

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

## **ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА**

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ І ЗАВДАННЯ**  
**З ДИСЦИПЛІНИ “ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА”**  
**ДЛЯ ЗДОБУВАЧІВ ОСВІТНЬОГО СТУПЕНЯ “БАКАЛАВР” З ТЕХНІЧНИХ**  
**СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ УСІХ ФОРМ НАВЧАННЯ.**

Черкаси



2018

УДК 531.01(07)  
П 39

*Затверджено вченою радою ФКТМД,  
протокол № 13а від 26.06.2018 року  
згідно з рішенням кафедри механіки,  
поліграфічних машин і технологій  
протокол № 6 від 11.05.2018 року*

Упорядник: Мисник Людмила Дмитрівна, канд. техн. наук., доцент.

Рецензент: Веретільник Т.І, к.т.н., професор.

Плоскопаралельний рух твердого тіла: методичні рекомендації і завдання з дисципліни “Теоретична механіка” для здобувачів освітнього ступеня “бакалавр” з технічних спеціальностей усіх форм навчання/ упоряд.: Л.Д. Мисник; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси : ЧДТУ, 2018. – 44 с.

Навчальне видання призначене для поглибленого вивчення теоретичної механіки, зокрема плоскопаралельного руху твердого тіла. Метою видання є допомога студентам в опануванні та систематизації знань завдяки засвоєнню методики розв’язання задач. Методичні рекомендації орієнтовані на студентів технічних спеціальностей, можуть бути використані при вивченні споріднених дисциплін.

Навчальне видання

## **ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА**

### **МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ І ЗАВДАННЯ З ДИСЦИПЛІНИ “ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА” ДЛЯ ЗДОБУВАЧІВ ОСВІТНЬОГО СТУПЕНЯ “БАКАЛАВР” З ТЕХНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ УСІХ ФОРМ НАВЧАННЯ.**

*В авторській редакції*

---

Формат 60x84 1/16. Times New Roman  
Ум. друк. арк. 1,62. Обл.-вид. арк. 1,68. Р.н. 2278.

---

Черкаський державний технологічний університет  
Свідectво про державну реєстрацію ДК № 896 від 16.04.2002 р.  
бульвар Шевченка, 460, м. Черкаси, 18006

## ЗМІСТ

	Вступ.....	4
1	Плоский рух твердого тіла.....	4
1.1	Рівняння плоского руху твердого тіла.....	5
2	Швидкість точок плоскої фігури.....	7
3	Миттєвий центр швидкостей.....	9
4	Прискорення точок плоскої фігури .....	13
5	Миттєвий центр прискорень.....	16
6	Знаходження швидкостей точок плоскої фігури за допомогою плану швидкостей .....	19
7	Знаходження прискорень точок плоскої фігури за допомогою плану прискорень .....	23
8	Контрольні завдання для самостійної роботи .....	29
9	Завдання для розрахунково-графічної роботи “Визначення швидкостей і прискорень точок твердого тіла при плоскому русі”....	34
9.1	Приклад виконання завдання .....	37
10	Питання для самоконтролю.....	43
	Список літератури.....	44

## ВСТУП

Теоретична механіка вивчає найбільш загальні закони руху і взаємодії тіл, її головне завдання – пізнання кількісних і якісних закономірностей, які спостерігаються у природі. Вона належить до фундаментальних природничих наук, оскільки природознавство в цілому вивчає різні форми руху матерії.

Значення теоретичної механіки як однієї з наукових основ техніки і технології безупинно зростає. Розвиток нових видів виробництва і нових технічних засобів висуває проблеми, які вже не можна вирішити на основі одних лише дослідних даних. Для розв'язання цих проблем потрібне моделювання, в основі якого лежить попередній точний розрахунок і наукове передбачення, що спирається на глибокі знання законів і методів теоретичної механіки.

Дана розробка призначена для поглибленого вивчення теоретичної механіки, зокрема плоскопаралельного руху твердого тіла. Орієнтована, в першу чергу, на студентів технічних спеціальностей, може бути використана при вивченні споріднених дисциплін.

Вочевидь основний шлях вивчення будь-якої дисципліни – це самостійна робота над матеріалом, у тому числі набуття практичних навичок у розв'язанні задач. Особливістю задач з теоретичної механіки є те, що вони передбачають наявність знань із математики, фізики, креслення тощо. Для студентів молодших курсів, на яких викладається теоретична механіка, поєднання знань цих дисциплін із новою інформацією, яку містить теоретична механіка, становить певні труднощі. Мета даних рекомендацій – допомога студенту в опануванні та систематизації знань завдяки засвоєнню методики розв'язання задач. Тому в рекомендаціях наведено короткі теоретичні відомості, приклади розв'язування задач та задачі для самостійної роботи. Для більш поглибленого вивчення дисципліни подано розрахункові завдання для дослідження плоскопаралельного руху твердого тіла.

### 1. Плоский рух твердого тіла.

*Плоским або плоскопаралельним називають такий рух твердого тіла, при якому всі його точки переміщуються в площинах, паралельних деякій нерухомій площині.*

Прикладом плоского руху є кочення циліндра по горизонтальній площині, при якому його основа залишається весь час паралельною площині  $Oxy$  (рис. 1). Всі точки, які лежать на перпендикулярах до основи циліндра, тобто паралельно осі  $x$ , переміщуються аналогічно точкам, які належать основі. Тому достатньо дослідити рух основи чи іншого перетину,

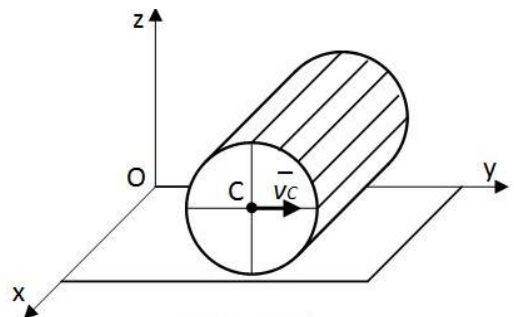


Рис. 1

який лежить на площині, паралельній  $Oyz$ , щоб визначити рух усього циліндра.

### 1.1 Рівняння плоского руху твердого тіла

Розглянемо довільний плоский рух твердого тіла  $T$ . Нехай всі точки тіла переміщуються в площинах, паралельних площині  $Oxy$  (рис. 2). З означення плоского руху випливає, що будь-яка пряма  $AB$ , проведена в тілі перпендикулярно площині  $Oxy$ , здійснює поступальний рух, тобто траєкторії, швидкості і прискорення всіх точок цієї прямої будуть однакові.

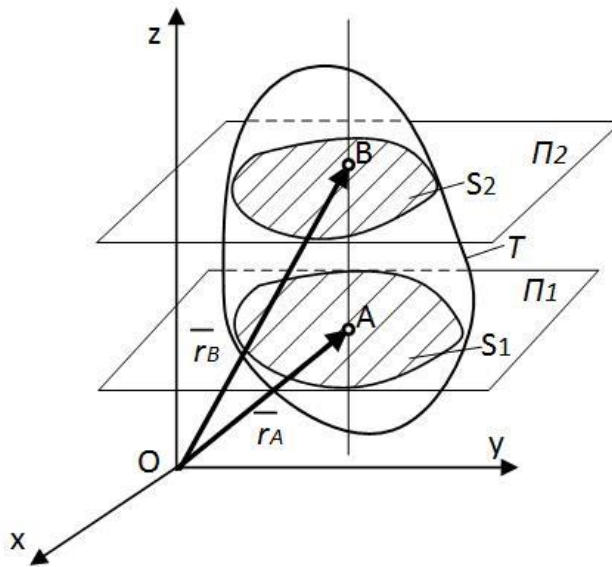


Рис. 2

Таким чином, для визначення руху тіла необхідно знати рух тільки одної точки на кожній прямій, проведеній перпендикулярно площині  $Oxy$ . Якщо взяти точки в одній площині, паралельній площині  $Oxy$ , то можна стверджувати, що плоский рух твердого тіла повністю визначається рухом плоскої фігури (перетину тіла  $S$ ), отриманої перетином тіла будь-якою площиною  $\Pi$ , паралельною площині  $Oxy$ .

Для задавання руху перетину твердого тіла достатньо описати рух якого-небудь відрізка  $CA$ , який належить цьому перетину. Положення відрізка  $CA$  визначається координатами точки  $C$ , вибраної за полюс, і кутом повороту відрізка, який відраховується від вибраного початкового положення (рис. 3).

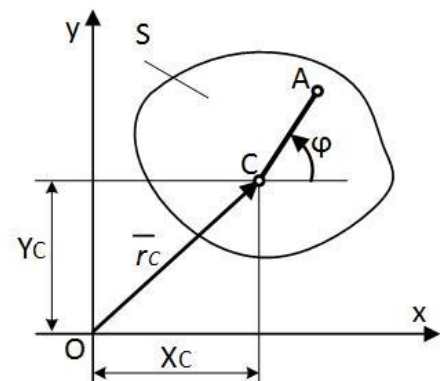


Рис. 3

Тоді рівняння плоского руху твердого тіла матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \text{а) } X_C &= f_1(t) \\ \text{б) } Y_C &= f_2(t) \\ \text{в) } \varphi &= \varphi(t) \end{aligned} \quad (1)$$

Вирази а), б) формули (1) описують поступальний рух плоскої фігури  $S$ , який визначається рухом полюса  $C$ . Поступальний рух плоскої фігури залежить від вибору полюса. Якщо вибрати за полюс точку  $A$ , то вирази а), б) матимуть інший вигляд. Вираз в) формули (1) описує обертальний рух плоскої фігури, який не залежить від вибору полюса.

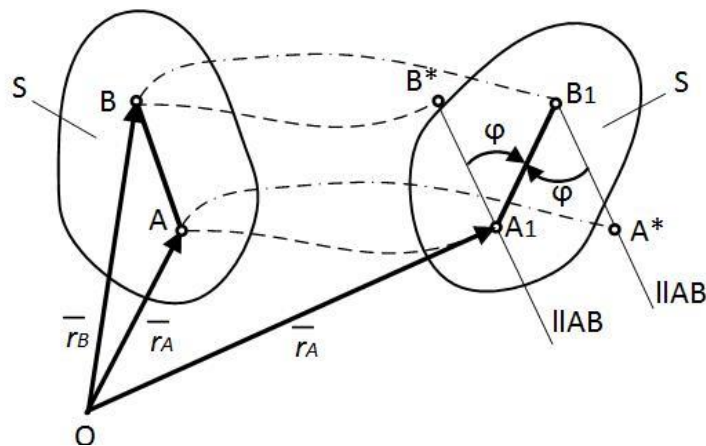


Рис. 4

Дійсно, відрізок  $AB$  (рис. 4) перетину  $S$  може потрапити в положення  $A_1B_1$  наступним чином: здійснивши поступальне переміщення з полюсом  $A$   $\vec{r}_A = \vec{r}_A(t)$  та обертання отриманого відрізка  $A_1B^*$  навколо полюса  $A_1$  на кут  $\varphi = \varphi(t)$  до збігання  $A_1B^*$  з  $A_1B_1$ .

Якщо маємо точку  $B$  ( $\vec{r}_B = \vec{r}_B(t)$ ) за полюс, то поступальний рух перетину  $S$  визначається відрізком  $A^*B_1$ , обертальний – поворотом відрізка  $A^*B_1$  навколо полюсу  $B_1$  на кут  $\varphi = \varphi(t)$  до збігання  $A^*B_1$  з  $A_1B_1$ .

Це пояснення підтверджує положення про те, що *плоский рух є сукупністю поступального руху разом з довільною точкою – полюсом та обертального навколо полюса*.

Так як обертальна складова руху ( $\varphi = \varphi(t)$ ) від вибору полюса не залежить, то маємо незалежні (вільні) кутову швидкість  $\omega = \omega(t)$  та кутове прискорення  $\varepsilon = \varepsilon(t)$ .

Приклад 1. Колесо радіуса  $R = 0,4$  м котиться по прямолінійному горизонтальному шляху з постійною кутовою швидкістю  $\omega = 2$  рад/с (рис. 5). Записати рівняння плоского руху колеса, якщо центр колеса має постійну швидкість:  $v_C = 0,8$  м/с.

Розв'язок. Оскільки колесо рухається рівномірно, то координата центра колеса по осі  $x$  буде рівна:

$$x_C = v_C t = 0,8t, \text{ м.}$$

Координата центра колеса по осі  $y$  постійна і рівна радіусу:

$$y_C = R = 0,4 \text{ м.}$$

Кут повороту колеса при рівномірному обертанні рівний:

$$\varphi = \omega t = 2t, \text{ рад.}$$

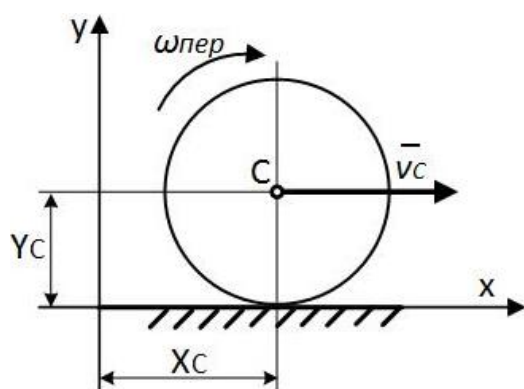


Рис. 5

Відповідь.  $x_C = 0,8t, \text{ м; } y_C = 0,4 \text{ м; } \varphi = 2t, \text{ рад.}$

## 2. Швидкість точок плоскої фігури

Визначимо положення точки  $B$  у вибраній системі відліку, приймаючи за полюс точку  $A$  (рис. 6):

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r} \quad (2)$$

Вектор  $\vec{r}$  постійного модуля (відстань між точками  $A$  і  $B$  не змінюється) міняє свій напрямок внаслідок обертання плоскої фігури навколо полюса  $A$ .

Диференціюємо рівняння (2) за часом, одержуємо:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt},$$

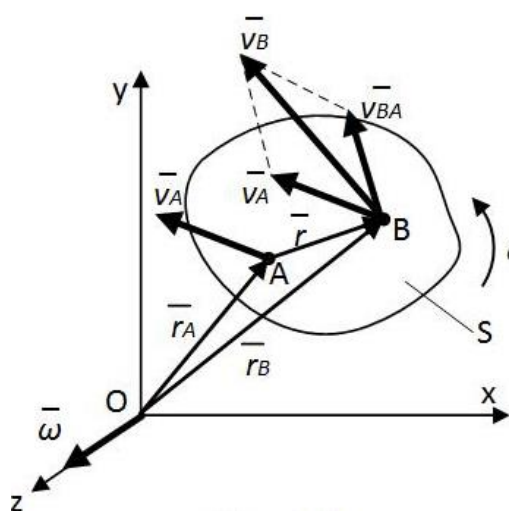


Рис. 6

де  $\vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt}$  – швидкість вибраної точки  $B$ ;  
 $\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt}$  – швидкість полюса  $A$ ;  
 $\vec{v}_{BA} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  – обертальна швидкість точки  $B$  навколо полюса  $A$ , яку визначимо за формулою Ейлера:

$$\vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Згідно з правилом векторного добутку вектор  $\vec{v}_{BA}$  лежить в площині фігури, перпендикулярний  $BA$  ( $\vec{v}_{BA} \perp \vec{BA}$ ) і направлений в бік обертання плоскої фігури, тобто відповідно до напрямку  $\omega$ . Модуль вектора  $\vec{v}_{BA}$  рівний:

$$v_{BA} = \omega r \sin(\bar{\omega}, \bar{r}).$$

Так як  $\bar{\omega} \perp \bar{r}$ , то  $\sin(\bar{\omega}, \bar{r}) = 1$ . Тому  $v_{BA} = \omega r$ .

Одержимо

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} \quad (3)$$

або

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (4)$$

*Швидкість будь-якої точки тіла при плоскому русі дорівнює геометричній сумі швидкості полюса і обертальної швидкості цієї точки навколо полюса, тобто переносної та відносної швидкостей.*

Так як вектор швидкості  $\bar{v}_{BA}$  перпендикулярний відрізку, який з'єднує точки  $A$  і  $B$ , то з цього слідує:

*Проекції швидкостей двох точок твердого тіла на пряму, що з'єднує ці точки, рівні між собою. При цьому проекції повинні мати однаковий знак.*

Нехай точка  $A$  перетину  $S$  має вектор швидкості  $\bar{v}_A$  не перпендикулярний відрізку  $AB$ , тоді згідно (3)  $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$  ( $\bar{v}_{BA} \perp \overline{BA}$ ). Проектуючи це рівняння на напрямок  $AB$  (рис. 7), маємо  $v_B \cos \beta = v_A \cos \varphi$ , що показує наявність точки перетину швидкостей  $\bar{v}_A$  та  $\bar{v}_B$ .

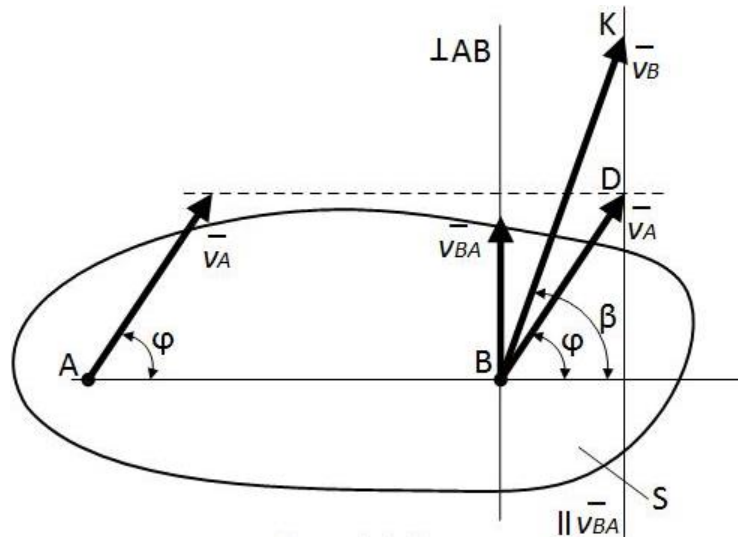


Рис. 7

**Приклад 2.** Визначити швидкість точки  $M$ , яка знаходиться на ободі колеса, використовуючи умову прикладу 1.

**Розв'язок.** Застосуємо формулу (3). За полюс приймемо точку  $C$ , швидкість якої відома, тоді:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_C + \bar{v}_{MC}.$$



Обертальна швидкість точки  $M$  відносно полюса  $C$  рівна:

$$v_{MC} = \omega MC = 2 \cdot 0,4 = 0,8 \text{ м/с } (MC = R).$$

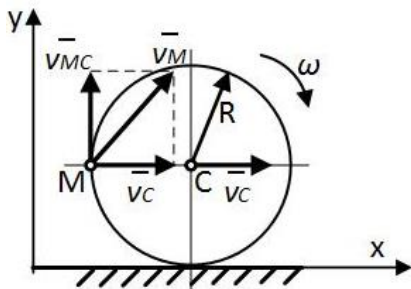


Рис. 8

Вектор  $\vec{v}_{MC}$  перпендикулярний відрізку  $MC$  і направлений відповідно до кутової швидкості. Тому вектор  $\vec{v}_{MC}$  відносно полюса  $C$  повинен показувати напрямку кутової швидкості (рис. 8).

Так як  $\vec{v}_{MC} \perp \vec{v}_C$ , то  $v_M = \sqrt{v_C^2 + v_{MC}^2} = 1,13 \text{ м/с}$ ,

$$\cos(\vec{v}_M, \vec{v}_C) = \frac{v_C}{v_M} = 0,70, \angle \vec{v}_M, \vec{v}_C = 45^\circ.$$

Відповідь.  $v_M = 1,13 \text{ м/с}$ .

### 3. Миттєвий центр швидкостей

Миттєвим центром швидкостей (МЦШ) називається точка в площині руху плоскої фігури, швидкість якої в дану мить рівна нулю.

Доведемо, що коли кутова швидкість плоскої фігури не рівна нулю, то така точка існує. Відома швидкість точки  $A$  і  $\omega \neq 0$ . Повернемо вектор  $\vec{v}_A$  на  $90^\circ$  в напрямку обертання і проведемо промінь  $AK$ . Від точки  $A$  відкладемо відрізок  $AP_V$

$$AP_V = \frac{v_A}{\omega}$$

Визначимо обертальну швидкість точки  $P_V$  навколо точки  $A$ , прийнявши її за полюс

$$v_{PA} = \omega AP_V = \omega \frac{v_A}{\omega} = v_A$$

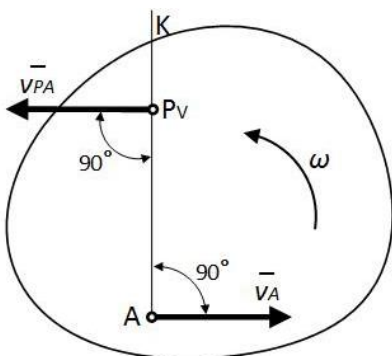


Рис. 9

Вектор  $\vec{v}_{PA}$  перпендикулярний  $AP_V$  і направлений відповідно до кутової швидкості (рис. 9), тобто  $\vec{v}_{PA} = -\vec{v}_A$ . Записуємо рівняння (3) теореми про додавання швидкостей плоскої фігури для точки  $P_V$ , прийнявши за полюс точку  $A$ :

$$\vec{v}_{P_V} = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA} = \vec{v}_A - \vec{v}_A = 0$$

Швидкість точки  $P_V$  рівна нулю, отже точка  $P_V$  – миттєвий центр швидкостей. Якщо за полюс вибрати точку  $P_V$ , то рівняння (3) матиме вигляд

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{AP}$$

З даної формули слідує, що швидкості точок тіла при плоскому русі розподіляються так, як і при обертанні. *МЦШ* – миттєва нерухома вісь. Тому вектори швидкостей точок плоскої фігури перпендикулярні відрізкам, які з'єднують ці точки з *МЦШ*, і направлені відповідно до кутової швидкості, а модулі швидкостей пропорційні відстаням точок до *МЦШ* (рис. 10).

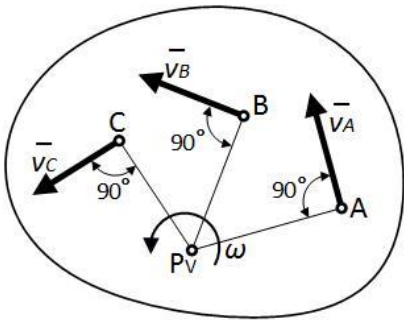


Рис. 10

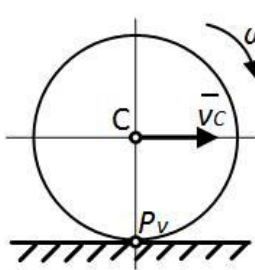
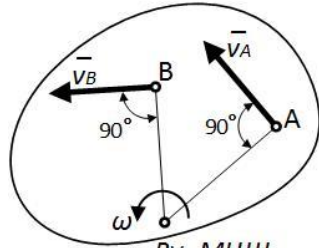
$$v_A = \omega AP_V, v_B = \omega BP_V, v_C = \omega CP_V$$

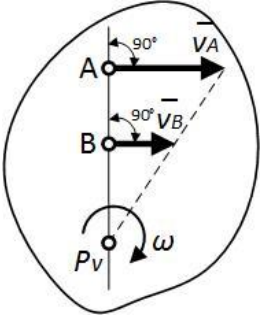
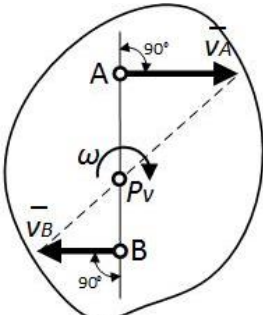
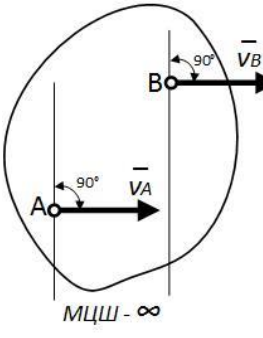
Звідки 
$$\omega = \frac{v_A}{AP_V} = \frac{v_B}{BP_V} = \frac{v_C}{CP_V}$$

*Відношення швидкості будь-якої точки плоскої фігури до її відстані до МЦШ дорівнює кутовій швидкості обертання.*

Якщо відомі напрямки векторів швидкостей двох точок плоскої фігури, то *МЦШ* знаходиться в точці перетину перпендикулярів, проведених до векторів швидкостей в точках їх прикладання.

Вектор швидкості будь-якої точки буде перпендикулярний відрітку, який з'єднує *МЦШ* з даною точкою, і направлений відповідно до кутової швидкості. Модуль швидкості рівний добутку кутової швидкості на відстань від точки до *МЦШ*.

Окремі випадки знаходження МЦШ	
1. Колесо котиться без ковзання по нерухомій поверхні.	<p><i>МЦШ</i> знаходиться в точці дотику колеса з нерухомою поверхнею. Точка <math>P_V</math> – миттєвий центр швидкостей. <math>\vec{v}_{P_V} = 0</math>.</p> 
2. Відомі швидкості двох точок або величина і напрямок швидкості одної точки ( $\vec{v}_A$ ) і напрямок другої.	<p><i>МЦШ</i> знаходиться в точці перетину перпендикулярів, проведених до векторів швидкостей в точках їх прикладання.</p> 

<p>3. Вектори швидкостей двох точок направлені в один бік і перпендикулярні до відрізка, що їх з'єднує, а модулі швидкостей не рівні між собою.</p>	<p>МЦШ знаходиться на перетині двох прямих, одна з яких проведена через точки <math>A</math> і <math>B</math>, друга – через кінці векторів швидкостей.</p> 
<p>4. Вектори швидкостей двох точок направлені в різні боки і перпендикулярні до відрізка, що їх з'єднує.</p>	<p>МЦШ знаходиться в точці перетину прямої, яка з'єднує кінці векторів швидкостей точок <math>A</math> і <math>B</math>, і прямої <math>AB</math>.</p> 
<p>5. Швидкості двох точок паралельні та рівні між собою.</p>	<p>МЦШ віддаляється нескінченно далеко. У цьому випадку відбувається миттєво-поступальний рух.</p> 

Приклад 3. В положенні механізму, схема якого наведена на рис. 11, визначити кутову швидкість шатуна  $AB$  і швидкості точок  $B$  і  $C$ , якщо  $\omega_{OA} = 2$  рад/с,  $OA = 0,2$  м,  $AB = 1,6$  м,  $BC = 0,8$  м,  $h = 0,8$  м.

Розв'язок. Знайдемо швидкість точки  $A$ :

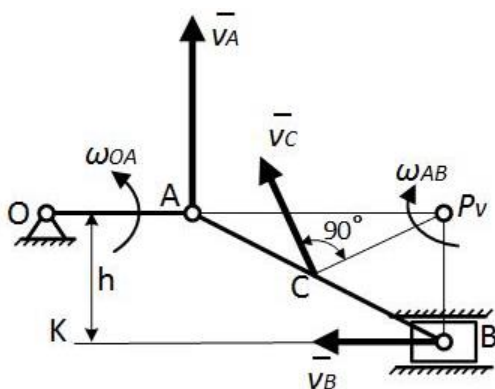


Рис. 11

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 0,2 = 0,4 \text{ м/с}, \quad \vec{v}_A \perp \overline{AO}$$

Швидкість повзуна  $B$  направлена по прямій  $KB$ . Миттєвий центр швидкостей шатуна  $AB$  знаходиться в точці  $P_V$  перетину перпендикулярів, поставлених до напрямків векторів швидкостей точок  $A$  і  $B$ .

Кутова швидкість шатуна  $AB$  рівна:

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_V} = \frac{v_B}{BP_V} = \frac{v_C}{CP_V}$$

Знайдемо величини  $AP_V$ ,  $BP_V$ ,  $CP_V$ :

$$AP_V = \sqrt{AB^2 - BP_V^2} = \sqrt{1,6^2 - 0,8^2} = 1,39 \text{ м}, BP_V = h = 0,8 \text{ м},$$

$$\cos \angle P_V BC = \frac{h}{AB} = \frac{0,8}{1,6} = 0,5, \quad \angle P_V BC = 60^\circ.$$

Тоді  $\Delta P_V BC$  рівносторонній, а отже  $CP_V = BP_V = BC = 0,8 \text{ м}$ .

Знаходимо: 
$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_V} = \frac{0,4}{1,39} = 0,29 \text{ рад/с},$$

$$v_B = \omega_{AB} BP_V = 0,29 \cdot 0,8 = 0,23 \text{ м/с},$$

$$v_C = \omega_{AB} CP_V = 0,29 \cdot 0,8 = 0,23 \text{ м/с}.$$

Напрямок кутової швидкості шатуна  $\omega_{AB}$  визначається за напрямком обертання вектора  $\vec{v}_A$  швидкості точки  $A$  відносно миттєвого центра швидкостей. Кутова швидкість шатуна  $AB$  направлена за годинниковою стрілкою. Швидкості точок  $B$  і  $C$  повинні показувати такий же напрямок. Для побудови вектора  $\vec{v}_C$  проведемо перпендикуляр до відрізка  $CP_V$  і направимо вектор  $\vec{v}_C$  відповідно з напрямком  $\omega_{AB}$ .

Відповідь.  $\omega_{AB} = 0,29 \text{ рад/с}$ ,  $v_B = v_C = 0,23 \text{ м/с}$ .

Приклад 4. Колесо котиться без ковзання по прямолінійному шляху. Швидкість центра колеса рівна  $20 \text{ м/с}$ , Радіус колеса  $1 \text{ м}$ . Знайти швидкості точок  $A$ ,  $B$ ,  $D$  і кутову швидкість колеса (рис. 12).

Розв'язок. Миттєвий центр швидкостей знаходиться в точці  $P_V$  дотику колеса і нерухомої поверхні:

$$\omega = \frac{v_C}{CP_V} = \frac{v_C}{R} = \frac{20}{1} \text{ рад/с}.$$

Кутова швидкість направлена за годинниковою стрілкою. Знаходимо відстані від точок  $A$ ,  $B$ ,  $D$  до МЦШ:

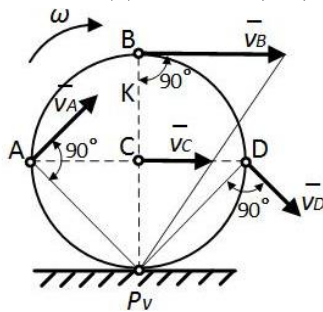


Рис. 12

$$AP_V = DP_V = R\sqrt{2} = 1\sqrt{2} = 1,41 \text{ м},$$

$$BP_V = 2R = 2 \text{ м},$$

$$v_A = v_D = \omega AP_V = 20 \cdot 1,41 = 28,2 \text{ м/с},$$

$$v_B = \omega BP_V = 20 \cdot 2 = 40 \text{ м/с}.$$

Вектор  $\vec{v}_A$  перпендикулярний прямій  $AP_V$ , а вектор  $\vec{v}_B$  перпендикулярний прямій  $BP_V$ . Вектор  $\vec{v}_D$  перпендикулярний  $DP_V$ . Напрямок векторів  $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_D$  повинен відповідати кутовій швидкості колеса (рис. 12).

Відповідь.  $v_A = 28,2$  м/с,  $v_D = 28,2$  м/с,  $v_B = 40$  м/с.

#### 4. Прискорення точок плоскої фігури

Для визначення прискорення диференціюємо рівняння (4) за часом:

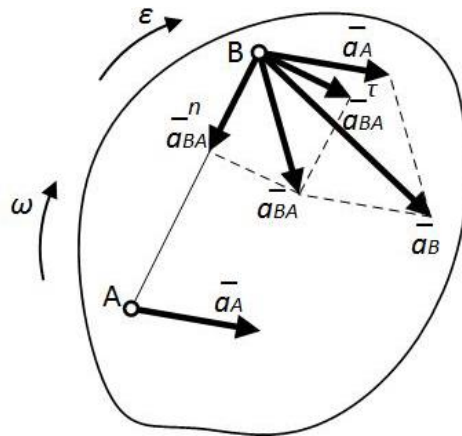


Рис. 13

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

де

$$\vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt}, \quad \vec{a}_A = \frac{d\vec{v}_A}{dt}, \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}_{BA}$$

Тоді

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{BA}$$

де  $\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \vec{a}_{BA}^\tau$  – дотична складова прискорення точки  $B$  при обертанні плоскої фігури навколо полюса  $A$ ;

$\vec{\omega} \times \vec{v}_{BA} = \vec{a}_{BA}^n$  – нормальна складова прискорення точки  $B$  при обертанні плоскої фігури навколо полюса  $A$ .

Вектори  $\vec{a}_{BA}^\tau$  і  $\vec{a}_{BA}^n$  згідно з правилом векторного добутку будуть направлені як показано на рис. 13.

Вектор  $\vec{a}_{BA}^\tau$  перпендикулярний відрізку  $\overline{BA}$  і направлений відповідно до кутового прискорення. Вектор  $\vec{a}_{BA}^n$  направлений від точки  $B$  до полюсу  $A$ . Модулі цих прискорень:

$$a_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB, \quad a_{BA}^\tau = \varepsilon \cdot AB.$$

Одержимо

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau \quad (5)$$

або

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau \quad (6)$$

*Прискорення будь-якої точки плоскої фігури дорівнює геометричній сумі прискорення полюса і прискорення даної точки при обертанні плоскої фігури навколо полюса.*

Для знаходження модуля прискорення точки будемо, згідно рівняння (6), план прискорень (багатокутник прискорень) або проектуємо це рівняння на вибрані осі координат.

Приклад 5. Використовуючи умову прикладу 3, визначити прискорення точок  $B$  і  $C$ .

Розв'язок. За полюс виберемо точку  $A$ , так як прискорення цієї точки можна знайти (рис. 14):

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau,$$

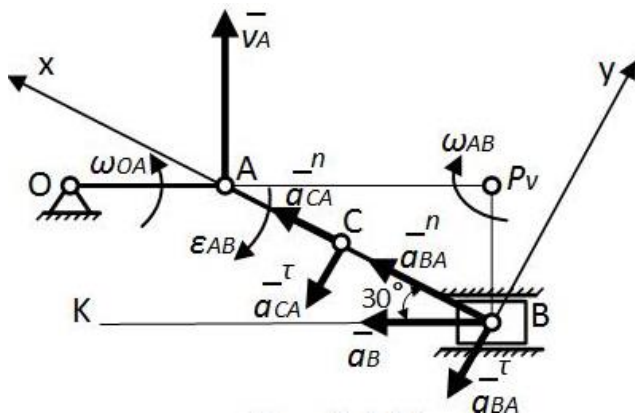


Рис. 14

де  $a_A^\tau = \varepsilon \cdot AO = 0$ , так як кривошип  $OA$  обертається рівномірно,  $\omega_{OA} = \text{const}$ ,  $\varepsilon_{OA} = 0$ ;

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 2^2 \cdot 0,2 = 0,8, \text{ м/с}^2.$$

Вектор  $\bar{a}_A^n$  направлений вздовж  $\overline{AO}$  від точки  $A$  до точки  $O$ .

Застосуємо формулу (6), задаючи напрям вектора  $\bar{a}_B$  паралельно напрямку руху повзуна  $B$  (рис. 14):

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau \quad (7)$$

Знаходимо  $\bar{a}_{BA}^n$  і  $\bar{a}_{BA}^\tau$ :

$a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB$ , так як  $\varepsilon_{AB}$  невідомо, то задаємо напрям вектора  $\bar{a}_{BA}^\tau$ , враховуючи, що  $\bar{a}_{BA}^\tau \perp \overline{BA}$ .

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0,29^2 \cdot 1,6 = 0,135 \text{ м/с}^2.$$

Вектор  $\bar{a}_{BA}^n$  направлений вздовж  $\overline{BA}$  від точки  $B$  до полюса  $A$ . Проектуємо вираз (7) на вибрані осі  $(x, y)$ :

$$\text{вісь } x: a_B \cos 30^\circ = a_{BA}^n + a_A^n \cos 30^\circ \quad (8)$$

$$\text{вісь } y: -a_B \cos 60^\circ = -a_A^n \cos 60^\circ - a_{BA}^\tau \quad (9)$$

Знаходимо з (8)

$$a_B = \frac{a_{BA}^n + a_A^n \cos 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{0,135 + 0,8 \cdot 0,87}{0,87} = 0,96 \text{ м/с}^2,$$

з (9) маємо:

$$a_{BA}^\tau = a_B \cos 60^\circ - a_A^n \cos 60^\circ = 0,96 \cdot 0,5 - 0,8 \cdot 0,5 = 0,08 \text{ м/с}^2.$$

Вектор  $\bar{a}_{BA}^\tau$  направлений в напрямку, вибраному на рис. 14.

Визначимо кутове прискорення шатуна  $AB$ :

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = \frac{0,08}{1,6} = 0,05 \text{ рад/с}^2.$$

Напрямок  $\varepsilon_{AB}$  буде за годинниковою стрілкою.

Знайдемо прискорення точки  $C$ , вибравши за полюс точку  $A$ .

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA}^\tau + \bar{a}_{CA}^n \quad (10)$$

Знаходимо  $\bar{a}_{CA}^\tau$  і  $\bar{a}_{CA}^n$ :

$$a_{CA}^\tau = \varepsilon_{AB} AC = 0,05 \cdot 0,8 = 0,04 \text{ м/с}^2, \quad \bar{a}_{CA}^\tau \perp \overline{CA} \text{ і направлений згідно з } \varepsilon_{AB}.$$

$$a_{CA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AC = 0,29^2 \cdot 0,8 = 0,068 \text{ м/с}^2, \text{ вектор } \bar{a}_{CA}^n \text{ направлений вздовж } CA \text{ від точки } C \text{ до полюсу } A.$$

Проектуємо вираз (10) на осі координат:

$$a_{Cx} = a_A^n \cos 30^\circ + a_{CA}^n = 0,8 \cdot 0,87 + 0,068 = 0,764 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{Cy} = -a_A^n \cos 60^\circ - a_{CA}^\tau = -0,8 \cdot 0,5 + 0,04 = -0,04 \text{ м/с}^2,$$

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = \sqrt{(0,764)^2 + (-0,04)^2} = 0,88 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь:  $a_B = 0,96 \text{ м/с}^2, a_C = 0,88 \text{ м/с}^2.$

## 5. Миттєвий центр прискорень

Миттєвий центр прискорень (МЦП) — це точка в площині руху плоскої фігури, прискорення якої у даний час рівне нулю.

Для знаходження МЦП треба знати:

- прискорення довільної точки, яку вважатимемо полюсом  $\bar{a}_A$ ;
- кутову швидкість плоскої фігури  $\omega$ ;
- кутове прискорення  $\varepsilon$  (рис. 15).

Обчислюємо довжину відрізка  $AP_a$  за формулою  $AP_a = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$  та відкладаємо його під кутом  $\mu = \arctg \frac{\varepsilon}{\omega^2}$  в напрямку  $\varepsilon$ . Прискорений рух рис. 15, а; сповільнений рух рис. 15, б.

Тоді  $\bar{a}_{P_a} = \bar{a}_A + \bar{a}_{P_aA}^n + \bar{a}_{P_aA}^\tau$ , де  $a_{P_aA}^n = \omega^2 \cdot AP_a$ ,  $a_{P_aA}^\tau = \varepsilon \cdot AP_a$ .

Маємо

$$a_{P_aA} = \sqrt{(a_{P_aA}^n)^2 + (a_{P_aA}^\tau)^2} = \sqrt{(\omega^2 \cdot AP_a)^2 + (\varepsilon \cdot AP_a)^2} = AP_a \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2},$$

але  $AP_a = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$ , тому  $\bar{a}_{P_aA} = -\bar{a}_A$ , оскільки  $\tg \mu = \frac{a_{P_aA}^\tau}{a_{P_aA}^n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$ , то  $\bar{a}_{P_a} = 0$ .

Точка  $P_a$  – миттєвий центр прискорень.

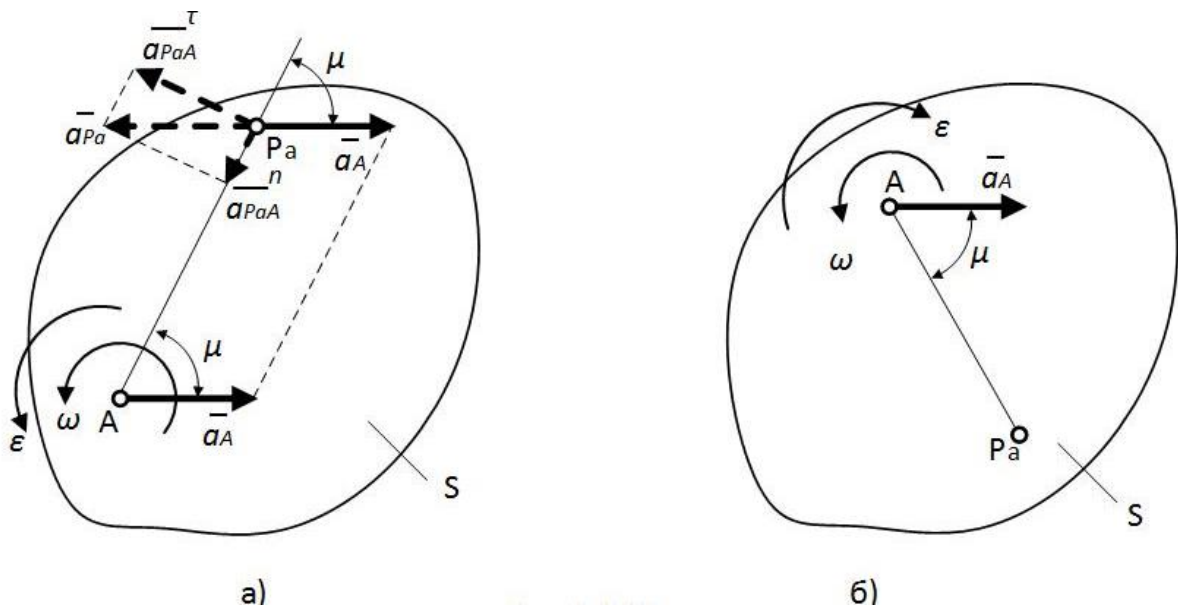


Рис. 15



Окремі випадки руху плоскої фігури:

1. Якщо  $\omega = 0$ ;  $\varepsilon = 0$  миттєвого центра прискорень не існує. Перетин  $S$  рухається поступально.
2. Якщо  $\omega = 0$ ;  $\varepsilon \neq 0$ , кут  $\mu = \frac{\pi}{2}$ , всі прискорення точок плоского перетину  $S$  перпендикулярні до відрізків, які з'єднують ці точки з миттєвим центром прискорень  $P_a$  (рис. 16).

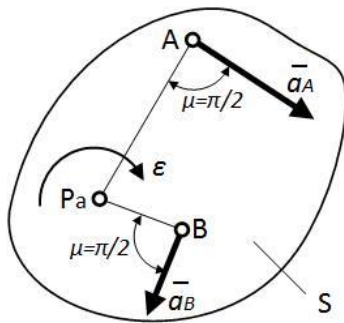


Рис. 16

$$a_{AP_a}^{\tau} = \varepsilon \cdot P_a A, a_{AP_a}^n = 0,$$

$$a_{BP_a}^{\tau} = \varepsilon \cdot P_a B,$$

$$\varepsilon = \frac{a_{BP_a}^{\tau}}{P_a B} = \frac{a_{AP_a}^{\tau}}{P_a A}$$

3. Якщо  $\omega \neq 0$ ;  $\varepsilon = 0$ , кут  $\mu = 0$ , прискорення всіх точок плоского перетину  $S$  напрямлені до миттєвого центру прискорень (рис. 17).

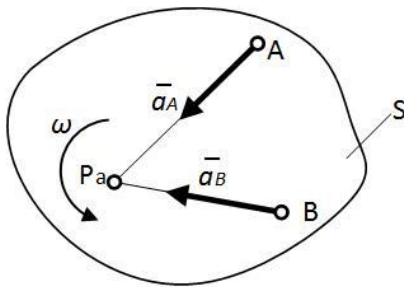


Рис. 17

$$a_{AP_a}^n = \omega^2 \cdot P_a A, a_{AP_a}^{\tau} = 0$$

$$a_{BP_a}^n = \omega^2 \cdot P_a B,$$

$$\omega^2 = \frac{a_{BP_a}^n}{P_a B} = \frac{a_{AP_a}^n}{P_a A}.$$

Для знаходження *МЦП*, якщо відомі прискорення точки плоскої фігури, кутова швидкість та кутове прискорення необхідно (рис. 18):

1. Визначити кут  $\mu$  за формулою:  $tg \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$ .
2. Повернути вектор прискорення точки на кут  $\mu$  в напрямку кутового прискорення.
3. Відкласти відрізок  $AP_a$ :  $AP_a = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$  в напрямку повернутого вектора прискорення  $\bar{a}_A$ .

За допомогою *МЦП* можна знайти прискорення будь-якої точки. Для цього знаходимо величину прискорення точки  $B$ :

$$a_B = BP_a \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Від відрізка  $BP_a$  під кутом  $\mu$  відкладаємо в напрямку, протилежному кутовому прискоренню, вектор прискорення точки  $B$  (рис. 18).

*МЦП і МЦШ* в загальному випадку – різні точки.

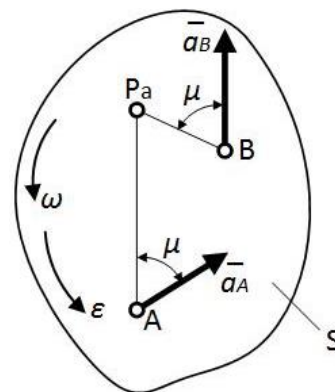
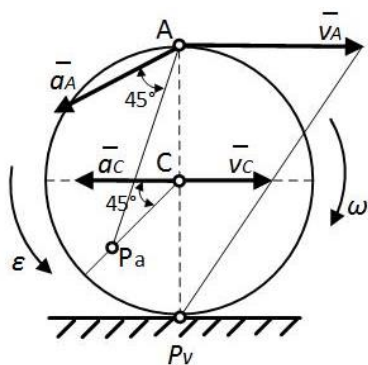


Рис. 18

**Приклад 6.** Колесо радіуса  $R = 0,5$  м котиться без ковзання рівносповільнено по прямолінійному горизонтальному шляху. Швидкість центра колеса  $v_C = 0,5$  м/с, прискорення центра  $a_C = 0,5$  м/с<sup>2</sup>. Знайти прискорення точки  $A$  за допомогою *МЦП* та за теоремою про прискорення точок плоскої фігури.

**Розв'язок.** Знаходимо кутові швидкість і прискорення колеса:



$$\omega = \frac{v_C}{R} = \frac{0,5}{0,5} = 1 \text{ рад/с}, \quad \varepsilon = \frac{a_C}{R} = \frac{0,5}{0,5} = 1 \text{ рад/с}^2.$$

Кутова швидкість направлена за годинниковою стрілкою, так як вектор швидкості  $\vec{v}_C$  відносно *МЦШ* повертається за годинниковою стрілкою. Кутове прискорення направлене протилежно відповідно до напрямку вектора прискорення центра колеса  $\vec{a}_C$ .

Рис. 19

**І спосіб.** Знайдемо кут  $\mu$ :

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = 1, \quad \mu = \operatorname{arctg} 1 = 45^\circ.$$

Повернемо  $\vec{a}_C$  на кут  $45^\circ$  за напрямком кутового прискорення. Визначимо відстань від точки  $C$  до *МЦП* (рис. 19) (рух сповільнений):

$$CP_a = \frac{a_C}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{0,5}{\sqrt{1+1}} = 0,36 \text{ м},$$

Знаходимо відстань точки  $A$  до *МЦП* з  $\triangle ACP_a$ :

$$AP_a = \sqrt{CP_a^2 + AC^2 - 2CP_a \cdot AC \cos 135^\circ} = \sqrt{0,36^2 + 0,5^2 - 2 \cdot 0,36 \cdot 0,5 \cdot 0,707} = 0,8 \text{ м}.$$

В точці  $A$  від відрізка  $AP_a$  відкладемо вектор прискорення точки  $A$  під кутом  $\mu$  в напрямку, протилежному кутовому прискоренню. Величина  $a_A$  прискорення точки  $A$  рівна:

$$a_A = AP_a \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0,8 \sqrt{1^2 + 1^2} = 1,12 \text{ м/с}^2.$$

II спосіб. Застосуємо формулу (5), прийнявши за полюс точку  $C$ :

$$\bar{a}_A = \bar{a}_C + \bar{a}_{AC}^n + \bar{a}_{AC}^\tau \quad (11)$$

Знаходимо  $\bar{a}_{AC}^n, \bar{a}_{AC}^\tau$ :

$$a_{AC}^\tau = \varepsilon AC = \varepsilon R = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ м/с}^2,$$

$\bar{a}_{AC}^\tau \perp \bar{AC}$  і направлений відповідно до кутового прискорення (рис. 20):

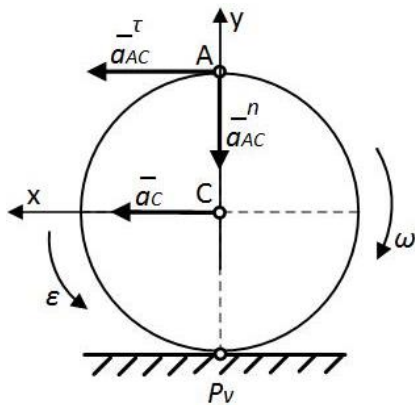


Рис. 20

$$a_{AC}^n = \omega^2 AC = \omega^2 R = 1^2 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ м/с}^2.$$

Вектор  $\bar{a}_{AC}^n$  направлений від точки  $A$  до полюсу  $C$  (рис. 20). Проектуємо вираз (11) на вибрані осі координат:

$$a_{Ax} = a_C + a_{AC}^\tau = 0,5 + 0,5 = 1 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{Ay} = -a_{AC}^n = -0,5 \text{ м/с}^2,$$

$$a_A = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2} = \sqrt{1^2 + (-0,5)^2} = 1,12 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь.  $a_A = 1,12 \text{ м/с}^2$ .

## 6. Знаходження швидкостей точок плоскої фігури за допомогою плану швидкостей

Визначення швидкостей різних точок рухомої плоскої фігури легко може бути виконано *графічно* за допомогою побудови *плану швидкостей*.

*План швидкостей* – це графічне зображення з єдиного центра векторів абсолютних швидкостей точок фігури в фіксований момент її руху.

План швидкостей може бути побудований, якщо:

- відома швидкість однієї точки плоскої фігури і напрям швидкості іншої точки;

- відома швидкість однієї точки плоскої фігури і миттєва кутова швидкість фігури.

Нехай відомі швидкості  $\vec{v}_A$ ,  $\vec{v}_B$ ,  $\vec{v}_C$  і  $\vec{v}_D$  вершин прямокутника  $ABCD$  (рис. 21, а). Для побудови плану швидкостей з довільної точки  $p$  – початку плану швидкостей (рис. 21, б), відкладемо вектори  $\overline{pa}$ ,  $\overline{pb}$ ,  $\overline{pc}$  і  $\overline{pd}$ , які в обраному масштабі будуть зображати швидкості  $\vec{v}_A$ ,  $\vec{v}_B$ ,  $\vec{v}_C$  і  $\vec{v}_D$ . Отримані точки  $a$ ,  $b$ ,  $c$  і  $d$ , які називаються вершинами плану швидкостей, з'єднаємо між собою прямими лініями.

Встановимо *властивості* і *правила побудови* плану швидкостей.

За теоремою про швидкості точок плоскої фігури (рівняння (3)), якщо за полюс прийняти точку  $A$ , то для точки  $B$  маємо

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}, \quad (12)$$

де  $\vec{v}_A$  – вектор абсолютної швидкості точки  $A$ ;

$\vec{v}_{BA}$  – вектор відносної швидкості точки  $B$  у її обертовому русі разом з тілом навколо точки  $A$ , напрямлений перпендикулярно до  $AB$  і за модулем рівний  $v_{BA} = \omega \cdot AB$ .

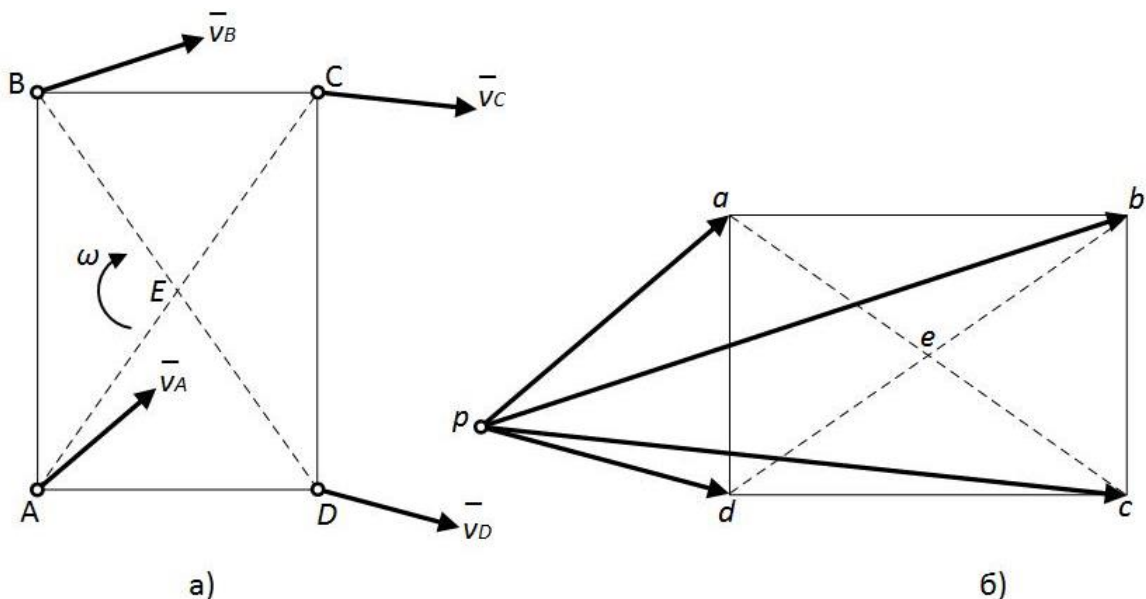


Рис. 21

З іншого боку для векторів трикутника  $pab$  плану швидкостей (рис. 21, б) можна записати:

$$\overline{pb} = \overline{pa} + \overline{ab} \quad (13)$$

Враховуючи, що вектори  $\overline{pb}$  і  $\overline{pa}$  зображають в обраному масштабі абсолютні швидкості  $\vec{v}_B$  і  $\vec{v}_A$ , та порівнюючи рівняння (12) і (13), можна зробити висновок, що вектор  $\overline{ab}$  зображає в масштабі швидкості  $\vec{v}_{BA}$ .

Таким чином, вектор  $\overline{ab}$  плану швидкостей направлений перпендикулярно до сторони  $AB$  фігури і за модулем дорівнює:

$$ab = \frac{v_{BA}}{\mu_v} = \frac{\omega \cdot AB}{\mu_v},$$

де  $\mu_v$  – масштабний коефіцієнт, який прийнятий при побудові плану швидкостей. Аналогічно:

$$\overline{bc} \perp BC, \quad bc = \frac{v_{CB}}{\mu_v} = \frac{\omega \cdot BC}{\mu_v}$$

$$\overline{cd} \perp CD, \quad cd = \frac{v_{DC}}{\mu_v} = \frac{\omega \cdot CD}{\mu_v} \quad (14)$$

$$\overline{da} \perp DA, \quad da = \frac{v_{AD}}{\mu_v} = \frac{\omega \cdot DA}{\mu_v}$$

Звідси миттєва швидкість обертання плоскої фігури:

$$\omega = \frac{ab \cdot \mu_v}{AB} = \frac{bc \cdot \mu_v}{BC} = \frac{cd \cdot \mu_v}{CD} = \frac{da \cdot \mu_v}{DA}. \quad (15)$$

Вектор  $\overline{ab}$  згідно рівнянню (12) направлений на плані швидкостей від точки  $a$  до точки  $b$ . Якщо цей вектор перенести в точку  $B$  фігури, то можна визначити напрям обертання точки  $B$  навколо точки  $A$  разом з фігурою (в даному випадку, за ходом годинникової стрілки). Напрямок же миттєвої кутової швидкості  $\omega$  плоскої фігури буде збігатися з напрямом її обертання.

З розглянутого слідує:

- вектори абсолютних швидкостей точок виходять з початку плану швидкостей –  $p$ ;
- відрізки, що з'єднують кінці векторів абсолютних швидкостей на плані швидкостей, перпендикулярні відріzkам що з'єднують відповідні точки тіла і відповідають швидкостям обертання точок разом з площею фігурою навколо полюса;
- (правило подібності) багатокутник з вершинами  $abcd$  плану швидкостей подібний до багатокутника  $ABCD$  фігури і повернутий відносно останнього на  $90^\circ$  в бік обертального руху плоскої фігури.

Приклад 7. Знайти кутову швидкість  $\omega_2$  шатуна 2 і швидкість точки  $C$  повзуна 3 кривошипно-шатунного механізму (рис. 22), якщо:  $\omega_1 = 10$  рад/с,  $OB = 0,06$  м,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 120^\circ$ .

Розв'язок. Враховуючи, що кривошип  $1$  обертається навколо нерухомої точки  $O$  з кутовою швидкістю  $\omega_1$ , визначаємо швидкість точки  $B$ , яка з'єднує кривошип  $OB$  і шатун  $BC$ :

$$v_B = \omega_1 \cdot OB = 10 \cdot 0,06 = 0,6 \text{ м/с.}$$

Направлена швидкість  $\vec{v}_B$  перпендикулярно до  $OB$  в бік кутової швидкості  $\omega_1$ .

Другою точкою шатуна  $2$ , швидкість якої можна визначити, є точка  $C$ , оскільки вона, крім шатуна, одночасно належить і повзуну  $3$ , що рухається поступально в горизонтальних напрямляючих. Тобто напрям цієї швидкості відомий.

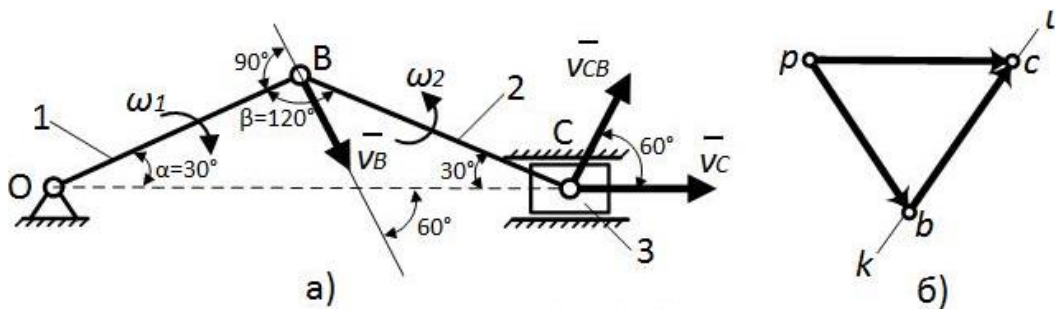


Рис. 22

Для визначення швидкості точки  $C$  записуємо теорему швидкостей при плоскопаралельному русі, приймаючи за полюс точку  $B$ , швидкість якої відома:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB} \quad (*)$$

де  $\vec{v}_{CB}$  – відносна швидкість точки  $C$  у її обертовому русі разом з шатуном  $2$  навколо точки  $B$ ; вектор  $\vec{v}_{CB}$  направлений перпендикулярно до  $BC$ ;

$\vec{v}_C$  – абсолютна швидкість точки  $C$ , яка рухається прямолінійно разом з повзуном  $3$  в горизонтальних напрямляючих.

Будуємо план швидкостей (рис. 22, б). Для цього вибираємо масштаб:

$$\mu_v = \frac{v_B}{pb} = \frac{0,6 \text{ м/с}}{20 \text{ мм}} = 0,03 \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{мм}}.$$

Масштабний коефіцієнт  $\mu_v$  показує, яка швидкість в одному міліметрі плану швидкостей.

З довільної точки  $p$  (початку плану швидкостей) відкладемо вектор  $\overline{pb}$ , який в вибраному масштабі зображає вектор швидкості  $\vec{v}_B$ . Через точку  $b$  згідно з рівнянням (\*) проведемо лінію  $kl$  паралельну вектору  $\vec{v}_{CB}$ , величина якого невідома.

Вектор, що на плані швидкостей зображає абсолютну швидкість точки  $C$ , виходить з початку плану  $p$  паралельно  $OC$  (лінії вздовж якої направлена

швидкість  $\bar{v}_C$ ) до перетину з лінією  $kl$  в точці  $c$ . Напрямок цього вектора  $\overline{pc}$  від  $p$  до  $c$ .

Визначимо напрям вектора  $\overline{bc}$ , який на плані швидкостей зображає відносну швидкість  $\bar{v}_{CB}$ . Оскільки, згідно рівнянню (\*), вектор  $\bar{v}_{CB}$  треба додати до вектора  $\bar{v}_B$ , який на плані швидкостей зображено вектором  $\overline{pb}$ , то вектор  $\overline{bc}$  направлений від точки  $b$  до точки  $c$ .

Отриманий векторний трикутник  $pbc$  являє собою план швидкостей для кривошипно-шатунного механізму в заданому положенні. Сторони цього трикутника в вибраному масштабі зображають:

$\overline{pb}$  – абсолютну швидкість точки  $B$  ( $\bar{v}_B$ );

$\overline{bc}$  – відносну швидкість точки  $C$  у її обертанні разом з шатуном  $BC$  навколо точки  $B$  ( $\bar{v}_{CB}$ );

$\overline{pc}$  – абсолютну швидкість точки  $C$  ( $\bar{v}_C$ ).

Знайдені напрями швидкостей  $\bar{v}_{CB}$  і  $\bar{v}_C$  переносимо з плану швидкостей в точку  $C$  на рис. 22, а.

Так як план швидкостей побудований в масштабі, то для знаходження модулів швидкостей потрібно виміряти довжину відповідних векторів і помножити її на масштабний коефіцієнт, одержимо:

$$v_C = pc \cdot \mu_v = 20 \text{ мм} \cdot 0,03 \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{мм}} = 0,6 \text{ м/с},$$

$$v_{CB} = bc \cdot \mu_v = 20 \text{ мм} \cdot 0,03 \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{мм}} = 0,6 \text{ м/с}.$$

Визначимо миттєву кутову швидкість шатуна 2. Оскільки  $v_{CB} = \omega_2 \cdot CB$ , то:

$$\omega_2 = \frac{v_{CB}}{CB} = \frac{0,6}{0,06} = 10 \text{ рад/с},$$

де  $CB = AB = 0,06 \text{ м}$ , виходячи з того, що трикутник  $ABC$  (рис. 22, а) рівнобедрений.

Напрямок кутової швидкості  $\omega_2$  визначається напрямом вектору  $\bar{v}_{CB}$ . В даному випадку  $\omega_2$  направлена проти ходу годинникової стрілки.

Відповідь:  $\omega_2 = 10 \text{ рад/с}$ ,  $v_C = 0,6 \text{ м/с}$ .

## **7. Знаходження прискорень точок плоскої фігури за допомогою плану прискорень**

Розглянемо графічний спосіб визначення прискорень точок плоскої фігури за допомогою плану прискорень.

План прискорень – це графічне зображення векторів прискорень точок плоскої фігури у фіксований момент часу.

Побудова плану прискорень базується на представленні прискорення будь-якої точки  $B$  плоскої фігури у вигляді суми трьох векторів:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t \quad (16)$$

де  $\bar{a}_A$  – прискорення точки фігури, яку прийнято за полюс;

$\bar{a}_{BA}^n$  – відносне нормальне (доцентрове) прискорення точки  $B$  у її відносному обертальному русі разом з плоскою фігурою навколо полюса  $A$ . Направлене це прискорення від точки  $B$  до точки  $A$  і за модулем дорівнює  $a_{BA}^n = \omega^2 \cdot BA$ ;

$\bar{a}_{BA}^t$  – відносне тангенціальне (дотичне) прискорення точки  $B$  у її відносному обертальному русі разом з плоскою фігурою навколо полюса  $A$ . Направлене це прискорення перпендикулярно до  $\bar{a}_{BA}^n$  (відрізку  $AB$ ) в бік кутового прискорення тіла  $\varepsilon$  і за модулем дорівнює:  $a_{BA}^t = \varepsilon \cdot BA$ .

Оскільки для визначення величини  $\bar{a}_{BA}^n$  треба знати кутову швидкість  $\omega$  плоскої фігури, то, якщо вона не задана, *попередньо треба побудувати план швидкостей*. З плану швидкостей і знаходять кутову швидкість відносного обертального руху.

Для побудови плану прискорень необхідно знати *прискорення деякої точки плоскої фігури (наприклад,  $\bar{a}_A$ ), яку обирають за полюс*.

Крім того, має бути відомо:

*Випадок 1* - напрям прискорення точки  $B$  фігури, для якої записують векторне рівняння (16).

*Випадок 2* - прискорення  $\bar{a}_C$  точки  $C$  фігури, відносно якої, як полюса, можна записати для точки  $B$  друге векторне рівняння, аналогічне (16).

*Випадок 3* - в точці  $B$  до фігури приєднане інше тіло, відносно точки якого можна записати друге векторне рівняння для точки  $B$ , аналогічне (16).

Приклад 8. Знайти прискорення точок  $B$  і  $C$  трикутника  $ABC$  (рис. 23, а). Відомі прискорення точки  $A$ , напрям прискорення точки  $B$  і кутова швидкість трикутника  $ABC$ , тобто дані відповідають випадку 1.

Розв'язок. Записуємо векторну рівність (16) для точки  $B$ , прийнявши за полюс точку  $A$  і будуємо, згідно цієї рівності, план прискорень. Для цього вибираємо масштаб побудови  $\mu_a = \frac{a_A}{\pi a}$  і з довільної точки  $\pi$  (початку плану прискорень) проводимо вектор  $\pi\bar{a}$ , який в масштабі буде зображати прискорення  $\bar{a}_A$  (рис. 23, б). З кінця побудованого вектора (точки  $a$ ) проводимо вектор  $a\bar{n}_{BA}$ , який в тому ж масштабі буде зображати прискорення  $\bar{a}_{BA}^n$ .

Величину прискорення  $\bar{a}_{BA}^n$  визначимо зрівняння:  $a_{BA}^n = \omega^2 \cdot BA$ . Довжину вектора  $a\bar{n}_{BA}$  знаходимо враховуючи вибраний масштаб:  $a\bar{n}_{BA} = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a}$ , а направлений цей вектор вздовж  $BA$  від точки  $B$  до точки  $A$ .



До нормального прискорення додаємо, згідно рівнянню (16), тангенціальне прискорення  $\bar{a}_{BA}^{\tau}$ . Оскільки величина (модуль) цього прискорення невідома, то через точку  $n_{BA}$  (кінець вектора  $\bar{a}n_{BA}$ ) проведемо лінію  $mk$  перпендикулярно до  $BA$ , вздовж якої і буде напрямлений вектор  $\bar{a}_{BA}^{\tau}$ .

Лінія, вздовж якої направлене абсолютне прискорення точки  $B$ , відома з умови задачі. Так як всі абсолютні прискорення точок на плані виходять з початку плану  $\pi$ , то через цей початок проводимо пряму, паралельну лінії прискорення точки  $B$ .

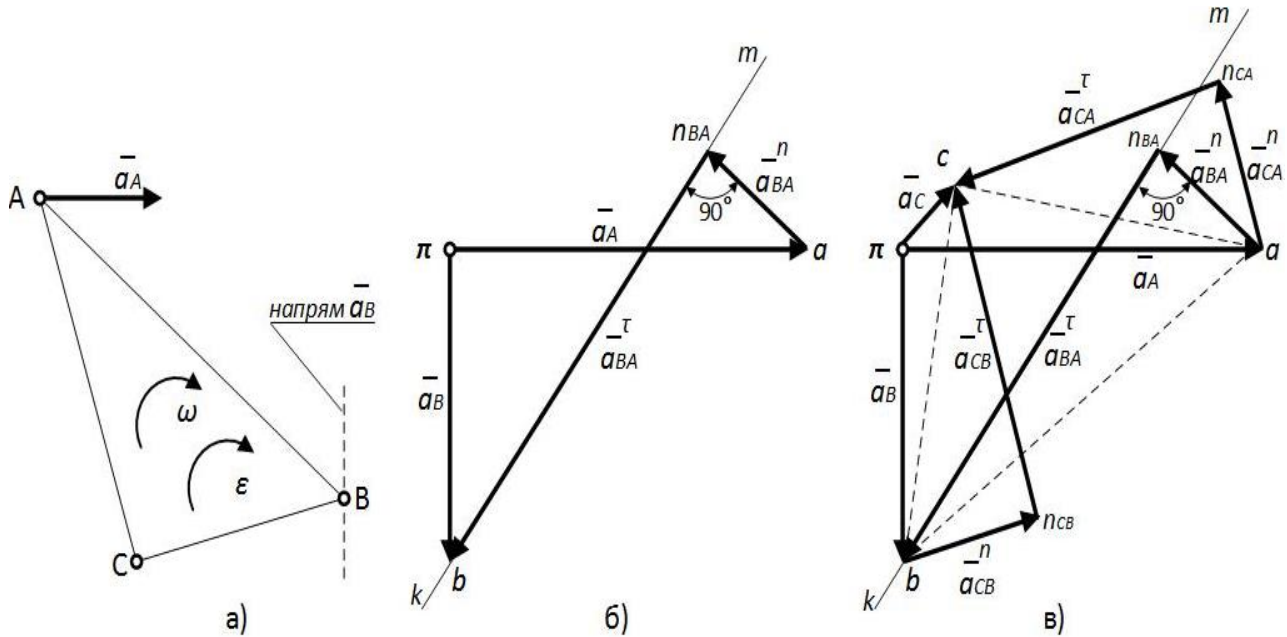


Рис. 23

Точка перетину лінії  $mk$  і лінії прискорення точки  $B$  (яку позначимо літерою  $b$ ) і буде рішенням рівняння (16), а вектор  $\pi b$  відповідає прискоренню точки  $B$ . Величину цього прискорення знаходимо враховуючи вибраний масштаб:

$$a_B = \pi b \cdot \mu_a.$$

Для визначення прискорення точки  $C$  скористаємося тим, що відомі вже прискорення двох точок фігури  $A$  і  $B$  (випадок 2).

Запишемо векторні рівняння для прискорення точки  $C$  відносно полюсів  $A$  і  $B$ :

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA}^n + \bar{a}_{CA}^{\tau} \quad (17)$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^{\tau} \quad (18)$$

де  $\bar{a}_{CA}^n$  і  $\bar{a}_{CB}^n$  – відносні нормальні прискорення точки  $C$  у її відносному обертальному русі навколо точок  $A$  і  $B$  відповідно;

$\bar{a}_{CA}^{\tau}$  і  $\bar{a}_{CB}^{\tau}$  – відносні тангенціальні прискорення точки  $C$  у її відносному обертальному русі навколо точок  $A$  і  $B$  відповідно.

Першим розв'язуємо рівняння (17). Так як вектор прискорення  $\bar{a}_A$  точки  $A$  на плані вже побудований (рис. 23, в), то з його кінця (точки  $a$ ) проводимо вектор  $\overline{an}_{CA}$ , який напрямлений від точки  $C$  до точки  $A$  і за модулем дорівнює:  $a_{CA}^n = \omega^2 \cdot CA$ . Довжину цього вектора знаходимо враховуючи вибраний масштаб:  $an_{CA} = \frac{a_{CA}^n}{\mu_a}$ . Наступним, згідно рівняння (17), потрібно побудувати вектор  $\bar{a}_{CA}^t$ . Через кінець вектора  $\overline{an}_{CA}$  (точку  $n_{CA}$ ) проводимо пряму, перпендикулярну до  $CA$ , вздовж якої буде напрямлене прискорення  $\bar{a}_{CA}^t$  і на якій буде лежати точка кінця вектора  $\bar{a}_C$ . Так як величина вектора  $\bar{a}_{CA}^t$  невідома, то закінчити побудову поки що неможливо, тому продовжуємо побудову плану прискорень згідно з рівнянням (18).

Вектор прискорення  $\bar{a}_B$  точки  $B$  на плані вже побудований, тому з його кінця, точки  $b$ , відкладаємо вектор  $\overline{bn}_{CB}$  (прискорення  $\bar{a}_{CB}^n$ ), який направлений від  $C$  до  $B$  і за модулем дорівнює:  $a_{CB}^n = \omega^2 \cdot CB$ . Довжину цього вектора знаходимо враховуючи вибраний масштаб:  $bn_{CB} = \frac{a_{CB}^n}{\mu_a}$ . Наступним, згідно рівняння (18), потрібно побудувати вектор  $\bar{a}_{CB}^t$ . Через кінець вектора  $\overline{bn}_{CB}$  (точку  $n_{CB}$ ) проводимо пряму, перпендикулярну до  $CB$ , вздовж якої буде напрямлене прискорення  $\bar{a}_{CB}^t$  і на якій буде лежати точка кінця вектора  $\bar{a}_C$ .

Отже, кінець вектора  $\bar{a}_C$  буде знаходитись на перетині ліній, вздовж яких направлені тангенціальні прискорення  $\bar{a}_{CA}^t$  і  $\bar{a}_{CB}^t$ . Отриманий вектор  $\overline{pc}$  на плані прискорень в масштабі зображає абсолютне прискорення точки  $C$ . Модуль цього прискорення обчислюємо, вимірявши в міліметрах довжину вектора  $\overline{pc}$  та врахувавши масштабний коефіцієнт:

$$a_C = pc \cdot \mu_a.$$

Вектори  $\overline{pa}$ ,  $\overline{pb}$  і  $\overline{pc}$ , які виходять з початку плану прискорень, визначають абсолютні прискорення точок  $A$ ,  $B$  і  $C$  –  $\bar{a}_A$ ,  $\bar{a}_B$  і  $\bar{a}_C$  відповідно. Вектори  $\overline{n_{BA}b}$ ,  $\overline{n_{CA}c}$  і  $\overline{n_{CB}c}$  визначають тангенціальні прискорення точок у їх обертальному русі навколо полюсів –  $\bar{a}_{BA}^t$ ,  $\bar{a}_{CA}^t$  і  $\bar{a}_{CB}^t$  відповідно. Для знаходження модулів цих прискорень вимірюємо довжину їх векторів в міліметрах та враховуємо масштаб побудови:

$$a_{BA}^t = n_{BA}b \cdot \mu_a; \quad a_{CA}^t = n_{CA}c \cdot \mu_a; \quad a_{CB}^t = n_{CB}c \cdot \mu_a.$$

Знаючи  $a_{BA}^t$ ,  $a_{CA}^t$  чи  $a_{CB}^t$  можна визначити величину кутового прискорення  $\varepsilon$  трикутника  $ABC$ :

$$\varepsilon = \frac{a_{BA}^t}{BA}, \text{ або } \varepsilon = \frac{a_{CA}^t}{CA}, \text{ або } \varepsilon = \frac{a_{CB}^t}{CB}.$$

Для визначення напрямку кутового прискорення  $\varepsilon$  потрібно перенести вектор тангенціального прискорення  $\bar{a}_{BA}^t$  в точку  $B$  трикутника  $ABC$  і напрям цього вектора покаже напрям кутового прискорення. В даному випадку, кутове прискорення  $\varepsilon$  направлене за ходом годинникової стрілки.

Трикутник  $abc$ , який утворився на плані прискорень, буде подібним до заданого трикутника  $ABC$ .

Таким чином, для плану прискорень справедливе *правило подібності*:

*фігура, яку утворюють кінці векторів абсолютних прискорень точок тіла на плані прискорень подібна до фігури, яку однойменні точки утворюють на тілі.*

**Приклад 9.** Знайти прискорення точки  $C$  повзуна 3 кривошипно-шатунного механізму і кутове прискорення  $\varepsilon_2$  шатуна 2, механізму (рис. 24, а) якщо:  $\omega_1 = 10$  рад/с,  $OB = 0,06$  м,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 120^\circ$ , кривошип обертається рівномірно ( $\omega_1 = \text{const}$ ).

**Розв'язок.** План швидкостей для цього механізму був побудований в прикладі 7 (рис. 22, б) та визначена кутова швидкість шатуна  $\omega_2 = 10$  рад/с.

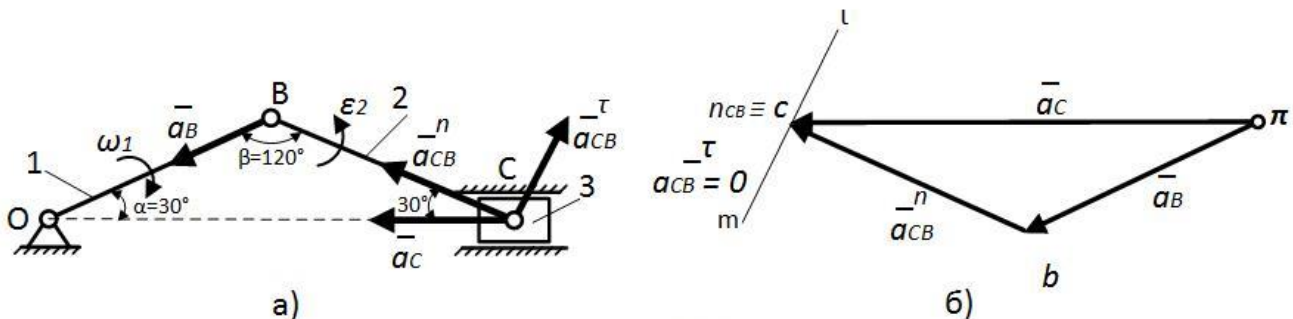


Рис. 24

Спочатку знайдемо прискорення точки  $B$  механізму, так як вона належить кривошипу 1, що обертається навколо точки  $O$  з відомою кутовою швидкістю. Враховуючи, що кутова швидкість кривошипа постійна ( $\omega_1 = \text{const}$ ), то  $\varepsilon_1 = 0$  і повне прискорення  $\bar{a}_B$  дорівнюватиме нормальному прискоренню  $\bar{a}_B^n$  ( $a_{BA}^\tau = \varepsilon_1 \cdot OB = 0$ ) точки  $B$  при її обертальному русі навколо  $O$ :  $\bar{a}_B = \bar{a}_B^n$ .

За модулем

$$a_B = a_B^n = \omega_1^2 \cdot OB = 10^2 \cdot 0,06 = 6 \text{ м/с}^2.$$

Направлене прискорення  $\bar{a}_B$  від точки  $B$  до точки  $O$  по лінії  $BO$ .

Для визначення прискорення точки  $C$  записуємо формулу розподілу прискорень при плоскому русі, прийнявши за полюс точку  $B$ , прискорення якої вже відоме:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^\tau \quad (**)$$

де  $\bar{a}_C$  – абсолютне прискорення точки  $C$ , направлене вздовж напрямку руху повзуна 3 в горизонтальних направляючих;

$\bar{a}_B$  – прискорення точки  $B$ , відоме за величиною і за напрямком;

$\bar{a}_{CB}^n$  – відносне нормальне прискорення точки  $C$  при її обертанні навколо точки  $B$ , направлене вздовж  $CB$  від точки  $C$  до точки  $B$  і за модулем дорівнює:  $a_{CB}^n = \omega_2^2 \cdot CB = 10^2 \cdot 0,06 = 6 \text{ м/с}^2$ ;

$\bar{a}_{CB}^t$  – тангенціальне прискорення точки  $C$  при її обертанні навколо точки  $B$ , направлене перпендикулярно шатуну  $CB$  і за модулем рівне:  $a_{CB}^t = \varepsilon_2 \cdot CB$ .

Оскільки напрям прискорення точки  $C$  відомий, то рівняння (\*\*) достатньо для побудови плану прискорень і визначення  $\bar{a}_C$ .

За відомою величиною прискорення  $a_B$  вибираємо масштаб побудови:

$$\mu_a = \frac{a_B}{\pi b} = \frac{6 \text{ м/с}^2}{30 \text{ мм}} = 0,2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{мм}},$$

і з довільної точки  $\pi$  (початку плану прискорень) проводимо вектор  $\overline{\pi b}$ , який в масштабі буде зображати прискорення  $\bar{a}_B$  (рис. 24, б). З кінця побудованого вектора (точки  $b$ ) проводимо вектор  $\overline{bn}_{CB}$ , який в тому ж масштабі буде зображати прискорення  $\bar{a}_{CB}^n$ . Довжину цього вектора знаходимо, враховуючи вибраний масштаб:

$$an_{CB} = \frac{a_{CB}^n}{\mu_a} = \frac{6 \text{ м/с}^2}{0,2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{мм}}} = 30 \text{ мм}.$$

Наступним потрібно побудувати вектор  $\bar{a}_{CB}^t$ . Через кінець вектора  $\overline{an}_{CB}$  (точку  $n_{CB}$ ) проводимо лінію  $lm$ , перпендикулярну до  $BC$ , вздовж якої буде направлене тангенціальне прискорення  $\bar{a}_{CB}^t$   $B$  і на цій лінії буде лежати точка  $c$  – кінець вектора абсолютного прискорення точки  $C$  механізму. Прискорення  $\bar{a}_C$  направлене вздовж горизонтальної направляючої повзуна  $AC$ , тому з початку плану  $\pi$  проводимо горизонтальну пряму. Точка перетину  $c$  цієї прямої з лінією  $lm$ , що проведена перпендикулярно до  $BC$ , буде кінцем вектора прискорення точки  $C$ , а вектор  $\overline{nc}_{CB}$  буде зображати на плані прискорень  $\bar{a}_{CB}^t$ . Але для заданого положення механізму проведена з  $\pi$  горизонтальна пряма перетинає лінію  $lm$  в точці  $n_{CB}$ . Це означає, що точка  $c$  співпадає з точкою  $n_{CB}$  і вектор  $\overline{nc}_{CB} = 0$ , а значить прискорення  $\bar{a}_{CB}^t = 0$ .

З побудованого плану визначимо абсолютну величину прискорення  $\bar{a}_C$ :

$$a_C = \pi c \cdot \mu_a = 52 \text{ мм} \cdot 0,2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{мм}} = 10,4 \text{ м/с}^2.$$

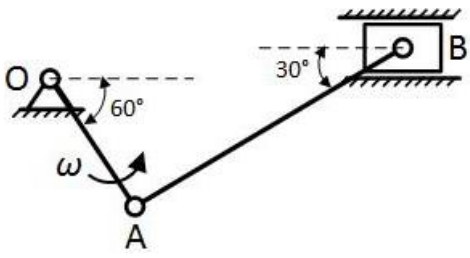
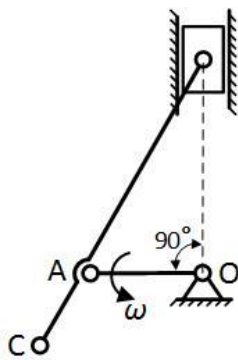
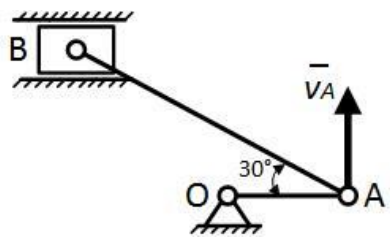
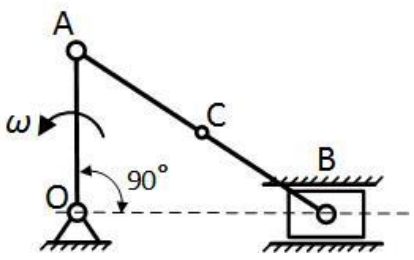
Кутове прискорення  $\varepsilon_2$  зв'язане з тангенціальним прискоренням  $\bar{a}_{CB}^t$ :

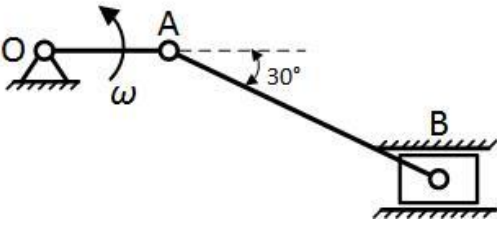
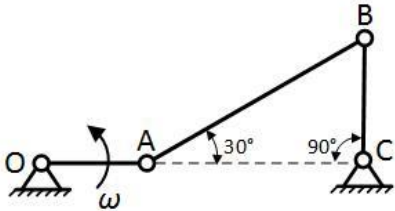
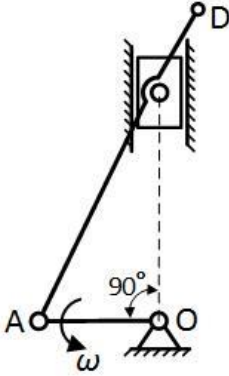
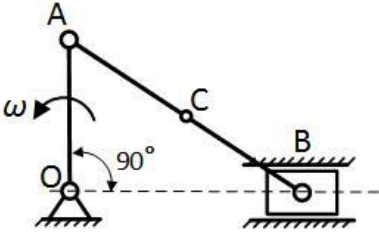
$$a_{CB}^t = \varepsilon_2 \cdot CB \text{ звідки } \varepsilon_2 = \frac{a_{CB}^t}{CB} = 0.$$

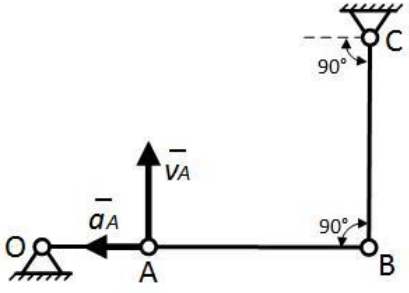
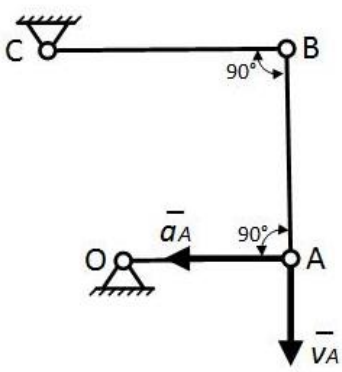
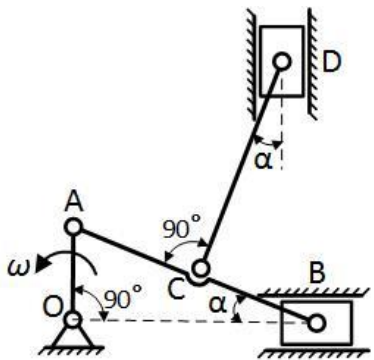
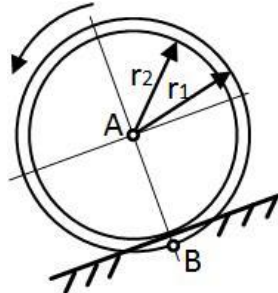
Отже, в даний момент часу шатун механізму обертається рівномірно.

Відповідь:  $a_C = 10,4 \text{ м/с}^2$ ,  $\varepsilon_2 = 0$ .

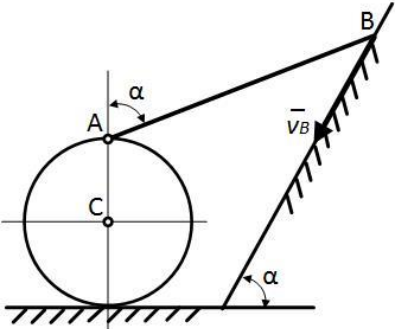
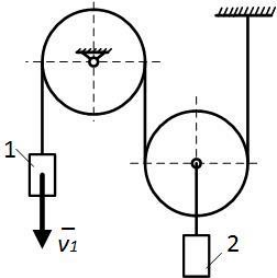
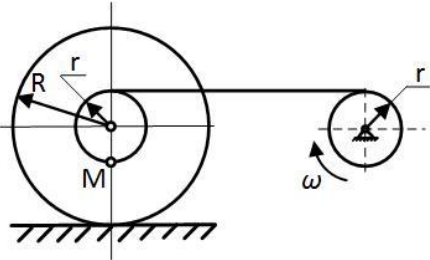
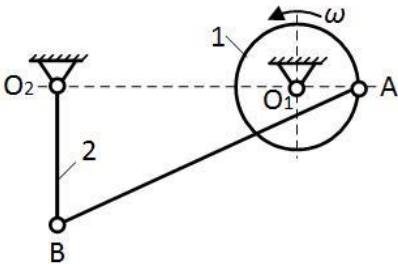
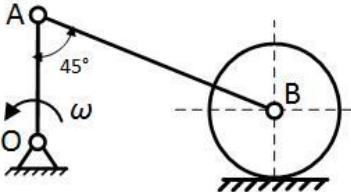
## 8. Контрольні завдання для самостійної роботи

1		<p>Визначити кутову швидкість шатуна <math>AB</math> кривошипо-повзунного механізму в заданому положенні, якщо точка <math>A</math> має швидкість <math>v_A = 3 \text{ м/с}</math>. Довжина шатуна <math>AB = 1 \text{ м}</math>.</p> <p>Відповідь: <math>\omega_{AB} = 1,73 \text{ рад/с}</math>.</p>
2		<p>Визначити кутову швидкість кривошипа <math>OA</math> в заданому положенні, якщо швидкість точки <math>C</math> шатуна має <math>v_C = 4 \text{ м/с}</math>. Довжина кривошипа <math>OA = 0,2 \text{ м}</math>.</p> <p>Відповідь: <math>\omega = 20 \text{ рад/с}</math>.</p>
3		<p>Визначити кутову швидкість шатуна <math>AB</math> кривошипо-повзунного механізму в заданому положенні, якщо точка <math>A</math> має швидкість <math>v_A = 3 \text{ м/с}</math>, а довжина шатуна <math>AB = 1 \text{ м}</math>.</p> <p>Відповідь: <math>\omega_{AB} = 3,46 \text{ рад/с}</math>.</p>
4		<p>Для заданого положення механізму визначити швидкість точки <math>C</math> – середини шатуна <math>AB</math>, якщо кутова швидкість <math>\omega = 1 \text{ рад/с}</math>; довжина ланок <math>OA = 0,3 \text{ м}</math>; <math>AB = 0,5 \text{ м}</math>.</p> <p>Відповідь: <math>v_C = 0,3 \text{ м/с}</math>.</p>

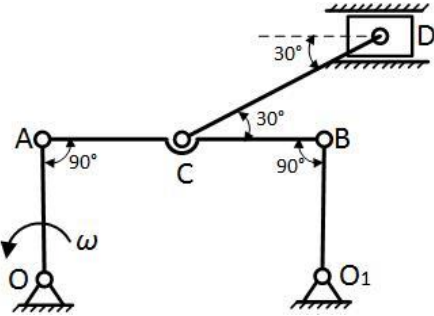
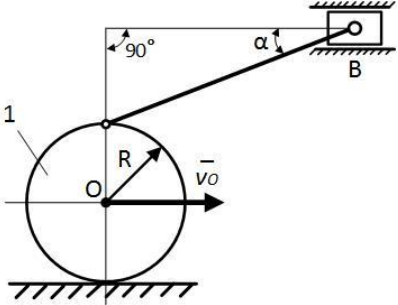
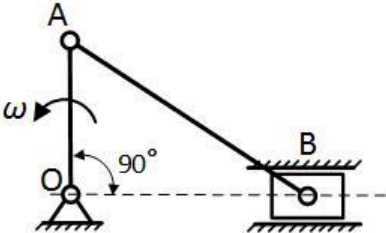
5		<p>Визначити кутову швидкість шатуна <math>AB</math> і повзуна <math>B</math> кривошипо-повзунного механізму в заданому положенні, якщо точка <math>A</math> має швидкість <math>v_A = 3 \text{ м/с}</math>, а довжина шатуна <math>AB = 3 \text{ м}</math>.</p> <p>Відповідь: <math>\omega_{AB} = 1,15 \text{ рад/с}</math>, <math>v_B = 1,7 \text{ м/с}</math>.</p>
6		<p>Визначити кутову швидкість ланки <math>AB</math> і швидкість точки <math>B</math> кривошипо-шатунного механізму в заданому положенні, якщо точка <math>A</math> має швидкість <math>v_A = 1 \text{ м/с}</math>. Довжина ланки <math>AB = 0,2 \text{ м}</math>.</p> <p>Відповідь: <math>\omega_{AB} = 5,77 \text{ рад/с}</math>, <math>v_B = 0,577 \text{ м/с}</math>.</p>
7		<p>Знайти кутову швидкість кривошипа <math>OA</math> кривошипо-повзунного механізму в заданому положенні, якщо швидкість точки <math>D</math> шатуна <math>v_D = 1 \text{ м/с}</math>, довжина кривошипа <math>OA = 0,1 \text{ м}</math>.</p> <p>Відповідь: <math>\omega_{OA} = 10 \text{ рад/с}</math>.</p>
8		<p>Визначити прискорення повзуна <math>B</math> кривошипо-повзунного механізму в заданому положенні, якщо кутова швидкість кривошипа <math>\omega = 1 \text{ рад/с} = \text{const}</math>; довжини ланок <math>OA = 0,3 \text{ м}</math>; <math>AB = 0,5 \text{ м}</math>.</p> <p>Відповідь: <math>a_B = 0,225 \text{ м/с}^2</math>.</p>

9		<p>У зображеному на рисунку положенні кривошипо-шатунного механізму швидкість і прискорення точки A кривошипа <math>OA</math> рівні: <math>v_A = 2 \text{ м/с}</math>, <math>a_B = 20 \text{ м/с}^2</math>. Знайти прискорення точки B шатуна <math>AB</math>, якщо довжина <math>AB = BC = 0,8 \text{ м}</math>.</p> <p>Відповідь: <math>a_B = 25 \text{ м/с}^2</math>.</p>
10		<p>У зображеному на рисунку положенні кривошипо-шатунного механізму швидкість і прискорення точки A кривошипа <math>OA</math> рівні: <math>v_A = 2 \text{ м/с}</math>, <math>a_B = 40 \text{ м/с}^2</math>. Знайти кутове прискорення ланки <math>BC</math> шатуна <math>AB</math>, якщо довжина <math>AB = BC = 0,5 \text{ м}</math>.</p> <p>Відповідь: <math>\varepsilon_{BC} = 0</math>.</p>
11		<p>Кривошип <math>OA</math> довжиною <math>0,2 \text{ м}</math> обертається рівномірно з кутовою швидкістю <math>\omega = 8 \text{ рад/с}</math>. До шатуна <math>AB</math> в точці <math>C</math> шарнірно прикріплено шатун <math>CD</math>. Для заданого положення механізму визначити швидкість точки <math>D</math> повзуна, якщо кут <math>\alpha = 20^\circ</math>.</p> <p>Відповідь: <math>v_D = 0,582 \text{ м/с}</math>.</p>
12		<p>Швидкість центра <math>A</math> ступінчатого колеса <math>v_A = 2 \text{ м/с}</math>, радіуси <math>r_1 = 0,6 \text{ м}</math>, <math>r_2 = 0,5 \text{ м}</math>. Визначити швидкість точки <math>B</math>.</p> <p>Відповідь: <math>v_B = 0,4 \text{ м/с}</math>.</p>



13		<p>Кінець <math>B</math> стержня <math>AB</math> ковзає зі швидкістю <math>v_B = 1 \text{ м/с}</math> по похилій поверхні. Другий кінець <math>A</math> шарнірно зв'язаний з роликом, який котиться без ковзання. Визначити швидкість центра <math>C</math> ролика, якщо кут <math>\alpha = 60^\circ</math>.</p> <p>Відповідь: <math>v_C = 0,5 \text{ м/с}</math>.</p>
14		<p>Швидкість вантажа 1 <math>v_1 = 0,5 \text{ м/с}</math>. Знайти швидкість вантажа 2.</p> <p>Відповідь: <math>v_2 = 0,25 \text{ м/с}</math>.</p>
15		<p>Кутова швидкість барабана <math>\omega = 1 \text{ рад/с}</math>. Знайти швидкість точки <math>M</math> ступінчатого колеса, яке котиться без ковзання, якщо радіуси <math>r = 0,1 \text{ м}</math>, <math>R = 0,3 \text{ м}</math>.</p> <p>Відповідь: <math>v_M = 0,05 \text{ м/с}</math>.</p>
16		<p>В механізмі шків 1 радіуса <math>r = 0,1 \text{ м}</math> шарнірно з'єднаний зі стержнем 2 довжиною <math>0,25 \text{ м}</math> за допомогою штанги <math>AB</math>. Визначити кутову швидкість штанги, якщо частота обертання шківів 1 – <math>120 \text{ об/хв}</math>, а відстань <math>O_1O_2 = 0,45 \text{ м}</math>.</p> <p>Відповідь: <math>\omega_{AB} = 2,28 \text{ рад/с}</math>.</p>
17		<p>Визначити кутове прискорення шатуна <math>AB</math>, якщо кривошип <math>OA</math> обертається з постійною кутовою швидкістю <math>\omega = 10 \text{ рад/с}</math>, а довжина ланок <math>OA = 0,3 \text{ м}</math>; <math>AB = 0,45 \text{ м}</math>.</p> <p>Відповідь: <math>\varepsilon_{AB} = 94,3 \text{ рад/с}^2</math>.</p>



18		<p>Кривошип <math>OA</math> шарнірного паралелограма <math>OABO_1</math> рівномірно обертається з кутовою швидкістю <math>\omega = 4 \text{ рад/с}</math>. Визначити кутове прискорення шатуна <math>CD</math>, якщо довжини ланок <math>OA = 20 \text{ см}</math>, <math>CD = 30 \text{ см}</math>.</p> <p>Відповідь: <math>\varepsilon_{CD} = 12,3 \text{ рад/с}^2</math>.</p>
19		<p>Для заданого положення механізму визначити прискорення повзуна <math>B</math>, якщо колесо <math>1</math> радіуса <math>R = 50 \text{ см}</math> котиться з постійною швидкістю його центра <math>v_0 = 5 \text{ м/с}</math>; кут <math>\alpha = 30^\circ</math>.</p> <p>Відповідь: <math>a_B = 28,9 \text{ м/с}^2</math>.</p>
20		<p>Визначити прискорення повзуна <math>B</math>, якщо кутова швидкість кривошипа <math>\omega = 1 \text{ рад/с} = \text{const}</math>; Довжини ланок <math>OA = 0,3 \text{ м}</math>, <math>AB = 0,5 \text{ м}</math>.</p> <p>Відповідь: <math>a_B = 0,225 \text{ м/с}^2</math>.</p>

## 9. Завдання для розрахунково-графічної роботи

### “Визначення швидкостей і прискорень точок твердого тіла при плоскому русі”

Плоский механізм складається зі стержнів 1, 2, 3 (рис. 0 – 4) або зі стержнів 1, 2 та повзуна  $B$  (рис. 5 – 9), з’єднаних один з одним і з нерухомими опорами  $O_1$ ,  $O_2$  шарнірами. Довжини стержнів рівні відповідно  $l_1 = 0,4$  м,  $l_2 = 1,2$  м,  $l_3 = 0,6$  м.

Положення механізму визначається кутами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\theta$ . Значення цих кутів і інших заданих величин вказані в табл. 1 (для рис. 0 – 4) або в табл. 2 (для рис. 5 – 9); при цьому в табл. 1  $\omega_1$  і  $\omega_2$  – величини сталі.

Визначити величини, вказані в таблицях в стовбцях “Знайти”.

Дугові стрілки на рисунках показують, як при побудові креслення механізму повинні відкладатися відповідні кути: за ходом чи проти ходу годинникової стрілки.

Побудову креслення слід починати зі стержня, напрямком якого визначається кутом  $\alpha$ .

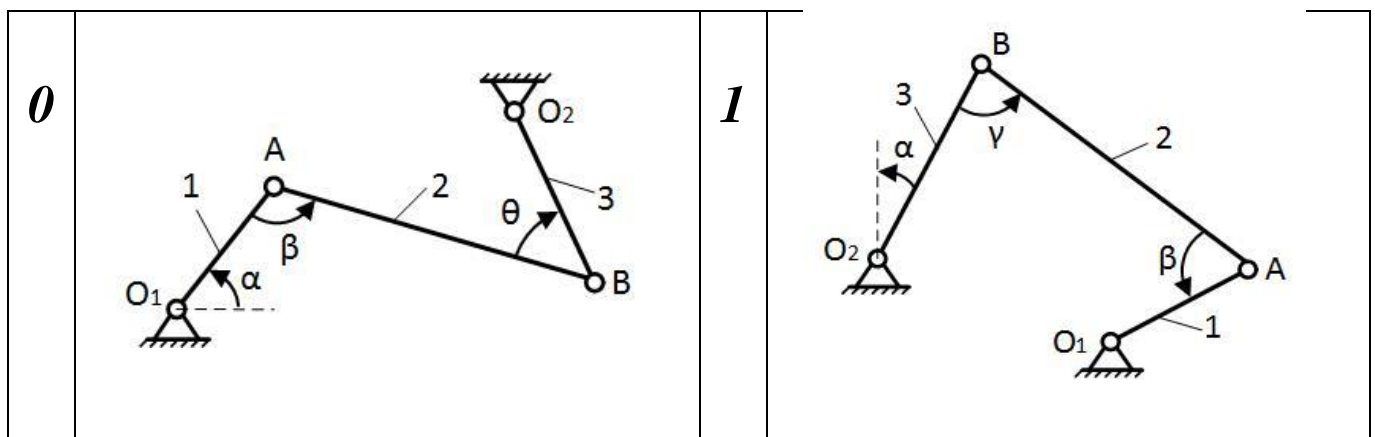
Задані кутову швидкість і кутове прискорення вважати направленими проти ходу годинникової стрілки, а задані швидкість  $\vec{v}_B$  і прискорення  $\vec{a}_B$  – від точки  $B$  до  $b$ .

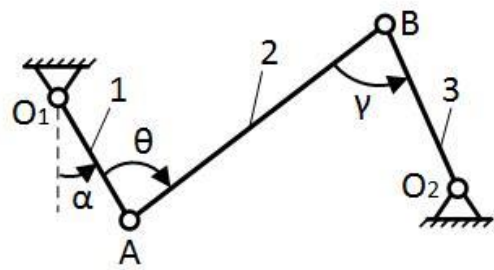
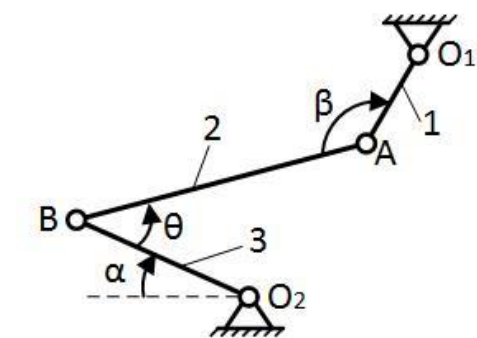
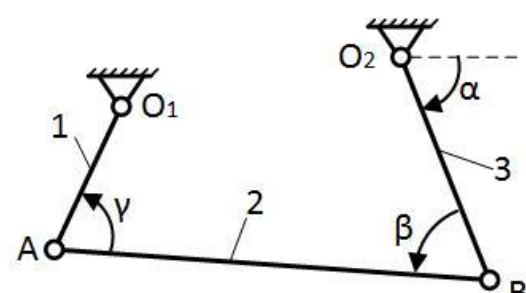
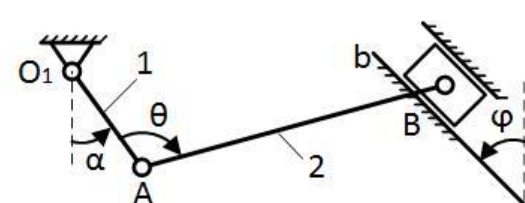
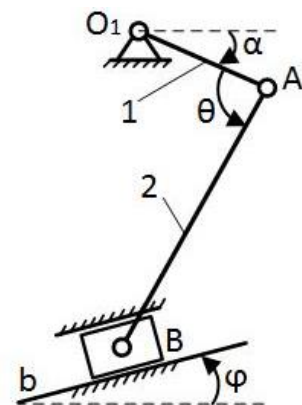
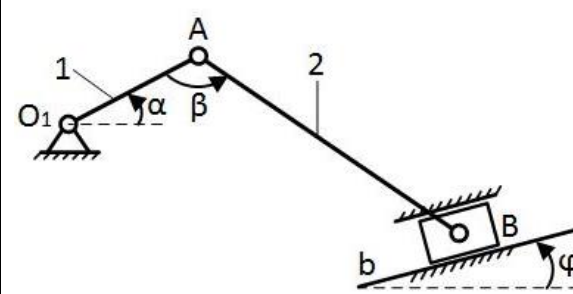
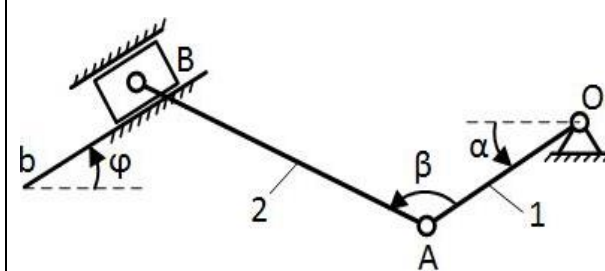
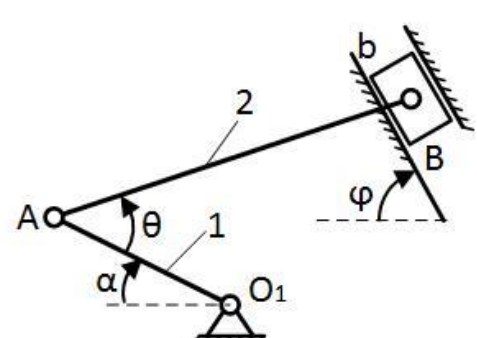
Таблиця 1 (Рис. 0-4)

Номер умови	Кут, град				Дано		Знайти			
	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\theta$	$\omega_1$ , рад/с	$\omega_3$ , рад/с	$v$ точки	$\omega$ ланки	$a$ точки	$\varepsilon$ ланки
0	0	60	30	120	6	–	$B$	$AB$	$B$	$AB$
1	90	120	150	30	–	4	$A$	$AB$	$A$	$AB$
2	30	60	30	120	5	–	$B$	$AB$	$B$	$AB$
3	60	150	150	30	–	5	$A$	$AB$	$A$	$AB$
4	30	30	60	150	4	–	$B$	$AB$	$B$	$AB$
5	90	120	120	60	–	6	$A$	$AB$	$A$	$AB$
6	90	150	120	30	3	–	$B$	$AB$	$B$	$AB$
7	0	60	60	120	–	2	$A$	$AB$	$A$	$AB$
8	60	150	120	30	2	–	$B$	$AB$	$B$	$AB$
9	30	120	150	60	–	8	$A$	$AB$	$A$	$AB$

Таблиця 2 (Рис.5-9)

Номер умови	Кут, град				Дано				Знайти			
	$\alpha$	$\beta$	$\varphi$	$\theta$	$\omega_1$ , рад/с	$\varepsilon_1$ , рад/с <sup>2</sup>	$v_B$ м/с	$a_B$ м/с <sup>2</sup>	$v$ точки	$\omega$ ланки	$a$ точки	$\varepsilon$ ланки
0	120	30	90	150	2	4	—	—	$B$	$AB$	$B$	$AB$
1	0	60	0	120	—	—	4	6	$A$	$AB$	$A$	$AB$
2	60	150	90	30	3	5	—	—	$B$	$AB$	$B$	$AB$
3	0	150	0	60	—	—	6	8	$A$	$AB$	$A$	$AB$
4	30	120	0	60	4	6	—	—	$B$	$AB$	$B$	$AB$
5	90	120	90	60	—	—	8	10	$A$	$AB$	$A$	$AB$
6	0	150	0	120	5	8	—	—	$B$	$AB$	$B$	$AB$
7	30	120	0	60	—	—	2	5	$A$	$AB$	$A$	$AB$
8	90	120	90	150	6	10	—	—	$B$	$AB$	$B$	$AB$
9	60	60	90	30	—	—	5	4	$A$	$AB$	$A$	$AB$



2		3	
4		5	
6		7	
8		9	

## 9.1 Приклад виконання завдання

**Приклад 1.** Знайти кутові швидкості ланок 2 і 3, абсолютні швидкості точок  $B$  і  $C$ , а також прискорення точки  $B$  і кутове прискорення ланки 2 механізму зображеного на рис. 25, якщо  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\theta = 90^\circ$ ,  $\gamma = 150^\circ$ ,  $l_1 = 0,2$  м,  $l_2 = 0,8$  м,  $l_3 = 0,3$  м,  $AC = BC$ . Кривошип 1 обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega_1 = 6$  рад/с.

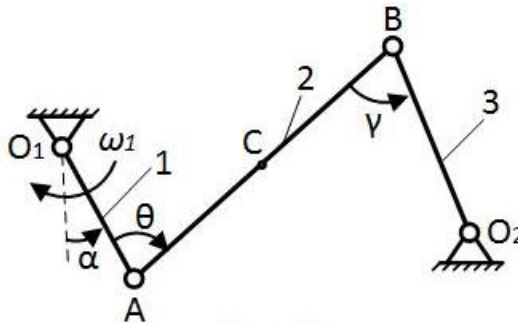


Рис. 25

**Розв'язок.** Будуємо розрахункову схему механізму згідно з заданими даними (рис. 26).

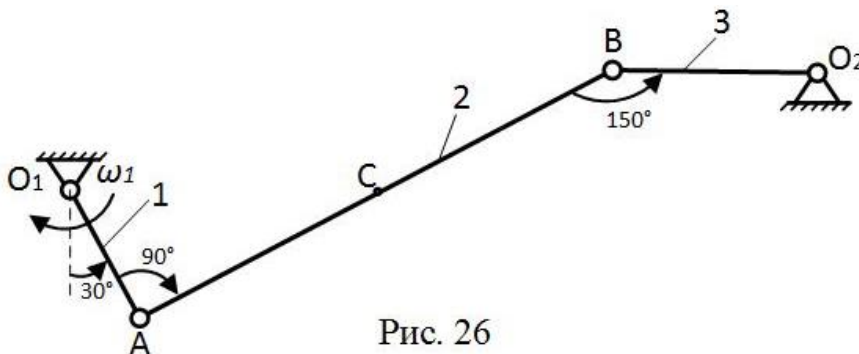


Рис. 26

Так як точка  $A$  належить кривошипу 1, який обертається навколо шарніра  $O_1$  з кутовою швидкістю  $\omega_1$ , то:

$$v_A = \omega_1 \cdot l_1 = 6 \cdot 0,2 = 1,2 \text{ м/с} \quad (19)$$

Вектор швидкості  $\vec{v}_A$  направлений перпендикулярно до  $O_1A$  в бік обертання кривошипа (рис. 27). Так як відомі модуль та напрямок точки  $A$  – вибираємо її полюсом.

Шатун 2 здійснює плоскопаралельний рух. Швидкість точки  $A$  шатуна 2 дорівнює швидкості точки  $A$  кривошипа 1. Другою точкою шатуна, напрям швидкості якої відомий, є точка  $B$ . Точка  $B$  крім шатуна належить ще кривошипу 3, який обертається навколо шарніра  $O_2$ , а отже вектор швидкості точки  $B$  направлений перпендикулярно радіусу  $BO_2$  (по дотичній до траєкторії руху).

Для визначення швидкості точки  $B$  записуємо теорему швидкостей:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB} \quad (20)$$

де  $\bar{v}_B$  – абсолютна швидкість точки  $B$ , направлена перпендикулярно  $BO_2$ ;  
 $\bar{v}_A$  – абсолютна швидкість точки  $A$ ;  
 $\bar{v}_{AB}$  – швидкість обертання точки  $B$  разом з шатуном 2 навколо полюса  $A$ . Направлений вектор  $\bar{v}_{AB}$  з точки  $B$  перпендикулярно ланці  $AB$ .

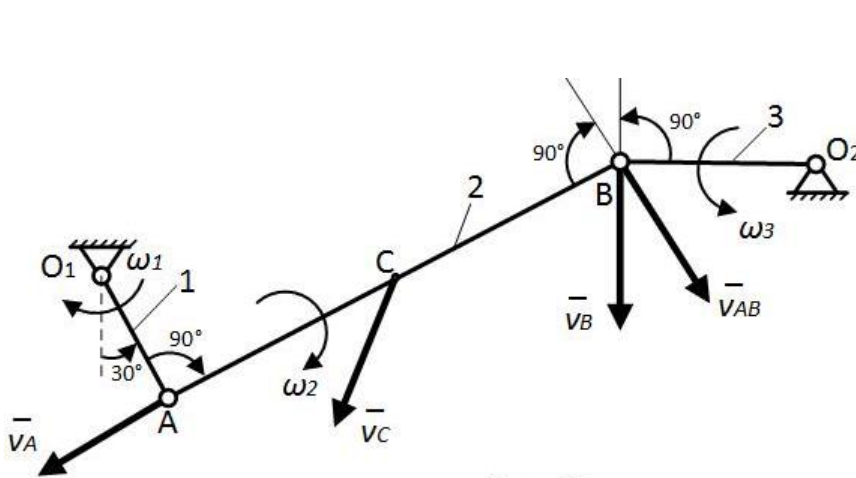


Рис. 27

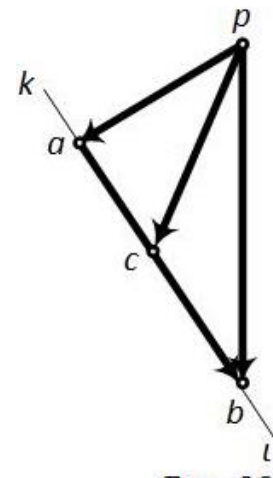


Рис. 28

Будуємо план швидкостей (рис. 28). Для цього вибираємо масштаб:

$$\mu_v = \frac{v_A}{pa} = \frac{1,2 \text{ м/с}}{24 \text{ мм}} = 0,05 \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{мм}}.$$

Масштабний коефіцієнт  $\mu_v$  показує, яка швидкість в одному міліметрі плану швидкостей.

З довільної точки  $p$  (початку плану швидкостей) відкладемо вектор  $\overline{pa}$ , який в вибраному масштабі зображає вектор швидкості  $\bar{v}_A$ . Через кінець вектора  $\overline{pa}$  згідно з рівнянням (20) проведемо лінію  $kl$  перпендикулярно до  $AB$  вздовж якої від точки  $a$  буде направлений вектор відносної швидкості  $\bar{v}_{AB}$ . Довжина і напрям цього вектора невідомі.

Швидкість точки  $B$  направлена перпендикулярно до  $BO_2$  і, за правилом, повинна проходити через початок плану швидкостей  $p$ . Виходячи з цього, через точку  $p$  проводимо лінію перпендикулярну кривошипу 2 до перетину в точці  $b$  з лінією  $kl$ .

Отриманий на рис. 28 векторний трикутник  $pab$  являє собою план швидкостей механізму в заданому положенні. В цьому трикутнику вектор  $\overline{pa}$  зображає абсолютну швидкість точки  $A$ , вектор  $\overline{pb}$ , направлений від початку до точки  $b$  – абсолютну швидкість точки  $B$ , а вектор  $\overline{ab}$ , направлений від точки  $a$  до точки  $b$  – відносну швидкість  $\bar{v}_{AB}$ , оскільки, згідно з рівнянням (20) ця швидкість додається до  $\bar{v}_A$ .

Одержані напрямки швидкостей  $\bar{v}_B$  і  $\bar{v}_{AB}$  показуємо на рисунку механізму (рис. 27).

Для знаходження числових значень швидкостей вимірюємо довжину векторів  $\overline{pb}$  і  $\overline{ab}$  та, врахувавши масштаб побудови, обчислюємо:

$$v_B = pb \cdot \mu_v = 44 \text{ мм} \cdot 0,05 \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{мм}} = 2,2 \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

$$v_{AB} = ab \cdot \mu_v = 36 \text{ мм} \cdot 0,05 \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{мм}} = 1,8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Щоб визначити швидкість точки  $C$  скористаємося *правилом подібності* – відрізок з вершинами  $ab$  плану швидкостей подібний до ланки  $AB$  механізму. А так як  $AC = BC$ , то і  $ac = bc$ . Знаходимо середину відрізка  $ab$ , позначаємо точку  $c$  і врахувавши правило, що вектори абсолютних швидкостей точок виходять з початку плану швидкостей, проводимо вектор  $\overline{pc}$  який і є вектором швидкості точки  $C$ . Вимірюємо його довжину та, врахувавши масштаб побудови, обчислюємо:

$$v_C = pc \cdot \mu_v = 32 \text{ мм} \cdot 0,05 \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{мм}} = 1,6 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Знайдемо миттєві кутові швидкості коромисла 2 і кривошипа 3. Так як

$$v_{AB} = \omega_2 \cdot AB = \omega_2 \cdot l_2, \text{ то } \omega_2 = \frac{v_{AB}}{l_2} = \frac{1,6}{0,8} = 2 \text{ рад/с}.$$

Напрямок кутової швидкості  $\omega_2$  визначається напрямом відносної швидкості  $\bar{v}_{AB}$ . З рис. 27 видно, що кутова швидкість  $\omega_2$  буде направлена за ходом годинникової стрілки.

Кутова швидкість кривошипа 3 дорівнює:

$$\omega_3 = \frac{v_B}{l_3} = \frac{2,2}{0,3} = 7,33 \text{ рад/с}.$$

Напрямок  $\omega_3$  залежить від напрямку швидкості  $\bar{v}_B$ . Направлена кутова швидкість кривошипа 3 (рис. 27) проти ходу годинникової стрілки.

Для визначення прискорення точки  $B$  та кутового прискорення коромисла 2 побудуємо план прискорень механізму в заданому положенні.

Знайдемо прискорення точки  $A$ . Оскільки кривошип 1 обертається навколо шарніра  $O_1$  з сталою кутовою швидкістю  $\omega_1$  (тобто  $\varepsilon_1 = 0$  і відповідно  $\bar{a}_A^t = 0$ ), то прискорення  $\bar{a}_A = \bar{a}_A^n$ . За модулем прискорення точки  $A$  рівне

$$a_A = a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_1 = 6^2 \cdot 0,2 = 7,2 \text{ м/с}^2.$$

Направлене це прискорення від точки  $A$  до шарніра  $O_1$  (рис. 29). Точка  $A$  одночасно належить кривошипу 1 і коромислу 2, яке здійснює плоский рух. Для знаходження прискорення точки  $B$  коромисла запишемо теорему прискорень, прийнявши за полюс точку  $A$ .

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{AB}^n + \bar{a}_{AB}^t \quad (21)$$

де  $\bar{a}_A$  – прискорення точки  $A$ , яку приймаємо за полюс, так як її прискорення відоме за модулем і напрямком;

$\bar{a}_{AB}^n$  – відносне нормальне (доцентрове) прискорення точки  $B$  у її відносному обертальному русі разом з коромислом 2 навколо полюса  $A$ . Направлене це прискорення від точки  $B$  до точки  $A$  (рис. 29) і за модулем дорівнює:

$$a_{AB}^n = \omega_2^2 \cdot AB = \omega_2^2 \cdot l_2 = 2^2 \cdot 0,8 = 3,2 \text{ м/с}^2;$$

$\bar{a}_{AB}^\tau$  – відносне тангенціальне (дотичне) прискорення точки  $B$  у її відносному обертальному русі разом з коромислом 2 навколо полюса  $A$ . Направлене це прискорення перпендикулярно до  $\bar{a}_{AB}^n$  в бік кутового прискорення ланки  $\varepsilon_2$  і за модулем дорівнює:  $a_{AB}^\tau = \varepsilon_2 \cdot AB = \varepsilon_2 \cdot l_2$ .

Точка  $B$  з'єднує коромисло 2 і кривошип 3, тому її прискорення можна знайти, розглядаючи обертальний рух кривошипа 3 навколо шарніра  $O_2$ :

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau \quad (22)$$

де  $\bar{a}_B^n$  – нормальне (доцентрове) прискорення точки  $B$  у її обертальному русі навколо шарніра  $O_2$ . Направлене це прискорення від точки  $B$  до центра обертання  $O_2$  (рис.29) і за модулем рівне:

$$a_B^n = \omega_3^2 \cdot l_3 = 7,33^2 \cdot 0,3 = 16 \text{ м/с}^2;$$

$\bar{a}_B^\tau$  – тангенціальне прискорення точки  $B$  у її обертальному русі навколо шарніра  $O_2$ . Направлене це прискорення перпендикулярно до  $\bar{a}_B^n$  в бік кутового прискорення ланки  $\varepsilon_3$  і за модулем дорівнює:  $a_B^\tau = \varepsilon_3 \cdot l_3$ .

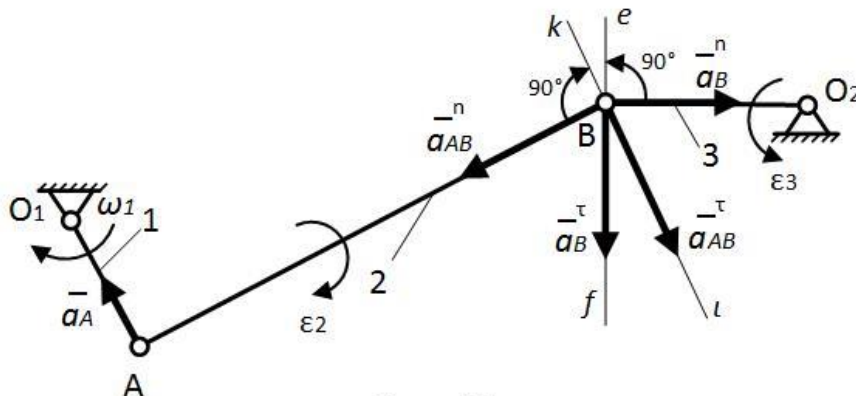


Рис. 29

Прирівняємо праві частини рівнянь (21) і (22) і одержимо залежність між прискореннями за якою побудуємо план прискорень.

$$\bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau = \bar{a}_A + \bar{a}_{AB}^n + \bar{a}_{AB}^\tau \quad (23)$$



Побудову починаємо з довільного початку плану прискорень –  $\pi$ . Вектори відкладаємо у вибраному масштабі (рис. 30).

Масштабний коефіцієнт  $\mu_a$  показує, яке прискорення в одному міліметрі плану прискорень.

$$\mu_a = \frac{a_A}{\pi a} = \frac{7,2 \text{ м/с}^2}{18 \text{ мм}} = 0,4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{мм}}.$$

Першим відкладаємо вектор  $\overline{\pi a}$ , який зображає прискорення полюса  $\bar{a}_A$ . З його кінця, згідно з рівнянням (23), проводимо вектор  $\overline{an_1}$  (прискорення  $\bar{a}_{AB}^n$ ). Довжину цього вектора знаходимо, враховуючи масштабний коефіцієнт:

$$an_1 = \frac{a_{AB}^n}{\mu_a} = \frac{3,2 \text{ м/с}^2}{0,4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{мм}}} = 8 \text{ мм}.$$

Через кінець вектора  $\overline{an_1}$  проводимо перпендикулярну до нього лінію  $kl$ , вздовж якої буде направлено тангенціальне прискорення  $\bar{a}_{AB}^t$  (так як  $\bar{a}_{AB}^n \perp \bar{a}_{AB}^t$ ) і на цій лінії буде лежати точка  $b$  – кінець вектора абсолютного прискорення точки  $B$  механізму.

Наступний вектор  $\overline{\pi n_2}$  відкладаємо знову з початку плану – точки  $\pi$  (згідно з рівнянням (23)). Цей вектор відповідає прискоренню  $\bar{a}_B^n$ . Його довжину знаходимо за тим же масштабним коефіцієнтом:

$$\pi n_2 = \frac{a_B^n}{\mu_a} = \frac{16 \text{ м/с}^2}{0,4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{мм}}} = 40 \text{ мм}.$$

Через кінець вектора  $\overline{\pi n_2}$  проводимо перпендикулярну до нього лінію  $fe$ , вздовж якої буде направлено тангенціальне прискорення  $\bar{a}_B^t$  (так як  $\bar{a}_B^n \perp \bar{a}_B^t$ ). Лінію  $fe$  проводимо до перетину з лінією  $kl$ , а точку їх перетину позначаємо  $b$  – це і є кінець вектора абсолютного прискорення точки  $B$  механізму –  $\bar{a}_B$ .

Згідно з правилом, що вектори всіх абсолютних прискорень виходять з початку плану прискорень, вектор абсолютного прискорення  $\bar{a}_B$  точки  $B$  на плані прискорень в масштабі буде зображатись вектором  $\overline{\pi b}$ , а величина цього прискорення дорівнює

$$a_B = \pi b \cdot \mu_a = 89 \text{ мм} \cdot 0,4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{мм}} = 35,6 \text{ м/с}^2.$$

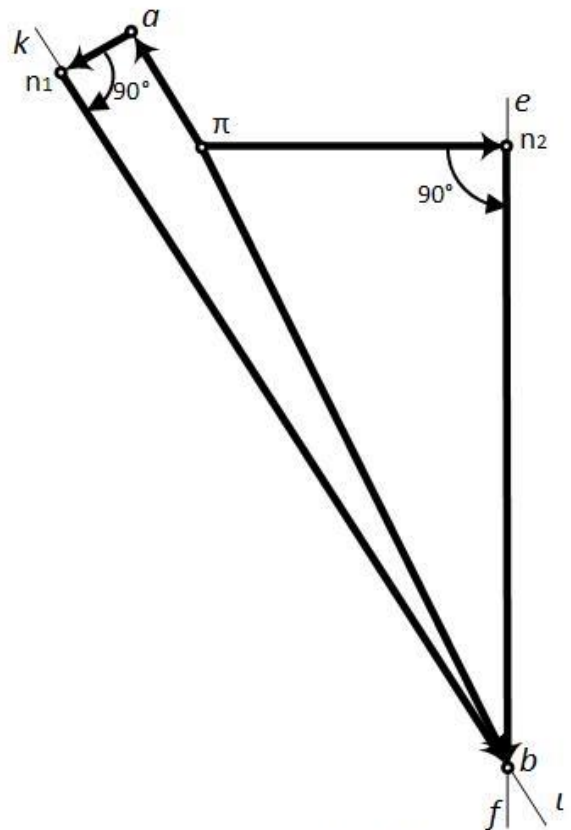


Рис. 30

Величини тангенціальних прискорень  $\bar{a}_{AB}^\tau$  і  $\bar{a}_B^\tau$  знайдемо шляхом вимірювання відповідних відрізків на плані прискорень:

$$a_{AB}^\tau = n_1 b \cdot \mu_a = 117 \text{ мм} \cdot 0,4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{мм}} = 46,8 \text{ м/с}^2;$$

$$a_B^\tau = n_2 b \cdot \mu_a = 79 \text{ мм} \cdot 0,4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{мм}} = 31,6 \text{ м/с}^2.$$

Так як  $a_{AB}^\tau = \varepsilon_2 \cdot l_2$  і  $a_B^\tau = \varepsilon_3 \cdot l_3$ , то миттєві кутові прискорення коромисла 2 і кривошипа 3 відповідно рівні:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{AB}^\tau}{l_2} = \frac{46,8}{0,8} = 58,5 \text{ рад/с}^2;$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_B^\tau}{l_3} = \frac{31,6}{0,3} = 105,3 \text{ рад/с}^2.$$

Напрямок кутового прискорення  $\varepsilon_2$  визначаємо за напрямком тангенціального прискорення  $\bar{a}_{AB}^\tau$ . Напрямок  $\bar{a}_{AB}^\tau$  вказує на те, що кутове прискорення  $\varepsilon_2$  направлене за ходом годинникової стрілки.

Аналогічно за напрямком тангенціального прискорення  $\bar{a}_B^\tau$  визначаємо напрям кутового прискорення  $\varepsilon_3$ , яке направлене проти ходу годинникової стрілки.

Відповідь:  $v_B = 2,2 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ ;  $v_C = 1,6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ ;  $\omega_2 = 2 \text{ рад/с}$ ;  $\omega_3 = 7,33 \text{ рад/с}$ ;  $a_B = 35,6 \text{ м/с}^2$ ;  $\varepsilon_2 = 58,5 \text{ рад/с}^2$ ;  $\varepsilon_3 = 105,3 \text{ рад/с}^2$ .

## ***10. Питання для самоконтролю***

1. Який рух твердого тіла називається плоским?
2. З яких рухів складається плоский рух твердого тіла і який рух залежить від вибору полюса?
3. Сформулюйте теорему про швидкість точки плоскої фігури?
4. Що називається миттєвим центром швидкостей?
5. Як визначити положення миттєвого центра швидкостей в загальному випадку?
6. Як визначити швидкість будь-якої точки плоскої фігури, якщо відомий миттєвий центр швидкостей?
7. Як визначити прискорення будь-якої точки плоскої фігури?
8. Яка точка називається миттєвим центром прискорень?
9. Як визначити прискорення будь-якої точки плоскої фігури, якщо відомий миттєвий центр прискорень.
10. Які дані необхідні для побудови плану швидкостей?
11. Що являє собою відрізок, який з'єднує дві вершини плану швидкостей?
12. Як визначити миттєву кутову швидкість обертання плоскої фігури?
13. Як визначити напрям обертального руху плоскої фігури?
14. Яку точку обирають за полюс при складанні рівняння швидкостей для плоского руху?
15. Які дані необхідні для побудови плану прискорень?
16. Яка точка називається полюсом плану прискорень?
17. Які прискорення зображають вектори, що виходять з початку плану прискорень?
18. Як визначити величину і напрям кутового прискорення ланки?

### *Список літератури*

1. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 2001. – 416с.
3. Сборник коротких задач про теоретической механике / О.Є. Кепе, Я.А. Виба, О.П. Грапис и др.; под ред. О.Є. Кепе. – М.: Высш. шк., 1989. – 386 с.
4. Конспект лекцій із теоретичної механіки: навчальний посібник / Б. О. Іванов, М. В. Максютя. – К.: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2012. – 207 с.
5. Теоретична механіка. Підручник / В. М. Булгаков, В. В. Яременко, О. М. Черниш, М. Г. Березовий. – К.: «Центр учбової літератури», 2017. – 640 с.
6. Конспект лекцій з дисципліни «Теоретична механіка. Динаміка» / В. П. Шпачук, В. О. Пушня, О. І. Рубаненко, А. О. Гарбуз ; Харків. нац. ун-т міськ. гос-ва ім. О. М. Бекетова ; За ред. В. П. Шпачука. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. – 222 с.
7. Теоретична механіка: навчально-методичний посібник для здобувачів освітнього ступеня “бакалавр” з технічних спеціальностей усіх форм навчання / Т.І. Веретільник, Л.Д. Мисник; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси: ЧДТУ, 2018. – 273 с.