

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ І СИСТЕМ

## **МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ**

**до виконання курсової роботи**

з дисципліни «Теорія автоматичного управління»  
для здобувачів освітнього ступеня «бакалавр»  
зі спеціальності 151 Автоматизація та  
комп'ютерно-інтегровані технології  
освітньої програми «Комп'ютерно-інтегровані  
технологічні процеси і виробництва»  
денної форми навчання

Черкаси  
2021

УДК 681.5 (07)  
М54

*Затверджено вченою радою ФІТІС,  
протокол № 9 від 08.06.2021 р.  
згідно з рішенням кафедри робототехніки  
та спеціалізованих комп'ютерних систем,  
протокол № 10 від 13.05.2021р.*

Упорядники: Корпань Я.В., к.т.н., доцент,  
Нечипоренко О.В., к.т.н., доцент

Рецензент Федоров Є.Є., д.т.н., професор

М54 Методичні рекомендації до виконання курсової роботи з дисципліни: «Теорія автоматичного управління» для здобувачів освітнього ступеня «бакалавр» зі спеціальності 151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології, освітньої програми «Комп'ютерно-інтегровані технологічні процеси і виробництва» денної форми навчання [Електронний ресурс] / [Упоряд.: Я.В. Корпань, О.В. Нечипоренко]; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси: ЧДТУ, 2021. – 41 с. – Назва з титульного екрана.

Видання містить теоретичний матеріал і методичні рекомендації до виконання курсової роботи з дисципліни «Теорія автоматичного управління» із використанням сучасного апаратного і програмного забезпечення. Наведено формули, рисунки, схеми та необхідні пояснення. Подано порядок виконання та оформлення роботи, зразки та джерела інформації.

Для здобувачів освітнього ступеня «бакалавр» зі спеціальності 151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології

УДК 681.5 (07)

Виробничо-практичне  
електронне видання  
комбінованого використання

## **МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ**

### **до виконання курсової роботи**

з дисципліни «Теорія автоматичного управління»  
для здобувачів освітнього ступеня «бакалавр»  
зі спеціальності 151 Автоматизація та  
комп'ютерно-інтегровані технології  
освітньої програми «Комп'ютерно-інтегровані  
технологічні процеси і виробництва»  
денної форми навчання

Укладачі:

**Корпань Ярослав Васильович,  
Нечипоренко Ольга Володимирівна**

*В авторській редакції*

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1 ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ КУРСОВОЇ РОБОТИ.....	5
2 ЗАВДАННЯ ДО КУРСОВОЇ РОБОТИ.....	6
3 СТИСЛІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ.....	7
3.1 Передаточна функція .....	7
3.2 Частотні характеристики .....	8
3.3 Часові характеристики.....	10
3.4 Структурна схема та передаточні функції типової замкненої автоматичної системи регулювання.....	11
3.5 Аналіз стійкості лінійних систем.....	14
3.6 Поняття та показники перехідних процесів .....	25
3.7 Критерії якості перехідних процесів АСР .....	28
ЛІТЕРАТУРА.....	37
Додаток А.....	39
Додаток Б.....	40

## ВСТУП

Теорія автоматичного управління (ТАУ) - наукова дисципліна, предметом вивчення якої є системи, які складаються з об'єкта та пристрою управління (автоматичного регулятора) і допоміжних елементів. ТАУ виявляє загальні закономірності функціонування, які притаманні автоматичним системам різної природи, і на основі цього розробляє принципи побудови ефективних систем для управління об'єктами різного призначення. При вивченні процесів управління в ТАУ абстрагуються від фізичних та конструктивних особливостей систем і замість реальних систем розглядаються їх адекватні математичні моделі. За допомогою цих моделей розв'язуються основні задачі ТАУ – аналізу та синтезу автоматичних систем. При цьому широко використовуються математичні методи – теорія диференціальних рівнянь, теорія функцій комплексної змінної, перетворення Лапласа і Фур'є, матриці і т.д.

Теорія автоматичного управління – одна з базових навчальних дисциплін, яка формує у студентів знання про загальні принципи і процеси функціонування автоматичних систем керування.

Мета курсової роботи – формування у студентів знань, умінь та навичок у застосуванні методів теорії автоматичного керування, системного аналізу та числових методів для розроблення математичних моделей автоматизованих систем для аналізу якості їх функціонування із використанням новітніх комп'ютерних технологій.

Мета роботи відповідає робочій програмі навчальної дисципліни “Теорія автоматичного управління”, яка читається студентам спеціальності 151 “Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології”.

## 1 ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ КУРСОВОЇ РОБОТИ

За результатами виконання курсової роботи студент оформлює пояснювальну записку, яка повинен містити розділи в наступному порядку:

- титульна сторінка (Додаток А);
- завдання до курсової роботи (Додаток Б);
- тема та мета роботи;
- стислі теоретичні відомості;
- результати розрахунків (лістинг);
- висновки за результатами виконання роботи.

Звіт повинен бути оформленим українською мовою на аркушах паперу формату А4 відповідно до ДСТУ 3008:2015 [2].

Основний текст повинен бути оформленим з наступними параметрами: Шрифт – TimesNewRoman, кегль – 14, міжрядковий інтервал – 1.

Лістинг програми повинен оформлюватися за наступними параметрами: шрифт – Courier New, кегль – 10, міжрядковий інтервал – 1. Допускається оформлення лістингу програми в дві колонки.

## 2 ЗАВДАННЯ ДО КУРСОВОЇ РОБОТИ

**Тема:** «Аналіз лінійної системи автоматичного управління»

**Мета:** «Провести аналіз лінійної системи автоматичного управління які використовуються при побудові автоматизованих систем»

За заданою структурною схемою системи управління (рис. 2.1) та відповідно до входніх даних (табл. 2.1):

- обчислити еквівалентну передаточну функцію розімкнутої і замкнутої системи;
- побудувати АФЧХ розімкнутої і замкнутої системи;
- дослідити стійкість по одному з критеріїв;
- визначити запаси стійкості системи по амплітуді і по фазі;
- побудувати перехідний процес системи методом трапецій;
- по перехідному процесу провести аналіз якості управління і визначити всі його показники.

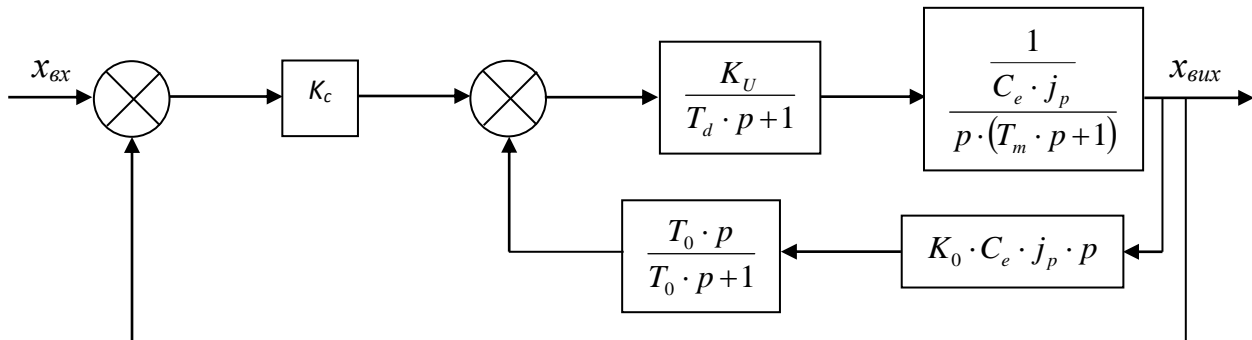


Рисунок 2.1 - Структурна схема

Таблиця 2.1 - Вихідні дані

Варіант	$K_c$	$K_U$	$K_0$	$T_d$	$T_m$	$T_0$	$C_e$	$j_p$
1	0.56	198	0.43	0.2	0.34	0.58	0.036	218
2	0.57	197	0.44	0.21	0.35	0.59	0.037	217
3	0.58	196	0.45	0.22	0.36	0.6	0.038	216
4	0.59	195	0.46	0.23	0.37	0.61	0.039	215
5	0.6	194	0.47	0.24	0.38	0.62	0.04	214
6	0.61	193	0.48	0.25	0.39	0.63	0.041	213
7	0.62	192	0.49	0.26	0.40	0.64	0.042	212
8	0.63	191	0.5	0.27	0.41	0.65	0.043	211
9	0.64	190	0.51	0.28	0.42	0.66	0.044	210
10	0.65	189	0.52	0.29	0.43	0.67	0.045	209

### 3 СТИСЛІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

#### 3.1 Передаточна функція

В теорії автоматичного керування зручною і найбільш наочною формою визначення закономірностей перетворення вхідних сигналів є передаточна функція [1]. В операторному вигляді – це відношення оператора дії до власного оператора, причому кількість передаточних функцій дорівнює кількості вхідних сигналів:

$$W_1(p) = \frac{R_1(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}, \quad (3.1)$$

$$W_2(p) = \frac{R_2(p)}{D(p)} = \frac{c_l p^l + c_{l-1} p^{l-1} + \dots + c_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}, \quad (3.2)$$

тобто

$$W_1(p) = \frac{x(p)}{U(p)}, W_2(p) = \frac{z(p)}{z(p)} \quad (3.3)$$

Передаточні функції мають нулі (корені рівняння  $R(p)=0$ ) і полюси (корені рівняння  $D(p)=0$ ). На основі виразів (3.1)-(3.3) визначається фундаментальна залежність:

$$x(p) = W_1(p) \cdot U(p) + W_2(p) \cdot z(p), \quad (3.4)$$

Таким чином, передаточні функції мають чіткий фізичний зміст: показують як перетворюється вхідний сигнал (передається з входу на вихід). Передаточні функції зручно отримувати з диференціальних рівнянь в операторному вигляді, наприклад рівняння

$$T \frac{dx}{dt} + x = K_u U + K_z Z, \quad (3.5)$$

де:  $T = \frac{a}{a_0}$  - постійна часу;  $K_u = \frac{b_0}{a_0}$ ;  $K_z = \frac{c_0}{a_0}$  - коефіцієнти передачі відповідно

за керуючою дією та збуренням;

можна записати так:

$$(Tp + 1)x(p) = K_u U(p) + K_z z(p), \quad (3.6)$$

тоді

$$W_1(p) = \frac{K_u}{Tp + 1}; W_2(p) = \frac{K_z}{Tp + 1}, \quad (3.7)$$

Передаточні функції можуть бути також в формі зображень Лапласа: це відношення зображення вихідної величини до зображення вхідної за нульових початкових умов. Формально це можна отримати підстановкою в (3.1)-(3.3)  $p=s$  ( $s$ -комплексне число), але це справедливо лише для стаціонарних систем, тоді

$$x(s) = W_1(s)U(s) + W_2z(s), \quad (3.8)$$

### 3.2 Частотні характеристики

При розв'язанні задач аналізу та синтезу необхідно оцінювати також властивості елементів та систем в частотній області, при різних частотах вхідних сигналів. Частотні характеристики – це реакція елемента чи системи на гармонійний сигнал при змінюванні частоти від 0 до  $\infty$ . Вихідний сигнал відрізняється від вхідного амплітудою та фазою:

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (3.9)$$

Динамічні властивості досліджуваних елементів чи систем визначаються амплітудно-частотною  $A(\omega)$ , фазо-частотною  $\varphi(\omega)$  та амплітудно-фазовою характеристиками (рис. 3.1).

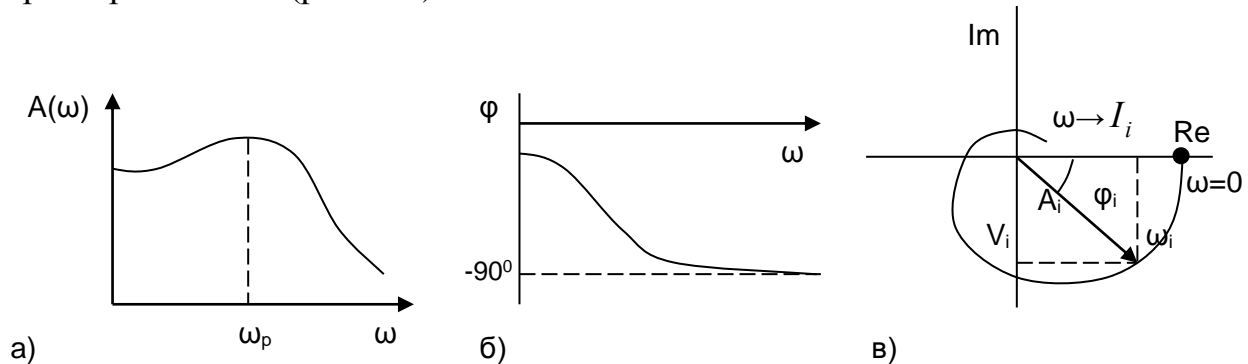


Рисунок 3.1 - Частотні характеристики:  
 а - амплітудно-частотна (АЧХ); б - фазо-частотна (ФЧХ);  
 в - амплітудно-фазова (АФХ)

При збільшенні  $\omega$  амплітудно-фазова характеристика  $A(\omega) \rightarrow 0$ , тобто проявляються інерційні властивості елемента та системи. Чим менша інерційність, тим ширша  $A(\omega)$ , тобто більша смуга (діапазон) пропускаємих частот. Часто існує резонансна частота, коли  $A(\omega_p)$  має максимальне значення.

Фазо-частотна характеристика  $\varphi(\omega)$  від'ємна, тобто вихідні коливання відстають від вхідних за фазою.

На комплексній площі  $A(\omega)$  та  $\varphi(\omega)$  об'єднуються в одну - амплітудно-фазову характеристику (АФХ) – рис.3.1,в. Це крива (годограф), яку описує кінець вектора  $A$  при зміні частоти від 0 до  $\infty$ . Проекції вектора на дійсну (Re) та уявну (Im) осі – дійсна  $U(\omega)$  та уявна  $V(\omega)$  частотні характеристики.

Важливою особливістю лінійних систем є те, що частота вхідних та усталених вихідних (після зникнення перехідної складової) сигналів співпадають. Крім того, якщо розглядати відношення амплітуд вихідного та вхідного сигналів, то при  $\omega=0$  – це коефіцієнт передачі ( $A(0)=K$ ).

Частотну характеристику можна отримати підстановкою  $p=j\omega$  в вираз для передаточної функції, наприклад (3.1), тоді

$$W(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_0}, \quad (3.10)$$



Цей вираз називають частотною передаточною функцією, яку можна подати у вигляді:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (3.11)$$

де

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}, \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}, \quad (3.12)$$

$$U(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega), V(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega) \quad (3.13)$$

В загальному випадку виконують такі перетворення: записують вираз:

$$W(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{U_R(\omega) + jV_R(\omega)}{U_D(\omega) + jV_D(\omega)}, \quad (3.14)$$

після чого звільняються від уявності в знаменнику:

$$W(j\omega) = \frac{(U_R(\omega) + jV_R(\omega))(U_D(\omega) + jV_D(\omega))}{U_D^2(\omega) + jV_D^2(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega), \quad (3.15)$$

де:

$$U(\omega) = \frac{U_R(\omega)U_D(\omega) + V_R(\omega)V_D(\omega)}{U_D^2(\omega) + jV_D^2(\omega)}, \quad (3.16)$$

$$V(\omega) = \frac{V_R(\omega)U_D(\omega) - U_R(\omega)V_D(\omega)}{U_D^2(\omega) + jV_D^2(\omega)}, \quad (3.17)$$

В практичних розрахунках користуються також логарифмічними частотними характеристиками, побудованими в логарифмічних координатах, тому їх можна замінити ломаними лініями, складеними з кількох прямолінійних відрізків. Крім того, в логарифмічних координатах легко знаходити характеристики різних з'єднань елементів: операціям множення і ділення відповідають додавання та віднімання ординат логарифмічних характеристик, наприклад:

$$A = \prod_{i=1}^n A_i; \quad \lg A = \sum_{i=1}^n \lg A_i, \quad (3.18)$$

Амплітудно-фазові характеристики будуються в координатах  $20 \lg A = f(\lg \omega)$ , фазочастотні -  $\phi = f(\lg \omega)$ . Одиницею довжини по осі частот є декада – інтервал частот між  $\omega_i$  та  $10\omega_i$ . Ординати логарифмічної амплітудно-частотної характеристики  $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$  вимірюють в логарифмічних одиницях – белах (Б) або децибелах (дБ), що відповідає відношенню потужностей двох сигналів: якщо потужність одного сигналу більша (або менша) іншого в 10 разів, тоді потужності відрізняються на 1Б ( $\lg 10=1$ ). Потужність гармонійного сигналу пропорційна квадрату його амплітуди, тому при вимірюванні відношення амплітуд перед логарифмом необхідно враховувати множник 2. Наприклад, на деякій частоті  $A(\omega) = 100$ , що означає

різницю вхідного і вихідного сигналів в  $100^2$  разів, тобто  $2 \cdot \lg 100 = 4\text{Б}$  (40 дБ), а  $L(\omega) = 20 \cdot \lg A(\omega) = 40$  дБ.

За видом частотних характеристик всі елементи і системи поділяються на дві групи: мінімально-фазові і немінимально-фазові. Мінімально-фазовими називають такі елементи і системи, для яких всі нулі та полюси передаточної функції  $W(p)$  мають від'ємні дійсні частини та фазовий зсув  $\varphi(\omega)$  є мінімальним в порівнянні з іншими елементами, які мають таку ж амплітудно-частотну характеристику  $A(\omega)$ , але хоча б один полюс чи нуль у них має додатну частину. Для мінімально-фазових елементів і систем достатньо знати  $A(\omega)$ ,  $U(\omega)$  і  $V(\omega)$  для повної оцінки їх характеристик.

### 3.3 Часові характеристики

Це реакція елемента чи системи на типові вхідні сигнали – стрибкоподібний чи імпульсний (рис.3.2).

Часові функції є наочними, за їх видом можна оцінити загальні властивості елемента чи системи, які визначають їх динамічні особливості. З математичної точки зору часові характеристики є розв'язком диференціального рівняння, яке описує поведінку елемента чи системи в залежності від виду зовнішнього сигналу (це визначається правою частиною диференціального рівняння) та початкових умов, як правило нульових. Перехідна функція  $h(t)$  (рис.3.2,а) – зміна вихідної величини з часом при подачі на вхід одиничного ступінчатого сигналу за нульових початкових умов.

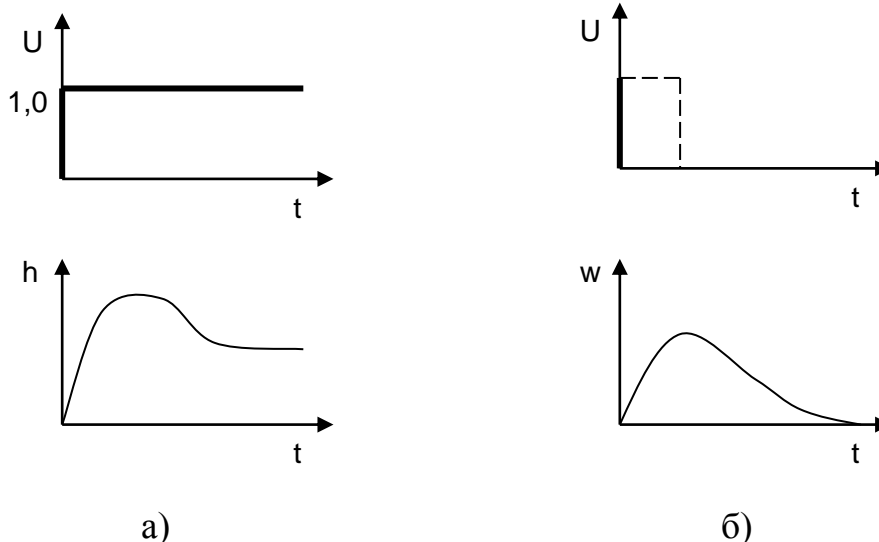


Рисунок 3.2 - Часові характеристики:

а) – перехідна функція  $h(t)$ ; б) – імпульсна перехідна функція  $w(t)$

Імпульсна перехідна функція  $w(t)$  (рис.3.2,б) – зміна вихідної величини з часом після подачі на вхід сигналу у вигляді  $\delta$ -функції. Цю характеристику називають також ваговою функцією, або функцією ваги.

В задачах аналізу та синтезу використовуються різні динамічні характеристики, тому важливо знати і зв'язок між ними, який є однозначним

тому, що фактично – це відображення одних і тих же властивостей елемента чи системи в різній формі. В той же час це дає можливість використовувати в конкретній задачі саме такі характеристики, які є найбільш зручними. Вище вже вказувалось, що перехідна функція  $h(t)$  – розв’язок диференціального рівняння. Враховуючи, що  $\delta$ -функція і одиничний стрибок зв’язані між собою залежністю

$$\delta(t) = 1'(t), \quad (3.19)$$

справедливі також залежності:

$$w(t) = h'(t), h(t) = \int_0^t w(t)dt, \quad (3.20)$$

зображення за Лапласом одиничного стрибка

$$L[1(t)] = \frac{1}{s}, \quad (3.21)$$

тому

$$L[h(t)] = \frac{W(s)}{s}, \quad (3.22)$$

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{W(s)}{s}\right], \quad (3.23)$$

де  $L^{-1}$  - символ зворотного перетворення Лапласа.

Приймаючи до уваги, що

$$L[\delta(1)] = 1, \quad (3.24)$$

можна записати:

$$L[w(t)] = W(s), W(t) = L^{-1}[W(s)], \quad (3.25)$$

Реакція елемента чи системи на довільний вхідний сигнал визначається за допомогою інтеграла згортки ( інтеграл Дюамеля ):

$$x(t) = h(t)U(0) + \int_0^t h(t - \tau)U'(\tau)d\tau, \quad (3.26)$$

$$x(t) = h(0)U(t) + \int_0^t w(t - \tau)U(\tau)d\tau. \quad (3.27)$$

### 3.4 Структурна схема та передаточні функції типової замкненої автоматичної системи регулювання

Ця схема є основою для розв’язання різних задач аналізу і синтезу, а її особливістю є те, що на ній вказуються передаточні функції автоматичного регулятора  $W_{\text{рег}}(p)$  і об’єкта за каналами проходження сигналу керування  $W_{\text{ок}}(p)$  та збурення  $W_{\text{озб}}(p)$  (рис.3.9). Інші функціональні елементи (датчики, виконавчі механізми, регулюючі органи) на цій схемі окремо не враховуються. При необхідності вони можуть включатись в схему за допомогою окремих

передаточних функцій або приєднуватись до інших елементів, наприклад об'єкта.

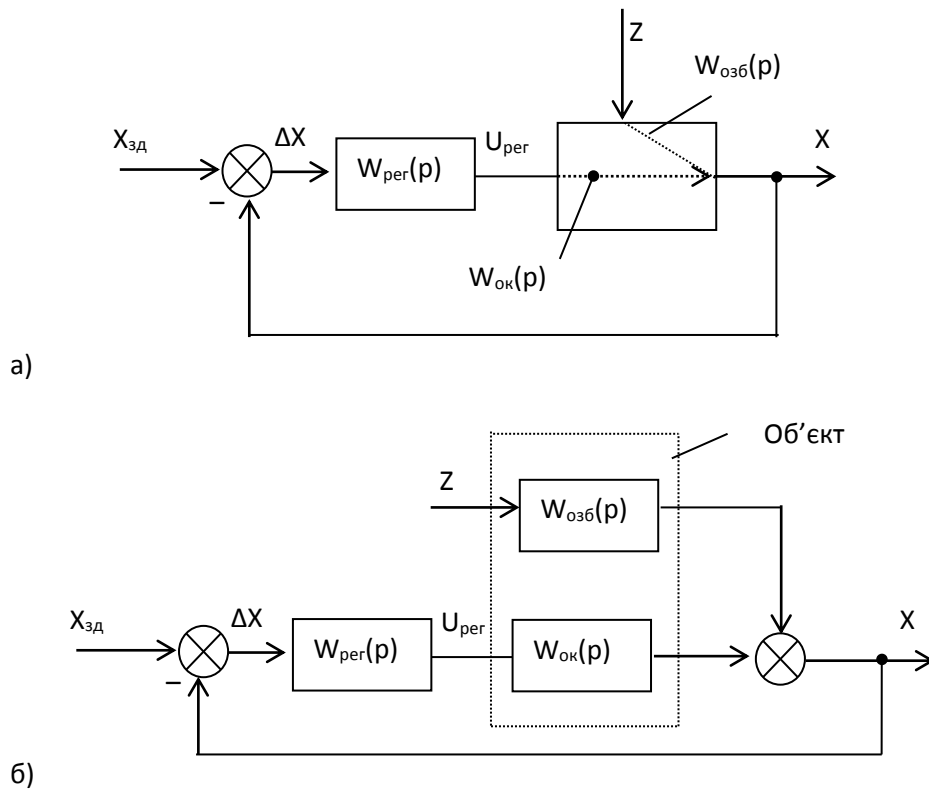


Рисунок 3.3 - Структурна схема АСР:

а – спрощена, б – з виділенням каналів керування і збурення для об'єкта.

В розрахунках АСР використовуються такі передаточні функції:

- відносно зміни завдання для регульованої координати (цю передаточну функцію називають головною для замкненої системи):

$$W_{зд}(p) = \frac{X(p)}{X_{зд}(p)} \quad (3.28)$$

- відносно зміни завдання для похибки :

$$W_{зд}^{\Pi}(p) = \frac{\Delta X(p)}{X_{зд}(p)} \quad (3.29)$$

- відносно збурення для регульованої координати:

$$W_{збур}(p) = \frac{X(p)}{Z(p)} \quad (3.30)$$

- відносно збурення для похибки:

$$W_{збур}^{\Pi}(p) = \frac{\Delta X(p)}{z(p)} \quad (3.31)$$

Передаточні функції (3.28-3.31) виводяться на основі принципу суперпозиції, який справедливий лише для лінійних систем. Можна окремо розглядати реакцію системи на один із сигналів, приймаючи інші рівними нулю. Загальна реакція системи буде сумою частинних реакцій. Вирази для відповідних передаточних функцій виводяться на основі залежностей, які характеризують проходження відповідних сигналів через передаточні функції.

Для отримання передаточної функції (3.28) приймаємо  $Z=0$ .

Тоді:

$$X(p) = W_{pez}(p) \cdot W_{ок}(p) \cdot \Delta X(p). \quad (3.32)$$

Позначимо:

$$W_{pez}(p) \cdot W_{ок}(p) = W_{роз}(p) \quad (3.33)$$

де  $W_{роз}(p)$  – передаточна функція розімкненої системи;

Запишемо вираз для  $\Delta X = X_{зд} - X(t)$ :

$$\Delta X(p) = X_{зд}(p) - X(p) \quad (3.34)$$

і підставимо його в (3.29), тоді з урахуванням (3.24):

$$X(p) = W_{роз}(p) \cdot (X_{зд}(p) - X(p)) \quad (3.35)$$

звідки

$$(1 + W_{роз}(p)) \cdot X(p) = W_{роз}(p) \cdot X_{зд}(p) \quad (3.36)$$

Передаточна функція замкненої системи :

$$W_{зд}(p) = \frac{X(p)}{X_{зд}(p)} = \frac{W_{роз}(p)}{1 + W_{роз}(p)} \quad (3.37)$$

Передаточна функція (3.29) отримується так :

$$\Delta X(p) = X_{зд}(p) - X(p) = X_{зд}(p) - \Delta X(p) \cdot W_{роз}(p) \quad (3.38)$$

$$(1 + W_{роз}(p)) \cdot \Delta X(p) = X_{зд}(p)$$

$$W_{зд}^{II}(p) = \frac{\Delta X(p)}{X_{зд}(p)} = \frac{1}{1 + W_{роз}(p)} \quad (3.39)$$

Для отримання передаточних функцій (3.21),(3.22) використовуємо попередні вирази за умови  $X_{зд}(p) = 0$ . Тоді при дії збурення  $Z(p)$  змінювання  $X(p)$  буде :

$$X(p) = W_{озб}(p) \cdot Z(p) - X(p) \cdot W_{роз}(p) \quad (3.40)$$

$$(1 + W_{роз}(p)) \cdot X(p) = W_{озб}(p) \cdot Z(p) \quad (3.41)$$

Передаточна функція (3.30) буде :

$$W_{збур}(p) = \frac{X(p)}{Z(p)} = \frac{W_{озб}(p)}{1 + W_{роз}(p)} \quad (3.42)$$

Передаточна функція системи для похибки виводиться так (при  $X_{зд}(p)=0$ ):

$$\Delta X(p) = -X(p) = -(\Delta X(p) \cdot W_{роз}(p) + Z(p) \cdot W_{озб}(p)) \quad (3.43)$$

звідки :

$$(1 + W_{роз}(p)) \cdot X(p) = -W_{озб}(p) \cdot Z(p). \quad (3.44)$$

Передаточна функція (3.31) буде :

$$W_{збур}^{II}(p) = \frac{\Delta X(p)}{Z(p)} = -\frac{W_{озб}(p)}{1 + W_{роз}(p)}. \quad (3.45)$$

Таким чином всі чотири передаточні функції мають однаковий знаменник, а також всі вони включають передаточні функції об'єкта за різними каналами та автоматичного регулятора. Виходячи з цього, необхідно чітко засвоїти : властивості системи однаково залежать від властивостей як об'єкта, так і автоматичного регулятора, тому в наступних розділах розглядаються характеристики об'єктів та автоматичних регуляторів. Між різними передаточними функціями системи можна виявити такі взаємозв'язки :

$$W_{зд}^{II}(p) = 1 - W_{зд}(p); \quad W_{збур}^{II}(p) = -W_{збур}(p). \quad (3.46)$$

На основі принципу суперпозиції для замкненої лінійної АСР можна записати :

$$X(p) = W_{зод}(p) \cdot X_{зод}(p) + W_{збур}(p) \cdot Z(p) \quad (3.47)$$

$$\Delta X(p) = W_{зод}^{\Pi}(p) \cdot X_{зод}(p) + W_{збур}^{\Pi}(p) \cdot Z(p). \quad (3.48)$$

### 3.5 Аналіз стійкості лінійних систем

#### Загальні умови стійкості

В попередніх розділах відзначалось, що в автоматичних системах повинні виконуватись умови стійкості. Стійкість автоматичних систем – це їх властивість повертатись в початковий стан після того, коли будь-яка дія вивела систему з цього стану. Ознакою стійкості є збіжні перехідні процеси, наприклад для систем стабілізації

$$\Delta X(t) = X_{зод}(t) - X(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty \quad (3.49)$$

де:  $X_{зод}(t), X(t)$  - відповідно задане та поточне значення регульованої координати.

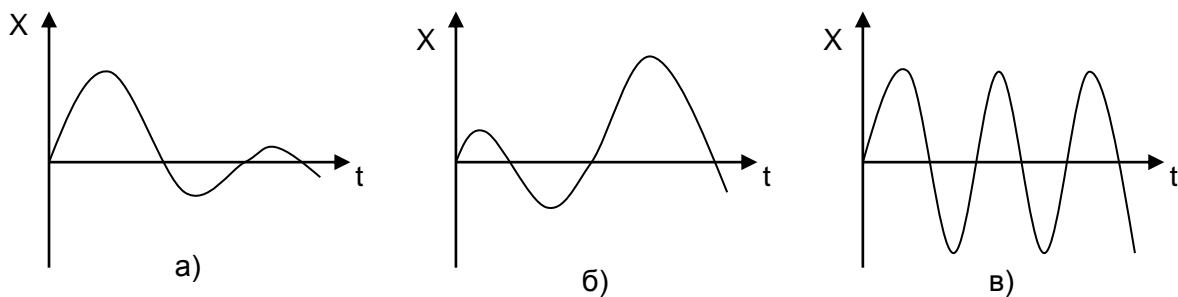


Рисунок 3.4 - Перехідні процеси системи:  
 а) – стійкої; б) – нестійкої; в) - на межі стійкості

Лінійна АСР може знаходитись в трьох станах: бути стійкою, нестійкою та на межі стійкості (рис. 3.4). Варто відзначити, що коли лінійна АСР знаходиться в одному з двох останніх станів, вона непрацездатна. Важливо також відзначити, що форма перехідного процесу, а також його показники (амплітуда, тривалість) при оцінці стійкості значення не мають, головне – перехідні процеси повинні бути збіжними. Виходячи з цього, можна зробити висновок, що стійкість АСР є умовою необхідною, але недостатньою, але в задачах аналізу і синтезу АСР в першу чергу оцінюється стійкість системи. Умова (4.1) відповідає стійкості системи в усталеному стані. В реальних умовах на систему постійно діють збурення, тому умова стійкості може відповідати вимозі: регульована координата повинна бути обмеженою при дії обмежених за величиною збурень. В задачах аналізу та синтезу проблема стійкості ставить не лише визначення цієї оцінки, а також факторів, від яких залежить стійкість. Враховуючи, що стійкість лінійних АСР залежить від вільного руху системи, можна записати відповідне однорідне диференціальне рівняння:

$$a_n \frac{d^n X}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} X}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dX}{dt} + a_0 X = 0 \quad (3.50)$$

Змушена складова руху системи, яка відповідає певному виду зовнішньої дії, на стійкість не впливає. Тоді математичним визначенням стійкості є:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0 \quad (3.51)$$

Зрозуміло, що вихідна змінна системи буде наближатись до змущеної складової, яка визначається правою частиною диференціального рівняння, а при виконанні умови (3.51) стійкість називається асимптотичною. Тоді для нестійкої системи

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \infty \quad (3.52)$$

На межі стійкості в системі виникає перехідний процес з постійною амплітудою (рис. 3.4,в).

Вільна (перехідна) складова перехідного процесу, яка визначає стійкість системи, є розв'язком диференціального рівняння (3.50):

$$X_n(t) = \sum_{i=1}^n C_i \cdot e^{\lambda_i t} \quad (3.53)$$

де:  $C_i$  - постійні інтегрування, які залежать від початкових умов;

$\lambda_i$  - корені характеристичного рівняння:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0 \quad (3.54)$$

Таким чином  $X_n(t)$  має суму складових, кількість яких визначається порядком системи  $n$ . В загальному випадку в рівнянні (3.54) оператор  $p$  замінюється на комплексну змінну  $\lambda$ . Тоді корені рівняння (3.54) є комплексними та утворюють пари спряжених комплексних чисел

$$\lambda_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i \quad (3.55)$$

Дійсна частина кореня  $\alpha_i$  може бути додатньою або від'ємною. Перехідна складова  $X_n(t)$  прямує до нуля лише тоді, коли кожна складова

$C_i \cdot e^{\lambda_i t} \rightarrow 0$ . Тоді можна визначити залежність стійкості системи від коренів характеристичного полінома:

- корені дійсні:  $X_{1,2} = \pm \alpha$ . Якщо  $\alpha < 0$ , то в системі виникає неколивальний (аперіодичний) перехідний процес, який при  $t \rightarrow \infty$  прямує до нуля, тобто система стійка. При  $\alpha > 0$  перехідний процес розбіжний, тобто система нестійка (рис.3.4,а);

- корені комплексні попарно спряжені (рис.3.4,б) викликають коливальний перехідний процес, причому при  $\alpha < 0$  - збіжний;

- корені уявні (рис.3.4,в) відповідають перехідному процесу у вигляді синусоїди (система на межі стійкості).

Може бути також нульовий корінь, тоді значення  $X$  приймає постійну величину.

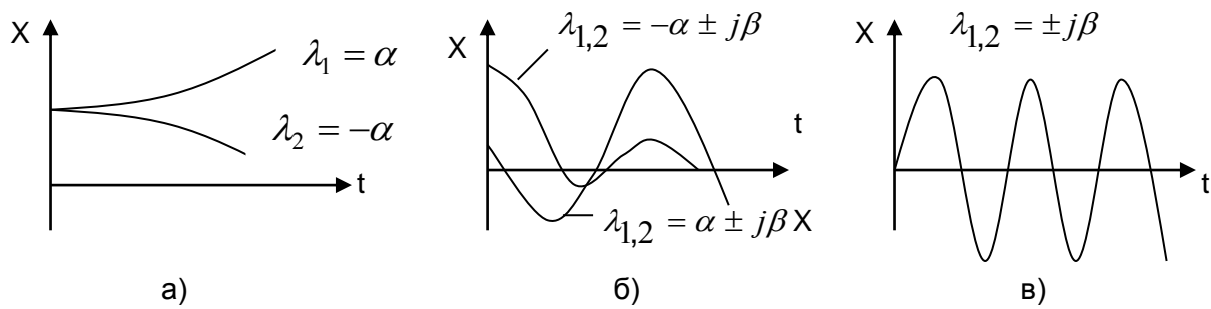


Рисунок 3.5 - Залежність  $X_n(t)$  від коренів характеристичного полінома

Наведений матеріал дозволяє зробити такі висновки:

- перехідний процес в системі – сума коливальних та аперіодичних складових, при цьому кожна коливальна складова відповідає парі комплексних спряжених коренів, а кожна аперіодична складова – дійсному кореню;
- загальною умовою загасання всіх складових і перехідного процесу в цілому є від’ємність дійсних частин всіх коренів характеристичного рівняння системи, тобто полюсів (нулів знаменника) передаточної функції системи;
- якщо є хоча б один корінь з додатньою дійсною частиною, то йому відповідає розбіжна складова перехідного процесу, тобто система нестійка;
- при наявності уявних коренів характеристичного рівняння в системі виникають назагасаючі коливання з частотою, яка дорівнює  $\beta_i$  - границя стійкості.

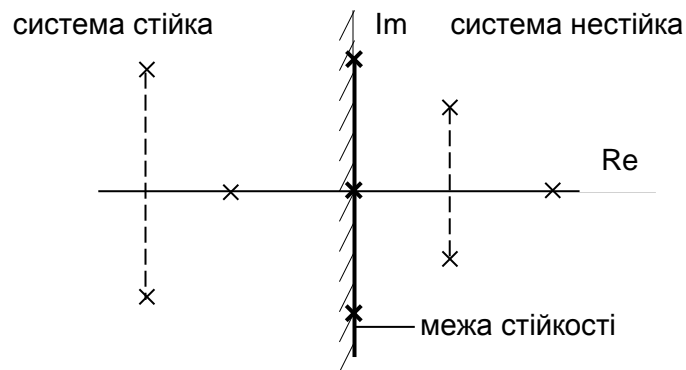


Рисунок 3.6 - Розташування коренів характеристичного рівняння на комплексній площині

Розташування коренів характеристичного полінома на комплексній площині показано на рис. 3.6. Для стійкості системи всі корені повинні лежати в лівій напівплощині (бути “лівими”), а уявна вісь є межею стійкості. На межі стійкості може розташовуватись нульовий корінь або пара чисто уявних коренів. Необхідною, але недостатньою, умовою стійкості є додатність всіх коефіцієнтів характеристичного полінома.



Для отримання характеристичного полінома можна використовувати передаточні функції системи, наприклад для замкненої системи відносно зміни завдання:

$$W_{зд}(p) = \frac{W_{роз}(p)}{1 + W_{роз}(p)}. \quad (3.56)$$

Подамо  $W_{роз}(p)$  у вигляді:

$$W_{роз}(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}, \quad (3.57)$$

тоді

$$W_{зд}(p) = \frac{\frac{R(p)}{Q(p)}}{1 + \frac{R(p)}{Q(p)}} = \frac{R(p)}{Q(p) + R(p)} = \frac{R(p)}{D(p)}, \quad (3.58)$$

де:  $D$  – характеристичний поліном, який співпадає з лівою частиною рівняння системи (3.50).

Розв'язуючи проблему стійкості, знаходять відповіді на ряд частинних питань:

- визначають структуру системи, в якій забезпечується стійкість;
- оцінюють межі змінювання параметрів системи, за яких вона зберігає стійкість та їх критичні значення, які виводять систему на межу стійкості (будують область стійкості);
- формують ряд додаткових заходів щодо збереження чи забезпечення стійкості, наприклад введення додаткових елементів чи зв'язків.

Таким чином, стійкість системи визначають на основі аналізу перехідного процесу або коефіцієнтів та коренів характеристичного поліному. В теорії автоматичного керування є ще один ефективний метод оцінки стійкості – використання критеріїв стійкості – узагальнених показників, які не потребують розв'язувати рівняння системи. Використовуються алгебраїчні та частотні критерії.

### ***Алгебраїчні критерії стійкості***

Алгебраїчні критерії встановлюють необхідні та достатні умови стійкості на основі визначників, складених з коефіцієнтів характеристичного рівняння системи. Для розв'язання прикладних задач ці критерії об'єднують в один – Рауса-Гурвіца. В загальному випадку ці критерії призначались для розв'язання чисто математичної задачі – дослідження стійкості розв'язків лінійного диференціального рівняння. Вище було показано, що за допомогою такого рівняння описується поведінка лінійної АСР.

На основі характеристичного полінома:

$$D(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (3.59)$$

складається визначник:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \text{K} & 0 & 0 \\
-a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \text{K} & 0 & 0 \\
-\theta & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \text{K} & 0 & 0 \\
\Delta_n = \theta & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \text{K} & 0 & 0 \\
\text{M} & & & & & & \\
0 & 0 & \text{K} & a_3 & a_1 & 0 & \\
0 & 0 & \text{K} & a_4 & a_2 & a_0 & 
\end{array} \quad (3.60)$$

Вираз (3.60) називається визначником Гурвиця і при його складанні виконуються правила:

- визначник має  $n$  рядків та  $n$  стовпців, в першому рядку розташовуються “непарні” коефіцієнти, після чого рядок доповнюється до числа  $n$  нулями;
- другий рядок включає всі “парні” коефіцієнти і також доповнюється нулями до числа  $n$ ;
- третій та четвертий рядки отримують зсувом вправо відповідно першого та другого рядків на один елемент, а зліва проставляється нуль. Аналогічно отримують і наступні рядки;
- в головній діагоналі визначника розташовуються всі коефіцієнти, крім  $a_n$ .

Критерій стійкості Рауса-Гурвиця формулюється так: автоматична система, яка описується характеристичним поліномом (3.59) стійка, якщо при  $a_n > 0$  визначник  $\Delta_n$  та всі його діагональні мінори додатні. (Мінор – визначник, складений з елементів, розташованих на перетині будь-яких  $k$  рядків та  $k$  стовпців визначника). У виразі (3.60) мінори виділені пунктиром. Останній стовпець визначника  $\Delta_n$  має лише один елемент  $a_0 > 0$ , тому використовується відома залежність:

$$\Delta_n = a_0 \cdot \Delta_{n-1}, \quad (3.61)$$

яка розпадається на дві за умови  $\Delta_n = 0$ :  $a_0 = 0, \Delta_{n-1} = 0$ . Коли  $\Delta_n = 0$ , система знаходиться на межі стійкості. При цьому при  $a_0 = 0$  існує один нульовий корінь (аперіодична межа стійкості), а при  $\Delta_{n-1} = 0$  існує пара уявних коренів (коливальна межа стійкості).

Розглянемо використання алгебраїчного критерія для системи різних порядків. Для системи першого порядку характеристичний поліном має вигляд:

$$D(\lambda) = a_1 \lambda + a_0, \quad (3.62)$$

а умова стійкості:

$$\Delta_1 = a_0, a_1 > 0. \quad (3.63)$$

Для системи другого порядку:

$$D(\lambda) = a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0, \quad (3.64)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_0 \end{vmatrix} = a_1 a_0 > 0, \Delta_1 = a_1, a_2 > 0, a_0 > 0, \quad (3.65)$$

Таким чином, для системи першого і другого порядків необхідною і достатньою умовою стійкості є додатність всіх коефіцієнтів характеристичного рівняння.

Для системи третього порядку:

$$D(\lambda) = a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0, \quad (3.66)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \quad (3.67)$$

Умови стійкості:

$$a_3 > 0, \Delta_1 = a_2 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2 a_1 - a_0 a_3 > 0, \Delta_3 = a_0 \Delta_2 > 0. \quad (3.68)$$

Остання нерівність за умови  $a_0 > 0$  потребує  $\Delta_2 > 0$ . Таким чином, для системи 3-го порядку забезпечення стійкості вимагає не лише додатності всіх коефіцієнтів характеристичного рівняння, а й певного співвідношення між ними.

Для системи 4-го порядку:

$$D(\lambda) = a_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0, \quad (3.69)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}. \quad (3.70)$$

Умова стійкості:

$$a_4 > 0; \Delta_1 = a_3 > 0; \Delta_2 = a_2 a_3 - a_1 a_4 > 0; \\ \Delta_3 = a_1 \Delta_2 - a_3 \begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ a_4 & 0 \end{vmatrix} = a_1 \Delta_2 - a_3^2 a_0 > 0; \Delta_4 = a_0 \Delta_3 > 0 \quad (3.71)$$

Для систем високих порядків ( $n \geq 3$ ) використання алгебраїчного критерія Рауса-Гурвиця стає незручним і потребує громіздких виразів. Крім того, цей критерій не дає можливості визначити, які заходи необхідно здійснити для забезпечення стійкості.

### ***Частотні критерії стійкості***

Один з частотних критеріїв був запропонований в 1932 р. американським фізиком Х. Найквістом, який досліджував властивості електронних підсилювачів із зворотними зв'язками. Цей критерій потім став одним з найбільш уживаних при дослідженнях стійкості автоматичних систем.

На відміну від інших критеріїв, заснованих на аналізі характеристичного рівняння системи, цей критерій використовує амплітудно-фазову

характеристику розімкненої системи  $W_{роз}(j\omega) = W_{рез}(j\omega) \cdot W_{ок}(j\omega)$ , тобто послідовне з'єднання (добуток) відповідних характеристик і передаточних функцій автоматичного регулятора і об'єкта по каналу керування. Саме це забезпечує наочність та зручність використання критерія, можна застосовувати експериментальні динамічні характеристики об'єкта. Цей критерій особливо зручний для одноконтурних систем, які можна представити у вигляді типових ланок.

Основне застосування критерія Найквіста відноситься до систем, які є стійкими в розімкненому стані, що виконується в більшості випадків для технологічних об'єктів. Для цього випадку критерій Найквіста формулюється так: автоматична система керування стійка, якщо амплітудно-фазова характеристика розімкненої системи  $W_{роз}(j\omega)$  не охоплює точку з координатами  $(-1; j0)$  (рис.4.3).

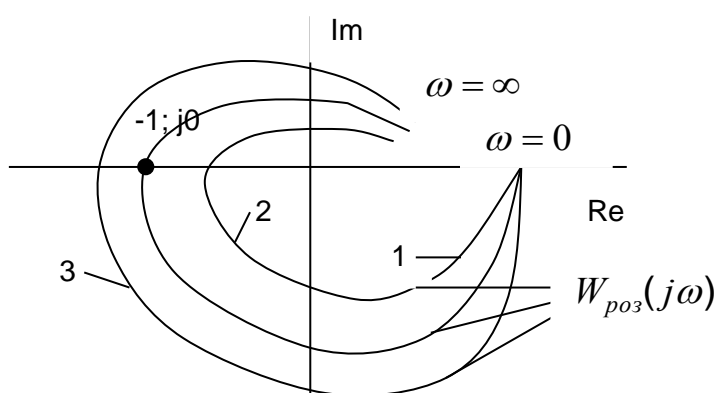


Рисунок 3.7 - Амплітудно-фазові характеристики розімкненої системи (статичної)

Годограф 1 відповідає стійкій системі, 3 – нестійкій, 2 – на межі стійкості. Цей випадок справедливий для статичних систем. Для астатичних систем відповідні характеристики наведені на рис. 3.8.

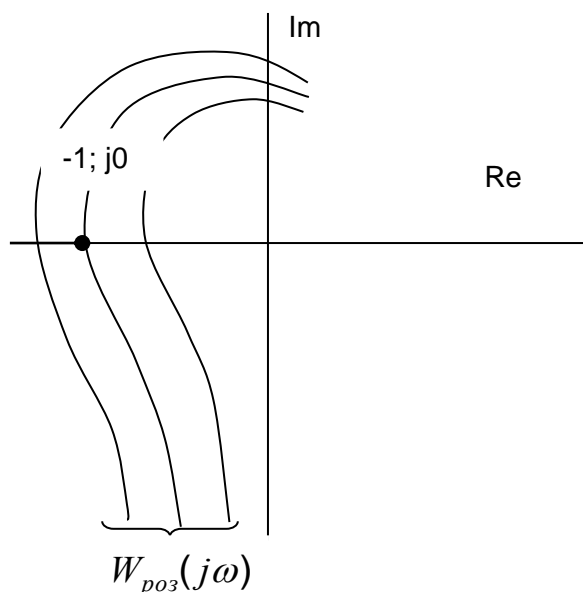


Рисунок 3.8 - Амплітудно-фазові характеристики розімкненої системи

При подальшому аналізі використовуються такі значення частоти:

- частота зрізу, коли  $A(\omega)$  (модуль  $W_{роз}(j\omega) = 1 - \omega_{зр}$  ;
- частота, при якій фазовий зсув  $\phi(\omega) = -\pi - \omega_{\pi}$  .

Тоді умова знаходження системи на межі стійкості буде:

$$\omega_{зр} = \omega_{\pi} . \quad (3.72)$$

Якщо проаналізувати проходження гармонійного сигналу через систему, то роль особливої точки  $(-1; j0)$  полягає в тому, що: вона відповідає перетворенню від'ємного зворотного зв'язку в додатній; вона є межею між режимами підсилення і ослаблення зовнішнього сигналу системою.

Може бути випадок, коли системи є нестійкою, в розімкненому стані. Тоді критерій Найквіста формулюється так: АСР буде стійкою, коли  $W_{роз}(j\omega)$  охоплює  $\ell/2$  разів точку з координатами  $(-1; j0)$ ,  $\lambda$  - число правих коренів характеристичного рівняння розімкненої системи.

Критерій Найквіста зручно використовувати для аналізу систем, які мають в своїй структурі ланки запізнювання. В цьому випадку АФХ розімкненої системи можна подати у вигляді:

$$W_{роз}(j\omega) = W_{осн}(j\omega) \cdot e^{-j\omega\tau_{зн}} , \quad (3.73)$$

де:  $W_{осн}(j\omega)$  - АФХ основних елементів системи;  $e^{-j\omega\tau_{зн}}$  - АФХ ланки запізнювання.

Наявність ланки запізнювання погіршує, як правило, стійкість і існує критичне запізнювання, при якому система виходить на межу стійкості -  $\omega_{зн}^{кр}$  .

Частотний критерій стійкості А.В.Михайлова (1936 р.) заснований на аналізі характеристичного полінома системи, в який підставляється  $\lambda = j\omega$  :

$$D(j\omega) = a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + K + a_1(j\omega) + a_0 \quad (3.74)$$

Вираз (4.26) можна подати у вигляді суми дійсної та уявної частини:

$$D(j\omega) = U_D(\omega) + jV_D(\omega) , \quad (3.75)$$

де:  $U_D(\omega)$  - дійсна частина, складена з членів з парними степенями  $\omega$ ;

$V_D(\omega)$  - уявна частина, яка утримує члени з непарними степенями  $\omega$ .

Кожному фіксованому значенню  $\omega$  відповідає комплексне число, яке можна зобразити вектором на комплексній площині. При змінюванні  $\omega$  від 0 до  $\infty$  цей вектор описує криву, яка називається годограф Михайлова. За видом годографа можна оцінювати стійкість системи. При  $\omega = 0$  функція  $D(j\omega) = a_0$ , що впливає з виразу (3.74), а при  $\omega \rightarrow \infty$  функція  $D(j\omega)$  необмежено зростає, але проходить різну кількість квадрантів в залежності від порядку системи.

Критерій стійкості Михайлова формулюється так: автоматична система керування, якій відповідає рівняння (3.74), стійка, якщо при змінюванні  $\omega$  від 0 до  $\infty$  годограф  $D(j\omega)$  огинає проти годинникової стрілки початок координат та

проходить  $n$  квадрантів ( $n$  – порядок системи). Якщо система знаходиться на межі стійкості, то годограф проходить через початок координат (це відповідає наявності пари спряжених коренів).

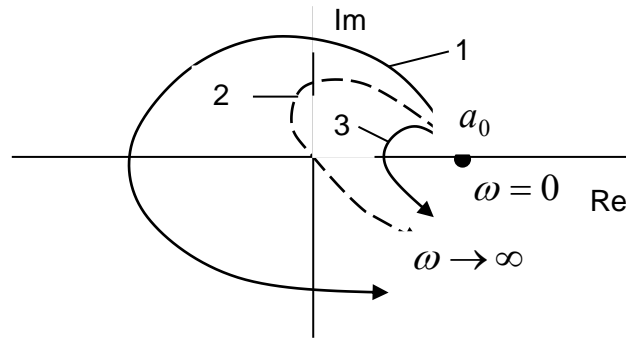


Рисунок 3.9 - Годограф Михайлова

На рис. 3.9 годограф 1 відповідає стійкій системі ( $n=4$ ), 2 – на межі стійкості, 3 – нестійкій. При практичному використанні годографа Михайлова спочатку знаходять точки перетину його з координатними осями: при  $U_D(\omega)=0$  знаходять частоту, коли  $D(j\omega)$  пересікається з уявною віссю і підставляють її значення у вираз для  $V_D(\omega)$ . Коли знайдено умови, за яких  $D(j\omega)$  перетинає осі координат, тобто знайдено нулі  $U_D(\omega)$  і  $V_D(\omega)$ , то повністю годограф будувати не потрібно: стійкість має місце, якщо нулі  $U_D(\omega)$  та  $V_D(\omega)$  чергуються з ростом  $\omega$ , починаючи з  $\omega=0$ , тобто  $V_D(\omega)=0$ , а  $U_D(\omega)>0$ . Якщо систему можна розбити на ланки, то годограф  $D(j\omega)$  можна отримати за правилами перемноження векторів.

Для оцінки стійкості системи можна використовувати також логарифмічні частотні характеристики (рис. 3.10).

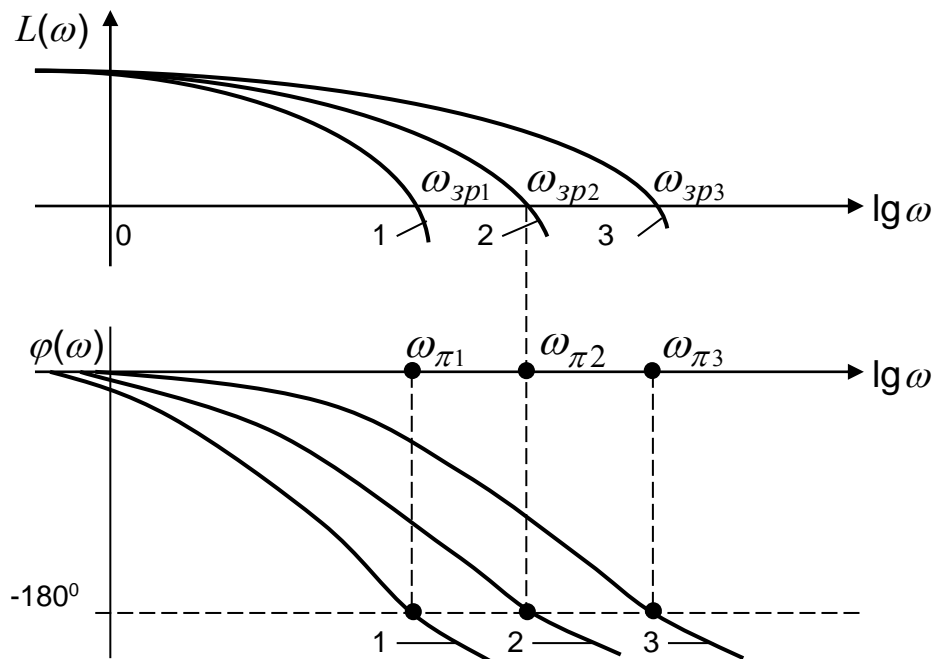


Рисунок 3.10 - Логарифмічні частотні характеристики статичної системи

Це засновано на висновках, які випливають з критерія стійкості Найквіста: система буде стійкою тоді, коли при досягненні фазовою частотною характеристикою значення  $-180^\circ$  логарифмічна частотна характеристика буде від'ємною (криві 1, рис. 3.10). Це значить, що АФХ розімкненої системи не охоплює точку  $(-1; j0)$ . Кривим 3 рис.4.6 відповідає нестійка система, 2 – на межі стійкості.

### **Область стійкості. Запас стійкості**

Реальні системи повинні бути не лише стійкими, а й забезпечувати запас стійкості, тобто зберігати стійкість при змінюваних умовах роботи та параметрів системи. Фактично це означає, що система за своїми властивостями повинна бути на певній відстані від межі стійкості. Запас стійкості встановлюється в зв'язку з тим, що:

- розрахунок системи приводиться з використанням спрощених, ідеалізованих моделей, які не враховують ряд факторів, важливих для роботи системи;

- проводиться лінеаризація математичних залежностей, а саме нелінійності відіграють суттєву роль при роботі системи;

- параметри окремих елементів, особливо об'єкта, можуть значно змінюватись в процесі роботи, наприклад коефіцієнти теплопередачі.

Наведені фактори приводять до того, що стійка системи за розрахунками при практичному використанні може виявитись нестійкою.

Запас стійкості можна оцінювати за розташуванням коренів характеристичного рівняння на комплексній площині: чим далі вліво від уявної осі будуть розташовані корені, тим більшим буде запас стійкості. Для оцінки запасу стійкості можна використовувати і частотний критерій Найквіста, а саме – за віддаленням АФХ розімкненої системи  $W_{роз}(j\omega)$  від “небезпечної” точки  $(-1; j0)$  на комплексній площині. Кількісно оцінюють запас стійкості системи за амплітудою (модулем) та фазою. Запас стійкості за амплітудою (модулем) показує, на скільки можна збільшити коефіцієнт передачі системи, щоб вона вийшла на межу стійкості. При розрахунках цей запас береться подвійним. Запас стійкості по фазі показує, на скільки повинно зрости запізнювання на частоті зрізу  $\omega_{зр}$ , щоб система вийшла на межу стійкості. При розрахунках приймається запас по фазі  $\geq 30^\circ$ .

При створенні та експлуатації автоматичних систем часто необхідно визначати вплив змінюваних параметрів системи на стійкість. Область стійкості будується в координатах, якими є змінювані параметри і виділяє простір, в кожній точці якого система стійка. Лінія або поверхня, які обмежують область стійкості, є межею області. Коли змінюваних параметрів два, наприклад  $K_{рег}$  і  $T_i$  для ПІ-регулятора, тоді область стійкості виділяється на площині  $K_{рег} - T_i$ . Для позначення області стійкості лінія (межа стійкості) штрихується, при цьому штриховка направляється всередину області. Межа області може будуватись

шляхом багатократного застосування одного з критеріїв стійкості при різних значеннях змінюваних параметрів.

Розглянемо приклад побудови області стійкості для статичної системи третього порядку, передаточна функція якої задана у вигляді:

$$W(p) = \frac{K_1 K_2 K_3}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}, \quad (3.76)$$

що відповідає трьом послідовно з'єднаним аперіодичним ланкам з коефіцієнтами передачі  $K_i$  та постійними часу  $T_i$ ,  $i=1,3$ . Характеристичний поліном системи приймає вигляд:

$$D(\lambda) = K_1 K_2 K_3 + (T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1) \quad (3.77)$$

або

$$D(\lambda) = a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0, \quad (3.78)$$

де

$$a_3 = T_1 T_2 T_3; a_2 = T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3; a_1 = T_1 + T_2 + T_3; a_0 = 1 + K_1 K_2 K_3. \quad (3.79)$$

Позначимо

$$K_1 K_2 K_3 = K, \quad (3.79)$$

$K$  – коефіцієнт передачі системи.

Для визначення області та межі стійкості можна застосувати алгебраїчний критерій Рауса-Гурвиця, тоді умовою стійкості буде:

$$T_1 T_2 T_3 > 0 \quad (3.80)$$

$$T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3 > 0 \quad (3.81)$$

$$T_1 + T_2 + T_3 > 0 \quad (3.82)$$

$$1 + K > 0 \quad (3.83)$$

Будемо вважати, що змінюваними параметрами є  $T_1$  та  $K$ , тоді область стійкості будується в площині цих параметрів (рис. 3.11).

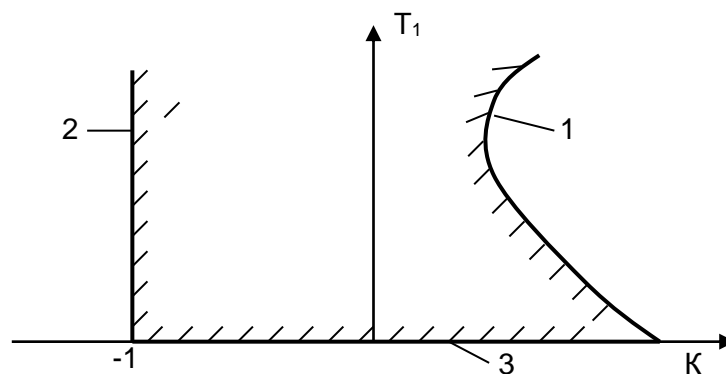


Рисунок 3.11 - Область стійкості системи

Рівняння (3.80-3.82) не мають особливої цінності, тому що в реальних системах завжди розглядаються додатні значення  $T_1, T_2, T_3$ . Рівняння (3.83) показує, що  $K$  за абсолютним значенням повинно бути менше одиниці, тобто система втратить стійкість при наявності додатного, а не від'ємного



зворотнього зв'язку. Коли  $K$  зростає, система також виходить на межу стійкості, а потім стає нестійкою, що видно з виразу для визначника  $\Delta_3$ :

$$a_2 a_1 - a_3 a_0 = (T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3)(T_1 + T_2 + T_3) - T_1 T_2 T_3 (1 + K) > 0. \quad (3.84)$$

З цього виразу можна отримати значення критичного коефіцієнта передачі системи:

$$K_{кр} = (T_1 + T_2 + T_3) \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} \right) - 1. \quad (3.85)$$

Для стійкої системи  $K < K_{кр}$ . Межа 1 для області стійкості (рис.4.7) відповідає умові (4.38) для різних значень змінюваного параметра  $T_1$ , при яких  $K = K_{кр}$ . Межа 2 відповідає умові

$$K + 1 > 0, K = 1. \quad (3.86)$$

Межа 3 відповідає умові  $T_1 = 0$ .

Необхідно підкреслити ще раз, що збільшення коефіцієнта передачі системи підвищує її точність, але може привести до втрати стійкості. Цікавою особливістю є те, що критичне значення коефіцієнта передачі  $K_{кр}$  не залежить від абсолютних значень постійних часу, а визначається лише їх відношенням (вираз (3.83)).

### 3.6 Поняття та показники перехідних процесів

Якість автоматичних систем регулювання в цілому визначається комплексом показників: надійністю, вартістю, відповідністю світовому науково-технічному рівню, точністю. В теорії та практиці автоматизації поняття “якість системи”, “якість керування” зводиться в першу чергу до якості перехідних процесів відносно збурення та зміни завдання та забезпечення необхідної точності в усталеному режимі. В попередньому розділі відзначалось, що стійкість системи необхідна, але недостатня умова її працездатності, тому після перевірки та забезпечення стійкості системи розглядаються можливості гарантування якості процесів керування. При цьому якість перехідних процесів необхідно розглядати відносно збурень та зміни завдання. Якість перехідних процесів визначається властивостями як об'єкта, так і автоматичного регулятора, а показники або оцінки якості формуються, виходячи з технологічних вимог до функціонування об'єкта. Використовують прямі показники перехідного процесу та узагальнені показники.

Прямі показники якості перехідного процесу визначають безпосередньо за його графіком (рис. 3.12). До них відносяться:

- динамічна похибка  $A_1$ , яка визначає найбільше відхилення регульованої координати від заданого значення,  $A_1 \leq A_1^{don}$ , тобто ця похибка не повинна перевищувати допустимої за технологічними вимогами;
- статична похибка  $\Delta X_{ст} \leq \Delta X_{ст}^{don}$ , яка виникає лише в статичних системах, наприклад з П-регулятором;

- час перехідного процесу,  $t_n \leq t_n^{don}$ , який визначається як інтервал часу, за який перехідний процес закінчується ( $\Delta X_{cm} = const$  або  $\Delta X_{cm} = 0$  відповідно для статичних та астатичних систем). В практичних розрахунках приймається як інтервал часу, коли  $X \leq 0.05A_1$ ;

- перерегулювання

$$a = \frac{A_2}{A_1} \cdot 100\%, \quad (3.87)$$

який характеризує відхилення регульованої координати з різним знаком, що не допускається для деяких об'єктів. Для реальних систем  $a = 20 \div 50\%$ ;

- оцінка коливальності (ступінь затухання)

$$\psi = \frac{A_1 - A_3}{A_1}. \quad (3.88)$$

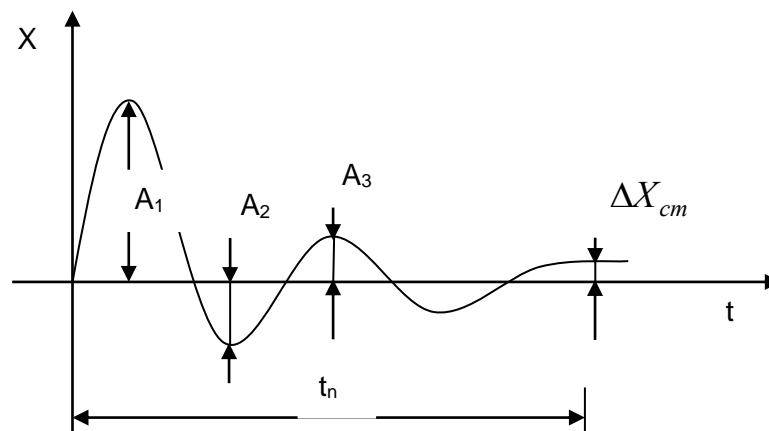


Рисунок 3.12 - Графік перехідного процесу АСР відносно збурення

Показник  $\psi$  може приймати різні значення: при  $\psi=1$  в системі відбувається аперіодичний процес, при  $\psi=0$  - незагасаючі коливання однакової амплітуди,  $\psi<0$  - розбіжний перехідний процес. Для реальних АСР значення  $\psi$  приймається в межах  $0.75 \div 0.9$ .

При існуючих властивостях об'єкта перехідні процеси залежать від типу автоматичного регулятора та значень параметрів налаштувань. Для можливості порівняння різних систем введемо поняття типового перехідного процесу:

- граничний аперіодичний (рис. 3.13,а), який характеризується значним динамічним відхиленням (динамічною похибкою), але має мінімальний час регулювання. Підкреслимо ще раз, що є ряд об'єктів, які не допускають змінювання регульованої координати з різними знаками відносно заданого значення;

- коливальний з 20%- (рис.5.2,б) або 50%-вим (рис. 3.13,в) перерегулюванням. Перший з них характеризується мінімальним часом першого напівперіода та дещо меншою динамічною похибкою, другий має

мінімальне значення динамічної похибки та найменшу оцінку у вигляді інтегралу  $\int_0^{t_n} X^2 dt$ , але при цьому зростає час перехідного процесу.

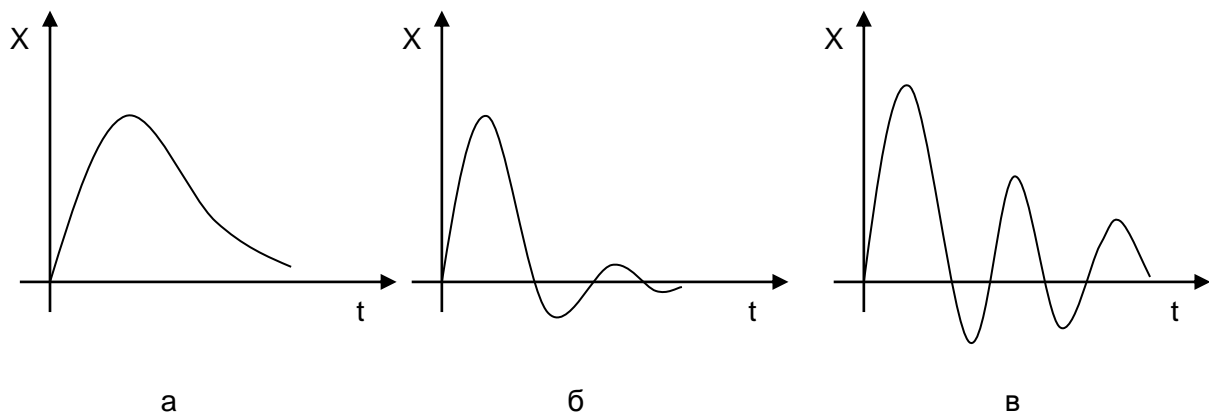


Рисунок 3.13 - Типові перехідні процеси АСР

Прямі показники перехідного процесу зв'язані між собою: зменшення  $A_1$  приводить до збільшення коливальності та часу перехідного процесу.

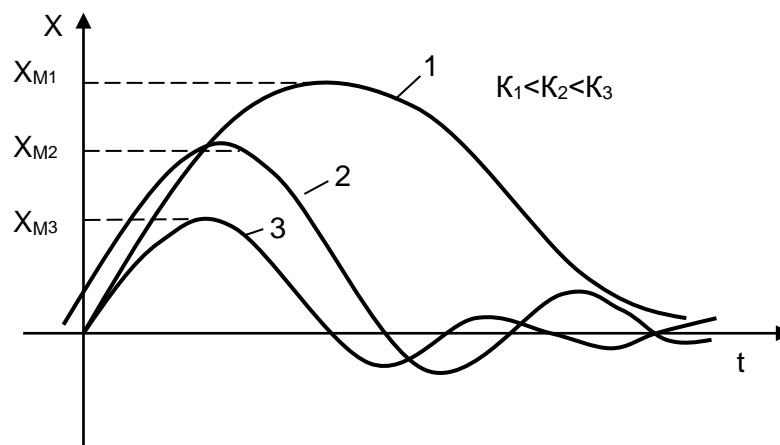


Рисунок 3.14 - Вплив коефіцієнта передачі розімкненої системи на показники якості перехідного процесу

На рис. 3.14 показані перехідні процеси при різних значеннях  $K$ , звідки видно, що при синтезі АСР завжди необхідно шукати компроміс між значеннями динамічної похибки, коливальності та тривалістю перехідного процесу.

Наведені прямі показники якості перехідних процесів зручно використовувати при експериментальних дослідженнях АСР та комп'ютерному моделюванні. На стадії синтезу АСР використовуються непрямі показники (критерії) якості, які дають можливість визначити, якою буде майбутня АСР за її характеристиками.

### 3.7 Критерії якості перехідних процесів АСР

Якість перехідних процесів АСР можна визначити за частотними, кореневими або інтегральними критеріями.

Найбільшу наочність мають частотні критерії якості, які використовують властивості частотних характеристик замкненої та розімкненої системи. Так, за видом амплітудно-частотної характеристики замкненої системи за зміною завдання (рис.5.4) можна визначити частотний показник коливальності:

$$M = \frac{A_M(\omega)}{A(0)}. \quad (3.89)$$

Чим більше це відношення, тим сильніша коливальність і, як наслідок, тривалість перехідного процесу  $t_n$ . Якість вважається задовільною при  $M = 1.1 \div 1.5$ . Непрямими частотними показниками швидкодії системи є характерні частоти: резонансна  $\omega_p$ , незагасаючих коливань  $\omega_0$  (часто можна прийняти  $\omega_0 \approx \omega_p$ ) та частота пропускання  $\omega_n \approx 3 \cdot \omega_0$ .

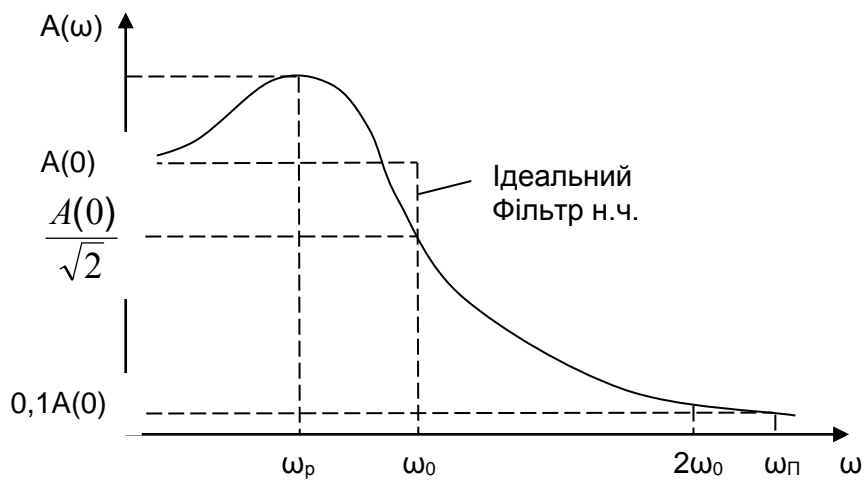


Рисунок 3.15 - Амплітудно-частотна характеристика замкненої системи

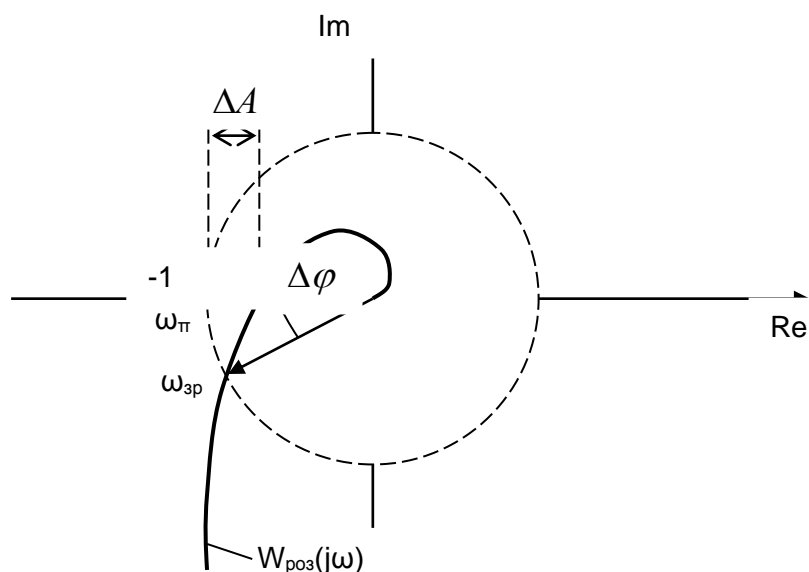


Рисунок 3.16 - Показники запасу стійкості

За амплітудно-фазовою характеристикою розімкненої системи  $W_{роз}(j\omega)$  (рис. 3.16) можна визначити запас за амплітудою:

$$\Delta A = 1 - A(\omega_{\pi}) \quad (3.90)$$

та за фазою:

$$\Delta \phi = \left| \pi - \phi(\omega_{зр}) \right|. \quad (3.91)$$

Ці показники фактично характеризують віддаленість кривої  $W_{роз}(j\omega)$  від критичної точки на комплексній площині з координатами  $(-1; j0)$ . Раніше відзначалось, що при проектуванні систем приймається запас стійкості за амплітудою  $\Delta A = 0.5 \div 0.6$  і за фазою  $\Delta \phi = 30 \div 60^\circ$ . Такі показники запасу стійкості забезпечують і необхідну якість перехідних процесів.

Між частотними та часовими характеристиками системи існує однозначний зв'язок. Так визначено, що перехідна функція замкненої системи може визначатись за дійсною  $U(\omega)$  або уявною  $V(\omega)$  частотними характеристиками замкненої системи:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{U(\omega) \sin(\omega t)}{\omega} d\omega, \quad (3.92)$$

$$h(t) = U(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{V(\omega) \cos(\omega t)}{\omega} d\omega, \quad (3.93)$$

де:  $h(t)$  - перехідна функція замкненої системи, тобто часова характеристика при одиничному ступінчатому діянні.

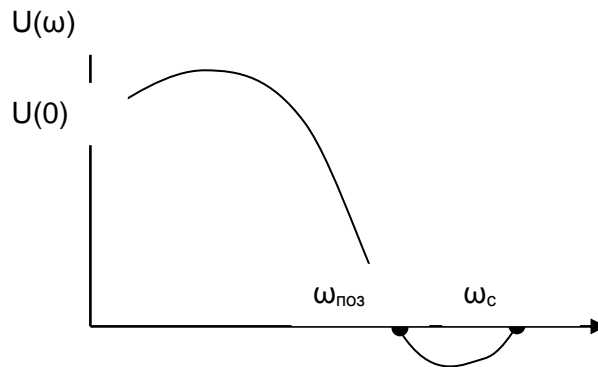


Рисунок 3.17 - Дійсна частотна характеристика замкненої системи

Для оцінки якості перехідних процесів можна використовувати дійсну частотну характеристику замкненої системи, наприклад за зміною завдання (рис. 3.17). Інтервал частот  $0 \div \omega_{поз}$  - називається інтервалом позитивних частот,  $0 \div \omega_c$  - суттєвих. Після  $\omega_c$   $U(\omega)$  мало впливає на якість перехідного процесу. Якщо для частоти  $\omega > \omega_n$  виявиться, що  $U(\omega) < 0.2 \cdot U(0)$ , то в першому наближенні можна приймати до уваги лише інтервал позитивності

$0 \div \omega_n$ . Значення  $U(0)$  при частотах  $\omega > \omega_n$  та  $\omega > \omega_c$  впливає лише на початок перехідного процесу і їх можна відкинути, а початок  $U(\omega)$  визначає головним чином кінцеву частину перехідного процесу. Аналіз інтегралів (3.92), (3.93) та графіку  $U(\omega)$  (рис. 3.17) дає можливість зробити такі оцінки щодо якості перехідного процесу:

- статична похибка  $X(\infty)$  після нанесення одиничного стрибка дорівнює  $U(0)$ . Якщо це зміна завдання, то  $U(0)=1$  або деякому коефіцієнту  $K_0$  (з урахуванням відтворення зміни завдання). При оцінці характеристик відносно збурення  $U(0) \rightarrow \min$ , а в астатичній системі  $U(0)=0$ ;

- порівняння графіків рис. 3.18,а та 3.18,б показує відповідність  $h(t)$  та  $U(\omega)$ . При наявності екстремуму  $U(\omega)$  перехідний процес коливальний, при відсутності – аперіодичний;

- перехідний процес тим швидше загасає, чим більше значення  $\omega_n$  (при цьому менша інерційність);

- для мінімально-фазових систем замість  $U(\omega)$  можна використовувати  $A(\omega)$ .

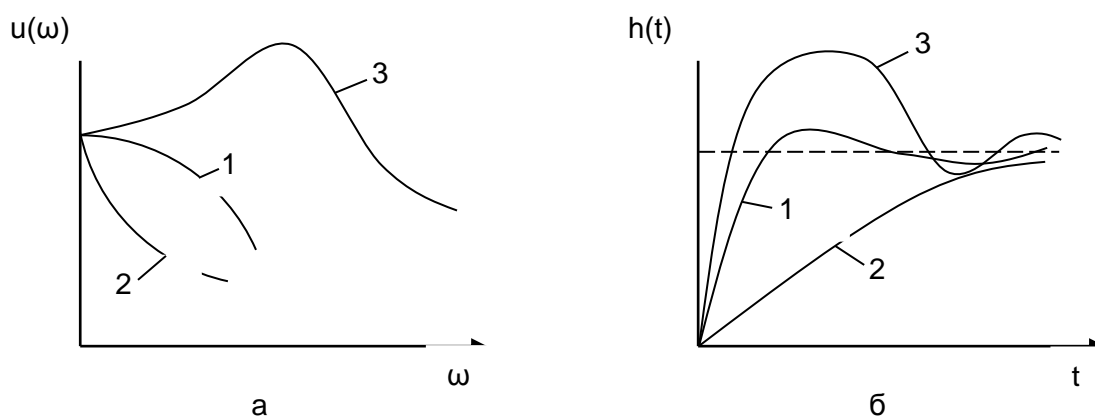


Рисунок 3.18 - Дійсна частотна (а) та перехідна (б) характеристики замкненої системи

Кореневі критерії якості дають можливість оцінити або задати показники перехідного процесу за розташуванням коренів характеристичного полінома на комплексній площині. При цьому необхідно аналізувати не лише полюси (як при аналізі стійкості), а й нулі передаточної функції системи. Наприклад, передаточна функція замкненої системи відносно збурення має вид:

$$W_{зб}(p) = \frac{W_{озб}(p)}{1 + W_{роз}(p)} = \frac{M(p)}{D(p)}, \quad (3.94)$$

де

$$M(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + K + b_1 p^1 + b_0 \quad (3.95)$$

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + K + a_1 p^1 + a_0 \quad (3.96)$$

Розклавши багаточлени  $M(p)$  і  $D(p)$  на множники, передаточну функцію (3.94) можна виразити так:

$$W_{зб}(p) = \frac{b_m \prod_{j=1}^m (p - \lambda_{0j})}{a_n \prod_{i=1}^n (p - \lambda_i)} \quad (3.97)$$

де:  $\lambda_i, \lambda_{0i}$  - відповідно полюси та нулі передаточної функції. При цьому значення нулів залежить від місця, де прикладене діяння.

Розглянемо частинний випадок, коли передаточна функція (3.97) не має нулів:

$$W_{зб}(p) = \frac{b_m}{a_n \prod_{i=1}^n (p - \lambda_i)}. \quad (3.98)$$

Для цього випадку перехідний процес, який визначається лише полюсами  $W_{зб}(p)$ , має вид:

$$X_n(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}. \quad (3.99)$$

Як відомо в цьому перехідному процесі є аперіодична та коливальні складові (відповідно визначаються дійсними та попарно спряженими комплексними коренями). Тоді можна знайти тривалість найбільш тривалої та коливальності найбільш коливальної складових, що і визначить ці оцінки всього перехідного процесу (їх верхні границі).

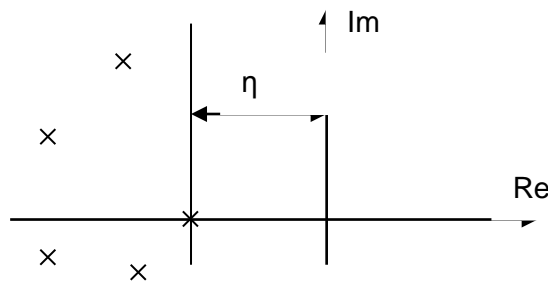


Рисунок 3.19 - Ступінь стійкості системи

Критерій тривалості – ступінь стійкості  $\eta$  (рис.5.8) показує відстань від уявної осі (яка є межею стійкості) до найбільшого кореня характеристичного рівняння замкненої системи. Час затухання окремої складової перехідного

процесу визначається величиною  $e^{\alpha_i t}$ , або  $e^{-\frac{t}{T_i}}$ , де  $T_i = \frac{1}{|\alpha_i|}$  - постійна часу

загасання,  $\alpha_i$  - дійсна частина  $i$ -го кореня характеристичного рівняння. Тривалість певної складової  $t_{ni} \approx 3T_i$ , тобто вона обернено пропорційна абсолютному значенню дійсної частини відповідного кореня. Таким чином,

самою тривалою складовою є така, яка визначається коренем з мінімальною величиною дійсної частини:

$$\eta = |\alpha|_{\min}. \quad (3.100)$$

Тоді тривалість перехідного процесу буде:

$$t_n \leq \frac{3}{\eta}. \quad (3.101)$$

Назва показника “ступінь стійкості” пов’язана з тим, що  $\eta$  показує фактично відстань від межі стійкості.

Критерій коливальності – ступінь коливальності. Коливальність коливальної складової перехідного процесу

$$C_i e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \phi_i). \quad (3.102)$$

визначається відношенням амплітуд перехідного процесу:

$$\frac{X_{2\max}}{X_{1\max}} = \frac{C_i e^{\alpha_i(t_1 + \tau_i)}}{C_i e^{\alpha_i t_1}} = e^{\alpha_i \tau_i}. \quad (3.103)$$

де:  $\tau_i = 2\pi / \beta_i$  - період коливань даної складової. Тоді коливальність дорівнює

$\frac{2\pi\alpha_i}{\beta_i}$ , а при  $\alpha_i < 0$  буде  $\frac{2\pi|\alpha_i|}{\beta_i}$ . Таким чином, мірою коливальності є відношення  $\frac{\beta_i}{|\alpha_i|}$ : чим більше це відношення, тим більше коливальність

складової перехідного процесу, а найбільш коливальною є складова, для якої це відношення буде максимальним:

$$\mu = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|_{\max}. \quad (3.104)$$

На комплексній площині корінь, який визначає найбільшу коливальність, відповідає куту  $\gamma = \arctg \left| \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right|$  (рис. 3.20).

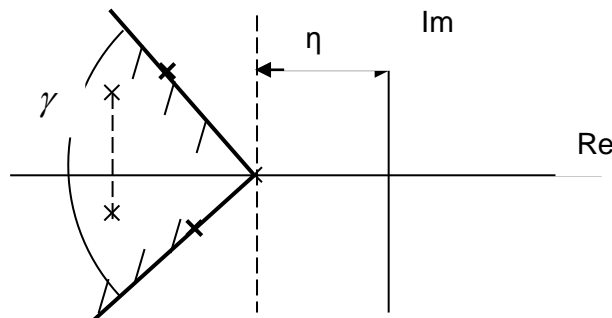


Рисунок 3.20 - Ступінь коливальності системи



В практичних розрахунках використовують показник  $m = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\mu}$ , який приймають в межах  $m = 0.2 \div 0.5$ . Варто зауважити, що в системі довільного порядку найбільш швидкий аперіодичний перехідний процес має місце, коли всі  $n$  коренів рівні. На комплексній площині корінь, який визначає найбільш коливальну складову, відповідає найбільшому значенню кута  $\gamma$  (рис.5.9).

Для визначення критеріїв якості  $\eta$  та  $\mu$  можна використовувати критерії стійкості Рауса-Гурвиця або Михайлова. В задачах синтезу систем обирають один - два параметри, які можуть змінюватись в певних межах, і визначають їх вплив на ступінь стійкості  $\eta$  побудовою області стійкості в площині, наприклад  $\eta$  і одного з параметрів системи. Можна отримати також лінії однакового ступеню стійкості з різними значеннями  $\eta$ .

При використанні критеріїв  $\eta$  і  $\mu$  необхідно враховувати, що оцінки тривалості та коливальності перехідних процесів є граничними, тобто перехідний процес в системі може мати кращу якість. Якщо розглядати загальний випадок, коли передаточна функція системи має нулі, то це відповідає наявності правої частини рівняння, тому оцінка якості може бути неточною, але завжди якість перехідних процесів тим краще, чим більше  $\eta$  і менше  $\mu$ .

В технічній літературі наводиться приклад оптимального розташування коренів характеристичного полінома та значення відповідних коефіцієнтів. Для реальних систем значна частина коефіцієнтів характеристичного рівняння фіксована, тому свобода вибору щодо розташування коренів обмежена. В цьому випадку обирають два - три корені, які визначають якість перехідних процесів, а решту розташовують в глибині комплексної напівплощини шляхом обмежень на дійсні частини. При цьому відношення уявної та дійсної частини цих коренів не регламентується, оскільки швидкість загасання буде значною та виявляться лише на початку перехідного процесу.

Визначення показників  $\eta$  та  $\mu$  за рівнянням з відомими коефіцієнтами – трудомістка задача, тому частіше розв'язується обернена задача – визначення коефіцієнтів рівнянь та параметрів системи, при яких всі корені лежать в області із заданими значеннями  $\eta$  і  $\mu$ . Для систем невисоких порядків розроблено метод кореневого годографа, коли на комплексній площині будуються траєкторії (годографи) переміщення коренів характеристичного рівняння при зміні параметрів системи, що приводить до бажаного розташування цих коренів.

Вплив розташування коренів на якість перехідного процесу та стійкість добре ілюструє діаграма І.О.Вишнеградського (1876 р.), побудована для систем третього порядку (рис. 3.21).

Характеристичне рівняння системи:

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0 \quad (3.105)$$

приводиться до нормованого вигляду шляхом ділення на  $a_0$  і введення нової змінної  $\bar{p} = p \cdot \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}}$ :

$$\bar{p}^3 + A_1 \bar{p}^2 + A_2 \bar{p} + 1 = 0 \quad (3.106)$$

де

$$A_1 = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_3 \cdot a_0}}; \quad A_2 = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_3 \cdot a_0^3}}$$

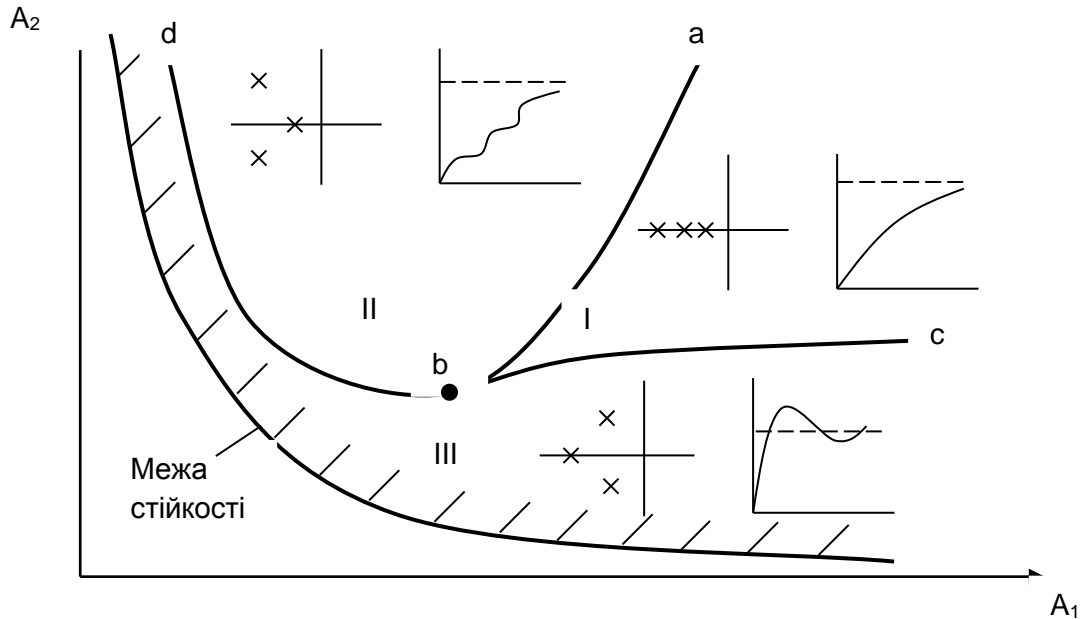


Рисунок 3.21 - Діаграма І.О.Вишнеградського

Приймаючи  $A_1 > 0, A_2 > 0$  в площині параметрів  $A_1$ - $A_2$  будується область стійкості, яка розділяється на три складові:

- I – обмежена лініями  $abc$ , відповідає трьом дійсним кореням (різним), що приводить до аперіодичних процесів;
- II – обмежена лініями  $abd$ , відповідає парі комплексним коренів та одному дійсному, розташованому ближче до уявної осі – монотонний перехідний процес;
- III – обмежена лінією  $dbc$  та межею стійкості, відповідає також парі комплексних коренів та одному дійсному, але до уявної осі ближче знаходяться комплексні корені – коливальний перехідний процес.

Одними з найбільш зручних для оцінки якості перехідних процесів є інтегральні критерії якості, особливо при використанні комп'ютерного моделювання. Це узагальнені показники, які фактично дають оцінку величини площі під кривою перехідного процесу, і тоді однозначно формулюється вимога зменшення відхилення та тривалості перехідного процесу. Використовуються такі інтегральні критерії:

- лінійний

$$I_1 = \int_0^{t_n} \Delta X dt; \quad (3.107)$$

- квадратичний

$$I_2 = \int_0^{t_n} (\Delta X)^2 dt; \quad (3.108)$$

- покращений квадратичний

$$I_3 = \int_0^{t_p} \left( (\Delta X)^2 + T_{\epsilon}^2 \left( \frac{d\Delta X}{dt} \right)^2 \right) dt. \quad (3.109)$$

Лінійний інтегральний критерій  $I_1$  є найбільш простим, його зручно використовувати для оцінки якості аперіодичних перехідних процесів, а для коливальних необхідно визначати площі різного знаку під кривими і складати їх за абсолютним значенням. Оцінка  $I_1 \rightarrow \min$  може привести до перехідного процесу з малим відхиленням, але з недостатнім затуханням.

Найбільш зручним є квадратичний інтегральний критерій  $I_2$ . При його використанні найбільшу вагу мають перші амплітуди, що також може привести до перехідних процесів з недостатнім затуханням. Цей критерій безпосередньо зв'язаний з характеристиками системи, його значення можна знайти за формулою Релея:

$$I_2 = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} |W_{збур}(j\omega)|^2 \cdot |Z(j\omega)|^2 d\omega, \quad (3.110)$$

де:  $W_{збур}(j\omega)$  - АФХ замкненої системи за каналом збурення;

$Z(j\omega)$  - Фур'є-перетворення збурення.

Урахування в критерії  $I_3$  швидкості відхилення змінної розширює діапазон його застосування, а ваговий коефіцієнт  $T_{\epsilon}$  безпосередньо пов'язаний з часом перехідного процесу:  $\frac{t_n}{6} \leq T_{\epsilon} \leq \frac{t_n}{3}$ , де  $t_n$  - бажана тривалість перехідного процесу. Квадратичний інтегральний критерій можна обчислити за коефіцієнтами передаточної функції системи без побудови перехідного процесу.

Різні інтегральні критерії зв'язані між собою та з прямими показниками якості перехідних процесів. Так зменшення  $I_2$  приводить до зменшення  $I_1, \psi, A_1$ , а також до збільшення  $t_n$  (зменшення запасу стійкості системи). В проектних розрахунках зв'язують безпосередньо значення  $I_2$  з  $\psi = 0.7 \div 0.9$  при обмеженні на  $A_1$ .

Критерії якості перехідних процесів залежать від сукупності характеристик системи, тому в процесі розробки АСР відбирають найбільш

суттєві фактори, наприклад відомий сильний вплив відношення  $\frac{\tau_{zn}}{T}$  ( $\tau_{zn}$  - час запізнювання,  $T$  - постійна часу об'єкта) на значення критерія  $I_2$  та динамічну похибку  $A_1$ . Суттєво змінюється значення критеріїв та показників якості при змінюванні коефіцієнта регулятора  $K_{рег}$  та коефіцієнтів передачі об'єкта за каналами керування  $K_{ок}$  та збурення  $K_{озб}$ .

## ЛІТЕРАТУРА

1. Ладанюк А.П. Теорія автоматичного керування: Курс лекцій для студентів напряму 0925 “Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології ден. та заочн. форм навчання – (частина перша) – К.: НУХТ, 2004. – 174 с.
2. ДСТУ 3008:2015 Інформація та документація. Звіти у сфері науки і техніки. Структура та правила оформлювання. Чинний від 2017-07-01. – К.: ДП «УкрНДНЦ», 2016. – 26 с.
3. Ладанюк А.П. Теорія автоматичного керування технологічними об’єктами: Навч. посіб. / А.П. Ладанюк, К.С. Архангельська, Л.О. Власенко. - К.: НУХТ, 2014. — 274 с.
4. Мокін, Б. І. Теорія автоматичного керування. Методологія та практика оптимізації : навчальний посібник / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 210 с.
5. Александров Є.Є. Автоматичне керування рухомими об’єктами і технологічними процесами. Том. I. Теорія автоматичного керування / Є.Є. Александров, Е.П. Козлов, Б.І. Кузнецов. – Харків: НТУ "ХП", 2002. – 490 с.
6. Александров Є.Є. Теорія автоматичного управління. В 3-х томах / Є.Є. Александров, О.П. Голуб, Ю.Т. Костенко, Б.І. Кузнецов, В.П. Соляник. – Харків: НТУ "ХП", 2001. – 460 с.
7. Александров Є.Є. Основи автоматики і танкові автоматичні системи / Є.Є. Александров, І.В. Костяник, О.Я. Ніконов / Під ред. Є.Є. Александрова. – Харків: НТУ «ХП», 2002. – 163 с.
8. Бесекерский В.А. Теория систем автоматического управления / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. М.: “Профессия”, 2004. – 747 с.
9. Власов К.П. Теория автоматического управления. – Харьков.: Изд-во “Гуманитарный центр”, 2007. – 526 с.
10. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы. - СПб: “Питер”, 2005. - 333с.
11. Боровська Т. М. Моделювання та оптимізація систем автоматичного управління: навчальний посібник / Т. М. Боровська, А.С. Васюра, В. А. Северілов. – Вінниця: ВНТУ, 2009. – 132 с.
12. Попович МИ.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування: Підручник. – К.: Либідь, 1997. - 544с.
13. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления/ Под ред. В.А. Бесекерского. М.: Наука, 1978. – 512с.
14. Шаруда В.Г. Практикум з теорії автоматичного управління: Навчальний посібник.- Дніпропетровськ: Національна гірнична академія України, 2002. – 414с., іл.133.
15. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. - М.–Л.: Энергия, 1965, ч.1, - 423 с.
16. Зайцев Г.Ф. Теория автоматического управления и регулирования. 2-е издание перераб. и дополн. – К.: Высшая школа, 1988. – 430 с.

17. Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем. - М.: Машиностроение, 1973. – 606 с.
18. Лукас В.А. Теория автоматического управления. - М.: Недра, 1990. - 416 с.
19. Математические основы теории автоматического регулирования / под ред. Б.К. Чемоданова. - М.: Высшая школа, 1971. – 807 с.
20. Михайлов В.С. Теория управления. Учебное пособие для ВУЗов. – К.: Высшая школа, 1988. – 309 с.
21. Пантелеев А.В. Теория управления в примерах и задачах / А.В. Пантелеев, А.С. Бортаковский. - М., Высшая школа, 2003. – 583 с.
22. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. - М.: Наука, 1989. – 496 с.
23. Солодовников В.В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования / В.В. Солодовников, В.Н. Плотников, А.В. Яковлев. - М.: Машиностроение, 1985. – 536 с.
24. Теория автоматического управления / под ред. А.В. Нетушила. - М.: Высшая школа, 1972. – 432 с.
25. Филипс Ч. Системы управления с обратной связью / Ч. Филипс, Р. Харбор. - М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 616 с.

## Додаток А

Міністерство освіти і науки України  
Черкаський державний технологічний університет  
Кафедра робототехніки та спеціалізованих комп'ютерних систем

### Курсова робота з дисципліни «Теорія автоматичного управління»

#### Пояснювальна записка

Виконав:

студент \_\_ курсу групи \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

(підпис)

Комісія:

к.т.н., доцент Корпань Я.В.

дата захисту «\_\_» \_\_\_\_\_ 2021р.

Оцінка:

за національною шкалою \_\_\_\_\_

кількість балів \_\_\_\_\_

ЄСТС \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

(підпис)

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

(підпис)

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

(підпис)

Черкаси 2021

## Додаток Б

Форма № У-6.01

### Черкаський державний технологічний університет

Факультет інформаційних технологій та систем

Кафедра Спеціалізованих комп'ютерних систем

Дисципліна Теорія автоматичного управління

Спеціальність 151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології

Курс \_\_\_\_\_

Група \_\_\_\_\_ Семестр \_\_\_\_\_

### **Завдання на курсовий проект (роботу) студента**

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи \_\_\_\_\_

2. Строк здачі студентом закінченого проекту (роботи) \_\_\_\_\_

3. Вихідні дані до роботи \_\_\_\_\_

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які підлягають розробці)

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) \_\_\_\_\_

6. Дата видачі завдання \_\_\_\_\_

### **Календарний план**

№ п/п	Назва етапів курсового проекту (роботи)	Строк виконання етапів проекту (роботи)	Примітки



