} F_{xk} = 0; \;\; Psin\alpha - Qcos\beta + F_{\text{тр}}^{max} = 0$$

Звідси знаходимо $F_{\text{тр}}^{max} = Qcos\beta - Psin\alpha$.

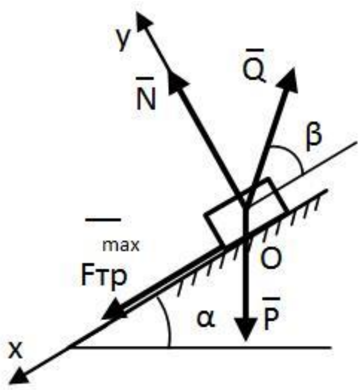


Рис. 6

Для заданих величин маємо

$$F_{\text{тр}}^{max} = 7 \cdot 0{,}707 - 100 \cdot 0{,}5 = -45\ H$$

Від'ємний знак величини $F_{\text{тр}}^{max}$ означає, що дійсний напрям сили протилежний зображеному на рис. 6, а.

2) Можливі два випадки граничної рівноваги тіла і відповідно два граничних значення Q при двох напрямках сили тертя по похилий площині вниз і вгору в залежності від напрямку можливого ковзання тіла по похилій площині. Для складення рівнянь рівноваги тільки один раз введемо $f_1 = kf$, де $k = \pm 1$.

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{xk} = 0;\ \ Psin\alpha - Qcos\beta + F_{\text{тр}}^{max} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{yk} = 0;\ \ N - Pcos\alpha + Qsin\beta = 0$$

Так як $F_{\text{тр}}^{max} = f_1 \cdot N = kf \cdot N$, то розв'язуючи ці рівняння маємо

$$Q = \frac{P(sin\alpha + kfcos\alpha)}{cos\beta + kfsin\beta}$$

Тоді при $k = +1$

$$Q_1 = \frac{P(sin\alpha + fcos\alpha)}{cos\beta + fsin\beta} = 102\ H$$

при $k = -1$

$$Q_2 = \frac{P(sin\alpha - fcos\alpha)}{cos\beta - fsin\beta} = 35\ H$$

Отже, при рівновазі тіла сила Q знаходиться в межах $35\ H \leq Q \leq 102\ H$.

Варто зазначити, що аналогічною розглянутій є така постановка задачі: за відомою силою Q визначити значення кута α, при якому тіло починає рухатись.

Приклад 2

Однорідний важкий стержень *AB* довжиною *l* спирається кінцем *A* на гладеньку вертикальну стіну, а кінцем *B* на шорстку вертикальну стіну (рис. 7). Відстань між стінами *h*, причому $h < l$. Визначити коефіцієнт тертя стіни f при якому можлива рівновага стержня.

Розглянемо випадок, коли точка A стержня знаходиться вище точки B. Рівновага стержня неможлива, якщо точка A розташована нижче точки B. На стержень діє сила ваги $\bar{P}$, прикладена посередині стержня, нормальна реакція гладенької стіни A $\bar{N}_A$ і реакція шорсткої стіни B $\bar{R}_B$, яку розкладемо на нормальну реакцію $\bar{N}_B$ і силу тертя $\bar{F}_{B\text{тр}}$.

Вводимо систему координат Oxy і складемо умови рівноваги плоскої системи сил:

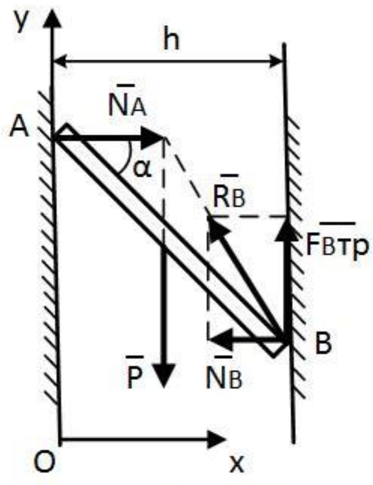


Рис. 7

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;\ N_A - N_B = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0;\ F_{B\text{тр}} - P = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_B(\bar{F}_k) = 0;\ P\frac{h}{2} - N_A l sin\alpha$$

До цих рівнянь слід додати формулу для знаходження сили тертя:

$$F_{B\text{тр}} \le F_{\text{тр}}^{max} = fN_B$$

З одержаної системи рівнянь знаходимо:

$$N_A = N_B;\ F_{B\text{тр}} = P;\ \ N_A = \frac{Ph}{2lsin\alpha}$$

З рис. 7 маємо $sin\alpha = \frac{\sqrt{l^2-h^2}}{l}$, отже $F_{B\text{тр}} = P$ і $F_{B\text{тр}} \le \frac{fPh}{2\sqrt{l^2-h^2}}$.

Прирівнявши ці рівняння, отримуємо умови рівноваги стержня:

$$1 \le \frac{fh}{2\sqrt{l^2-h^2}} \qquad \text{або} \qquad f \le \frac{2\sqrt{l^2-h^2}}{h}.$$

Приклад 3

Однорідний тонкий брус AB вагою G спирається кінцем A на вертикальну стіну і точкою D на ребро. На кінці бруса B підвішений вантаж вагою $G_1 = \frac{1}{2}G$. Відомі відстані $AE = 2a$, $DE = a$, а також коефіцієнти тертя між брусом і стіною $f_A = 0{,}3$ та брусом і ребром $f_D = 0{,}2$. Визначити найменшу довжину бруса AB, при якій кінець A не ковзне вниз, а також реакції опор в точках A і D (рис. 8,а).

Розглянемо систему сил прикладених до бруса *AB*, який знаходиться у стані граничної рівноваги. На брус діють задані сили G і G_1, нормальні реакції N_A і N_D, а також максимальні сили тертя $F_{A\text{тр}}^{max}$ і $F_{D\text{тр}}^{max}$, направлені протилежно напрямку можливого ковзання бруса (рис. 8, б). Ці сили тертя рівні:

$$F_{A\text{тр}}^{max} = f_A N_A,\ F_{D\text{тр}}^{max} = f_D N_D \qquad (*)$$

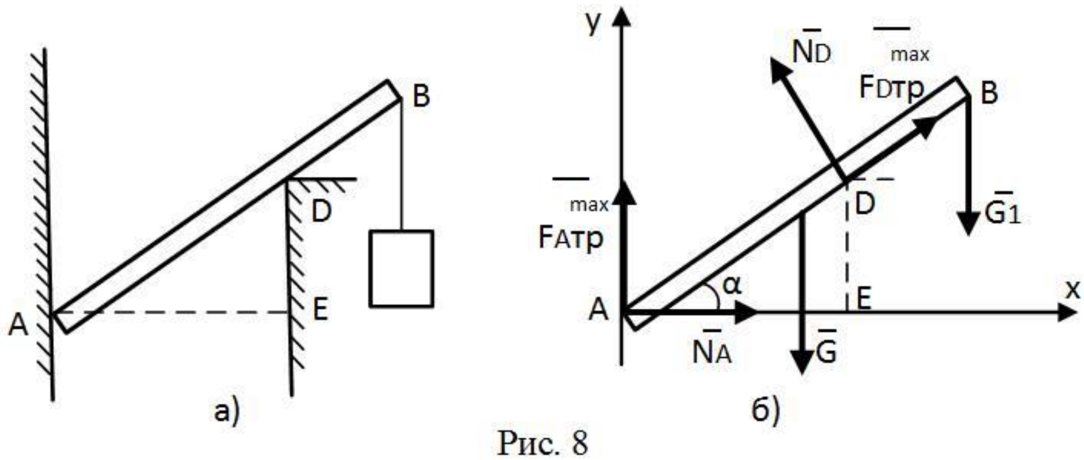


Рис. 8

Знаходимо значення кута α:

$$AD = \sqrt{AE^2 + DE^2} = a\sqrt{5}$$

$$cos\alpha = \frac{AE}{AD} = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad sin\alpha = \frac{ED}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Складаємо рівняння рівноваги для плоскої довільної системи сил, які діють на брус, прийнявши, що *AB*=*l*:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;\ N_A - N_D sin\alpha + F_{D\text{тр}}^{max} cos\alpha = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0;\ F_{A\text{тр}}^{max} - G + N_D cos\alpha + F_{D\text{тр}}^{max} sin\alpha - G_1 = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\bar{F}_k) = 0;\ -G\frac{l}{2}cos\alpha + N_D a\sqrt{5} - G_1 l cos\alpha = 0$$

Розв'язуємо отримані рівняння разом з рівняннями (*) відносно невідомих l, N_A і N_D:

$$N_A - N_D sin\alpha + f_D N_D cos\alpha = 0$$

$$f_A N_A - G + N_D cos\alpha + f_D N_D sin\alpha - \frac{1}{2}G = 0,$$

звідси

$$N_A = N_D(sin\alpha - f_D cos\alpha)$$

$$N_D = \frac{3G/2}{(f_A + f_D)sin\alpha + (1 - f_A f_D)cos\alpha}$$

Підставивши значення коефіцієнтів f_A і f_D та $sin\alpha$ і $cos\alpha$ матимемо:

$N_D = 0{,}63\sqrt{5}G$, а $N_A = 0{,}38G$.

Врахувавши знайдені значення реакцій, з рівняння $\sum_{k=1}^{n} M_A(\bar{F}_k) = 0$ знайдемо довжину бруса:

$$-G\frac{l}{2}\frac{2}{\sqrt{5}} + 0{,}63\sqrt{5}Ga\sqrt{5} - \frac{1}{2}Gl\frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \Rightarrow l = 1{,}575a\sqrt{5}.$$

Отже, найменша довжина бруса AB, при якій він залишатиметься в стані спокою дорівнює:

$$AB = 1{,}575a\sqrt{5} = 1{,}575AD,$$

а довжина ділянки DB при цьому має бути $DB = AB - AD = 0{,}575AD$.

2. *Тертя кочення*

Опір, що виникає при коченні одного тіла по поверхні іншого, називається *тертям кочення*.

Нехай до котка радіусом R перпендикулярно до його осі Oz прикладена горизонтальна сила $\bar{F}$ (рис. 9). Крім того на каток діє сила тяжіння $\bar{P}$. Внаслідок деформацій котка і горизонтальної опорної поверхні вони доторкаються один одного вздовж деякої ділянки контакту. Нормальна реакція опорної поверхні $\bar{N}$ при цьому зміститься на певну відстань k.

Сила тертя $\bar{F}_{тр}$ виникає в тому місці, де коток доторкається до опорної поверхні, в точці C. При рівновазі котка сила $\bar{F}_{тр}$ дорівнює за модулем силі $\bar{F}$, але напрямлена в протилежний бік. Отже $\bar{F}$ і $\bar{F}_{тр}$ утворюють пару сил, яка врівноважується парою сил $\bar{N}$ і $\bar{P}$.

Момент пари сил $(\bar{N}, \bar{P})$ називається *моментом тертя кочення*:

$$M_{тр} = N \cdot k$$

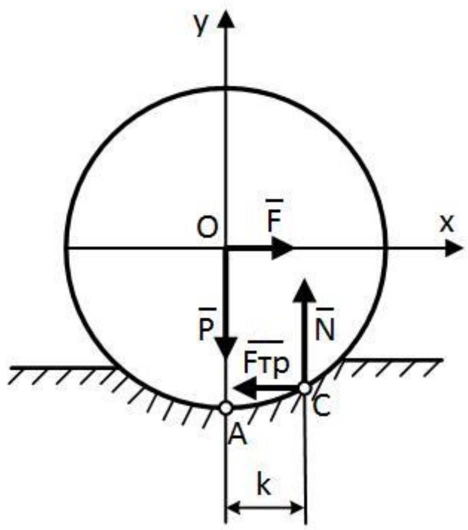


Рис. 9

Плечем цієї пари є величина k, яка називається *коефіцієнтом тертя кочення* і має розмірність довжини.

Коефіцієнт тертя кочення k залежить від матеріалу катка, площини та фізичного стану їх поверхонь. Коефіцієнт тертя кочення при коченні в першому наближенні можна вважати незалежним від кутової швидкості кочення катка і його швидкості ковзання по площині.

Очевидно, тіло буде в рівновазі, якщо момент активної сили відносно точки C буде меншим від моменту тертя, тобто

$$F \cdot R \leq N \cdot k.$$

Розглянемо розв'язок задач статики з врахуванням тертя кочення на прикладі.

Приклад 4

Визначити, при яких значеннях кута α циліндр радіуса R залишається в спокої на похилій площині, якщо коефіцієнт тертя кочення дорівнює k (рис. 10).

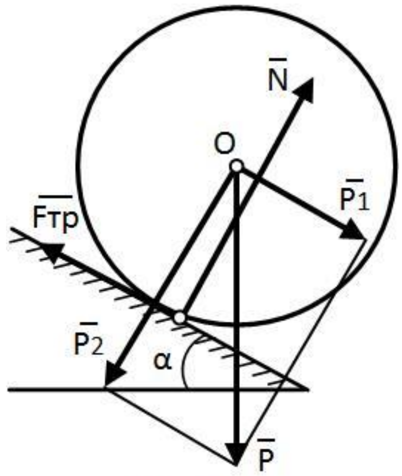


Рис. 10

Розглянемо граничне положення рівноваги, коли $\alpha = \alpha_1$. Розклавши силу $\bar{P}$ на складові $\bar{P}_1$ і $\bar{P}_2$, знаходимо, що в цьому випадку

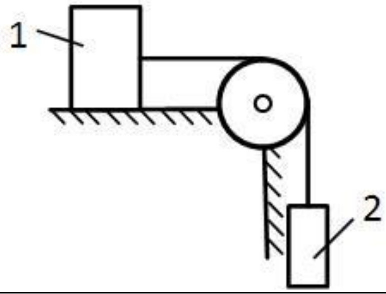
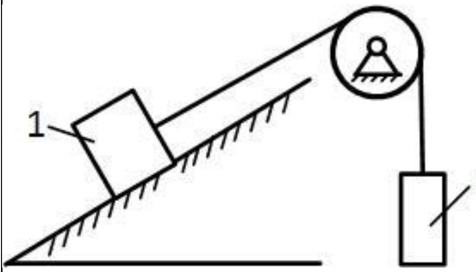
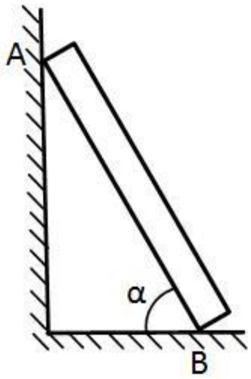
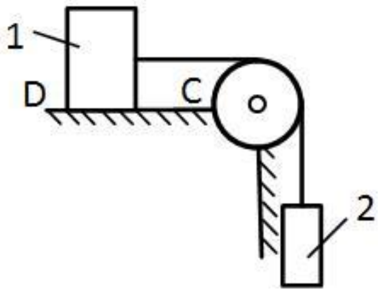
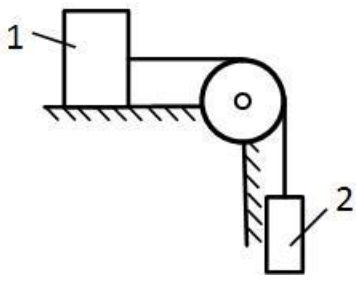
рушійна сила $\quad F = P_1 = Psin\alpha_1,$

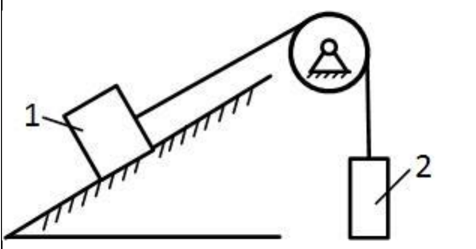
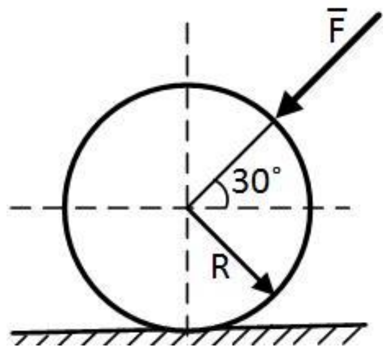
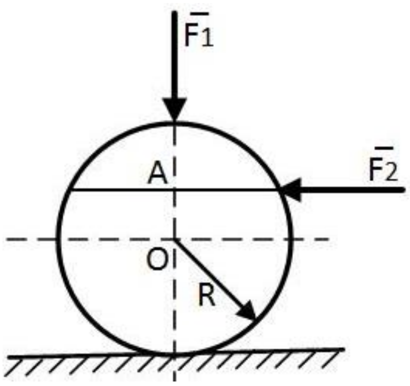
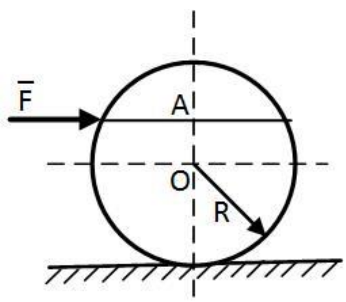
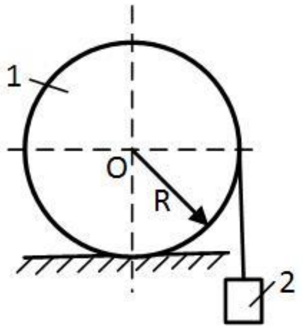
а нормальна реакція $\quad N = P_2 = Pcos\alpha_1.$

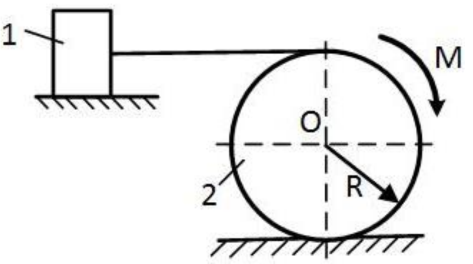
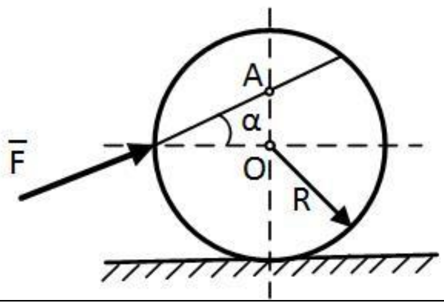
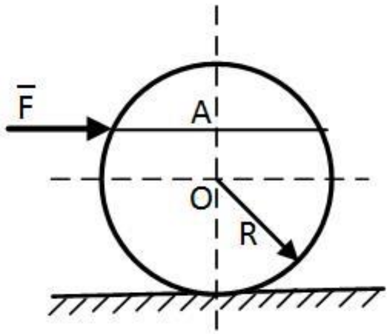
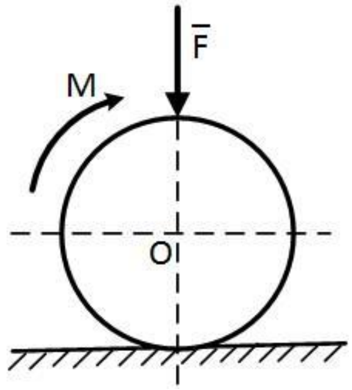
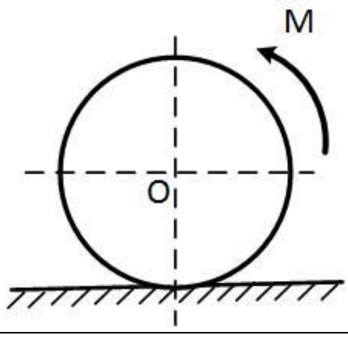
Тоді $\quad Psin\alpha_1 = \frac{k}{R} Pcos\alpha_1$, або $tg\alpha_1 = \frac{k}{R}$.

При зменшенні k до нуля кут α_1, теж зменшується до нуля. Отже, робимо висновок, що рівновага зберігається при будь-якому куті $\alpha < \alpha_1$. Отриманим результатом можна скористатися для експериментального визначення коефіцієнта k.

3. Контрольні завдання для самостійної роботи

1		Якою має бути найменша вага тіла 2, для того щоб тіло 1 вагою *200 Н* почало ковзати по горизонтальній площині, якщо коефіцієнт тертя ковзання *f = 0,2*. Відповідь: $P_2 = 40\ H$
2		Визначити найменшу вагу тіла 1, при якій воно ковзає донизу по площині, якщо вага вантажу 2 дорівнює *320 Н* . Коефіцієнт тертя ковзання між тілом 1 і площино *f = 0,2*. Відповідь: $P_1 = 979\ H$.
3		Однорідний брус *AB* спирається в точці *A* на гладеньку стіну, а в точці *B* на негладку підлогу. Визначити найменший коефіцієнт тертя ковзання між брусом і підлогою при якому брус залишається в указаному положенні в спокої. Кут $\alpha = 45^0$. Відповідь: *f =0,5*.
4		Визначити найменший коефіцієнт тертя ковзання між вантажем 1 вагою *400 Н* і площиною *DC*, при якому вантаж 1 залишається в спокої, якщо вага вантажу 2 дорівнює *96 Н*. Відповідь: *f =0,24*.
5		Визначити найменшу вагу вантажу 1, при якій він залишається в спокої, якщо вага вантажу 2 дорівнює *140 Н,* якщо коефіцієнт тертя ковзання між вантажем 1 і площиною дорівнює *f = 0,2*. Відповідь: $P_1 = 700\ H$.

6		Якою має бути вага вантажу 2 для того щоб вантаж 1 вагою *100 Н* залишався в спокої на похилій площині, якщо коефіцієнт тертя ковзання *f = 0,3* ? Відповідь: $P_2 = 76\ Н$.
7		До однорідного котка вагою *700 Н* прикладена сила $\bar{F}$. Визначити найменший модуль цієї сили, для того щоб коток почав котитися з ковзанням, якщо радіус *R = 1 м*, коефіцієнти тертя ковзання і кочення відповідно дорівнюють *f =0,2*, $k = 0{,}008\ м$. Відповідь: *F =183Н.*
8		На однорідний коток вагою *2 кН* діє горизонтальна сила $F_2 = 10\ Н$ і вертикальна сила $\bar{F}_1$. Яким має бути найбільший модуль сили $\bar{F}_1$, щоб коток почав котитись, якщо коефіцієнт тертя кочення $k = 0{,}005\ м$, радіус *R = 0,8 м*, розмір *ОА = 0,4 м* ? Відповідь: $F_1 = 400\ Н$.
9		До однорідного котка вагою *2 кН* прикладена горизонтальна сила $\bar{F}$. Визначити найбільший модуль сили $\bar{F}$, при якому каток ковзає і не котиться, якщо коефіцієнт тертя кочення $k = 0{,}006$ *м*, коефіцієнт тертя ковзання *f =0,2*, радіус *R = 0,6 м*, розмір *ОА = 0,4 м* . Відповідь: *F=12 кН.*
10		До котка 1 за допомогою нерозтягуваної нитки підвішений вантаж 2. Визначити найбільшу вагу цього вантажу, при якій коток 1 вагою *3,2 кН* залишається в спокої, якщо коефіцієнт тертя кочення $k = 0{,}004\ м$, радіус *R = 32,4 см* . Відповідь: $P_2 = 40\ Н$.

11		Однорідний коток 2 вагою *4 kН* зв'язаний з тілом 1 нерозтягуваною ниткою. Радіус R = *0,5 м* , коефіцієнт тертя кочення $k =$ 0,005 *м*, момент пари сил M = *50 Нм*. Визначити найбільшу вагу вантажу 1, при якій він почне ковзати, якщо коефіцієнт тертя ковзання для котка і тіла f = *0,2*. Відповідь: $P_1 = 150\ H$.
12		Визначити найменшу силу $\bar{F}$, необхідну для кочення котка радіуса R = *0,3 м,* якщо граничний момент тертя кочення дорівнює *3,46 Нм,* Кут $\alpha = 30^0$, відстань *ОА = 0,2 м*. Відповідь: *F =7,99 Н*.
13		До однорідного котка радіуса R = *0,4 м* прикладена горизонтальна сила *F =12 Н*. Визначити найменшу вагу котка в *kН*, для того щоб він знаходився у спокої, якщо коефіцієнт тертя кочення $k = 0{,}008$ *м*, розмір *ОА = 0,2 м* ? Відповідь: *Р =0,9 kН*.
14		Однорідний коток, до якого прикладена пара сил з моментом *М = 18 Нм*, притискається до опорної площини силою *F = 600 Н*. Визначити найбільшу вагу котка в *kН*, при якій він буде котитися, якщо коефіцієнт тертя кочення $k =$ 0,006 *м*, Відповідь: *Р =2,4 kН*.
15		До однорідного котка вагою *4 kН* прикладена пара сил з моментом *М = 20 Нм*. Визначити найменший коефіцієнт тертя кочення, при якому коток знаходиться в спокої. Відповідь: $k = 0{,}005$ *м*.

4. *Завдання для розрахунково-графічної роботи* *“Рівновага сил з врахуванням зчеплення (тертя спокою)”*

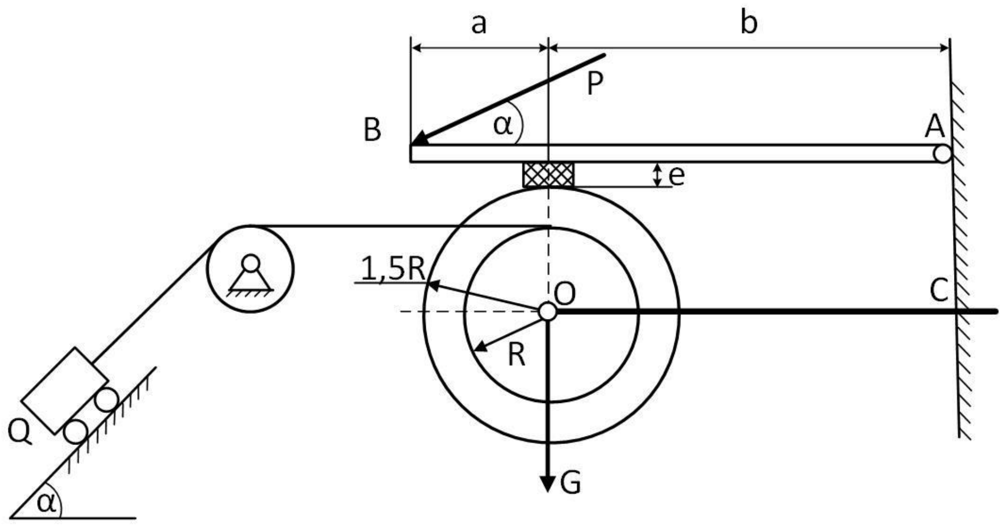
Визначити граничне значення сили $\bar{P}$ (мінімальне або максимальне) і реакції в'язей системи, яка знаходиться в спокої. Схеми варіантів показані на рис. 1.0 – 1.9, а необхідні для розрахунків дані в таблиці 1.

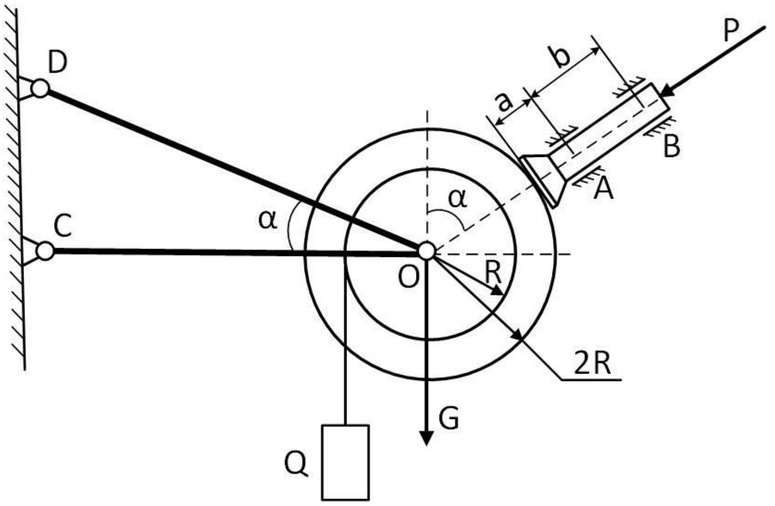
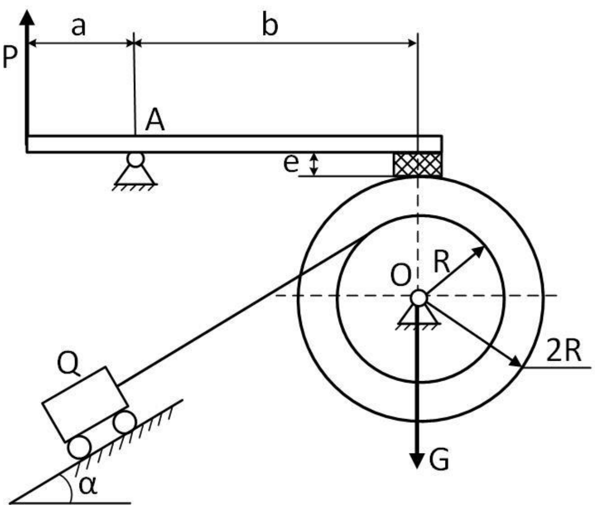
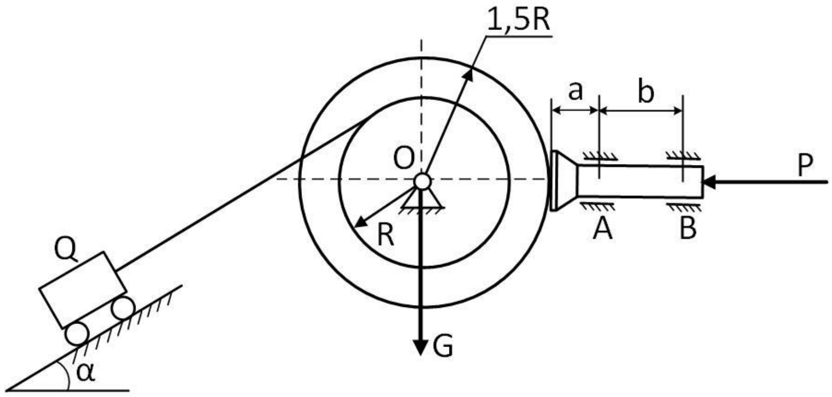
Зчеплення (тертя спокою) враховувати тільки між гальмівною колодкою і барабаном.

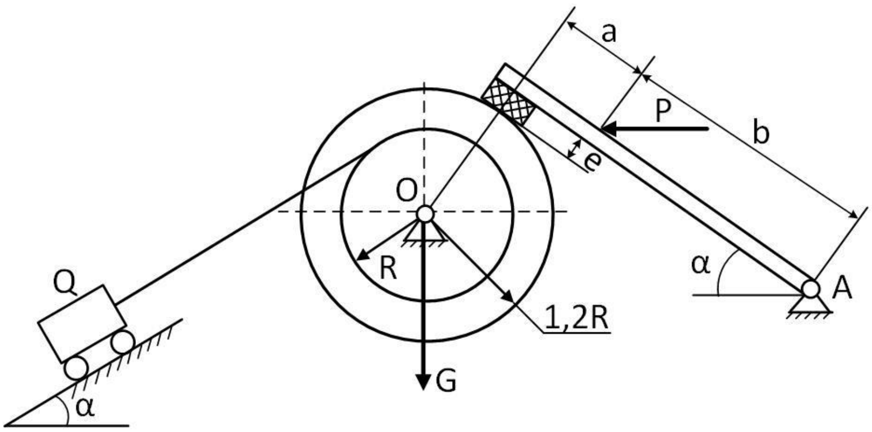
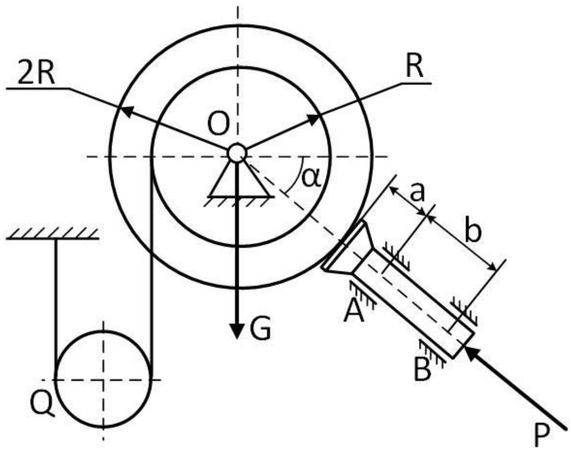
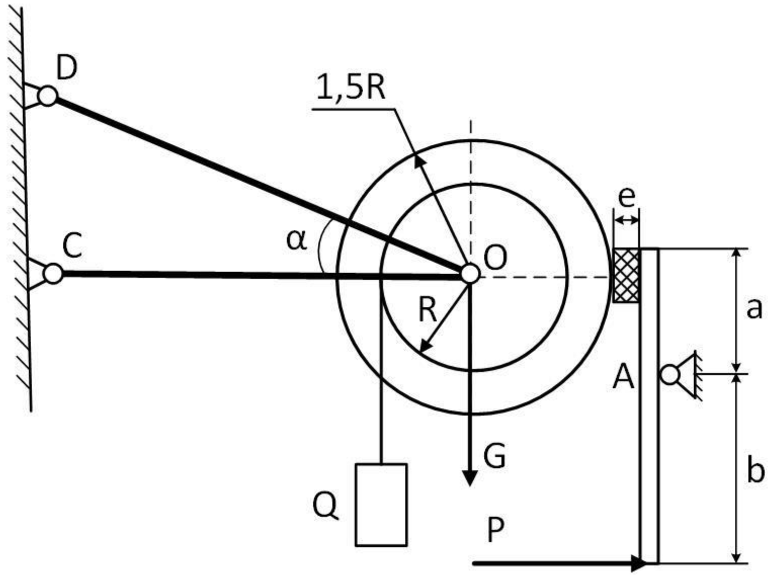
Таблиця 1

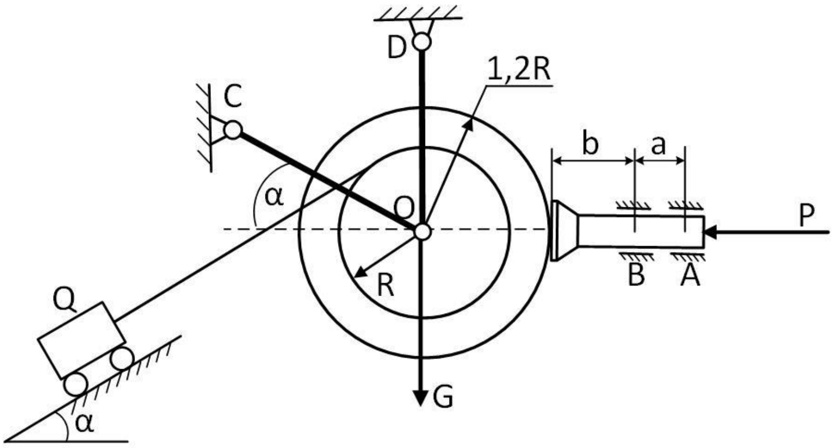
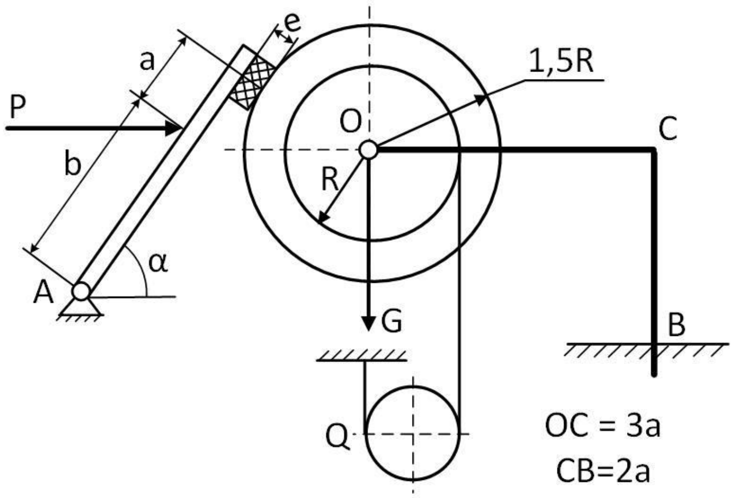
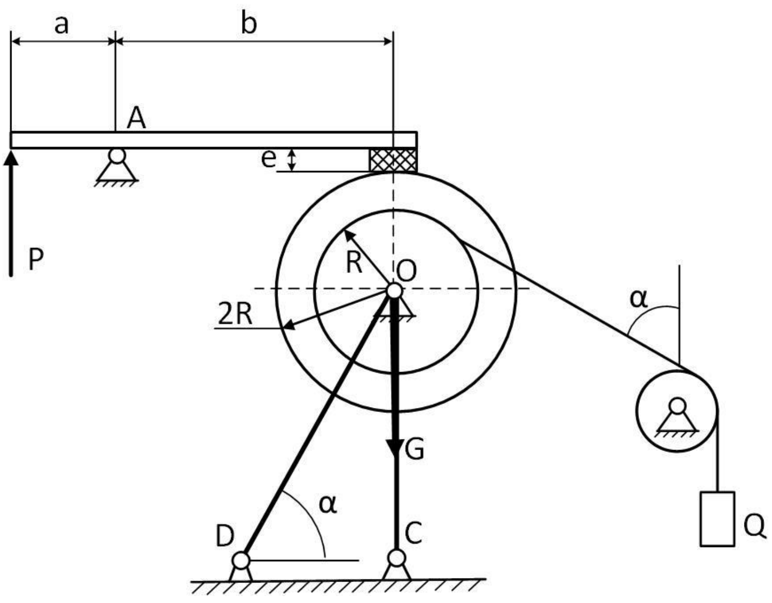
Варіант	*G*	*Q*	*a*	*b*	*e*	*α*, *град.*	Коефіцієнт зчеплення (тертя спокою), *f*
	kH		*м*				
0	2,5	22	0,32	0,67	0,05	30	0,25
1	3,4	18	0,24	0,55	0,04	45	0,15
2	1,5	16	0,15	0,42	0,03	60	0,17
3	2,8	21	0,27	0,54	0,06	30	0,32
4	1,6	19	0,35	0,68	0,05	15	0,19
5	4,2	33	0,18	0,43	0,03	60	0,27
6	2,4	15	0,12	0,38	0,04	45	0,16
7	3,2	27	0,22	0,47	0,06	30	0,33
8	1,4	19	0,17	0,55	0,03	60	0,14
9	2,7	24	0,25	0,48	0,04	45	0,23

1.0



1.1	D C α α O R 2R G Q a b P A B
1.2	P a b A e O R 2R Q G α
1.3	1,5R a b O P R A B Q G α

1.4	a P b e O α A Q R 1,2R G α
1.5	2R R O α a b A G B Q P
1.6	D 1,5R e C α O a R A G b Q P

1.7	 D 1,2R C b a α O P B A R Q G α
1.8	 e a 1,5R P O C b R α A G B Q OC = 3a CB=2a
1.9	 a b A e P R O 2R α G α D C Q

4.1 Приклад виконання завдання

Визначити граничне значення сили *P* і реакції в'язей в точках *O*, *A* і *B*. Дано: $G = 2\ kH$, $Q = 20\ kH$, $f = 0{,}1$, $\alpha = 20^0$, $a = 0{,}1\ м$, $b = 0{,}2\ м$ (рис. 11).

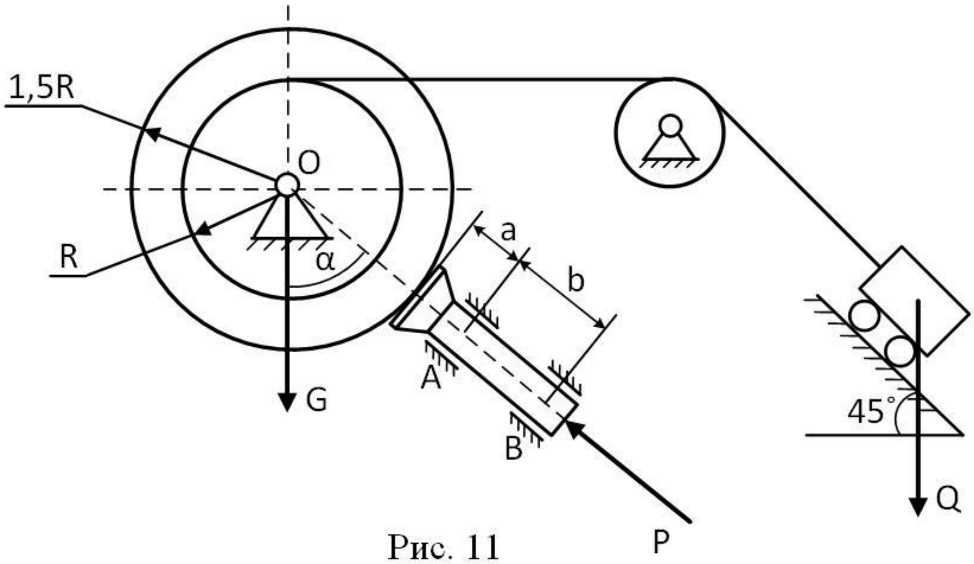


Рис. 11

Розв'язок: Розглянемо спочатку систему врівноважених сил, прикладених до тіла Q (рис. 12). На тіло діють: сила тяжіння $\bar{Q}$, реакція нитки $\bar{T}$ і нормальна реакція $\bar{N}_1$.

Розглядаючи тіло Q як матеріальну точку, складемо рівняння рівноваги вказаних сил:

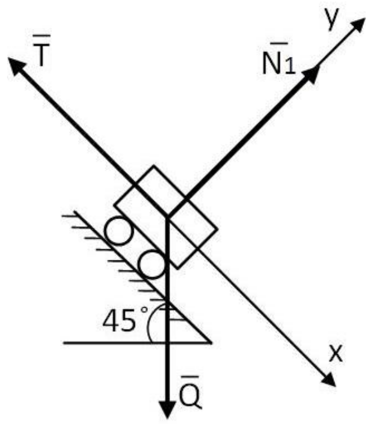


Рис. 12

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; Qcos45^0 - T = 0.$$

Звідки $T = Qcos45^0 = 20 \cdot 0{,}707 = 14{,}1\ kH.$

Потім розглянемо рівновагу сил, прикладених до барабана (рис. 13):

$$\sum_{k=1}^{n} M_O(\bar{F}_k) = 0;\ -T \cdot R + F_{\text{тр}}^{max} \cdot 1{,}5R = 0,$$

де $F_{\text{тр}}$ – сила зчеплення (сила тертя спокою).

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; T + F_{\text{тр}}^{max} cos\alpha - Nsin\alpha + X_O = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; F_{\text{тр}}^{max} sin\alpha + Ncos\alpha + Y_O - G = 0$$

У випадку граничної рівноваги записані рівняння доповнюються формулою

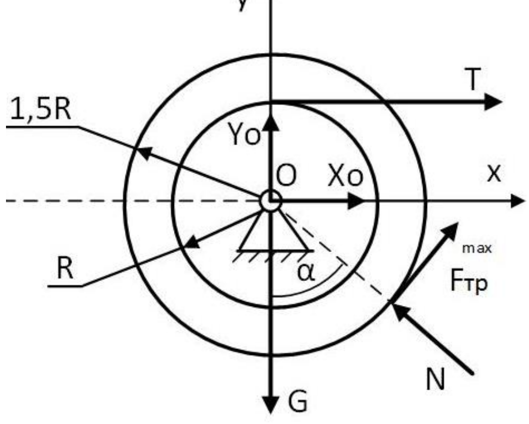


Рис. 13

$$F_{\text{тр}}^{max} = f \cdot N$$

Розв'язуємо одержану систему рівнянь відносно невідомих.

$$F_{\text{тр}}^{max} = \frac{T \cdot R}{1{,}5R} = \frac{14{,}1}{1{,}5} = 9{,}4\ kH.$$

$$N = \frac{F_{\text{тр}}^{max}}{f} = 94\ kH.$$

$$X_O = -T - F_{\text{тр}}^{max} cos\alpha + N sin\alpha = 9{,}2\ kH.$$

$$Y_O = -F_{\text{тр}}^{max} sin\alpha - N cos\alpha + G = -89{,}6\ kH.$$

Для визначення мінімального значення сили P і реакцій в'язей A і B (ці реакції перпендикулярні до направляючих A і B) розглянемо рівновагу сил, прикладених до гальмівної колодки (рис. 14):

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\bar{F}_k) = 0; F_{\text{тр}}^{max} \cdot a + R_B \cdot b = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; N - P = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; R_A + R_B - F_{\text{тр}}^{max} = 0.$$

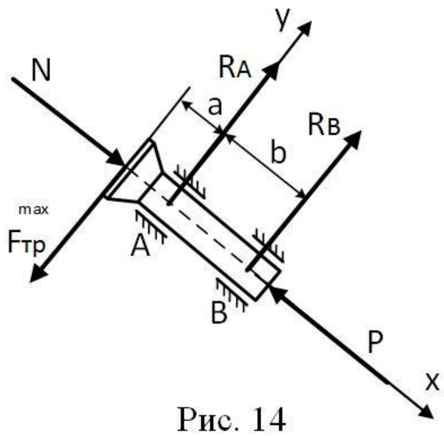


Рис. 14

Розв'язуючи ці рівняння отримаємо:

$$R_B = \frac{F_{\text{тр}}^{max} \cdot a}{b} = -4{,}7\ kH.$$

$$R_A = -R_B + F_{\text{тр}}^{max} = 14{,}1\ kH.$$

$$P = N = 94\ kH.$$

5. *Питання для самоконтролю*

1. Що називається тертям ?
2. Що називається тертям ковзання ?
3. Що називається тертям кочення ?
4. Запишіть формулу для визначення сили тертя ковзання ?
5. Що називається кутом
6. Чому дорівнює тангенс кута тертя ?
7. Що таке область рівноваги ? Чому вона так називається ?
8. Запишіть формулу для визначення моменту тертя кочення ?
9. В яких одиницях вимірюються коефіцієнти тертя ковзання і кочення ?
10. Запишіть умову чистого кочення циліндричного тіла по поверхні.

Список літератури

1. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 2001. – 416с.
3. Сборник коротких задач про теоретической механике / О.Є. Кепе, Я.А. Виба, О.П. Грапис и др.; под ред. О.Є. Кепе. – М.: Высш. шк., 1989. – 386 с.
4. Теоретична механіка. Збірник задач / О.С. Апостолюк, В.М. Воробйов, Д.І. Ільчишина та ін.; За ред. Павловського М.А. – К.: Техніка, 2007. – 400 с.
5. Конспект лекцій із теоретичної механіки: навчальний посібник / Б. О. Іванов, М. В. Максюта. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2012. – 207 с.
6. Веретільник Т.І., Шеховцов Б.А., Мисник Л.Д. Конспект лекцій з теоретичної механіки для студентів механічних, будівельних та приладобудівних спеціальностей. Частина I “Статика”. – Черкаси , 2007. – 76 с.
7. Методичні вказівки для самостійної роботи з дисципліни «Теоретична механіка» для студентів механічних та будівельних спеціальностей усіх форм навчання. Статика. / Л.Д. Мисник, Т.І. Веретільник, В.М. Зотов; – Черкаси: ЧДТУ, 2014. – 46 с.