КИЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

На правах рукописи

СМОЛЯР Анатолий Михайлович

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИН

СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.03. — СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

КИЕВ 1984

Работа выполнена на кафедре строительной механики и в Проблемной лаборатории тонкостенных пространственных конструкций Киевского ордена Трудового Красного Знамени инженерно-строительного института

Научный руководитель:
- доктор технических наук, профессор — Г.В.ИСАХАНОВ

Официальные оппоненты:
- доктор технических наук, старший научный сотрудник — И.А.МОТОВИЛОВЕЦ
- кандидат технических наук, доцент — А.С.ДЕХТЯРЬ

Ведущая организация:
Институт проблем прочности АН УССР

Защита состоится "   "________1984 года в "   " часов на заседании специализированного совета К 068.05.04 по строительной механике в Киевском ордена Трудового Красного Знамени инженерно-строительном институте по адресу: 252037, г.Киев, Воздухофлотский пр-т,31, ауд.______

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан "   "___________1984г.

Ученый секретарь специализированного совета, кандидат технических наук — В.С.ЕРЕМЕНКО

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Решениями XXVI съезда КПСС предусмотрено в области естественных и технических наук сосредоточить усилия на "развитии математической теории, повышении эффективности ее использования в прикладных целях". Основными требованиями, предъявляемыми современным строительством и техникой к конструкциям и элементам конструкций, является их надежность и экономичность. Решение этих проблем предусматривает использование современных конструктивных форм, применение новых материалов, учет реальных условий эксплуатации, а также реальных физических свойств материала конструкций.

Среди различных пространственных объектов, широко используемых в строительстве, машиностроении и других отраслях техники, следует выделить толстые пластины, под которыми будем понимать упругие тела, ограниченные двумя кусочно гладкими боковыми поверхностями h^-, h^+ и цилиндрической торцевой поверхностью, образующие которой перпендикулярны некоторой плоскости (опорной). В общем случае такие тела не имеют плоскости симметрии (срединной плоскости), а образующие торцевой поверхности не перпендикулярны к срединной поверхности. К таким объектам можно отнести большинство фундаментов, плотин, подпорных стен, консоли колонн, зубья шестерен, ряд деталей машин и др.

Сложный вид боковых поверхностей, соизмеримость габаритных размеров, зависимость свойств материала толстых пластин от пространственных координат обуславливает сложный пространственный характер их напряженно-деформированного состояния, которое описывается уравнениями теории упругости неоднородного тела. Развитию основных положений теории упругости неоднородного тела посвящены работы С.А.Амбарцумяна, И.И.Воровича, Г.Б.Колчина, Б.Клосовича, С.Д.Клячко, С.Г.Лехницкого, В.А.Ломакина, С.Г.Михлина, В.Ольшака, Я.С.Подстригача, М.М.Плотникова, Н.А.Ростовцева, В.Л.Рвачева, А.Раду, М.Соколовского, И.Е.Храневской, Ю.Н.Шевченко и др.

Анализ литературных источников показал,что современное состояние теории упругости неоднородного тела характеризуется широким применением аналитических методов для количественного и, в особенности, качественного исследования напряженно-деформированного состояния неоднородных тел,и,в частности, толстых неоднородных пластин,и пока еще недостаточным применением численных методов.

Одним из эффективных путей решения проблемы расчета толстых неоднородных пластин является обобщение подхода классической теории тонких пластин,основанного на понижении размерности исходных уравнений теории упругости неоднородного тела с помощью гипотез статического и кинематического характера. Так как напряженно-деформированное состояние толстых пластин по поперечной координате имеет сложный вид,то вместо метода гипотез для понижения размерности исходных уравнений применяются аналитические методы - символический,асимптотический,проекционный и др.,а также используется вариационный подход. В работах Т.С.Вашакмадзе, И.Н.Векуа, А.А.Гольденвейзера, Ю.А.Груздева, М.И.Гусейн-Заде, В.И.Гуляева, А.В.Колос, А.И.Лурье, И.А.Мотовиловца, Г.Г.Мохиладзе, В.К.Прокопова, А.П.Прусакова, А.С.Сахарова, Э.А.Троппа, И.Ю.Хомы, В.К.Чибирякова, В.А.Шалдырвана и др. построены различные варианты уточненных теорий пластин и оболочек. Большое число публикаций в этом направлении свидетельствует,с одной стороны, об актуальности рассматриваемого направления,а с другой стороны, о его поисковом характере. К тому же подавляющее большинство работ посвящено теоретическим разработкам и качественным исследованиям. Практические методики расчета толстых неоднородных пластин переменной толщины отсутствуют вследствие недостаточного применения современных

численных методов к решению уравнений теории толстых неоднородных пластин.

Из всего сказанного выше следует,что разработка методики расчета толстых неоднородных пластин несимметричной структуры является актуальной с точки зрения теории и практики проблемой.

Ц е л ь р а б о т ы. Разработка численно-аналитической методики расчета толстых неоднородных пластин переменной толщины на силовые и тепловые воздействия,основанной на развитии уточненной теории пластин, с дальнейшим решением редуцированных краевых задач численными методами и анализ на ее основе напряженно-деформированного состояния толстых неоднородных пластин.

О с н о в н ы е з а д а ч и и с с л е д о в а н и й :

- развитие обобщенного метода конечных интегральных преобразований в теории пластин для формализации процесса понижения размерности исходных уравнений теории упругости неоднородного тела;
- построение систем редуцированных уравнений осесимметричной,плоской (плоская деформация) задач теории упругости неоднородного тела для толстых пластин несимметричной структуры и пространственной задачи теории упругости неоднородного тела для короткого бруса прямоугольного поперечного сечения с учетом контакта с упругим основанием,силовых и тепловых воздействий;
- постановку краевых задач уточненной теории пластин;
- разработку численных алгоритмов решения задач статики и термоупругости толстых неоднородных пластин;
- исследование особенностей применения численно-аналитической методики к расчету толстых неоднородных пластин;
- применение разработанной методики к решению новых задач.

Н а у ч н а я н о в и з н а р а б о т ы заключается в следующем:

- на основе обобщенного метода конечных интегральных преобразований разработана численно- аналитическая методика определения напряженно-деформированного состояния толстых неоднородных пластин несимметричной структуры;

- с целью формализации процесса понижения размерности исходных уравнений теории упругости неоднородного тела построены таблицы одномерных и двумерных проекционных соответствий для элементов исходных уравнений - функционалов,функций,операторов;

- посредством применения формализма обобщенного метода конечных интегральных преобразований построены системы разрешающих уравнений для толстых пластин в постановке осесимметричной и плоской (плоская деформация) задач теории упругости неоднородного тела и для короткого бруса прямоугольного поперечного сечения в постановке пространственной задачи теории упругости неоднородного тела;

- разработан алгоритм численного решения полученных редуцированных краевых задач,выявлены его особенности;

- произведен анализ влияния неоднородности свойств материала на напряженно-деформированное состояние пластин и короткого бруса при различных видах силовых и температурных воздействий;

- получены новые результаты при исследовании напряженно-деформированного состояния слоя грунта,при замачивании,зуба шестерни,фундаментной плиты с учетом армировании,короткого бруса при действии линейного источника тепла и др.

Практическая ценность и реализация работы. Разработанная численно-аналитическая методика и созданный на ее основе вычислительный комплекс могут быть использованы при расчетах и проектировании широкого класса обьектов,представляющих собой толстые пластины или короткий брус прямоугольного поперечного сечения,с учетом реальных физических

свойств материала.

На примерах решения модельных задач для неоднородных пластин и короткого бруса показано существенное влияние на напряженно-деформированное состояние неоднородности свойств материала рассмотренных обьектов.

Результаты диссертационной работы внедрены проектной организацией.Ожидаемый общий экономический эффект до 32 тыс.рублей.

На защиту выносятся положения,представляющие научную новизну, а также прикладное программное обеспечение для решения задач статики и термоупругости толстых неоднородных пластин и короткого бруса прямоугольного поперечного сечения.

Апробация работы. Основные положения диссертации докладывались на второй научно-технической конференции "Совершенствование эксплуатации и ремонта корпусов судов" (г.Калининград, 1981 г.), на Уральской зональной конференции "Пути повышения надежности и ресурса систем машин" (г.Свердловск,1983г.), на шестой тематической конференции "Практическая реализация численных методов расчета инженерных конструкций" (г.Ленинград,1983г) на тринадцатой Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек (г.Таллин,1983г.),на научно-технических конференциях Киевского инженерно-строительного института (г.Киев,1981,1982,1983 г.г.).

Публикации. По результатам диссертационных исследований опубликовано 10 работ.

Обьем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав,заключения,списка использованной литературы (133 наименований) и приложения. Работа включает 145 страниц машинописного текста, 39 рисунков, 3 таблицы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В диссертационной работе обосновывается актуальность темы исследования, проводится обзор работ, посвященных решению задач теории упругости неоднородного тела для толстых пластин и развитию уточненных теорий пластин и оболочек, формулируются задачи исследований. Определены объекты исследования, поставлены краевые задачи, изложены основные идеи обобщенного метода конечных интегральных преобразований и дано его дальнейшее обобщение на задачи теории упругости неоднородного тела.

Выбор объектов исследования предопределен численно-аналитическим характером развиваемой методики. Расчет толстых неоднородных пластин предлагается производить в два этапа - на первом аналитически понижается размерность исходных уравнений, на втором редуцированные краевые задачи решаются численно. Сложный вид редуцированных уравнений, многообразие факторов, влияющих на характер переменных коэффициентов этих уравнений, вызвали необходимость использовать хорошо зарекомендовавшие себя высокоточные устойчивые численные алгоритмы, разработанные пока только для одномерных краевых задач. Поэтому в качестве исходных рассматривались осесимметричная и плоская (плоская деформация) задачи теории упругости для неоднородных пластин переменной толщины и пространственная задача теории упругости для частного случая толстой пластины - неоднородного бруса прямоугольного поперечного сечения, для которого предлагается понижение размерности производить по двум координатам. Под брусом прямоугольного поперечного сечения понимается пространственное тело, ограниченное двумя торцевыми плоскостями, перпендикулярными некоторой прямой (опорной) и четырьмя цилиндрическими боковыми поверхностями, образующие которых попарно ортогональны и параллельны торцевым плоскостям.

Осесимметричная пластина относится к цилиндрической системе координат, причем плоскость $z = 0$ совпадает с опорной плоскостью. Уравнения осесимметричного напряженно-деформированного состояния определены в области $\Omega = [\rho_0 \le \rho \le \rho_1] \times [h^-(\rho) \le z \le h^+(\rho)]$.
Плоское напряженно-деформированное состояние (плоская деформация) рассматривается как частный случай осесимметричного при $\rho_0 \to \infty$. Брус прямоугольного поперечного сечения относится к прямоугольной декартовой системе координат $\{x, y, z\}$, ось x которой совпадает с опорной прямой, а оси y и z параллельны образующим соответствующих боковых поверхностей.

Рассматриваются три вида неоднородных пластин. Под континуально-неоднородной понимается пластина, модуль упругости которой является непрерывной функцией координат

$$E(\rho, z) = E_0 \varphi(\rho, z),$$

а коэффициент Пуассона ν постоянный. В качестве кусочно-неоднородной рассматривается пластина, состоящая из отдельных слоев, контактирующих по участкам боковых поверхностей. Каждый слой представляет собой толстую неоднородную пластину переменной толщины (в диссертации рассматриваются слои с постоянными физическими свойствами). Дискретно-неоднородные пластины служат моделью железобетонных пластин, армированных одиночными стержнями. Традиционные предпосылки теории железобетона (пренебрежение поперечными размерами арматурного стержня и его изгибной жесткостью, введение в расчет интегральной характеристики напряженно-деформированного состояния в стержне - продольной силы N, неразрывное деформирование арматурного стержня с окружающим бетоном) позволяют рассматривать такие пластины с позиций теории упругости неоднородного тела, используя понятие дельта-функции, что предопределяет обобщенный характер напряженно-деформированного состояния дискретно-неоднородной пластины. Особенностью исходных уравнений является появление в первом уравнении равновесия дополнительного слагаемого

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \sum_{s=1}^{S} \frac{\partial N_s}{\partial x} \delta(z - z_s) + X = 0$$

где $\delta(z - z_s)$ - дельта-функция, сосредоточенная в точке z_s. Здесь в постановке плоской задачи теории упругости в первом приближении вместо арматурных стержней, расположенных периодически с шагом d в направлении координаты y, рассматривается эквивалентный арматурный слой; возможен учет S таких слоев. Обобщенный характер напряженно-деформированного состояния сказывается в невозможности определения напряжения σ_x при $z = z_s$. Однако здесь можно определить усилие N_s, затем учесть конечный характер толщины арматурного слоя и вычислить напряжения σ_x в нем.

Исходные уравнения для всех видов неоднородности представлены в виде систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. С этой целью в качестве разрешающих функций выбраны компоненты вектора перемещений и тензора напряжений. При таком выборе неизвестных граничные условия имеют вид алгебраических соотношений.

Для понижения размерности поставленных краевых задач развивается идея И.Н.Векуа, трактуемая в диссертационной работе как применение обобщенного метода конечных интегральных преобразований к исходным уравнениям и граничным условиям на торцевой поверхности. Такая трактовка позволяет значительно упростить процесс построения редуцированных уравнений и представить их в простой и компактной форме.

Неизвестная функция $f(\rho, z)$, входящая в исходные уравнения, аппроксимируется отрезком ряда по нормированным полиномам Лежандра

$$f(\rho, z) \simeq f^i(\rho) P_i^N(\xi) \qquad (i = 0,1,2,\dots,N),$$

$$f^i(\rho) = \int_{h^-}^{h^+} f(\rho, z) P_i^N(\xi)\, dz,$$

где

$$P_i^N(\xi) = \sqrt{\frac{2i+1}{h^+ - h^-}}\, P_i(\xi), \quad \xi = \frac{2}{h^+ - h^-}\left(z - \frac{h^+ + h^-}{2}\right) \quad (-1 \le \xi \le 1),$$

N - степень аппроксимации. Здесь и в дальнейших выкладках предполагается суммирование по повторяющимся индексам. Второе из приведенных равенств определяет одномерное обобщенное конечное интегральное преобразование, ставящее функции двух переменных $f(\rho, z)$ в соответствие индексную величину $f^i(\rho)$, зависящую от ρ как от параметра

$$f(\rho, z) \to f^i(\rho) \qquad (i = 0,1,2,\dots,N).$$

Обобщенный характер рассматриваемого конечного интегрального преобразования состоит в следующем:
- полиномы Лежандра не являются собственными функциями дифференциальных операторов, образующих исходные уравнения, поэтому редуцированные уравнения оказываются связанными;
- исходной функции (оригиналу) ставится в соответствие конечный набор моментов, поэтому соответствие определено с точностью до степени аппроксимации N;
- пределы интегрирования зависят от параметра - продольной координаты.

Основным моментом развиваемой теории является построение стандартных для рассматриваемого класса задач соответствий между оригиналами и изображениями, называемых в работе проекционными соответствиями в силу проекционного характера интегрального преобразования. В исходных уравнениях выделены основные элементы, их образующие - функции, операторы, функционалы, и для них построена таблица проекционных соответствий, основные из которых следующие:

$$\varphi(\rho,z)f(\rho,z) \to b^{ij}(\rho)f^{j}(\rho),$$

$$\varphi(\rho,z)\frac{\partial f(\rho,z)}{\partial \rho} \to b^{ij}(\rho)\Big\{\frac{\partial f^{j}(\rho)}{\partial \rho} + r_{\rho}^{\alpha j} f^{\alpha}(\rho) -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{h}}\Big[\frac{\partial h^{+}}{\partial \rho}f^{+}(\rho) - \frac{\partial h^{-}}{\partial \rho}f^{-}(\rho)\big(e_1^{j\alpha} - e_2^{j\alpha}\big)\Big]P_0^{\alpha}\Big\},$$

$$\varphi(\rho,z)\frac{\partial f(\rho,z)}{\partial z} \to b^{ij}(\rho)\Big\{\frac{1}{\sqrt{h}}\Big[f^{+}(\rho) - f^{-}(\rho)\big(e_1^{j\alpha} - e_2^{j\alpha}\big)\Big]P_0^{\alpha} - \frac{2}{h}m^{\alpha j}f^{\alpha}(\rho)\Big\},$$

$$f(\rho,z_s) \to \frac{1}{\sqrt{h}}f^{i}(\rho)P_{z_s}^{i}, \quad \delta(z-z_s) \to P_{z_s}^{i},$$

где $r^{ij} = \frac{1}{h}\Big[\frac{\partial(h^{+}-h^{-})}{\partial \rho}d^{ij} - \frac{\partial(h^{+}+h^{-})}{\partial \rho}m^{ij}\Big], \; h = h^{+}-h^{-},$

$$m^{ij} = e_1^{ij}d^{*}_{j\alpha}e_2^{\alpha\beta} + e_2^{ij}d^{*}_{j\alpha}e_1^{\alpha\beta},$$

$$d^{ij} = e_1^{ij}d^{*}_{j\alpha}e_1^{\alpha\beta} + e_2^{ij}d^{*}_{j\alpha}e_2^{\alpha\beta},$$

$$\{e_1^{ij}\} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i=j, \; i=0,2,4,\dots,N-1 \\ 0 - & \text{при прочих} \quad i,j \end{cases},$$

$$\{e_2^{ij}\} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i=j, \; i=1,3,5,\dots,N \\ 0 - & \text{при прочих} \quad i,j \end{cases},$$

$$\{d^{*}_{ij}\} = \begin{cases} \sqrt{(2i-1)(2j-1)} & \text{при} \quad i<j \\ (2i-1)/2 & \text{при} \quad i=j \\ 0 & \text{при} \quad i>j \end{cases},$$

$$P_0^{i} = (e_1^{ij} - e_2^{ij})p^{j}, \quad p^{i} = \sqrt{2i+1},$$

$$b^{ij}(\rho) = \int_{h^{-}}^{h^{+}} \varphi(\rho,z)P_i^{H}(\xi)P_j^{H}(\xi)\,dz.$$

Если $\varphi(\rho,z) \equiv 1$, то $b^{ij} = e^{ij}$ – единичная матрица.

Для короткого бруса прямоугольного поперечного сечения обобщенное конечное интегральное преобразование определяется соотношениями:

$$f(x,y,z) = f^{ik}(x)P_i^{H}(\xi_y)P_k^{H}(\xi_z) \quad (i=0,1,2,\dots,N_y;\; k=0,1,2,\dots,N_z),$$

$$f^{ik}(x) = \int_{h_z^{-}}^{h_z^{+}}\int_{h_y^{-}}^{h_y^{+}} f(x,y,z)P_i^{H}(\xi_y)P_k^{H}(\xi_z)\,dy\,dz,$$

где

$$\xi_y = \frac{2}{h_y^{+}-h_y^{-}}\Big(y - \frac{h_y^{+}+h_y^{-}}{2}\Big), \quad \xi_z = \frac{2}{h_z^{+}-h_z^{-}}\Big(z - \frac{h_z^{+}+h_z^{-}}{2}\Big).$$

Тогда

$$f(x,y,z) \to f^{ik}(x).$$

Так как здесь область интегрирования прямоугольная, то двумерное интегральное преобразование сводится к последовательности одномерных, при этом используется приведенная выше таблица проекционных соответствий.

Согласно известной схеме метода конечных интегральных преобразований для построения редуцированных краевых задач конечное интегральное преобразование применяется к исходным уравнениям и граничным условиям на торцевых поверхностях (плоскостях).

С помощью обобщенного метода конечных интегральных преобразований построены и приведены к простейшему виду системы редуцированных уравнений статики толстых неоднородных пластин в постановках осесимметричной и плоской (Плоская деформация) задач теории упругости неоднородного тела. Общая схема понижения размерности исходных уравнений имеет характерные особенности для каждого вида неоднородности.

Для континуально-неоднородных пластин построены редуцированные уравнения заменой элементов исходных уравнений их проекционными аналогами. Так как на боковых поверхностях пластин заданы напряжения,то входящие в правые части проекционных соответствий перемещения на боковых поверхностях вычисляются с помощью разложений в ряды по нормированным полиномам Лежандра.Вследствие того,что σ_z в исходные уравнения входит под знаком частной производной по z , а σ_φ - алгебраически,моменты этих компонент тензора напряжений в полученные уравнения входят алгебраически и поэтому исключаются. После редуцирования и исключения моментов напряжений σ_z и σ_φ разрешающая система уравнений приводится к нормальному виду, удобному для применения численных методов.

Применение обобщенного метода конечных интегральных преобразований к понижению размерности исходных уравнений для дискретно-неоднородных пластин исключает сингулярность,редуцированные уравнения носят регулярный характер и пригодны для решения их численными методами.

Все возможные разновидности кусочно- неоднородных пластин можно представить как комбинации из типовых слоев:

- свободного слоя (l), не контактирующего с другими слоями;
- верхнего слоя ($k+1$),контактирующего с другим слоем по нижней боковой поверхности h^+ ;
- среднего слоя (k), контактирующего с другими слоями по двум боковым поверхностям h^+ и h^- ;
- нижнего слоя ($k-1$),контактирующего с вышележащим слоем по боковой поверхности h^- .

Редуцированные уравнения для каждого слоя строятся отдельно. В местах контакта слоев напряжения и перемещения на боковых поверхностях рассматриваемого слоя заменяются соответствующими

значениями напряжений и перемещений контактирующих слоев,после чего используются формулы проекционных соответствий для функционалов. Эта процедура делает уравнения связанными.

По боковым поверхностям или по их части рассмотренные пластины могут контактировать с упругим винклеровым основанием.

Граничные условия для вектор-функций,входящих в редуцированные уравнения,получены из граничных условий исходной пространственной задачи теории упругости применением обобщенного метода конечных интегральных преобразований. На торцевых поверхностях пластин могут быть заданы напряжения или перемещения.

Получены и приведены к удобному для применения численных методов виду системы разрешающих уравнений для короткого неоднородного бруса в постановке пространственной задачи теории упругости неоднородного тела с учетом силовых и тепловых воздействий.

Построены разрешающие уравнения для однородного,континуально-неоднородного короткого бруса прямоугольного поперечного сечения и дискретно-неоднородного короткого бруса постоянного поперечного сечения. Каждая из полученных систем редуцированных уравнений состоит из шести подсистем обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующих исходной системе из девяти дифференциальных уравнений в частных производных, так как напряжения σ_y , σ_z , τ_{yz} , входящие в исходные уравнения под знаком частных производных по y и по z , исключаются из редуцированных уравнений.

По боковым поверхностям короткий брус может контактировать с упругим основанием.

Граничные условия,которым должны удовлетворять тензор-функции, входящие в редуцированные уравнения, получены применением обобщенного метода конечных интегральных преобразований к граничным условиям на торцевых плоскостях рассматриваемой пространственной задачи теории упругости.

Разработан алгоритм численного решения полученных редуцированных краевых задач. Он основан на применении метода дискретной ортогонализации С.К.Годунова.

Для кусочно-неоднородных пластин алгоритм метода дискретной ортогонализации имеет особенности, вызванные изменением порядка системы редуцированных уравнений в зависимости от количества рассматриваемых слоев. Для сохранения общности алгоритма при рассмотрении объектов в плоской и пространственной постановках были разработаны правила перехода от тензоров второго ранга к векторам, тензоров четвертого ранга к матрицам и наоборот.

С целью экономии ресурсов ЭВМ произведена оптимизация алгоритма. В основных вычислениях используются только одномерные массивы. Разработаны специальные программы обращения и умножения треугольных матриц. Обеспечение устойчивости алгоритма осуществляется автоматическим выбором необходимого количества точек ортогонализации по величине максимального косинуса угла между векторами фундаментальных решений.

Между точками ортогонализации интегрирование редуцированных уравнений производится методом Рунге-Кутта-Фельберга четвертого - пятого порядка точности с контролем длины шага интегрирования в зависимости от границ абсолютной $ABSER$ и относительной $RELER$ погрешности для теста локальной ошибки. Точность интегрирования определяется из условия соответствия порядка величин погрешностей аналитического и численного методов. Численным экспериментом установлено, что для степени полиномиальной аппроксимации $N = 6$ оптимальными значениями абсолютной и относительной погрешностей являются - $ABSER = 0{,}I \cdot IO^{-5}$, $RELER = 0{,}I \cdot IO^{-2}$.

Вычисление в каждой точке интервала интегрирования переменных матричных и скалярных коэффициентов в 2÷5 раз увеличивает время решения задач теории упругости неоднородного тела по сравнению с временем счета соответствующих задач однородной теории упругости. Вычисление упомянутых коэффициентов только в некоторых базисных точках с последующей интерполяцией для промежуточных точек позволило избежать значительного увеличения времени счета без существенной потери точности.

Так как точность численного решения одномерных краевых задач контролируется в процессе счета, то источником погрешностей развитой методики является приближенный характер понижения размерности исходных уравнений, обусловленный усечением системы редуцированных уравнений, приближенным удовлетворением граничных условий на боковых поверхностях и условий контакта между слоями, приближенным учетом переменного характера функции изменения модуля упругости по поперечной координате. Для подтверждения достоверности получаемых результатов решены задачи об определении напряженно-деформированного состояния осесимметричной толстой пластины под действием поперечной равномерно-распределенной нагрузки, круглой пластины на упругом основании, консольной пластины с переменным по толщине модулем упругости, имеющие аналитические решения, и др. Решение контрольных задач показало сходимость приближенных решений к известным. Точность, достаточная для практических расчетов (порядка I%), во всех рассмотренных случаях обеспечивается выбором степени полиномиальной аппроксимации $N = 6$.

Алгоритм решения краевых задач статики толстых неоднородных пластин переменной толщины реализован в виде комплекса программ для ЭВМ ЕС IО22, включающего около 200 подпрограмм, состоящих более чем из IО тыс. операторов.

Разработанная численно-аналитическая методика использована для решения пространственных задач теории упругости неоднородного тела. Исследовано напряженно-деформированное состояние объектов, представляющих все рассмотренные виды неоднородности материала.

Решены модельные задачи, демонстрирующие возможности предлагаемой методики, пределы ее применимости и эффективность. Поставлены и решены новые задачи об определении напряженно-деформированного состояния зуба шестерни, пластины, состоящей из двух слоев, соединенных внахлестку, короткого бруса прямоугольного поперечного сечения при действии линейного источника тепла. Исследовано влияние учета армирования на напряженно-деформированное состояние железобетонной фундаментной плиты (размеры и нагрузка приведены на рис.I). Сравнение результатов для однородной (рис.Iа) и неоднородной (рис.Iб) пластин показывает, что учет арматуры приводит к некоторому уменьшению (около 10%) напряжений σ_z и τ_{xz} и незначительно сказывается на их распределении. Значительным изменениям подвержены напряжения σ_x, для которых учет арматуры приводит к уменьшению растянутой зоны и уменьшению сжимающих напряжений на 20-30%. Использование предлагаемой методики позволяет проследить при увеличении нагрузки за эволюцией напряженно-деформированного состояния вплоть до предельного состояния.

При проектировании зданий и сооружений, возводимых на просадочных грунтах, важным вопросом является прогнозирование возможных просадок, вызванных замачиванием основания. Основной особенностью просадочных грунтов является значительные изменение физических констант в зависимости от влажности. Сложность физических явлений, вызывающих просадку, их нелинейный характер затрудняют математическое описание процесса просадки. Одним их подходов к решению подобной задачи является использование методов механики сплошной среды.

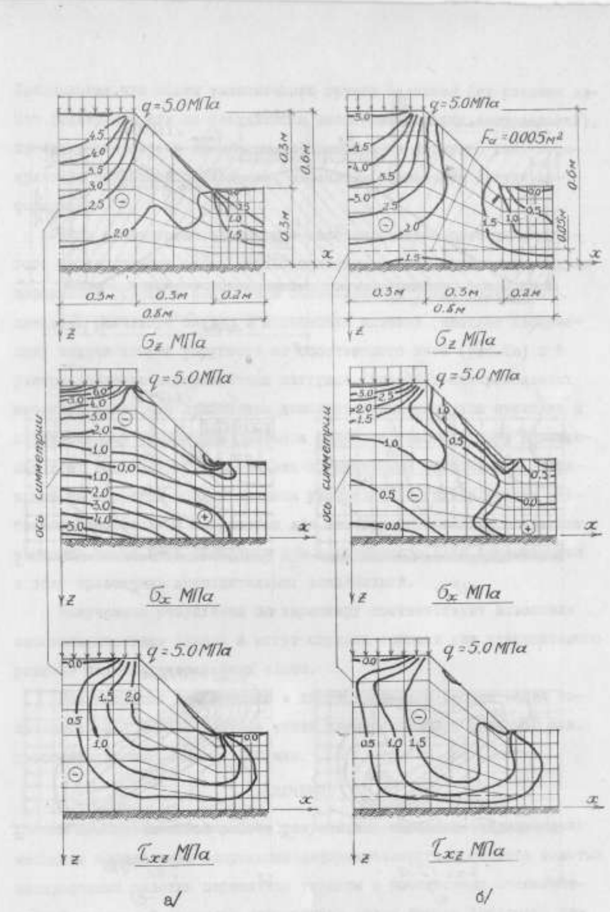

Рис. I.

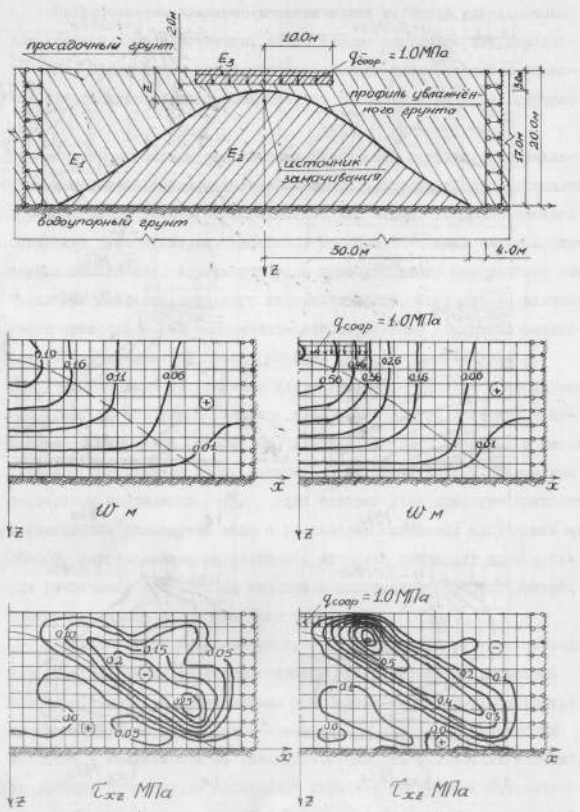

Рис. 2.

Предполагая, что объем увлажненного грунта известен (из решения задач фильтрации или по результатам экспериментальных исследований), просадку моделируем процессом деформирования упругого слоя в результате нарушения равновесия, вызванным изменением модуля деформации.

Было рассмотрено напряженно-деформированное состояние упругого неоднородного слоя (неоднородность вызвана изменением модуля деформации грунта в результате замачивания, а также включением здания в расчетную схему), в постановке плоской (плоская деформация) задачи теории упругости от собственного веса (рис.2а) и с учетом действия поверхностных нагрузок (рис.2б). Из приведенных изолиний видно, что приложение дополнительных нагрузок приводит к значительному увеличению просадок непосредственно в зоне приложения этих воздействий. Наибольшая концентрация касательных напряжений наблюдается вблизи границы увлажненного грунта, причем наибольшие касательные напряжения для незагруженного слоя возникают в нижней части этой области, а для загруженного слоя перемещаются в зону приложения дополнительных воздействий.

Полученные результаты по характеру соответствуют известным экспериментальным данным и могут служить основой для итерационного решения подобных нелинейных задач.

Решения всех приведенных в диссертационной работе задач получены на ЭВМ ЕС 1022. Время счета двумерных задач около 60 мин., пространственных – около 120 мин.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе разработана численно-аналитическая методика определения напряженно-деформированного состояния толстых неоднородных пластин переменной толщины в постановках осесимметричной и плоской (плоская деформация) задач теории упругости неоднородного тела, а также короткого бруса прямоугольного поперечного сечения в постановке пространственной задачи теории упругости неоднородного тела.

Обобщенный метод конечных интегральных преобразований развит на задачи теории упругости неоднородного тела. Построены таблицы одномерных и двумерных проекционных соответствий для функционалов, функций, операторов исходных уравнений с учетом возможных граничных условий.

Получены разрешающие уравнения статики толстых континуально-, дискретно - и кусочно - неоднородных пластин несимметричной структуры, а также разрешающие уравнения статики короткого однородного, континуально - и дискретно - неоднородного бруса прямоугольного поперечного сечения. Учтены упругое основание и тепловые воздействия.

Разработан численный алгоритм решения задач статики толстых неоднородных пластин и короткого неоднородного бруса переменной толщины, основанный на использовании метода дискретной ортогонализации С.К.Годунова для решения полученных редуцированных краевых задач.

Решением модельных задач выявлены характерные особенности разработанной численно-аналитической методики, показана ее эффективность, исследована достоверность получаемых результатов. Установлено, что предложенная методика правильно отражает особенности поведения решений пространственных задач теории упругости неоднородного тела.

Решены новые задачи статики и термоупругости толстых неоднородных пластин и короткого неоднородного бруса прямоугольного поперечного сечения, в частности, было определено напряженно-деформированное состояние зуба шестерни, фундамента с учетом армирования, двухслойной пластины, толщи просадочного грунта при замачивании, короткого бруса при действии линейного источника тепла и др.

Разработанная методика может быть использована для практических расчетов широкого класса объектов и элементов конструкций.

Основные положения диссертации и результаты исследований отражены в следующих публикациях:

I. Алгоритм расчета неоднородных по толщине пластин. - В кн.: Совершенствование эксплуатации и ремонта корпусов судов. Тез. докл. - Калининград, 1981, с.36-37. (Соавтор Чибиряков В.К.).

2. Уточненный расчет массивных фундаментов. - В кн.: Механика подземных сооружений. - Тула, ТПИ, 1983, с.43-47. (Соавтор - Чибиряков В.К.).

3. Об одном обобщении метода конечных интегральных преобразований в теории толстых пластин. - В кн.: Сопротивление материалов и теория сооружений. - Киев, Будівельник, 1983, вып.42, с.55-59. (Соавтор Чибиряков В.К.).

4. К определению напряженно-деформированного состояния пластин переменной толщины. - В кн.: Сопротивление материалов и теория сооружений.- Киев: Будівельник, 1983, вып.43, с89-92.

5. К определению напряженно-деформированного состония короткого неоднородного бруса. В кн.: - Пути повышения надежности и ресурса систем машин. Тез.докл. Уральской зональной конференции. Свердловск, 1983, с.75. (Соавтор - Чибиряков В.К.).

6. Об исследовании напряженно-деформированного состония короткого бруса прямоугольного поперечного сечения.- Киев.инж.-строит. ин-т. Киев, 1983, 26с., ил. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 2I апр. 1983г., № 327 Ук-Д83. (Соавтор - Чибиряков В.К.)

7. К решению задач теории упругости неоднородного тела для толстых пластин. - Киев.инж.-строит.ин-т. Киев, 1983, 29с. ил. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 2I апр. 1983г. № 328 Ук-Д83. (Соавтор - Чибиряков В.К.).

8. Численно-аналитический метод решения задач статики толстых неоднородных пластин. - В кн.: Теория пластин и оболочек.Докл. ХШ Всесоюзной конференции. - Таллин,1983,ч.П,с. 130-135. (Соавторы - Исаханов Г.В., Чибиряков В.К.).
9. Численно-аналитическая методика определения напряженно-деформированного состояния толстых неоднородных пластин переменной толщины. - Киев.инж.-строит. ин-т.Киев,1983.9 с.,ил.библиогр. 6 назв. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 19 сент.1983г., № 1016 УК-Д83. (Соавтор - Чибиряков В.К.).
10. Пространственное напряженное состояние короткого бруса прямоугольного поперечного сечения. - Киев.инж.-строит. ин-т.Киев, 1983, II с.,ил.библиогр. 5 назв. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 19 сент. 1983г., № 1017 УК-Д83.(Соавтор - Чибиряков В.К.).

БФ 13204. Подпис. к печ. 08.02.84. Формат бум.60х84 1/16.Усл.печ.л. 1,5. Уч.-изд.л. 1. Заказ 461. Тираж 100 экз.

Научно-исследовательский институт строительного производства Госстроя УССР, 252180, Киев-180, ул. И. Клименко, 5/2.

Фотопечатная лаборатория НИИСП Госстроя УССР, 252180, Киев-180, ул.И. Клименко, 5/2.