

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ  
ДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ  
“ДИНАМІКА ТОЧКИ”  
З ДИСЦИПЛІНИ “ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА”**

ДЛЯ ЗДОБУВАЧІВ ОСВІТНЬОГО РІВНЯ “БАКАЛАВР” З ТЕХНІЧНИХ  
СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ УСІХ ФОРМ НАВЧАННЯ.

Черкаси



2019

УДК 531.01(07)  
МБ 54

*Затверджено вченою радою ФКТМД,  
протокол № 14 від 07.05.2019 року  
згідно з рішенням кафедри механіки,  
поліграфічних машин і технологій  
протокол № 7 від 06.03.2019 року*

Упорядник: Мисник Людмила Дмитрівна, *к.т.н., доцент.*

Рецензент: Веретільник Т.І, *к.т.н., доцент.*

МБ 54      Методичні рекомендації до виконання розрахунково-графічної роботи “Динаміка точки” з дисципліни “Теоретична механіка” для здобувачів освітнього рівня “бакалавр” з технічних спеціальностей усіх форм навчання/ упоряд.: Л.Д. Мисник; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси : ЧДТУ, 2019. – 30 с.

Навчальне видання призначене для поглибленого вивчення теоретичної механіки, зокрема динаміки точки. Метою видання є допомога студентам в опануванні та систематизації знань завдяки засвоєнню методики розв’язання задач. Методичні рекомендації орієнтовані на студентів технічних спеціальностей, можуть бути використані при вивченні споріднених дисциплін.

Навчальне видання

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ  
ДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ  
“ДИНАМІКА ТОЧКИ”  
З ДИСЦИПЛІНИ “ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА”  
ДЛЯ ЗДОБУВАЧІВ ОСВІТНЬОГО РІВНЯ “БАКАЛАВР”  
З ТЕХНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ УСІХ ФОРМ НАВЧАННЯ.**

*В авторській редакції*

---

Формат 60x84 1/16. Times New Roman  
Ум. друк. арк. 1,62. Обл.-вид. арк. 1,68. Р.н. 2278.

---

Черкаський державний технологічний університет  
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 896 від 16.04.2002 р.  
бульвар Шевченка, 460, м. Черкаси, 18006

## ЗМІСТ

Вступ.....	4
1 ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ .....	4
1.1 Диференціальні рівняння руху матеріальної точки .....	4
1.2 Дві основні задачі динаміки .....	7
1.3 Диференціальне рівняння прямиї руху точки .....	14
2 КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ .....	14
3 ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ .....	16
3.1 Інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки, яка знаходиться під дією постійних сил.....	16
3.2 Інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки, яка знаходиться під дією змінних сил .....	25
4 ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ .....	30
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ .....	30

## **ВСТУП**

Теоретична механіка вивчає найбільш загальні закони руху і взаємодії тіл, її головне завдання – пізнання кількісних і якісних закономірностей, які спостерігаються у природі. Вона належить до фундаментальних природничих наук, оскільки природознавство в цілому вивчає різні форми руху матерії.

Значення теоретичної механіки як однієї з наукових основ техніки і технології безупинно зростає. Розвиток нових видів виробництва і нових технічних засобів висуває проблеми, які вже не можна вирішити на основі одних лише дослідних даних. Для розв'язання цих проблем потрібне моделювання, в основі якого лежить попередній точний розрахунок і наукове передбачення, що спирається на глибокі знання законів і методів теоретичної механіки.

Дана розробка призначена для поглибленого вивчення теоретичної механіки, зокрема динаміки матеріальної точки. Орієнтована, в першу чергу, на студентів технічних спеціальностей, може бути використана при вивченні споріднених дисциплін.

Вочевидь основний шлях вивчення будь-якої дисципліни – це самостійна робота над матеріалом, у тому числі набуття практичних навичок у розв'язанні задач. Особливістю задач з теоретичної механіки є те, що вони передбачають наявність знань із математики, фізики, креслення тощо. Для студентів молодших курсів, на яких викладається теоретична механіка, поєднання знань цих дисциплін із новою інформацією, яку містить теоретична механіка, становить певні труднощі. Мета даних рекомендацій – допомога студенту в опануванні та систематизації знань завдяки засвоєнню методики розв'язання задач. Тому в рекомендаціях наведено короткі теоретичні відомості, приклади розв'язування задач та задачі для самостійної роботи. Для більш поглибленого вивчення дисципліни подано розрахункові завдання для дослідження динаміки матеріальної точки.

## **1. ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ**

### ***1.1 Диференціальні рівняння руху матеріальної точки***

Згідно з аксіомою про в'язі можна одержати диференціальні рівняння руху матеріальної точки як вільної, так і невільної, лише потрібно до діючих на точку активних сил додати реакцій в'язей. Активні сили і реакцій в'язей під час руху точки можуть залежати, в загальному випадку, не тільки від накладених на точку в'язей, а й від швидкості її руху, положення або часу. В подальшому не будемо робити різниці між вільною і невільною матеріальною точкою.

Розглянемо матеріальну точку  $M$  масою  $m$ , яка під дією системи сил  $\vec{F}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) рухається відносно інерціальної системи відліку  $Oxuz$  (рис. 1)

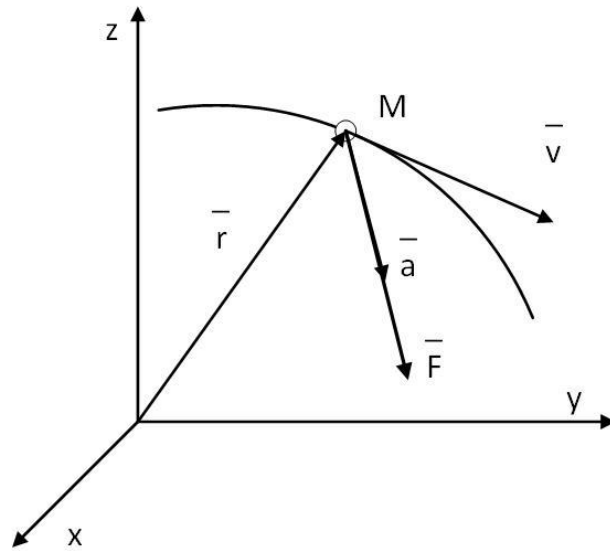


Рисунок 1

Згідно з другим і четвертим законами Ньютона:

$$m\bar{a} = \bar{F} \quad (1)$$

де  $\bar{a}$  – прискорення точки  $M$ ;

$\bar{F}$  – рівнодійна діючих на точку сил  $\bar{F}_k$  ( $\bar{F} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$ ).

В загальному випадку сили  $\bar{F}_k$  можуть залежати від часу, положення точки  $M$  в просторі і її швидкості, отже і їх рівнодійна  $\bar{F}$  в загальному випадку є функцією часу  $t$ , радіуса-вектора  $\bar{r}$  і швидкості  $\bar{v}$ , тобто  $\bar{F} = \bar{F}(t, \bar{r}, \bar{v})$ .

З кінематики відомо, що прискорення  $\bar{a}$  дорівнює другій похідній за часом від радіуса-вектора  $\bar{r}$

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}.$$

Враховуючи це диференціальне рівняння руху матеріальної точки (1) має вигляд

$$m \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F} \quad \text{або} \quad m \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F}(t, \bar{r}, \bar{v}) \quad (2)$$

Для скорочення запису, знаючи, що сили це змінні величини, тобто  $\bar{F} = \bar{F}(t, \bar{r}, \bar{v})$  будемо використовувати просто  $\bar{F}$ .

Спроектуємо обидві частини рівняння (2) на осі координат  $Oxyz$  та одержимо диференціальні рівняння руху точки в проекціях на ці осі:

$$ma_x = F_x, \quad ma_y = F_y, \quad ma_z = F_z.$$

Проекції прискорення на осі координат  $Oxyz$  можна представити як похідну за часом від проекції швидкості або другу похідну за часом від координат точки, що рухається. Тоді диференціальні рівняння руху матеріальної точки в декартових прямокутних координатах матимуть вигляд:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{dv_x}{dt} = F_x, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = m \frac{dv_y}{dt} = F_y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = m \frac{dv_z}{dt} = F_z \quad (3)$$

Окремі випадки

1. Якщо відомо, що матеріальна точка рухається в одній площині, то прийнявши її за координатну площину  $Oxy$ , матимемо

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{dv_x}{dt} = F_x, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = m \frac{dv_y}{dt} = F_y, \quad (4)$$

так як  $z = 0$ , то і  $F_z = 0$ .

2. Якщо точка рухається по прямій траєкторії, то направивши вздовж неї координатну вісь  $Ox$ , одержимо одне диференціальне рівняння прямолінійного руху точки

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{dv_x}{dt} = F_x \quad (5)$$

так як  $y = z = 0$ , то і  $F_y = F_z = 0$ .

3. Для рухомих натуральних осей координат (рис. 2), проектуючи обидві частини рівняння (1.1) на ці осі, одержимо

$$ma_\tau = F_\tau, \quad ma_n = F_n, \quad ma_b = F_b$$

де  $a_\tau, a_n, a_b$  – проекції прискорення матеріальної точки;

$F_\tau, F_n, F_b$  – проекції рівнодійної сили на дотичну, головну нормаль і бінормаль до траєкторії в миттєвому положенні рухомої точки.

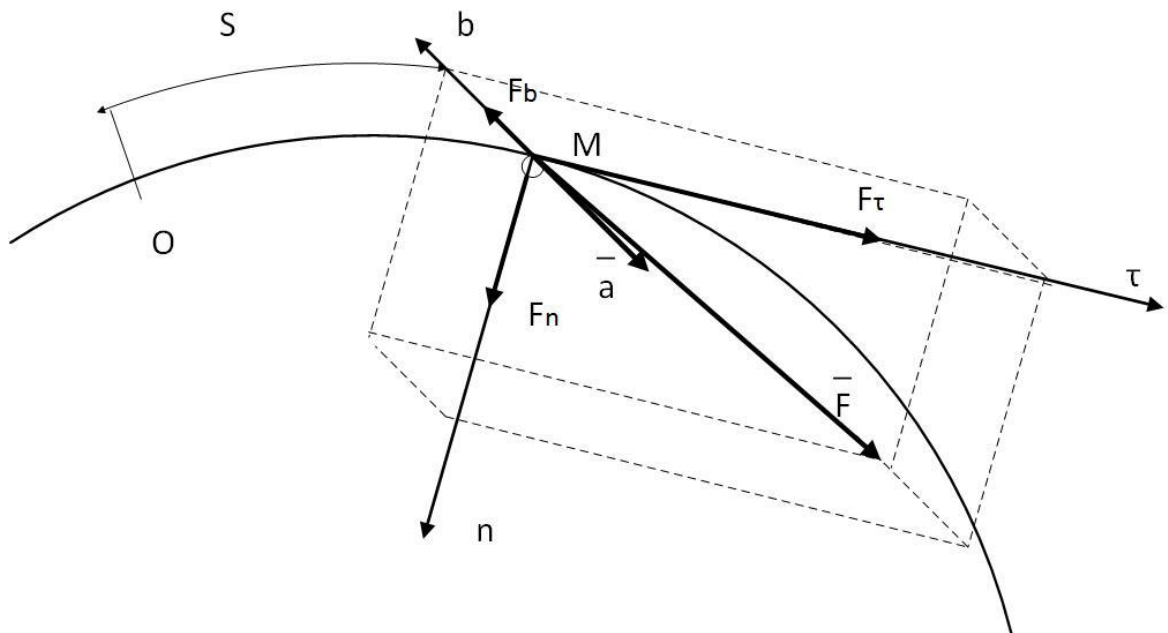


Рисунок 2

Так як  $a_\tau = \frac{d^2S}{dt^2}$ ,  $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ ,  $a_b = 0$ , де  $\rho$  – радіус кривизни траєкторії в місці знаходження точки, диференціальне рівняння руху матеріальної точки в натуральній формі матиме вигляд:

$$m \frac{d^2S}{dt^2} = F_\tau, \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_n, \quad 0 = F_b \quad (6)$$

Але враховуючи, що  $\rho = \frac{dS}{d\varphi}$ ,  $\frac{v^2}{\rho} = v \cdot \frac{v}{\rho} = v \cdot \frac{dS}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dS}{d\varphi}} = v \cdot \frac{d\varphi}{dt}$ , де  $\frac{d\varphi}{dt}$  – кутова швидкість обертання, тоді рівняння (6) можна записати у вигляді:

$$m \frac{dv}{dt} = F_\tau, \quad mv \frac{d\varphi}{dt} = F_n, \quad 0 = F_b. \quad (7)$$

Ця форма диференціальних рівнянь руху матеріальної точки зручна при дослідженні деяких випадків польоту снарядів і ракет, особливо по траєкторії, що лежить в площині.

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки можна записати для будь-якої іншої системи координат. Для цього потрібно знайти проекції прискорення точки на ці осі координат.

## 1.2 Дві основні задачі динаміки точки

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки, в тій чи іншій системі координат, дозволяють розв'язати дві основні задачі.

**Перша задача:** *знаючи масу точки і кінематичні рівняння її руху, знайти діючі на точку сили (рівнодійну всіх сил).*

Дійсно, якщо точка масою  $m$  рухається відносно декартової системи координат згідно рівнянь  $x = f_1(t)$ ,  $y = f_2(t)$ ,  $z = f_3(t)$ , то проекції сили на ці осі координат знаходять з диференціальних рівнянь руху матеріальної точки (3), тобто

$$F_x = m \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{d^2f_1}{dt^2}, \quad F_y = m \frac{d^2y}{dt^2} = m \frac{d^2f_2}{dt^2}, \quad F_z = m \frac{d^2z}{dt^2} = m \frac{d^2f_3}{dt^2}$$

Знаючи проекції сили на координатні осі, легко знайти модуль сили і косинуси кутів, які утворює вектор сили з осями координат:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = m \sqrt{\frac{d^2x}{dt^2}^2 + \frac{d^2y}{dt^2}^2 + \frac{d^2z}{dt^2}^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{\frac{d^2x}{dt^2}^2 + \frac{d^2y}{dt^2}^2 + \frac{d^2z}{dt^2}^2}}; \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\sqrt{\frac{d^2x}{dt^2}^2 + \frac{d^2y}{dt^2}^2 + \frac{d^2z}{dt^2}^2}}; \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F} = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{\frac{d^2x}{dt^2}^2 + \frac{d^2y}{dt^2}^2 + \frac{d^2z}{dt^2}^2}},$$

де  $\alpha, \beta, \gamma$  – кути утворені рівнодією  $\vec{F}$  з осями координат  $Ox, Oy, Oz$ .

Таким чином розв’язання першої задачі динаміки зводиться до відшукування проєкцій прискорень, складання диференціальних рівнянь руху матеріальної точки і обчислення величини сил.

Якщо рух точки задано в натуральній формі, то для обчислення сил необхідно скористатись рівняннями (7).

*Методика розв’язку першої задачі динаміки:*

- 1) вибрати систему відліку;
- 2) зобразити поточне положення точки;
- 3) визначити за заданим законом руху проєкції прискорення точки на координатні осі;
- 4) скласти рівняння руху точки відповідно до вибраної системи відліку;
- 5) розв’язати рівняння відносно невідомих величин.

### **Приклад 1.1**

Матеріальна точка масою  $m$  рухається за законом  $x = at, y = b - at^2$ . Визначити силу  $\vec{F}$ , під дією якої відбувається рух, якщо ця сила залежить тільки від положення точки.

**Розв’язок:** Рух точки здійснюється в прямокутній декартовій системі координат  $Oxy$ . Траєкторія руху – парабола, рівняння якої після виключення з рівнянь руху часу  $t$  має вигляд  $y = b - a^{-1}x^2$  (рис. 3).

Враховуючи, що дана задача є першою (прямою) задачею динаміки матеріальної точки, визначимо проєкції сили  $\vec{F}$  з диференціальних рівнянь (4).

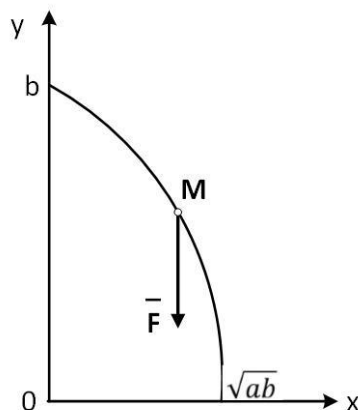


Рисунок 3

Для проєкцій прискорення маємо  $\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \frac{d^2y}{dt^2} = -2a$ . Тоді  $F_x = 0, F_y = -2am$ . Модуль сили  $\vec{F}$  можна записати так:  $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 2am$ .

**Відповідь.** Точка рухається під дією сталої сили величиною  $F = 2am$ , яка паралельна осі  $Oy$  і направлена протилежно до неї.



**Друга (обернена) задача:** знаючи масу точки, її початкове положення, початкову швидкість і рівнодійну діючих на точку сил, знайти рівняння руху точки.

В загальному випадку диференціальні рівняння руху матеріальної точки мають вигляд:

$$\begin{aligned}m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x \left( t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right); \\m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y \left( t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right); \\m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z \left( t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right).\end{aligned}\tag{8}$$

Для знаходження рівнянь руху матеріальної точки в прямокутних декартових координатах потрібно інтегрувати систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку (8). З теорії диференціального числення відомо, що рішення одного диференціального рівняння другого порядку має дві довільні сталі. У випадку системи трьох таких рівнянь одержимо шість довільних сталих  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ .

Кожна з координат  $x, y, z$  рухомої матеріальної точки (рівняння її руху) залежатиме від часу  $t$  і шести довільних сталих, тобто

$$\begin{aligned}x &= f_1(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\y &= f_2(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\z &= f_3(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)\end{aligned}\tag{9}$$

Якщо диференціювати рівняння (9) за часом, то знайдемо проекції швидкості матеріальної точки на осі координат

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{df_1}{dt}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{df_2}{dt}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\v_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{df_3}{dt}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)\end{aligned}\tag{10}$$

Таким чином задавання сили не визначає конкретний рух точки, а виділяє цілий клас рухів, що характеризуються шістьма довільними сталими. Діюча сила визначає тільки прискорення рухомої матеріальної точки, а швидкість і положення точки на траєкторії залежать ще і від її початкової швидкості та початкового положення. Так, наприклад, матеріальна точка, рухаючись поблизу поверхні Землі під дією сили тяжіння, має прискорення  $\bar{g}$ , якщо не враховувати опір повітря. Але вона буде мати різну швидкість і положення в просторі в один і той же момент часу

та іншу форму траєкторії в залежності від того з якої точки простору і під яким кутом почався рух та з якою за величиною і напрямком початковою швидкістю.

Для знаходження конкретного руху матеріальної точки потрібно задати додатково умови, які дозволять знайти довільні сталі. Такими умовами є зазвичай початкові умови, тобто в конкретний момент часу ( $t=0$ ) задають координати рухомої матеріальної точки  $x_o, y_o, z_o$  та проекції її початкової швидкості  $v_{xo}, v_{yo}, v_{zo}$ :

$$t = 0, \quad x = x_o, \quad y = y_o, \quad z = z_o, \quad \frac{dx}{dt} = v_{xo}, \quad \frac{dy}{dt} = v_{yo}, \quad \frac{dz}{dt} = v_{zo}.$$

Використавши ці початкові умови і формули (9) та (10), одержимо шість рівнянь для знаходження шести довільних сталих

$$x_o = f_1(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

$$y_o = f_2(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

$$z_o = f_3(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

$$v_{xo} = \frac{df_1}{dt}(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

$$v_{yo} = \frac{df_2}{dt}(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

$$v_{zo} = \frac{df_3}{dt}(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

Якщо матеріальна точка рухається в площині  $Oxy$  існує два диференціальних рівняння руху. До розв'язку цих рівнянь входять чотири довільні сталі, які визначаються з початкових умов:

$$t = 0, \quad x = x_o, \quad y = y_o, \quad \frac{dx}{dt} = v_{xo}, \quad \frac{dy}{dt} = v_{yo}.$$

У випадку прямолінійного руху матеріальної точки існує лише одне диференціальне рівняння і до його розв'язку входять тільки дві довільні сталі:

$$\text{При } t = 0, \quad x = x_o, \quad \frac{dx}{dt} = v_{xo}.$$

Задача інтегрування системи диференціальних рівнянь (3) при заданих початкових умовах в загальному випадку досить складна, але знаходження закону руху матеріальної точки при заданих силах є актуальною задачею, тому *другу* задачу динаміки ще називають *основною*.

*Методика розв'язку другої (основної) задачі динаміки:*

- 1) складаємо диференціальне рівняння руху. Для його складання у випадку прямолінійного руху потрібно:
  - вибрати початок відліку і провести координатну вісь, направляючи її вздовж траєкторії в напрямку руху;
  - зобразити точку в довільному положенні та показати всі діючі на точку сили;
  - підрахувати суму проекцій всіх сил на координатну вісь і підставити цю суму в праву частину диференціального рівняння руху; при цьому *потрібно обов'язково всі змінні сили виразити через ті величини ( $t$ ,  $x$  або  $v$ ), від яких ці сили залежать.*
- 2) інтегруємо отримані диференціальні рівняння руху;
- 3) визначаємо сталі інтегрування, використовуючи початкові умови;
- 4) записуємо кінематичний закон руху матеріальної точки.

### **Приклад 1.2**

*Сила залежить від часу*

Вантаж масою  $m$  починає рухатися з початковою швидкістю  $v_0$  вздовж гладкої горизонтальної поверхні під дією сили  $\vec{F}$ , значення якої зростає пропорційно часу за законом  $F = kt$  ( $k$  – константа). Знайти закон руху вантажа.

**Розв'язок.** Виберемо початок відліку  $O$  в початковому положенні вантажа і направимо вісь  $Ox$  в напрямку руху (рис. 4). Тоді початкові умови будуть: при  $t = 0$   $x = 0$ ,  $v_x = v_0$ .

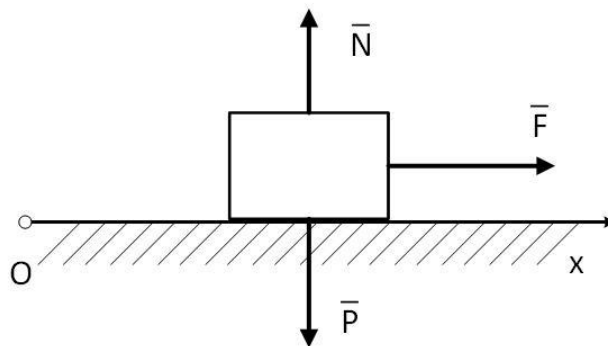


Рисунок 4

Зображаємо в довільному положенні вантаж і діючі на нього сили  $\vec{F}$ ,  $\vec{P}$  (сила тяжіння) і  $\vec{N}$  (реакція поверхні). Проекції цих сил на вісь  $Ox$  мають значення  $F_x = F = kt$ ,  $P_x = 0$ ,  $N_x = 0$  і рівняння (5) матиме вигляд

$$m \frac{dv_x}{dt} = kt.$$

Помноживши обидві частини рівняння на  $dt$ , розділяємо змінні і, проінтегрувавши, одержимо

$$mv_x = \frac{kt^2}{2} + C_1.$$

Підставивши сюди початкові дані, знайдемо, що  $C_1 = v_0$ . Тоді, замінюючи в отриманому результаті  $v_x$  на  $\frac{dx}{dt}$ , представимо його у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = \frac{kt^2}{2m} + v_0.$$

Помноживши обидві частини рівняння на  $dt$ , знову розділимо змінні і, інтегруючи, знайдемо

$$x = \frac{kt^3}{6m} + v_0 t + C_2.$$

Підстановка початкових даних дає  $C_2 = 0$ , і остаточно отримуємо закон руху вантажа у вигляді

$$x = \frac{kt^3}{6m} + v_0 t.$$

Отже, пройдений вантажем шлях буде зростати пропорційно кубу швидкості.

### Приклад 1.3

*Сила залежить від швидкості*

Човен, маса якого  $m = 40$  кг, штовхають, надаючи йому початкову швидкість  $v_0 = 0,5$  м/с. Вважаючи силу опору води залежною від швидкості  $R = \mu v$ , де  $\mu = 9,1$  кг/с, визначити, через скільки часу швидкість човна зменшиться вдвічі та який шлях він пройде за цей час.

**Розв'язок.** Розмістимо початок відліку  $O$  в початковому положенні човна і направимо вісь  $Ox$  в напрямку руху (рис. 5). Тоді початкові умови руху будуть: при  $t = 0$   $x = 0$ ,  $v_x = v_0$ .

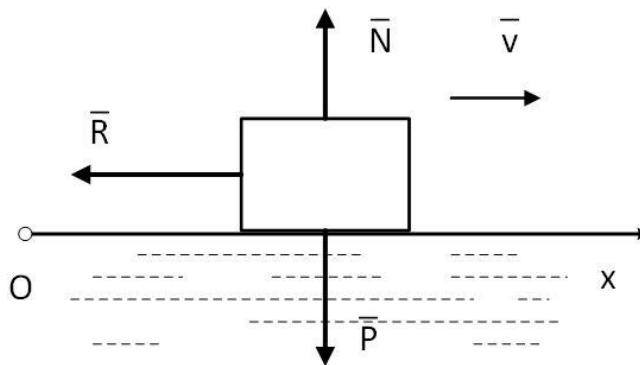


Рисунок 5

Зобразимо в довільному положенні човен та діючі на нього сили  $\bar{P}$ ,  $\bar{N}$  та  $\bar{R}$ . Проекції цих сил на вісь  $Ox$  мають значення  $R_x = -R = -\mu v_x$ ,  $P_x = 0$ ,  $N_x = 0$ . Враховуючи, що  $v_x = v$ , рівняння (5) матиме вигляд

$$m \frac{dv}{dt} = -\mu v.$$

Розділивши змінні  $\frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{m}dt$  інтегруємо рівняння та отримуємо

$$\lg v = -\frac{\mu}{m}t + C_1.$$

Підставивши сюди початкові дані, знайдемо, що  $C_1 = \lg v_0$ . Тоді маємо

$$\lg v = -\frac{\mu}{m}t + \lg v_0.$$

Звідси знаходимо

$$t = \frac{m}{\mu} \lg\left(\frac{v_0}{v}\right).$$

Потрібний час  $t_1$  визначаємо, вважаючи, що  $v = 0,5v_0$ . Цей час, як видно, не залежить у даному випадку від  $v_0$ . Так як  $\lg 2 = 0,69$ , то

$$t_1 = \frac{m}{\mu} \lg\left(\frac{2v_0}{v_0}\right) = \frac{m}{\mu} \lg 2 \approx 3 \text{ с.}$$

Для знаходження пройденого шляху доцільно знову скласти диференціальне рівняння руху (5) та зробити підстановку  $\frac{dv}{dt} = \frac{dv \cdot dx}{dt \cdot dx} = v \frac{dv}{dx}$ , щоб встановити залежність між  $x$  і  $v$ . Тоді одержимо

$$mv \frac{dv}{dx} = -\mu v.$$

Звідси, скорочуючи на  $v$  та розділяючи змінні, одержимо

$$dv = -\frac{\mu}{m} dx.$$

Інтегруємо одержаний вираз

$$v = -\frac{\mu}{m}x + C_1.$$

Підставивши сюди початкові дані, знайдемо, що  $C_1 = v_0$ . Отже

$$v = -\frac{\mu}{m}x + v_0.$$

Звідси одержуємо

$$x = \frac{m}{\mu}(v_0 - v).$$

Вважаючи, що  $v = 0,5v_0$ , знаходимо пройдений шлях:

$$x_1 = \frac{m}{\mu}(v_0 - 0,5v_0) = 1,1 \text{ м.}$$

Щоб знайти шлях, пройдений човном до зупинки потрібно в отриманому рівнянні прийняти  $v = 0$ . Тоді одержимо

$$x_2 = \frac{m}{\mu} (v_0 - 0) = 2,2 \text{ м.}$$

*Відповідь.* Шлях, пройдений човном до зупинки 2,2 м.

### **1.3 Диференціальне рівняння прямолінійного руху точки**

Диференціальне рівняння прямолінійного руху матеріальної точки вздовж осі  $Ox$ , згідно рівняння (5) має вигляд:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{dv_x}{dt} = F_x(t, x, v_x).$$

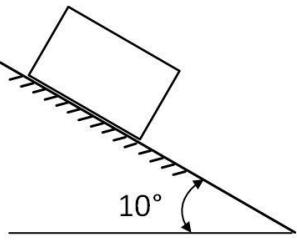
Початкові умови мають вигляд: при  $t = 0$ ,  $x = x_0$ ,  $\frac{dx}{dt} = v_x = v_{x0}$ .

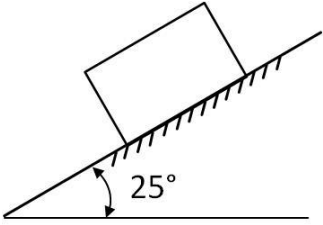
Найбільш важливі випадки прямолінійного руху точки коли сила  $F_x$  постійна або залежить лише від часу  $t$ , координати  $x$  або швидкості  $v_x$ .

Якщо сила постійна, то маємо випадок рівнозмінного руху, тобто руху з постійним прискоренням. Від часу сила залежить коли її змінюють шляхом регулювання, як, наприклад, регулюють силу тяги літака змінюючи режим роботи його двигунів. Силу, що залежить від координати  $x$  може створити стиснута або розтягнута пружина та інші пружні тіла при їх деформації. Сили, що залежать від швидкості руху – це насамперед сили опору, коли точка рухається в якомусь середовищі, що створює опір, наприклад у воді.

Відзначимо, що в перерахованих випадках інтегрування диференціального рівняння (5) виконати не складно. В загальному випадку, коли сила одночасно залежить від часу  $t$ , координати  $x$  і швидкості  $v_x$ , в більшості випадків, диференціальне рівняння можна інтегрувати лише наближено.

## **2. КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

1		<p>Матеріальна точка рухається зі стану спокою вниз по гладенькій площині, нахилений під кутом <math>10^\circ</math> до горизонталі. Визначити, за який час точка пройде шлях 30 м.</p> <p>Відповідь: <math>t = 5,93 \text{ с.}</math></p>
---	---	--

2		<p>Тіло масою <math>m = 200</math> кг зі стану спокою рухається вгору вздовж гладенької похилої площини під дією сили <math>F = 1</math> кН. Визначити час, за який тіло переміститься на відстань 8 м.</p> <p>Відповідь: <math>t = 4,33</math> с.</p>
3	<p>Матеріальна точка масою <math>m = 50</math> кг з стану спокою рухається по гладенькій горизонтальній напрямлючій під дією сили <math>F = 50</math> кН, вектор якої утворює постійний кут <math>\alpha = 20^\circ</math> з напрямлючою. Визначити шлях, пройдений точкою за час <math>t = 20</math> с.</p> <p>Відповідь: <math>S = 188</math> м.</p>	
4	<p>Матеріальна точка масою <math>m = 900</math> кг рухається по гладенькій горизонтальній прямій під дією сили <math>F = 270t</math>, яка направлена вздовж тієї ж прямої. Визначити швидкість точки в момент часу <math>t = 10</math> с, якщо при <math>t_0 = 0</math> швидкість <math>v_0 = 10</math> м/с.</p> <p>Відповідь: <math>v = 25</math> м/с.</p>	
5	<p>Матеріальна точка масою <math>m = 25</math> кг почала рух зі стану спокою по гладенькій горизонтальній прямій під дією сили <math>F = 20t</math>, яка направлена вздовж тієї ж прямої. Визначити шлях, пройдений точкою за 4 с.</p> <p>Відповідь: <math>S = 8,53</math> м.</p>	
6	<p>Матеріальна точка масою <math>m = 100</math> кг рухається по горизонтальній прямій під дією сили <math>F = 10t</math>, яка направлена вздовж тієї ж прямої. Визначити час, за який швидкість точки збільшиться з 5 до 25 м/с.</p> <p>Відповідь: <math>t = 20</math> с.</p>	
7	<p>Визначити шлях, пройдений матеріальною точкою <math>m</math> вздовж осі <math>Ox</math> за час <math>t = 1</math> с, якщо вона рухається під дією сили <math>F_x = 12mt^2</math>. В момент часу <math>t_0 = 0</math> координата <math>x_0 = 3</math> м, швидкість <math>v_{x0} = 6</math> м/с.</p> <p>Відповідь: <math>S = 10</math> м.</p>	

8	На матеріальну точку масою $m = 20$ кг, яка рухається по горизонтальній прямій, діє сила опору $R = 0,2v^2$ . За скільки секунд швидкість точки зменшиться з 10 до 5 м/с. Відповідь: $t = 10$ с.
9	На матеріальну точку масою $m = 250$ кг, яка рухається по горизонтальній прямій, діє сила опору $R = 5v^2$ . Визначити швидкість точки в момент часу $t = 6$ с, якщо $t_0 = 0$ її швидкість $v_0 = 20$ м/с. Відповідь: $v = 5,88$ м/с.
10	Матеріальна точка масою $m = 4$ кг рухається по горизонтальній прямій. Через скільки секунд швидкість точки зменшиться в 10 раз, якщо сила опору рухові $R = 0,8v$ ? Відповідь: $t = 11,5$ с.
11	Матеріальна точка масою $m = 0,2$ кг рухається вздовж осі $Ox$ під дією сили $F_x = -0,4t$ . Визначити швидкість точки в момент часу $t = 2$ с, якщо її початкова швидкість $v_{x0} = 6$ м/с. Відповідь: $v = 2$ м/с.
12	Точка масою $m$ рухається вздовж осі $Ox$ під дією сили $F_x = 6m \cdot \sin 2t$ . В початковий момент часу швидкість точки $v_{x0} = 3$ м/с. Визначити сталу інтегрування в рівнянні швидкості. Відповідь: $C = 6$ .

### 3. ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

#### 3.1 “Інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки, яка знаходиться під дією постійних сил”

**Варіанти 1-5 (рис. 6, схема 1.1).** Тіло рухається з точки  $A$  вздовж ділянки  $AB$  (довжиною  $l$ ) похилої площини, яка утворює кут  $\alpha$  з горизонталлю, протягом  $t$  секунд. Його початкова швидкість  $v_A$ . Коефіцієнт тертя ковзання тіла по площині дорівнює  $f$ .

В точці  $B$  тіло покидає площину зі швидкістю  $v_B$  і потрапляє зі швидкістю  $v_C$  в точку  $C$  площини  $BD$ , нахиленої під кутом  $\beta$  до горизонту, знаходячись в повітрі  $T$  секунд.

При розв’язуванні задачі тіло вважати матеріальною точкою, опір повітря не враховувати.



**Варіант 1** Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ;  $v_A = 0$ ;  $f = 0,2$ ;  $l = 10$  м;  $\beta = 60^\circ$ .

Знайти  $\tau$  і  $h$ .

**Варіант 2** Дано:  $\alpha = 15^\circ$ ;  $v_A = 2$  м/с;  $f = 0,2$ ;  $h = 4$  м;  $\beta = 45^\circ$ .

Знайти  $l$  і рівняння траєкторії на ділянці  $BC$ .

**Варіант 3** Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ;  $v_A = 3,5$  м/с;  $f \neq 0$ ;  $l = 8$  м;  $d = 10$  м;  $\beta = 60^\circ$ .

Знайти  $v_B$  і  $\tau$ .

**Варіант 4** Дано:  $v_A = 0$ ;  $\tau = 2$  с;  $l = 9,8$  м;  $\beta = 60^\circ$ ;  $f = 0$ .

Знайти  $\alpha$  і  $T$ .

**Варіант 5** Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ;  $v_A = 0$ ;  $l = 9,8$  м;  $\tau = 3$  с;  $\beta = 45^\circ$ .

Знайти  $f$  і  $v_C$ .

**Варіанти 6-10 (рис. 6, схема 1.2).** Лижник підходить до точки  $A$  ділянки трампліна  $AB$  (довжиною  $l$ ) нахилоного під кутом  $\alpha$  до горизонталі, зі швидкістю  $v_A$ . Коефіцієнт тертя ковзання лиж по ділянці  $AB$  дорівнює  $f$ . Лижник від  $A$  до  $B$  рухається протягом  $\tau$  секунд. В точці  $B$  зі швидкістю  $v_B$  він покидає трамплін. Через  $T$  секунд лижник приземляється зі швидкістю  $v_C$  в точку  $C$  гори, нахилоної під кутом  $\beta$  до горизонту.

При розв'язуванні задачі лижника вважати матеріальною точкою, опір повітря не враховувати.

**Варіант 6** Дано:  $\alpha = 20^\circ$ ;  $f = 0,1$ ;  $\tau = 0,2$  с;  $h = 40$  м;  $\beta = 30^\circ$ .

Знайти  $l$  і  $v_C$ .

**Варіант 7** Дано:  $\alpha = 15^\circ$ ;  $v_A = 16$  м/с;  $f = 0,1$ ;  $l = 5$  м;  $\beta = 45^\circ$ .

Знайти  $v_B$  і  $T$ .

**Варіант 8** Дано:  $v_A = 21$  м/с;  $f = 0$ ;  $\tau = 0,3$  с;  $v_B = 20$  м/с;  $\beta = 60^\circ$ .

Знайти  $\alpha$  і  $d$ .

**Варіант 9** Дано:  $\alpha = 15^\circ$ ;  $\tau = 0,3$  с;  $f = 0,1$ ;  $h = 30\sqrt{2}$  м;  $\beta = 45^\circ$ .

Знайти  $v_B$  і  $v_A$ .

**Варіант 10** Дано:  $\alpha = 15^\circ$ ;  $f = 0$ ;  $v_A = 12$  м/с;  $d = 50$  м;  $\beta = 60^\circ$ .

Знайти  $\tau$  і рівняння траєкторії лижника на ділянці  $BC$ .

**Варіанти 11-15 (рис. 6, схема 1.3).** Маючи в точці  $A$  швидкість  $v_A$  мотоцикл піднімається  $\tau$  секунд по ділянці  $AB$  довжиною  $l$ , нахилоною під кутом  $\alpha$  до горизонталі. При постійній на всій ділянці  $AB$  рушійній силі  $P$  мотоцикл в точці  $B$  отримує швидкість  $v_B$ , перелітає через рів шириною  $d$ , знаходячись в повітрі  $T$  секунд, і приземляється зі швидкістю  $v_C$  в тоці  $C$ . Маса мотоцикла з мотоциклістом  $m$ .

При розв'язуванні задачі вважати мотоцикл з мотоциклістом матеріальною точкою і не враховувати сили опору рухові.

**Варіант 11** Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ;  $P \neq 0$ ;  $l = 40$  м;  $v_A = 0$ ;  $v_B = 4,5$  м/с;  $d = 3$  м.

Знайти  $\tau$  і  $h$ .

**Варіант 12** Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ;  $P = 0$ ;  $l = 40$  м;  $v_B = 4,5$  м/с;  $h = 1,5$  м.

Знайти  $v_A$  і  $d$ .

**Варіант 13** Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ;  $m = 400$  кг;  $v_A = 0$ ;  $\tau = 20$  с;  $d = 3$  м;  $h = 1,5$  м.

Знайти  $P$  і  $l$ .

**Варіант 14** Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ;  $m = 400$  кг;  $P = 2,2$  кН;  $v_A = 0$ ;  $l = 40$  м;  
 $d = 5$  м.

Знайти  $v_B$  і  $v_C$ .

**Варіант 15** Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ;  $v_A = 0$ ;  $P = 2$  кН;  $l = 50$  м;  $h = 2$  м;  $d = 4$  м.  
Знайти  $T$  і  $m$ .

**Варіанти 16-20 (рис. 6, схема 1.4).** Камінь ковзає протягом  $\tau$  секунд вздовж ділянки  $AB$  скосу (довжиною  $l$ ), нахилоного під кутом  $\alpha$  до горизонталі, з початковою швидкістю  $v_A$ . Коефіцієнт тертя ковзання каменю по скосу  $AB$  дорівнює  $f$ . Маючи в точці  $B$  швидкість  $v_B$  камінь через  $T$  секунд ударяється в точці  $C$  об вертикальну стіну.

При розв'язуванні задачі камінь вважати матеріальною точкою, опір повітря не враховувати.

**Варіант 16** Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ;  $v_A = 1$  м/с;  $l = 3$  м;  $f = 0,2$ ;  $d = 2,5$  м;  
Знайти  $h$  і  $T$ .

**Варіант 17** Дано:  $\alpha = 45^\circ$ ;  $l = 6$  м;  $v_B = 2v_A$ ;  $\tau = 1$  с;  $h = 6$  м.  
Знайти  $f$  і  $d$ .

**Варіант 18** Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ;  $v_A = 0$ ;  $l = 2$  м;  $f = 0,1$ ;  $d = 3$  м.  
Знайти  $h$  і  $\tau$ .

**Варіант 19** Дано:  $\alpha = 15^\circ$ ;  $l = 3$  м;  $f \neq 0$ ;  $\tau = 1,5$  с;  $v_B = 3$  м/с;  $d = 2$  м.  
Знайти  $v_A$  і  $h$ .

**Варіант 20** Дано:  $\alpha = 45^\circ$ ;  $f = 0,3$ ;  $v_A = 0$ ;  $d = 2$  м;  $h = 4$  м.  
Знайти  $\tau$  і  $l$ .

**Варіанти 21-25 (рис. 6, схема 1.5).** Тіло рухається з точки  $A$  вздовж ділянки  $AB$  (довжиною  $l$ ) похилої площини, яка утворює кут  $\alpha$  з горизонталлю. Його початкова швидкість  $v_A$ . Коефіцієнт тертя ковзання тіла по площині дорівнює  $f$ . Через  $\tau$  секунд тіло в точці  $B$  зі швидкістю  $v_B$  покидає похилу площину і падає на горизонтальну площину в точку  $C$  зі швидкістю  $v_C$ , знаходячись в повітрі  $T$  секунд.

При розв'язуванні задачі тіло вважати матеріальною точкою, опір повітря не враховувати.

**Варіант 21** Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ;  $v_A = 1$  м/с;  $f = 0,1$ ;  $h = 10$  м;  $\tau = 1,5$  с.  
Знайти  $v_B$  і  $d$ .

**Варіант 22** Дано:  $\alpha = 45^\circ$ ;  $v_A = 0$ ;  $\tau = 2$  с;  $l = 10$  м.  
Знайти  $f$  і рівняння траєкторії на ділянці  $BC$ .

**Варіант 23** Дано:  $f = 0$ ;  $v_A = 0$ ;  $l = 9,81$  м;  $\tau = 2$  с;  $h = 20$  м.  
Знайти  $\alpha$  і  $T$ .

**Варіант 24** Дано:  $v_A = 0$ ;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $f = 0,2$ ;  $l = 10$  м;  $d = 12$  м.  
Знайти  $\tau$  і  $h$ .

**Варіант 25** Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ;  $v_A = 0$ ;  $f = 0,2$ ;  $l = 6$  м;  $h = 4,5$  м.  
Знайти  $\tau$  і  $v_C$ .

**Варіанти 26-30 (рис. 6, схема 1.6).** Маючи в точці  $A$  швидкість  $v_A$ , тіло рухається по горизонтальній ділянці  $AB$  довжиною  $l$  протягом  $\tau$  секунд. Коефіцієнт тертя ковзання тіла по площині дорівнює  $f$ . Зі швидкістю  $v_B$  тіло в точці  $B$  покидає площину і падає в точку  $C$  зі швидкістю  $v_C$ , знаходячись в повітрі  $T$  секунд.

При розв'язуванні задачі тіло вважати матеріальною точкою, опір повітря не враховувати.

**Варіант 26** Дано:  $v_A = 7$  м/с;  $f = 0,2$ ;  $h = 20$  м;  $l = 8$  м.

Знайти  $v_C$  і  $d$ .

**Варіант 27** Дано:  $v_A = 4$  м/с;  $f = 0,1$ ;  $\tau = 2$  с;  $d = 2$  м.

Знайти  $v_B$  і  $h$ .

**Варіант 28** Дано:  $f = 0,3$ ;  $v_B = 3$  м/с;  $l = 3$  м;  $h = 5$  м.

Знайти  $v_A$  і  $T$ .

**Варіант 29** Дано:  $v_A = 3$  м/с;  $v_B = 1$  м/с;  $l = 2,5$  м;  $h = 20$  м.

Знайти  $f$  і  $d$ .

**Варіант 30** Дано:  $f = 0,25$ ;  $l = 4$  м;  $d = 3$  м;  $h = 5$  м.

Знайти  $\tau$  і  $v_A$ .

### Приклад розв'язку завдання

Камінь рухається по відкосу  $AB$ , який утворює з горизонтом кут  $\alpha$  і має довжину  $l$ , без початкової швидкості. Коефіцієнт тертя ковзання каменю по відкосу  $f \neq 0$ . Через  $\tau$  секунд камінь в точці  $B$  зі швидкістю  $v_B$  покидає похилий відкіс і падає на горизонтальну площину в точку  $C$  зі швидкістю  $v_C$ ; при цьому він знаходиться в повітрі  $T$  секунд. Визначити швидкість падіння каменю і дальність падіння  $d$ . При розв'язку задачі прийняти камінь за матеріальну точку; опір повітря не враховувати.

**Дано:**  $v_A = 0$ ;  $\alpha = 60^\circ$ ;  $l = 4$  м;  $\tau = 1$  с;  $f \neq 0$ ;  $h = 5$  м.

**Визначити:**  $v_C$  і  $d$ .

**Розв'язок:** Розглянемо рух каменю на ділянці  $AB$ . Приймаючи камінь за матеріальну точку, покажемо (рис. 7) діючі на нього сили: вагу  $\vec{G}$ , нормальну реакцію  $\vec{N}$ , і силу тертя ковзання  $\vec{F}_T$ . Складемо диференціальне рівняння руху каменю на ділянці  $AB$ :

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \sum_{k=1}^n F_{kx_1};$$

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = G \sin \alpha - F_T.$$

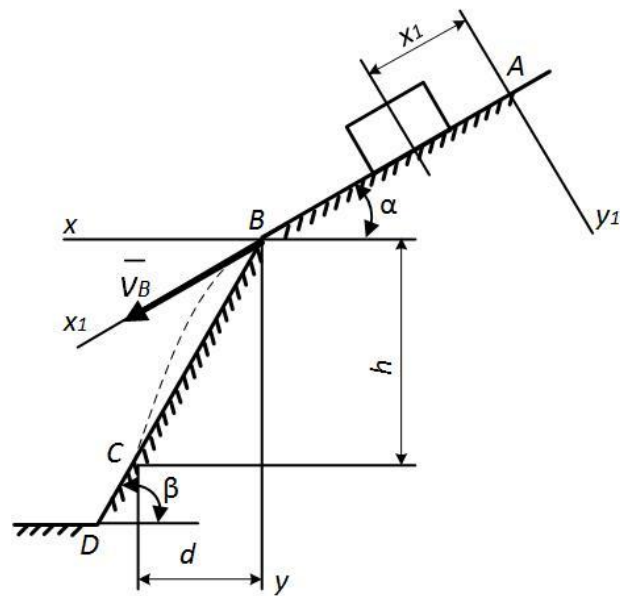
Сила тертя

$$F_T = fN, \text{ де } N = G \cos \alpha.$$

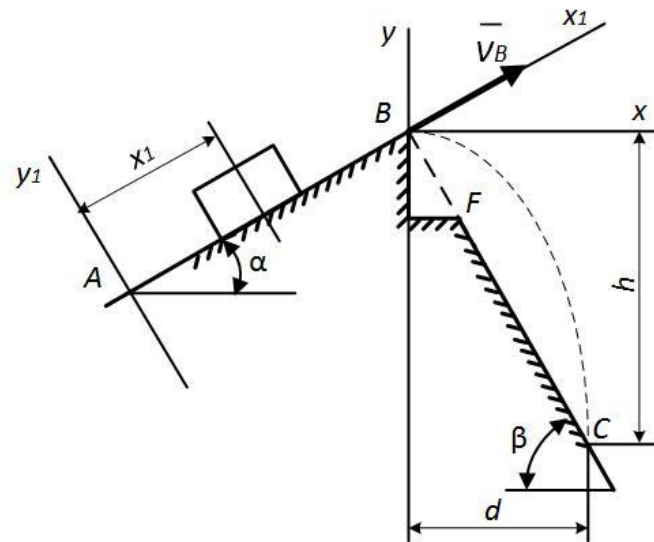
Таким чином

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = G \sin \alpha - f G \cos \alpha.$$

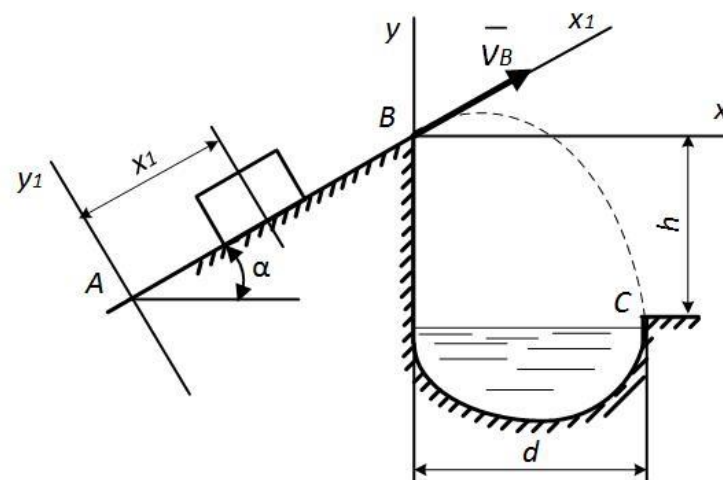
1.1



1.2



1.3



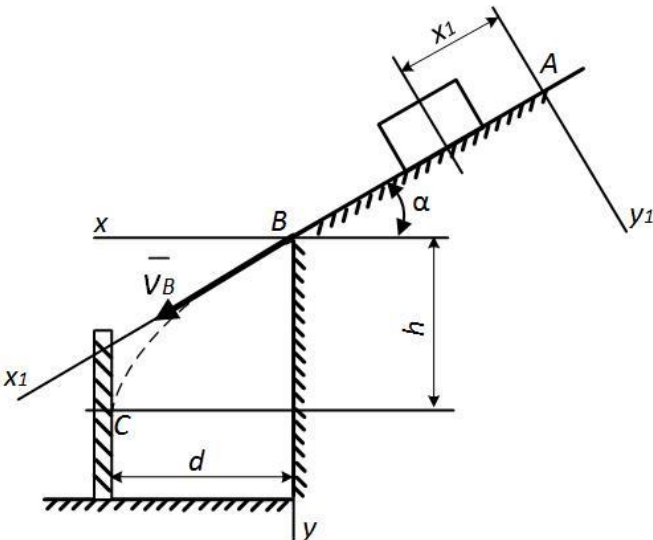
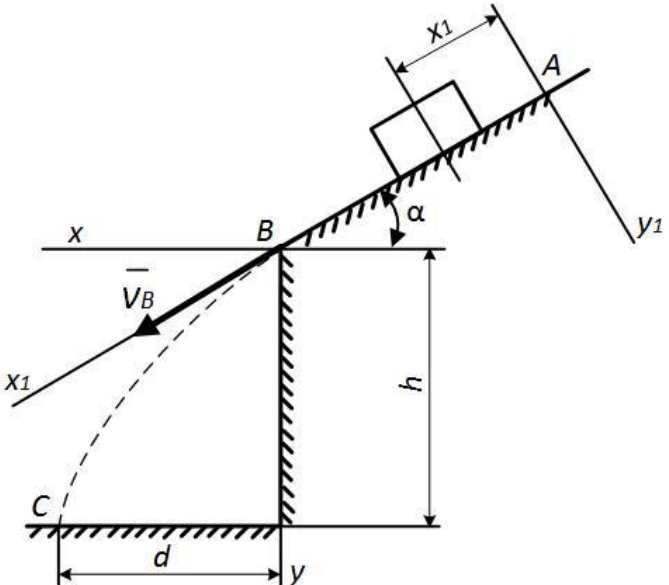
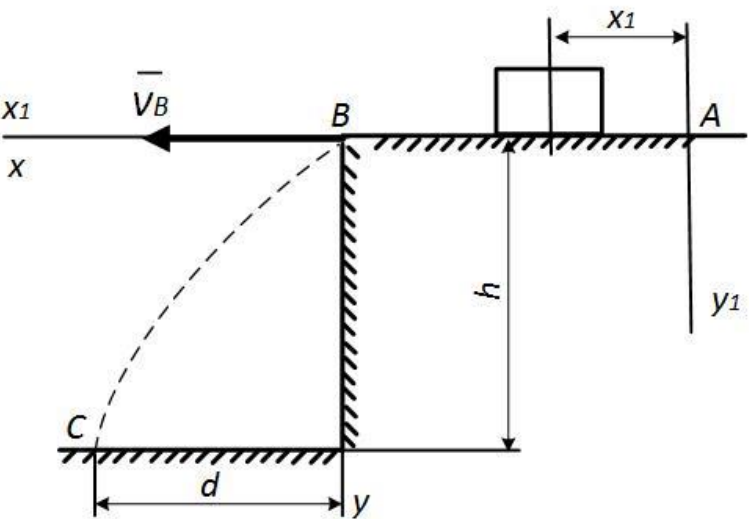
1.4	
1.5	
1.6	

Рисунок 6

або

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = g \sin \alpha - f g \cos \alpha.$$

Інтегруємо диференціальне рівняння двічі та отримуємо:

$$\frac{dx_1}{dt} = v_{x_1} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t + C_1,$$

$$x_1 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

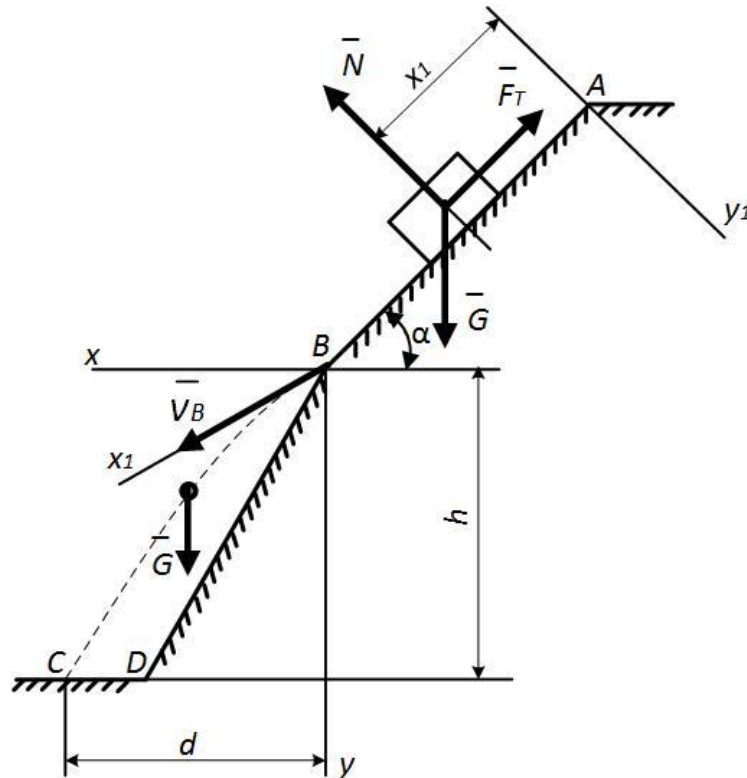


Рисунок 7

Для визначення сталих інтегрування скористаємося початковими умовами задачі: при  $t = 0$   $x_{10} = 0$  і  $v_{x_{10}} = v_A = 0$ . Підставимо початкові умови в рівняння, одержані при інтегрування і знайдемо з них сталі інтегрування:

$$\frac{dx_{10}}{dt} = v_A = 0 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)0 + C_1;$$

$$x_{10} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) \frac{0^2}{2} + C_1 0 + C_2;$$

$$C_1 = 0; \quad C_2 = 0.$$

Тоді

$$v_{x_1} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t;$$

$$x_1 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) \frac{t^2}{2}.$$

Для моменту  $\tau = 1$  с, коли камінь покидає ділянку,

$$v_{x_1} = v_B; \quad x_1 = l,$$

тобто

$$v_B = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\tau;$$

$$l = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{\tau^2}{2},$$

звідки

$$v_B = \frac{2l}{\tau} = \frac{2 \cdot 4}{1} = 8 \text{ м/с}.$$

Розглянемо рух каменю від точки  $B$  до точки  $C$ .

Показуємо силу тяжіння  $\vec{G}$ , діючу на камінь, складаємо диференціальні рівняння його руху:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = G.$$

Інтегруємо перше з цих рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = C_3; \quad x = C_3t + C_4.$$

Сталі інтегрування  $C_3$  і  $C_4$  визначимо, використовуючи початкові умови задачі: при  $t = 0$   $x_0 = 0$  і  $v_{x_0} = v_B \cos\alpha$ .

За допомогою рівнянь, отриманих при інтегруванні і складених для  $t = 0$ ,

$$v_{x_0} = C_3; \quad x_0 = C_4,$$

знайдемо, що

$$C_3 = v_B \cos\alpha; \quad C_4 = 0.$$

Тоді

$$v_x = v_B \cos\alpha; \quad x = v_B \cos\alpha \cdot t.$$

Інтегруємо рівняння  $\frac{d^2y}{dt^2} = G$ , отримуємо:

$$\frac{dy}{dt} = v_y = gt + C_5; \quad y = \frac{gt^2}{2} + C_5t + C_6.$$

Початкові умови: при  $t = 0$   $y_0 = 0$  і  $v_{y_0} = v_B \sin\alpha$ . З рівнянь, отриманих при інтегруванні і складених для  $t = 0$ ,

$$v_{y_0} = C_5; \quad y_0 = C_6,$$

знайдемо, що

$$C_5 = v_B \sin\alpha; \quad C_6 = 0.$$

Остаточнo

$$v_y = gt + v_B \sin\alpha; \quad y = \frac{gt^2}{2} + v_B \sin\alpha \cdot t.$$

Таким чином, рівняння руху каменю мають вигляд

$$x = v_B \cos \alpha \cdot t; \quad y = \frac{gt^2}{2} + v_B \sin \alpha \cdot t.$$

Рівняння траєкторії каменю знайдемо, виключивши параметр  $t$  з рівнянь руху. Визначимо  $t$  з першого рівняння і підставимо його значення в друге. Отримаємо рівняння параболи:

$$y = \frac{gx^2}{2v_B^2 \cos^2 \alpha} + xt g \alpha.$$

В момент падіння

$$y = h = 5 \text{ м, а } x = d,$$

тобто

$$5 = \frac{9,18d^2}{2 \cdot 8^2 \cdot 0,5^2} + d\sqrt{3},$$

звідки

$$d_{1,2} = -2,82 \mp 4,93,$$

так що

$$d_1 = 2,11 \text{ м, } d_2 = -7,75 \text{ м.}$$

Так як траєкторією руху каменю є гілка параболи з додатними абсцисами її точок, то  $d = 2,11 \text{ м}$ .

Використавши рівняння руху каменю  $x = v_B \cos \alpha \cdot t$ , знайдемо час  $T$  руху каменю від точки  $B$  до точки  $C$ :

$$2,11 = 8 \cdot 0,5T,$$

звідки

$$T = 0,53 \text{ с.}$$

Швидкість каменю при падінні знайдемо через проекції швидкості на осі координат:

$$v_x = v_B \cos \alpha; \quad v_y = gt + v_B \sin \alpha$$

за рівнянням

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Для моменту падіння

$$t = T = 0,53 \text{ с}$$

$$v_c = \sqrt{(v_B \cos \alpha)^2 + (gT + v_B \sin \alpha)^2} =$$

$$\sqrt{(8 \cdot 0,5)^2 + (9,18 \cdot 0,53 + 8 \cdot 0,87)^2} = 12,8 \text{ м/с.}$$



### 3.2 “Інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки, яка знаходиться під дією змінних сил”

Вантаж  $D$  масою  $m$ , отримавши в точці  $A$  початкову швидкість  $v_0$ , рухається по зігнутій трубі  $ABC$ , розташованій в вертикальній площині; ділянки труби або обидві похилі, або одна горизонтальна, а друга похила (рисунок 8, схеми 2.0 – 2.9, таблиця 1).

На ділянці  $AB$  на вантаж крім сили тяжіння діють постійна сила  $\bar{Q}$  (її напрямок показано на рисунках) і сила опору середовища  $\bar{R}$ , яка залежить від швидкості  $\bar{v}$  вантажу (направлена проти руху); тертям вантажу по трубі на ділянці  $AB$  знехтувати.

В точці  $B$  вантаж, не змінюючи своєї швидкості, переходить на ділянку  $BC$  труби, де на нього крім сили тяжіння діють сила тертя (коефіцієнт тертя вантажу по трубі  $f = 0,2$ ) і змінна сила  $\bar{F}$ , проекція якої  $F_x$  на вісь  $x$  задана в таблиці.

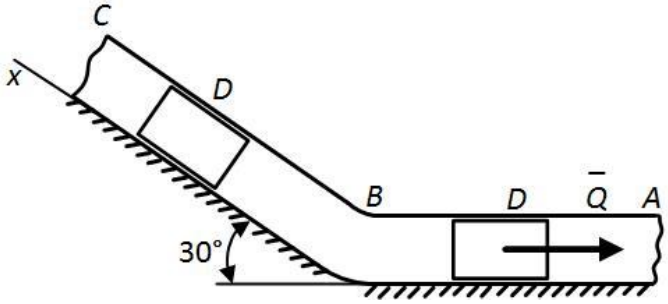
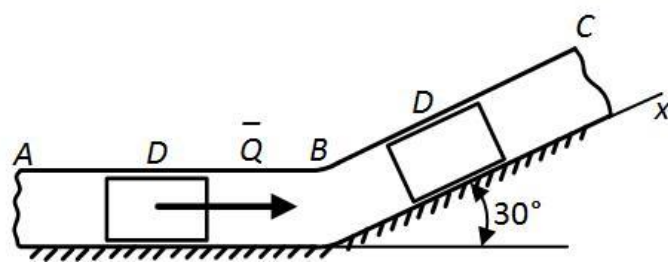
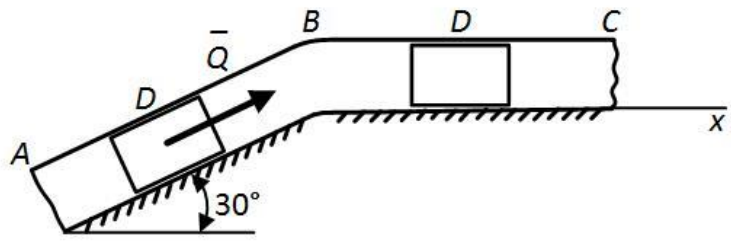
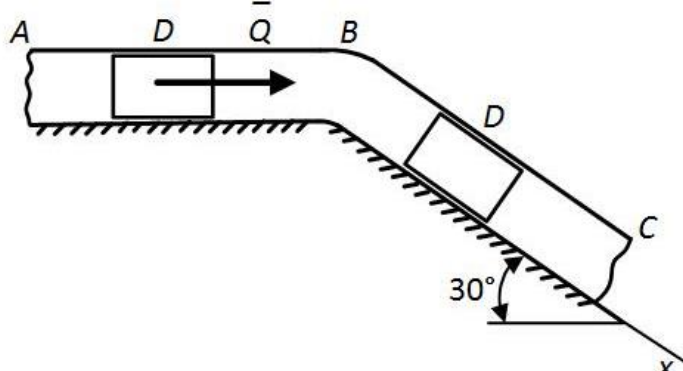
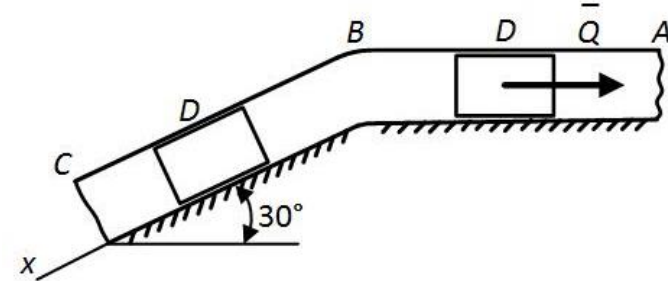
Вважаючи вантаж матеріальною точкою і знаючи відстань  $AB = l$  або час  $t_1$  руху вантажу від точки  $A$  до точки  $B$ , знайти закон руху вантажу на ділянці  $BC$ , тобто  $x = f(t)$ , де  $x = BD$ .

Таблиця 1

Номер умови	$m$ , кг	$v_0$ , м/с	$Q$ , Н	$R$ , Н	$l$ , м	$t_1$ , с	$F_x$ , Н
0	2	20	6	$0,4v$	-	2,5	$2\sin(4t)$
1	2,4	12	6	$0,8v^2$	1,5	-	$6t$
2	4,5	24	9	$0,5v$	-	3	$3\sin(2t)$
3	6	14	22	$0,6v^2$	5	-	$-3\cos(2t)$
4	1,6	18	4	$0,4v$	-	2	$4\cos(4t)$
5	8	10	16	$0,5v^2$	4	-	$-6\sin(2t)$
6	1,8	24	5	$0,3v$	-	2	$9t^2$
7	4	12	12	$0,8v^2$	2,5	-	$-8\cos(4t)$
8	3	22	9	$0,5v$	-	3	$2\cos(2t)$
9	4,8	10	12	$0,2v^2$	4	-	$-6\sin(4t)$

**Вказівки.** Для розв’язку задачі початку потрібно скласти та інтегрувати диференціальне рівняння руху точки (вантаж) на ділянці  $AB$ , враховуючи початкові умови. Потім, знаючи час руху вантажа на ділянці  $AB$  або довжину цієї ділянки, визначити швидкість вантажу в точці  $B$ . Ця швидкість буде початковою для руху вантажа на ділянці  $BC$ . Після цього потрібно скласти та інтегрувати диференціальне рівняння руху вантажа на ділянці  $BC$  також з врахуванням

початкових умов, беручи відлік часу від моменту, коли вантаж знаходиться в точці  $B$ , і вважаючи в цей момент  $t = 0$ . При інтегруванні рівняння руху на ділянці  $AB$  у випадку, коли задана довжина  $l$  ділянки, доцільно перейти до змінної  $x$ , враховуючи, що  $\frac{dv_x}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx}$ .

2.0	
2.1	
2.2	
2.3	
2.4	

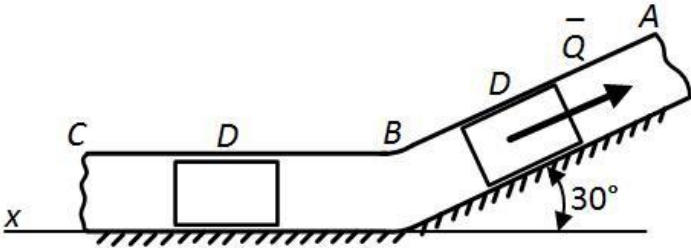
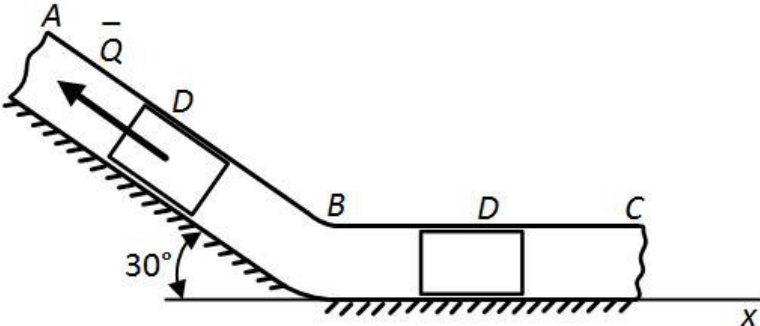
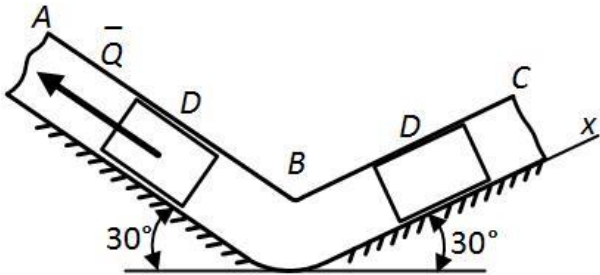
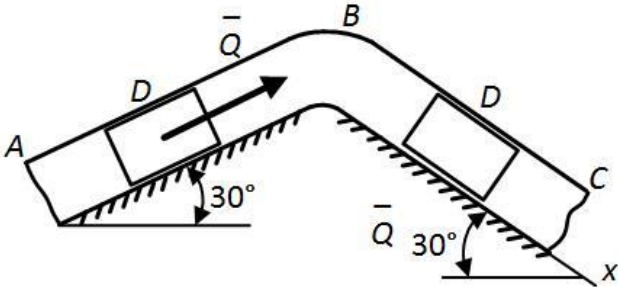
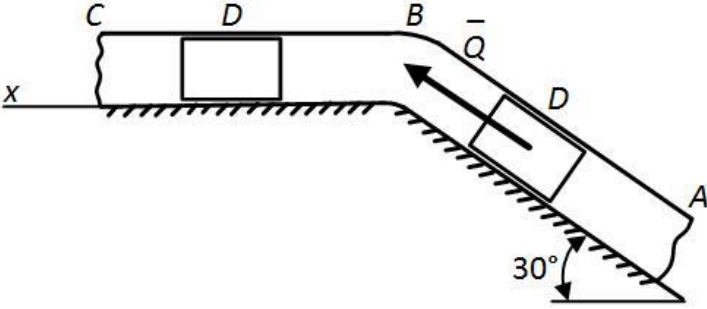
2.5	
2.6	
2.7	
2.8	
2.9	

Рисунок 8

### Приклад розв'язку завдання

На вертикальній ділянці  $AB$  труби (рисунок 9) на вантаж  $D$  масою  $m$  діють сила тяжіння і сила опору  $R$ ; відстань від точки  $A$ , де  $v = v_0$ , до точки  $B$  рівна  $l$ . На похилій ділянці  $BC$  на вантаж діють сила тяжіння і змінна сила  $F = F(t)$ , задана в ньютонках.

**Дано:**  $m = 2$  кг,  $R = \mu v^2$ , де  $\mu = 0,4$  кг/м,  $v_0 = 5$  м/с,  $l = 2,5$  м,  $F_x = 16\sin(4t)$ . Визначити  $x = f(t)$  – закон руху вантажа на ділянці  $BC$ .

**Розв'язок.** Розглянемо рух вантажа на ділянці  $AB$ , вважаючи вантаж матеріальною точкою. Зображаємо вантаж (в довільному положенні) і діючі на нього сили  $\vec{P} = m\vec{g}$  і  $\vec{R}$ . Проводимо вісь  $Az$  і складаємо диференціальне рівняння руху вантажу в проекції на цю вісь:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum F_{kz} \text{ або}$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = m v_z \frac{dv_z}{dz} = P_z + R_z. \quad (11)$$

Далі знаходимо  $P_z = P = mg$ ,  $R_z = -R = -\mu v^2$ ; важливо, що в рівнянні всі змінні сили потрібно обов'язково виразити через величини, від яких вони залежать. Враховуючи ще, що  $v_z = v$ , отримаємо

$$m v \frac{dv}{dz} = mg - \mu v^2$$

$$\text{або } v \frac{dv}{dz} = \frac{m}{\mu} \left( \frac{mg}{m} - v^2 \right) \quad (12)$$

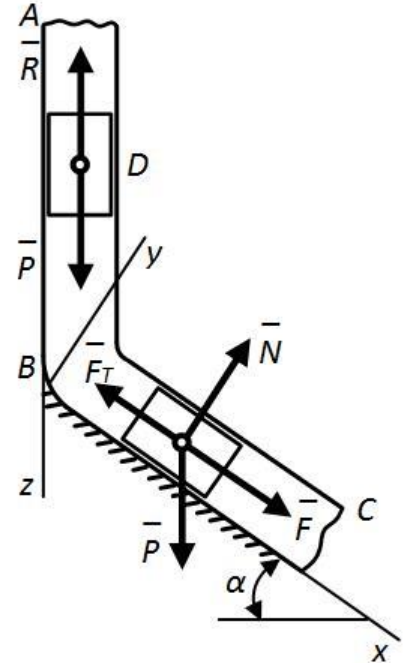


Рисунок 9

Введемо для скорочення записів позначення

$$k = \frac{m}{\mu} = 0,2 \text{ м}^{-1}, \quad n = \frac{mg}{\mu} = 50 \text{ м}^2/\text{с}^2, \quad (13)$$

де при підрахунку прийнято  $g \approx 10$  м/с<sup>2</sup>. Тоді рівняння (12) можна представити у вигляді

$$2v \frac{dv}{dz} = -2k(v^2 - n). \quad (14)$$

Розділяючи в рівнянні (14) змінні, а потім інтегруючи обидві частини, отримаємо

$$\frac{2v dv}{v^2 - n} = -2k dz \quad \text{і} \quad \ln(v^2 - n) = -2kz + C_1 \quad (15)$$

За початковими умовами при  $z = 0$   $v = v_0$ , що дає  $C_1 = \ln(v_0^2 - n)$  і з рівняння (15) знаходимо

$$\ln(v^2 - n) = -2kz + \ln(v_0^2 - n) \text{ або}$$

$$\ln(v^2 - n) - \ln(v_0^2 - n) = -2kz.$$

Звідси

$$\ln \frac{v^2 - n}{v_0^2 - n} = -2kz \quad \text{і} \quad \frac{v^2 - n}{v_0^2 - n} = e^{-2kz}.$$

В результаті знаходимо

$$v^2 = n + (v_0^2 - n)e^{-2kz}. \quad (16)$$

Враховуючи в рівнянні (16)  $z = l = 2,5 \text{ м}$  і замінюючи  $k$  і  $n$  їх значеннями (13), знаходимо швидкість  $v_B$  вантажу в точці  $B$  ( $v_0 = 5 \text{ м/с}$ , число  $e = 2,7$ ):

$$v_B^2 = 50 - \frac{25}{e} = 40,7 \quad \text{і} \quad v_B = 6,4 \text{ м/с} \quad (17)$$

Розглянемо рух вантажа на ділянці  $BC$ ; знайдена швидкість  $v_B$  буде для руху на цій ділянці початковою швидкістю ( $v_0 = v_B$ ). Зображаємо вантаж (в довільному положенні) і діючі на нього сили  $\vec{P} = m\vec{g}$  і  $\vec{N}$ ,  $\vec{F}_T$  і  $\vec{F}$ . Проведемо з точки  $B$  осі  $B_x$  і  $B_y$  та складемо диференціальне рівняння руху вантажа в проекції на вісь  $B_x$ :

$$m \frac{dv_x}{dt} = P_x + N_x + F_{Tx} + F_x,$$

або

$$m \frac{dv_x}{dt} = mg \cdot \sin \alpha - F_T + F_x, \quad (18)$$

де  $F_T = fN$ . Для знаходження  $N$  складемо рівняння в проекції на вісь  $B_y$ . Так як  $a_y = 0$ , одержимо  $0 = N - mg \cdot \cos \alpha$ , звідки  $N = mg \cdot \cos \alpha$ . Отже  $F_T = fmg \cdot \cos \alpha$ ; крім того,  $F_x = 16 \sin(4t)$  і рівняння (18) матиме вигляд:

$$m \frac{dv_x}{dt} = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha) + 16 \sin(4t). \quad (19)$$

Ділимо обидві частини рівняння на  $m$ , обчислюємо  $g(\sin \alpha - f \cos \alpha) = g(\sin 30^\circ - 0,2 \cos 30^\circ) = 3,2; \frac{16}{m} = 8$  підставимо ці значення в (19). Отримаємо

$$\frac{dv_x}{dt} = 3,2 + 8 \sin(4t). \quad (20)$$

Помножимо обидві частини рівняння (20) на  $dt$  і інтегруємо:

$$v_x = 3,2t - 2 \cos(4t) + C_2. \quad (21)$$

Для визначення  $C_2$  враховуємо початкові умови руху вантажа на ділянці  $BC$ . Коли вантаж перебуває в точці  $B$  приймаємо  $t = 0$ , тоді  $v = v_0 = v_B$ , де  $v_B$  дається рівнянням (17). Підставляючи ці величини в (21), одержимо

$$C_2 = v_B + 2 \cos 0 = 6,4 + 2 = 8,4.$$

При знайденому значенні  $C_2$  рівняння (21) дає

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3,2t - 2\cos(4t) + 8,4.$$

Помноживши обидві частини рівняння на  $dt$  і знову інтегруючи, знайдемо

$$x = 1,6t^2 - 0,5 \sin(4t) + 8,4t + C_3. \quad (23)$$

Так як при  $t = 0$   $x = 0$ , то  $C_3 = 0$  і остаточно закон руху вантажа буде

$$x = 1,6t^2 + 8,4t - 0,5\sin(4t). \quad (24)$$

де  $x$  – в метрах,  $t$  – в секундах.

#### 4. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що вивчає динаміка, які її основні задачі?
2. Сформулюйте основні закони динаміки.
3. Напишіть диференціальні рівняння руху точки в координатній формі.
4. Як формулюється і розв'язується перша задача динаміки?
5. Як формулюється і розв'язується друга задача динаміки?
6. Що таке початкові умови руху точки?
7. Як визначаються сталі інтегрування диференціальних рівнянь руху?
8. Якими способами зручніше розв'язувати задачі механіки?
9. Чому перша задача динаміки називається диференціальною, а друга – інтегральною?

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Конспект лекцій із теоретичної механіки: навчальний посібник / Б. О. Іванов, М. В. Максютя. – К.: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2012. – 207 с.
3. Теоретична механіка. Підручник / В. М. Булгаков, В. В. Яременко, О. М. Черниш, М. Г. Березовий. – К.: «Центр учбової літератури», 2017. – 640 с.
4. Конспект лекцій з дисципліни «Теоретична механіка. Динаміка» / В. П. Шпачук, В. О. Пушня, О. І. Рубаненко, А. О. Гарбуз ; Харків. нац. ун-т міськ. гос-ва ім. О. М. Бекетова ; За ред. В. П. Шпачука. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. – 222 с.
5. Теоретична механіка: навчально-методичний посібник для здобувачів освітнього ступеня “бакалавр” з технічних спеціальностей усіх форм навчання / Т.І. Веретільник, Л.Д. Мисник; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси: ЧДТУ, 2018. – 273 с.