МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ЕЛЕКТРОННИХ ТЕХНОЛОГІЙ І РОБОТОТЕХНІКИ

АВТОМАТИЗАЦІЯ ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСІВ. ТЕОРІЯ ПОДІБНОСТІ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК
для здобувачів освітнього ступеня «бакалавр»
зі спеціальностей галузей знань:
15 Автоматизація та приладобудування,
18 Виробництво та технології
усіх форм навчання

Черкаси
2022

УДК 681.5:519.87](075.8)
А 22

Затверджено вченою радою ФЕТР, протокол № 10 від 20.04.2022 р., згідно з рішенням кафедри приладобудування, мехатроніки та комп'ютеризованих технологій, протокол № 8 від 14.02.2022 р.

Упорядники: Тичков В.В., к.т.н., доцент,
Гальченко В.Я., д.т.н., професор,
Трембовецька Р.В., д.т.н., доцент,
Базіло К.В., д.т.н., професор

Рецензент Бондаренко М.О., д.т.н., доцент

А 22 Автоматизація виробничих процесів. Теорія подібності: навчально-методичний посібник для здобувачів освітнього ступеня «бакалавр» зі спеціальностей галузей знань: 15 Автоматизація та приладобудування, 18 Виробництво та технології усіх форм навчання [Електронний ресурс] / [Упоряд.: В.В. Тичков, В.Я. Гальченко, Р.В. Трембовецька, К.В. Базіло]; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси: ЧДТУ, 2022. – 181 с. – Назва з титульного екрана.

Видання поглиблює знання здобувачів освітнього ступеня «бакалавр»» галузі знань 15 Автоматизація та приладобудування та 18 Виробництво та технології з теорією подібності та розмірності при розрахунках для проектування технічних засобів автоматизації виробничих процесів. Запропоновані приклади практичних розрахунків та задачі для самостійної роботи по опануванню даного матеріалу.

УДК 681.5:519.87](075.8)

Навчальне електронне видання
комбінованого використовування

АВТОМАТИЗАЦІЯ ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСІВ. ТЕОРІЯ ПОДІБНОСТІ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

для здобувачів освітнього ступеня «бакалавр»
зі спеціальностей галузей знань:
15 Автоматизація та приладобудування,
18 Виробництво та технології
усіх форм навчання

Упорядники:
Тичков Володимир Володимирович, **Гальченко** Володимир Якович,
Трембовецька Руслана Володимирівна, **Базіло** Костянтин Вікторович

В авторській редакції

ЗМІСТ

Вступ 6
1 Рух в'язкої рідини 7
2 Теорія подібності 17
3 Диференційні рівняння теплообміну для моделі 21
4 Гідродинамічна подібність 23
5 Теплова подібність 27
6 Дифузійна подібність 31
7 Дифузія у турбулентному потоку. Зволоження повітря 40
8 Дифузія у турбулентному потоку. Вивід рівняння подібності 41
9 Тепло-дифузійні процеси сушіння твердих тіл газом, що проходить через шари матеріалу 43
10 Поверхневе випаровування вологи при нерухому повітрі 49
11 Кондиціонування реакційної суміші в паровій фазі. приготування повітряно-парової суміші для неперервного парофазного каталітичного окислення толуолу 51
12 Виведення рівняння проточної екстракції 53
13 Аналіз умов моделювання теплохімічних процесів, що протікають у тонком шару 61
14 Кінетика іонного обміну 68
15 Моделювання іонообмінних фільтрів 70
16 Визначення постфйних величин у критеріальних рівняннях 75
17 Метод аналізу розмірності 81
18 Коефіцієнт тепловіддачі при конденсації парів 88
19 Поверхневі явища для струменя з рідинних капель 91
20 Примусова конвекція при високій швидкості потоку 92
21 Вільна конвекція 95
22 Витрата енергії для вентилятора 96
23 Витрата енергії на перемішування рідин у реакційних апаратах 97
24 Визначення шуканих параметрів для моделі при дослідженні виробничих процесів 99
25 Приклади рішення фізичних задач з використанням теорії розмірності. 101
26 Приклади та задачі з теорії подібності процесів теплообміну 113
ДОДАТКИ 126

Умовні позначення і одиниці вимірювання основних величин теплофізичних властивостей приведені в системі СІ 126
Критерії подібності 127
Співвідношення між одиницями виміру у різних системах 128
Теплофізичні властивості деяких матеріалів 129
Коефіцієнти для розрахунку охолодження або нагрівання пластини завтовшки 2δ 130
Коефіцієнти для розрахунку охолодження або нагрівання довгого циліндра радіусом r0 131
Теплообмін при природній конвекції 136
Теплообмін при вимушеному русі рідини 138
Тепловіддача при кипінні та конденсації 144
Теплофізичні властивості сухого повітря при тиску 101325 Па (760 мм рт.ст.) 147
Термодинамічні властивості сухої насиченої водяної пари та води на лінії насичення 150
Теплофізичні властивості води на лінії насичення 152
Теплофізичні властивості водяної пари при атмосферному тиску 154
Властивості робочих рідин 155
Ступінь чорноти повного нормального випромінювання для різних матеріалів 157
Коефіцієнти дифузії пари різних рідин у повітря 159
Значення максимальної пружності водяної пари *E* (Па) для різних температур при нормальному барометричному тиску 160
Міжнародна система одіниць фізичних величин 162
Таблиця 1. Фундаментальні фізико-хімічні сталі 162
Таблиця 2. Математичні сталі 165
Таблиця 3. Префікси для позначення похідних одиниць метричних систем, кратних і часткових головної одиниці 165
Таблиця 4. Латинський алфавіт 165
Таблиця 5. Грецький алфавіт 166
Таблиця 6. Одиниці вимірювання і розмірності фізичних величин 166
6.1. Основні одиниці СІ 166
6.2. Додаткові одиниці СІ 166
6.3. Внесистемні одиниці, їх зв'язок з одиницями СІ 167

6.4. Похідні одиниці СІ, що мають власні найменування 169
6.5. Одиниці вимірювання і розмірності основних величин у системі СІ 170
6.5.1. Одиниці простору і часу 170
6.5.2. Одиниці періодичних величин і пов'язаних з ними характеристик 170
6.5.3. Механічні одиниці 171
6.5.4. Одиниці молекулярної фізики 172
6.5.5. Теплові одиниці 172
6.5.6. Електричні та магнітні одиниці 174
6.5.7. Оптичні одиниці 175
6.5.8. Одиниці атомної та ядерної фізики 176
6.5.9. Одиниці ядерних реакцій та іонізуючого випромінювання 177
6.6. Температурні шкалі 178
6.6.1. Співвідношення між одиницями (градусами) різних шкал 178
6.6.2. Співвідношення між значеннями температури у різних шкалах 178
Список використаної літератури 179

ВСТУП

Достовірність узагальнень, одержуваних експериментальним шляхом, значно зросла, коли були розроблені принципи моделювання явищ, що вивчаються, засновані на дотриманні умов, що забезпечують їхню подібність. Роботи в галузі подібності теплових процесів призвели до створення загальної теорії подібності та забезпечили широкі можливості для проникнення методів теорії подібності у різні галузі інженерної практики, зокрема й у харчову та хімічну технологію. Теорія подібності дозволяє вивчати складні процеси і теоретично, і експериментально. Тільки чисте експериментування без теоретичних узагальнень, не дозволяє поширити висновки, отримані в такий спосіб, інші не досліджені випадки. Тільки теоретичний метод не може охопити все різноманіття умов фізичного процесу і, крім того, досить часто приводить до нерозв’язаних математичних рівнянь.

Основні виробничі процеси автоматизації хімічної, харчової та приладобудівної технологій протікають, головним чином, внаслідок руху в'язких (стисливих і нестисливих) рідин, а також в результаті теплообміну та дифузії, і при моделюванні їх особливе значення набуває гідродинамічна, теплова та дифузійна подыбныcть. Тому перш ніж перейти до викладу теорії подібності та методу аналізу розмірності, розглянемо рівняння гідродинамічних, теплообмінних та дифузійних процесів.

Даний посібник є продовженням серії посібників для дисципліни «Автоматизація виробничих процесів» для здобувачів освітнього ступеня «бакалавр» галузей знань 15 «Автоматизація та приладобудування» та 18 «Виробництво та технології» усіх форм навчання. Перша частина [1] була присвячена теплообмінним процесам у виробництві, друга частина [2] була присвячена дифузійним процесам (обладнанню для сушіння) у виробництві, третя частина присвячена технічним засобам автоматизації [3].

1 РУХ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ

Розглянемо рух рідини, що не встановився, при якому швидкості і тиски в кожній точці потоку змінюються з часом.

Виділимо в потоці рідини, що рухається, елементарний паралелепіпед з ребрами *dx, dy* і *dz* (рис. 1).

Внаслідок нерозривності потоку, весь об'єм виділеного паралелепіпеда буде постійно заповнений рідиною, що рухається. При цьому маса рідини, що надходить і виходить з паралелепіпеда, стискається в загальному випадку та буде різна, що обумовлено мінливістю величин швидкості ω та щільності ρ.

Через ліву грань *A*, паралельну площині *Y0Z*, рідина рухається під впливом складової швидкост ω_x, паралельної осі *0X*. Вважатимемо цю складову, а також щільність ρ постійними у всіх точках цієї грані та рівними їх значенням у точці А:

$$\omega_x = F_1(x, y\, z,\ \tau),$$

$$\rho = F_2(x, y\, ,z,\ \tau),$$

де τ - час.

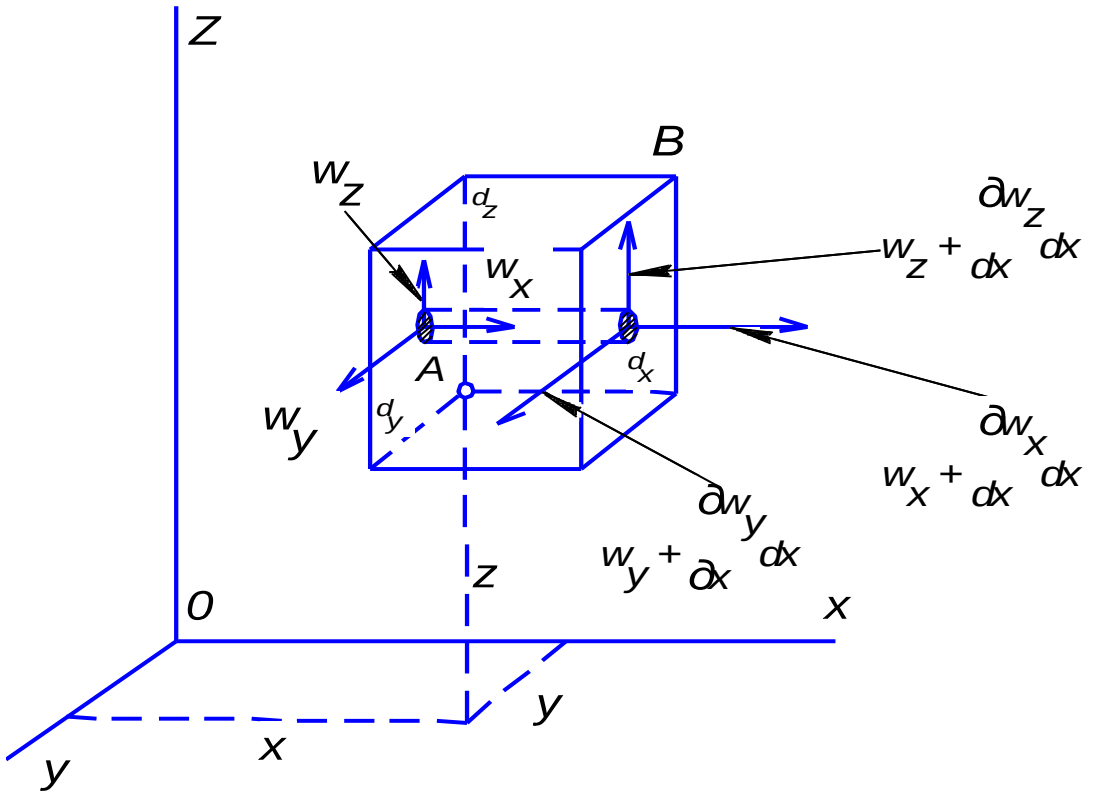


Рисунок 1 – Побудова моделі руху в'язкої рідини

У цей же час для протилежної правої грані *B* ці величини будуть рівні:

$$\omega_x + \frac{\partial \omega_x}{\partial x} dx,$$

$$\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx.$$

Через майданчик *dy dz* лівої грані за одиницю часу витікає кількість рідини, виражену в одиницях маси, що дорівнює:

$$dM_{x1} = \rho\ \omega x\ dy\ dz.$$

Маса рідини, що витікає через протилежну грань за цей час, буде:

$$dM_{x2} = \left[\rho \cdot \omega_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \cdot \omega_x\right) dx \right] dy\ dz.$$

Таким чином, збільшення маси рідини за одиницю часу в паралелепіпеді, викликане відмінністю значень ω_x і ρ на лівій і правій його гранях, так само:

$$\Delta M_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \cdot \omega_x\right) dx\ dy\ dz.$$

Для напрямків, перпендикулярних до осей *0Y* і *0X*, отримаємо аналогічно вирази для ΔMy і ΔMz.

Повне збільшення маси рідини в паралелепіпеді за одиницю часу дорівнюватиме:

$$\Delta M = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \cdot \omega_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho \cdot \omega_y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \cdot \omega_z\right) \right] dx\ dy\ dz.$$

При нерозривності потоку зміна маси об’ємом *dx dy dz* викликано зміною щільності рідини у цьому об’ємі. Отже:

$$\Delta M = -\frac{\partial \rho}{\partial \tau} dx\ dy\ dz.$$

Прирівнюючи один одному два отримані вирази для ΔM, знаходимо:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \cdot \omega_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho \cdot \omega_y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \cdot \omega_z\right) \right] dx\ dy\ dz = -\frac{\partial \rho}{\partial \tau} dx\ dy\ dz.$$

Поділивши на *dx dy dz* і перенісши всі члени до лівої частини рівності, отримаємо:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \cdot \omega_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho \cdot \omega_y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \cdot \omega_z\right) = 0. \qquad (1)$$

Отримане рівняння зветься рівняння нерозривності, або суцільності.

У окремих випадках рівняння нерозривності приймає такий вид:

1. Для краплинної рідини (ρ = const):

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0$$

або у векторній формі:

$$div\vec{\omega} = 0.$$

Звідси випливає, що при нерозривному русі рідини її об'єм, що входить в деяку обмежену частину простору, дорівнює об’єму, що виходить з нього за цей же час.

2. Для однорідного газу [$\rho = F_2(\tau)$]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \rho\left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z}\right) = 0,$$

або:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \rho\, div\vec{\omega} = 0.$$

3. Для руху $\left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = 0\right)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \cdot \omega_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho \cdot \omega_y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \cdot \omega_z\right) = 0,$$

або:

$$div\left(\rho\, \vec{\omega}\right) = 0.$$

З рівняння (1) за умови $\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = 0$ знаходимо, що з даного простору за умов встановленого руху рідина не змінює своєї маси, тобто маси рідини, що входить і виходить, рівні між собою.

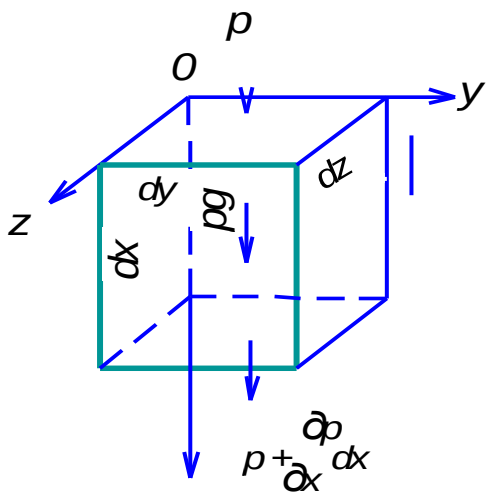


Рисунок 2 – Проекції сили тяжіння, сили тиску та сили тертя, що діють на елементарний об'єм потоку рідини, що рухається

Переходимо до висновку рівняння руху, що ґрунтується на відомому законі механіки: сила дорівнює масі, помноженій на прискорення.

У будь-якій точці потоку, що рухається, повинно мати місце рівновага сил, що зумовлюють рух. Такими силами є сила тяжіння, сили тиску (перепад тиску) та сили тертя.

Виділимо в рідині, що перебуває в русі, елементарний паралелепіпед з об'ємом *dV* та з ребрами *dx, dy* і *dz*.

Знайдемо проекції на вісь *0X* (рис. 2) сили тяжіння, сили тиску та сили тертя, що діють на цей елементарний об'єм.

Для сили тяжіння, прикладеної у центрі тяжіння елемента *dV*,маємо:

$$g_x \, \rho \, dV = g_x \, \rho \, dx \, dy \, dz \, , \qquad (2)$$

де g_x - проекція прискорення сили тяжіння (м/с^2) на вісь *0X*.

Позначимо питомий тиск рідини *p, кг/м*^{2}. Тоді сила тиску рідини на верхню грань елемента дорівнює *p dy dz*. На нижню грань діє сила, що дорівнює:

$$-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy \, dz \, .$$

Тут $\frac{\partial p}{\partial x} dx$ є зміна гідростатичного тиску у напрямку осі *0X* по всій довжині ребра *dx*. Ця сила діє проти спрямування руху рідини. Проекція рівнодіючої сил тиску:

$$p \, dy \, dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy \, dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dx \, dy \, dz \, . \qquad (3)$$

Дію сили тертя розглянемо спочатку з прикладу руху плоского

ламінарного потоку, у якому проекція швидкості ω_x залежить тільки від *y*. І тут сила тертя виникає лише на бічних гранях елемента.

Напрямки та величини сил тертя показані на рис. 3. У перетині *y* маємо силу тертя, рівну (- *Sdx dz)* і спрямовану проти руху, оскільки швидкість руху рідини тут менша, ніж у самому елементі. У перетині *y+dy* сила тертя дорівнює:

$$\left(S + \frac{\partial S}{\partial y} dy \right) dx\, dz$$

і направлена у бік руху, оскільки в цьому випадку швидкість руху рідини більша, ніж у самому елементі.

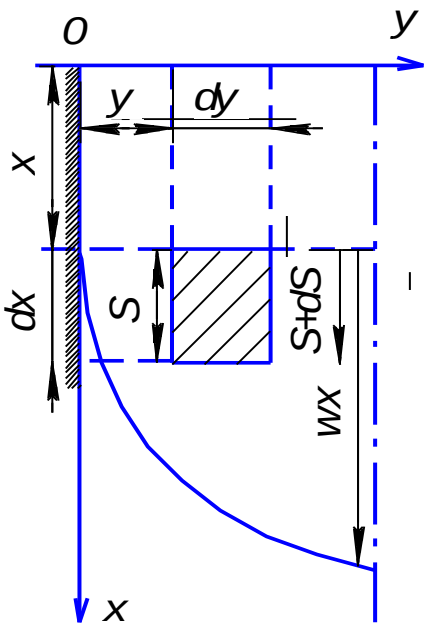


Рисунок 3 - Напрямки та величини сил тертя

Проекція рівнодіючої цих сил буде:

$$\left(S + \frac{\partial S}{\partial y} dy \right) dx\, dz - S\, dx\, dz = \frac{dS}{yy} dx\, dy\, dz\,, \qquad (4)$$

де *S* – сила тертя на одиницю поверхні.

Але за законом Ньютона $S = \mu \frac{d\omega_x}{dy}$, де μ - в'язкість середовища.

Підставляючи це значення S у вираз (4) для проекції, отримаємо:

$$\frac{dS}{dy} dV = \mu \frac{d^2 \omega_x}{dy^2} dV\,.$$

У загальному випадку, коли швидкість ω_x змінюється у всіх трьох напрямках, проекція сили тертя на вісь *0X* дорівнюватиме:

$$\mu\left(\frac{\partial^2\omega_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega_x}{\partial z^2}\right)dV=\mu\nabla^2\omega_x dV\,, \qquad (4')$$

де символ ∇^2, званий оператором Лапласа, позначає суму других частинних похідних від проекції швидкості на вісь *0X*.

Складаючи проекції (2), (3) та (4'), отримаємо проекцію на вісь *0X* рівнодіючої всіх сил, доданих до об'єму *dV:*

$$\left[\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2\omega_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega_x}{\partial z^2}\right)\right]dV\,. \qquad (5)$$

Ця рівнодіюча дорівнює добутку маси елемента *dV* на його прискорення $\frac{D\omega_x}{d\tau}$:

$$\rho\frac{D\omega_x}{d\tau}dV=\rho\left[\frac{\partial\omega_x}{\partial\tau}+\omega_x\frac{\partial\omega_x}{\partial x}+\omega_y\frac{\partial\omega_x}{\partial y}+\omega_z\frac{d\omega_x}{\partial z}\right]dV\,. \qquad (6)$$

Символ $\frac{D\omega_x}{d\tau}$ називається повною, або субстанційною, похідною ω_x по τ.

Ця похідна розшифровується так: швидкість зміни ω_x в даній точці характеризується частинною або місцевою (локальною) похідною ω_x по τ:

$$\frac{\partial\omega_x}{\partial\tau}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\omega_x(M,\tau+\Delta\tau)-\omega_x(M,\tau)}{\Delta\tau}\,,$$

де *M* означає будь-яку постійну геометричну точку у просторі.

Щоб охарактеризувати зміну ω_x для даної частинки рідини за проміжок часу $\Delta\tau$, слідує за приріст ω_x взяти різницю між значеннями функції ω_x у момент $\tau+\Delta\tau$ у тому положенні частинок *M'*, в якому вона знаходиться в цей момент, та значенням функції ω_x у момент τ у початковому положенні її *M*. Межа ставлення цього приросту до $\Delta\tau$ при $\Delta\tau\to 0$ і називається субстанційною похідною.

Зв'язок між частинною та повною похідними полягає в тому, що, коли ми складаємо повну похідну від функції $\omega(x, y, z, \tau)$, ми вважаємо *x, y, z* функціями від τ, так як частка, що мала в момент τ координати *x, y, z,* за час $\Delta\tau$ переміститься деякою кривою.

Розглядаючи $\omega(x, y, z, \tau)$ як складну функцію від τ, отримаємо:

$$\frac{D\omega_x}{d\tau} = \frac{\partial\omega_x}{\partial\tau} + \frac{\partial\omega_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\tau} + \frac{\partial\omega_x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\tau} + \frac{\partial\omega_x}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\tau} = \\ = \frac{\partial\omega_x}{\partial\tau} + \omega_x\frac{\partial\omega_x}{\partial x} + \omega_y\frac{\partial\omega_x}{\partial y} + \omega_z\frac{\partial\omega_x}{\partial z},$$

тобто, вираз, що стоїть у квадратних дужках формули (6).

Порівнюючи формули (5) та (6), знайдемо:

$$\rho\frac{\partial\omega_x}{\partial\tau} + \rho\left(\omega_x\frac{\partial\omega_x}{\partial x} + \omega_y\frac{\partial\omega_x}{\partial y} + \omega_z\frac{\partial\omega_x}{\partial z}\right) = \\ = \rho\, g_x - \frac{\partial\rho}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2\omega_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\omega_x}{\partial z^2}\right). \tag{7}$$

Аналогічним шляхом виходять рівняння для рівнодіючих проекцій сил на осі *0Y* та *0Z*:

$$\rho\frac{\partial\omega_y}{\partial\tau} + \rho\left(\omega_x\frac{\partial\omega_y}{\partial x} + \omega_y\frac{\partial\omega_y}{\partial y} + \omega_z\frac{\partial\omega_y}{\partial z}\right) = \\ = \rho\, g_y - \frac{\partial\rho}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2\omega_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\omega_y}{\partial z^2}\right), \tag{8}$$

$$\rho\frac{\partial\omega_z}{\partial\tau} + \rho\left(\omega_x\frac{\partial\omega_z}{\partial x} + \omega_y\frac{\partial\omega_z}{\partial y} + \omega_z\frac{\partial\omega_z}{\partial z}\right) = \\ = \rho\, g_z - \frac{\partial\rho}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2\omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\omega_z}{\partial z^2}\right). \tag{9}$$

Рівняння (7), (8) та (9) утворюють систему диференціальних рівнянь руху нестислої рідини Навье – Стокса; ця система справедлива як для ламінарного, так турбулентного руху.

Якщо μ постійна, то рівняння (7), (8) та (9) можна замінити одним векторним, а саме:

$$\rho\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial\tau} + \rho\left(\vec{\omega}, \mathrm{grad}\right)\vec{\omega} = \vec{g}p - \mathrm{grad}\, p + \mu\nabla^2\vec{\omega},$$

або

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial\tau} + \left(\vec{\omega}, \mathrm{grad}\right)\vec{\omega} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\, p + \nu\nabla^2\vec{\omega}, \tag{A}$$

де $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$ - коефіцієнт кінематичної в'язкості, м^2/с.

Застосовуючи до кожного члена рівняння (А) векторну операцію «вихору», спростимо це рівняння. Операція «вихор» визначається так для будь-якого вектора $\vec{N}$:

$$\operatorname{rot}\vec{N} = \left(\frac{\partial N_y}{\partial x} - \frac{\partial N_x}{\partial y}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial N_z}{\partial y} - \frac{\partial N_y}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial N_x}{\partial z} - \frac{\partial N_z}{\partial x}\right)\vec{k},$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$ - одиничні вектори, спрямовані по осях координат *x, y, z.*

Внаслідок того, що у рівнянні (А) $\vec{g}$ - постійний вектор, маємо:

$$\operatorname{rot} g = 0.$$

Далі:

$$\operatorname{grad} p = \frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}.$$

Зробивши операцію «вихору» над grad*p,* отримаємо:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} p = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial y\,\partial x}\right)\vec{k} + \ldots = 0.$$

В результаті операції «вихору», отже, член $\left(\vec{g} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p\right)$ в рівнянні (А) виключається і воно набуває наступного вигляду:

$$\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial\tau} + \operatorname{rot}\left(\vec{\omega},\operatorname{grad}\right)\vec{\omega} = y\operatorname{rot}\nabla^2\vec{\omega}.$$

Рівняння Нав'є-Стокса можуть бути виведені і для стислих рідин. Перше з цих рівнянь (що відноситься до осі *0X*) має такий вигляд:

$$\begin{aligned}\rho\left(\omega_x\frac{\partial\omega_x}{\partial x} + \omega_y\frac{\partial\omega_x}{\partial y} + \omega_z\frac{\partial\omega_x}{\partial z}\right) &= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \\ +\mu\left[\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial x} + \frac{\partial\omega_y}{\partial y} + \frac{\partial\omega_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial\omega_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\omega_x}{\partial z^2}\right]&.\end{aligned} \tag{10}$$

Подібні ж рівняння мають місце для напрямків *0Y* і *0Z*. Рівняння (7) для нестислої рідини виходить з рівняння (10), якщо врахувати, що при ρ = const рівняння нерозривності буде:

$$\frac{\partial\omega_x}{\partial x} + \frac{\partial\omega_y}{\partial y} + \frac{\partial\omega_z}{\partial z} = 0.$$

До цих рівнянь приєднаємо ще й рівняння теплового балансу.

Тепло, яке поступає в аналізований одиничний об'єм при стані, що встановився, дорівнює такій самій кількості тепла, що відходить. До цього об’єму, як і у рівнянні (7), тепло підводиться внаслідок теплопровідності і з допомогою матеріальних частинок, що протікають через одиничний об’єм при одночасному його охолодженні. Якщо температура t цього об’єму не змінюється з часом, то загальна кількість підведеного тепла має дорівнювати нулю, і якщо врахувати наявність джерела тепла з інтенсивністю q_i (ккал/м^3), то ми прийдемо до наступного рівняння:

$$c\gamma\left(\omega_x\frac{\partial t}{\partial x}+\omega_y\frac{\partial t}{\partial y}+\omega_z\frac{\partial t}{\partial z}\right)=\lambda\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)+q_i, \qquad (11)$$

де c - теплоємність,

γ - щільність,

λ - теплопровідність.

У лівій частині рівняння (11) представлено кількість тепла в одиничному об’ємі, яке використовується для нагрівання на dt частинок, що протікають через паралелепіпед з ребрами dx, dy, dz.

Це тепло покривається за рахунок підведення тепла з навколишнього середовища (перший член правої частини рівняння) і джерела тепла q_i. Розділивши обидві частини рівняння на $c\gamma$, отримаємо:

$$\omega_x\frac{\partial t}{\partial x}+\omega_y\frac{\partial t}{\partial y}+\omega_z\frac{\partial t}{\partial z}=a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)+\frac{q_i}{c\gamma}, \qquad (12)$$

або у векторній формі $\left(\vec{\omega},\mathrm{grad}\,t\right)=a\nabla^2 t+\dfrac{q_i}{c\gamma}$,

де a - коефіцієнт температуропровідності.

Рівняння (1), (7), (8), (9) та (12) утворюють систему з п'яти диференціальних рівнянь із частинними похідними.

Ці рівняння разом із граничними умовами повністю описують процес руху в'язкої рідини.

Поблизу стінки потік є ламінарним, отже, передача тепла відбувається в результаті теплопровідності, і маємо за відомим рівнянням:

$$dq=-\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_F dF, \qquad (13)$$

де dF - поверхня теплообміну;

n - нормаль до dF;

$\left(\dfrac{\partial t}{\partial n}\right)_F$ - температурний градієнт рідини у стінки.

Так само слід мати на увазі початкові умови, як, наприклад, розподіл швидкості і температури в поперечному перерізі трубопроводу біля місця входу.

Кількість тепла, що передається, виражають зазвичай за допомогою коефіцієнта тепловіддачі α, ккал/м^2×год×град. Користуючись наступною формулою Ньютона:

$$Q = \alpha\left(t_F - t_0\right) F\ \tau \text{, (ккал)}, \tag{14}$$

або

$$\frac{Q}{\tau} = q = \alpha\left(t_F - t_0\right) F \text{ , (ккал/год)}. \tag{14'}$$

Незважаючи на те, що коефіцієнт тепловіддачі α не входить у диференціальні рівняння (1)-(13), він все ж таки є дуже корисним у теплових розрахунках і постійно застосовується в практичній роботі. Диференціюючи (14'), ми отримаємо:

$$dq = \alpha\left(t_F - t_0\right) dF = -\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_F dF \text{ ,} \tag{15}$$

де t_F – температура стінки;

t_0 - температура рідини.

Таким чином, маємо:

$$\alpha = -\frac{\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_F}{t_F - t_0}. \tag{16}$$

Ця залежність дозволяє коефіцієнт тепловіддачі α ввести в систему диференціальних рівнянь для конвективної теплопередачі.

Оскільки температурний градієнт $\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_F$ у формулі (16) залежить від температур стінки та рідини та від товщини прикордонного шару, тобто, від характеру (режиму) руху, то коефіцієнт α, отже, залежить від усіх величин, які містяться в рівняннях (1)-(13).

2 ТЕОРІЯ ПОДІБНОСТІ

Непереборні труднощі, які зустрілися під час вирішення багатьох завдань з допомогою диференціальних рівнянь із частинними похідними, змусили інженерів шукати необхідні рішення експериментальним шляхом.

За дослідними даними, отриманими на одному апараті, робилися наближені висновки про можливу роботу іншого, - такого, але більшого апарату, що призвело до ідеї моделювання виробничих процесів і апаратів, що отримала своє вираження в теорії подібності.

Теорія подібності – це вчення про подібність явищ. Що стосується геометричної подібності двох фігур відношення всіх відповідних розмірів цих фігур постійне. Трикутники подібні між собою, якщо відповідні кути рівні, а подібні сторони пропорційні, тобто. якщо:

$$\frac{l_1'}{l_1} = \frac{l_2'}{l_2} = \frac{l_3'}{l_3} = A. \qquad (17)$$

Тут A - коефіцієнт пропорційності або константа подібності. Таким чином, умова (17) є математичним формулюванням геометричної подібності двох трикутників.

У двох кінематичних системах матиме місце кінематична подібність, якщо їх подібні частинки не пересуваються по геометрично подібним шляхам у проміжки часу, що відрізняються постійним множником, тобто, у цьому випадку ми можемо говорити про подібність руху, наприклад, двох потоків рідини. При динамічній подібності багатокутників сили, побудовані для пари подібних частинок, розташованих подібним чином у просторі та часі, мають бути подібні, тобто, відрізнятися лише мірилом.

Поняття подібності можна також поширити на теплові та фізико-хімічні процеси.

Використовуючи це поняття, можна вирішити багато практично важливих завдань. З геометрії відомо, що, використовуючи властивості подібності трикутників, можна визначити висоту вежі або ширину річки, не здійснивши безпосередніх їх вимірів.

Для використання понять про подібність необхідно визначити умови подібності розглянутих явищ. У цьому виникають такі питання:

1. Чи можливо відомі дослідні дані, наприклад, такі, які пов'язані з температурним полем, отримані шляхом вимірювання в одному апараті (на моделі), перенести точно на інший апарат (виробничий)?

2. Які умови, за яких допустимо таке перенесення чи перерахунок?

3. Як слід зробити, щоб отримані під час досліду моделі дані були правильно застосовані для виробничого апарату?

Перенесення дослідних даних з моделі на виробничий апарат принципово можливе у випадках, де є подібність обох процесів. Зрозуміло, ця подібність не

повинна обмежуватися лише геометричними формами; всі інші величини, які впливають, наприклад, на теплопередачу, повинні в моделі та у виробничому апараті перебувати у певних відносинах подібності.

Знаходження умов подібності провадиться наступним чином. Ми порівнюємо такі два випадки, при яких потоки для всіх величин, що зустрічаються в рівняннях (1) - (16), подібні.

а) Такими є координати *x, y, z* виробничого апарату, які щодо *x′, y′, z′* моделі можуть бути поступово збільшені.

Отже, ми зіставляємо потоки, які проходять через геометрично подібні тіла чи навколо них. Тоді всі відрізки меж потоку $l_1, l_2, l_3,...$ виробничого апарату, що відповідають $l'_1, l'_2, l'_3,...$ моделі, що будуть у певній пропорції збільшені:

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \frac{l'_1}{l_1} = \frac{l'_2}{l_2} ... = \frac{l'}{l} = A_l . \qquad (18)$$

Кути між відповідними відрізками залишаються незмінними.

При строгому дотриманні геометричних умов подібності, нерівності (шорсткості) поверхонь за формою та величиною у виробничому апараті та моделі повинні бути подібні. Однак практично ця умова навряд чи може бути виконана.

б) Поле швидкостей у виробничому апараті та моделі має бути подібним. У відповідних точках із координатами *x′, y′, z′* і *x, y, z* відношення

$$\frac{\omega'}{\omega} = A_\omega \qquad (19)$$

має бути однаковим, і крім того, напрямок відповідних швидкостей для виробничого апарату та моделі має бути те саме (рівність кутів). Не можна, отже, намагатися знайти подібність між ламінарним та турбулентним потоками, оскільки розподіл швидкостей в обох потоках є принципово різним.

Можна порівнювати лише ламінарні потоки між собою та турбулентні потоки між собою.

в) Наступною важливою величиною є температурний градієнт $\frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y}, \frac{\partial t}{\partial z}$.

Розподіл градієнтів має бути подібним, тобто.

$$\frac{\frac{\partial t'}{\partial x'}}{\frac{\partial t}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial t'}{\partial y'}}{\frac{\partial t}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial t'}{\partial z'}}{\frac{\partial t}{\partial z}} = A_{\mathrm{grad}\, t} . \qquad (20)$$

Звідси із (18) маємо:

$$dt' = A_{\mathrm{grad}t} A_l dt = A_t dt \,, \tag{21}$$

де

$$A_{\mathrm{grad}t} A_l = A_t \,. \tag{22}$$

Інтегруючи рівняння (21), отримаємо:

$$t' - t'_0 = A_t \left(t - t_0 \right) \tag{23}$$

або

$$\frac{t' - t'_0}{t - t_0} = A_t \,, \tag{24}$$

де температури t'_0 і t_0 представляють довільні постійні інтегрування для відповідних, але довільно вибраних точок x'_0, y'_0, z'_0 і x_0, y_0, z_0. У моделі та виробничому апараті температури t'_0 і t_0 можуть бути обрані, наприклад, біля входу в трубопровід або на великій відстані від стінки, залежно від доцільності. У рівняння подібності температурних полів входять, таким чином, не власно температури, а їх різниці по відношенню до температури довільно обраної точки.

З рівнянь (18), (20) та (21) випливає:

$$\frac{\dfrac{\partial t'}{\partial x'}}{\dfrac{\partial t}{\partial x}} = \frac{A_t}{A_l},$$

$$\frac{\dfrac{\partial^2 t'}{\partial x'^2}}{\dfrac{\partial^2 t}{\partial x^2}} = \frac{A_t}{A^2_l} \tag{25}$$

У багатьох випадках має значення дотримання подібності градієнтів концентрацій у матеріальних потоках, що проходять через апарати. Умови подібності концентраційних та температурних градієнтів аналогічні.

г) Статичний тиск входить у диференціальні рівняння у вигляді градієнтів $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ і т.д.; за аналогією з температурним полем можемо написати умови подібності до поля тиску;

$$\frac{p' - p'_0}{p - p_0} = A_p \,. \tag{26}$$

д) Подібність полів фізичних властивостей середовища обумовлює такі постійні співвідношення для всіх відповідних точок виробничого апарату та моделі:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = A_\alpha, \frac{a'}{a} = A_a, \frac{\mu'}{\mu} = A_\mu, \frac{\rho'}{\rho} = A_\rho, \frac{c'}{c} = A_c, \frac{\lambda'}{\lambda} = A_\lambda. \qquad (27)$$

Слід зазначити, що при виконанні умов подібності в повному об'ємі масштабні множники (числа) (20)—(27) можуть бути довільно обрані; тут після вибору деяких небагатьох величин визначаються інші. Це стає зрозумілим з наступного прикладу.

Якщо збільшити швидкість руху рідини на трубопроводі вдвічі, тобто. якщо покласти $A_\omega = \frac{\omega'}{\omega} = 2$, то перепад тиску p-p_0, внаслідок тертя, зростає, як відомо, пропорційно до квадрата швидкості, тобто. $A_p = \frac{p' - p'_0}{p - p_0} = 4$, і нам, очевидно, слід прийняти $Ap = 4$ та масштабний множник Ap у разі визначається через подібність швидкісних полів.

Користуючись цими міркуваннями, приходимо до висновку, що кількість незалежних масштабних множників у порівнянні з наведеними в рівняннях (18) - (27) може істотно скоротитися в силу додаткових умов.

Якщо дві системи подібні, то відношення будь-яких подібних величин у межах кожної системи, що характеризують той чи інший її стан, є безрозмірним та постійним для обох систем. Нехай, наприклад, фізичний стан однієї із систем характеризується деякими величинами R_1, R_2, …R_n, а інший, подібної до неї, системи - величинами r_1, r_2, …r_n.Тоді умова подібності вимагає рівності:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1}{r_2} = i.$$

Інакше висловлюючись, відношення подібних величин лише в одній системі дорівнює їх відношенням у подібній системі. Ці постійні безрозмірні відносини називаються інваріантами подібності та позначаються символом i.

Інваріанти подібності, що є відношенням простих однорідних величин, наприклад, лінійних розмірів $\frac{l}{d}$, тиску $\frac{p_1}{p_2}$, в'язкостей $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ і т. д., називаються симплексами подібності.

Інваріанти подібності можуть бути виражені більш складними безрозмірними відносинами, складеними з декількох простих параметрів, наприклад $\frac{d\omega\rho}{\omega}$.

У цьому випадку вони називаються критеріями подібності. Критерії подібності можуть бути визначальними та не визначальними.

Визначальними критеріями є такі, у яких величини задані наперед умовами однозначності. Критерії, що містять потрібну величину, називаються не визначальними. Висновки та опис критеріїв подібності викладено нижче.

В основі теорії подібності лежать три теореми, які формулюються таким чином:

1-а теорема. Якщо фізичні процеси подібні один до одного, то однойменні критерії подібності цих процесів мають однакову величину.

2-а теорема. Рівняння, що описують фізичні процеси, можуть бути представлені у вигляді функціонального зв'язку між критеріями подібності.

3-я теорема (Теорема Кірпічова-Гухмана). Для того щоб фізичні процеси були подібні один до одного, необхідно і достатньо, щоб ці процеси були якісно однакові, а їх однойменні визначальні критерії — чисельно однакові. Якісно однаковими називаються такі процеси, математичний опис яких у всьому збігається, крім іменованих чисел які у є них.

3 ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ ТЕПЛООБМІНУ ДЛЯ МОДЕЛІ

Диференціальні рівняння теплообміну для моделі ми напишемо відповідно до рівнянь пункту 1 цього посібника, причому всі вхідні величини забезпечимо штрихами, на відміну від величин для виробничого апарату.

Вважаючи $q_i = q_i' = 0$, отримаємо (для осі *0X'*):

$$\frac{\partial\left(\rho'\omega_x'\right)}{\partial x'} + \frac{\partial\left(\rho'\omega_y'\right)}{\partial y'} + \frac{\partial\left(\rho'\omega_z'\right)}{\partial z'} = 0. \tag{28}$$

$$\rho'\left(\omega_x'\frac{\partial\omega_x'}{\partial x'} + \omega_y'\frac{\partial\omega_x'}{\partial y'} + \omega_z'\frac{\partial\omega_x'}{\partial z'}\right) = \rho' g_x' - \frac{\partial p'}{\partial x'} + \\ +\mu'\left[\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial\omega_x'}{\partial x'} + \frac{\partial\omega_y'}{\partial y'} + \frac{\partial\omega_z'}{\partial z'}\right) + \frac{\partial^2\omega_x'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\omega_x'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\omega_x'}{\partial z'^2}\right]. \tag{29}$$

Подібні рівняння можна скласти і для проекцій на осі *0Y'* і *0Z'*. Аналогічно до рівняння (12) маємо:

$$\omega_x'\frac{\partial t'}{\partial x'} + \omega_y'\frac{\partial t'}{\partial y'} + \omega_z'\frac{\partial t'}{\partial z'} = a'\left(\frac{\partial^2 t'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 t'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 t'}{\partial z'^2}\right). \tag{30}$$

$$\alpha' = -\frac{\lambda'\left(\frac{\partial t'}{\partial n'}\right)_F}{t_F' - t_0'}. \tag{31}$$

У ці рівняння ми можемо, згідно зі співвідношенням (20) - (27), підставити $x' = A_l x,\ \omega' = A_\omega \omega,\ \rho' = A_\rho \rho$, де величини без штриха відносяться до виробничого апарату. Таким чином, отримуємо з рівняння (28):

$$\frac{A_\rho A_\omega}{A_l}\left[\frac{\partial(\rho\omega_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\omega_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho\omega_z)}{\partial z}\right]=0. \tag{32}$$

З рівняння (29) випливає:

$$\begin{gathered}\frac{A_\rho A^2{}_\omega}{A_l}\rho\left(\omega_x\frac{\partial\omega_x}{\partial x}+\ldots\right)=A_\rho A_g \rho g_x-\frac{A_\rho}{A_l}\frac{\partial p}{\partial x}+\\ +\frac{A_\mu A_\omega}{A^2{}_l}\mu\left[\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial x}+\ldots\right)+\frac{\partial^2\omega_x}{\partial x^2}+\ldots\right]=0\end{gathered}. \tag{33}$$

Аналогічні рівняння виходять для напрямів *0Y* і *0Z*. З рівняння (30) маємо:

$$A_\omega\frac{A_t}{A_l}\left(\omega_x\frac{\partial t}{\partial x}+\ldots\right)=\frac{A_\lambda A_t}{A_c A_\rho A_g A_l^2}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\ldots\right). \tag{34}$$

Рівняння (31) дає:

$$A_\alpha\alpha=-\frac{A_\lambda}{A_l}\lambda\frac{\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_F}{t_F-t_0}. \tag{35}$$

Вважатимемо подібними лише такі процеси, для яких масштабні значення *Al, A_ω, As,* і т.д. такі, що множники, які стоять перед дужками в рівняннях (32) - (35), однакові, тобто.

$$\frac{A_\rho A_\omega^2}{A_l}=A_\rho A_g=\frac{A_p}{A_l}=\frac{A_\mu A_\omega}{A^2{}_l}. \tag{36}$$

$$A_\omega\frac{A_t}{A_l}=\frac{A_\lambda A_t}{A_c A_\rho A_g A_l^2}. \tag{37}$$

$$A_\alpha=\frac{A_\lambda}{A_l}. \tag{38}$$

Отже, якщо чисельні значення Al, A_ω, A_ρ, задовольняють рівнянням (36)-(38), то в рівняннях (32)-(35) масштабні множники можуть бути скорочені і для моделі залишається система диференціальних рівнянь, які повністю ідентичні рівнянням для виробничого апарату, а саме - рівнянням (1), (7), (8), (10) та (12).

Отже, інтеграли диференціальних рівнянь для апарату та моделі також будуть ідентичні. Це означає, що тільки в цьому випадку поширення потоків зі швидкісними та температурними полями протягом моделі та виробничого апарату здійснюється однаково.

Звідси випливає таке важливе становище.

Подібними процесами теплообміну в стані за відсутності джерел тепла є тільки такі, у яких масштабні множники задовольняють п'яти рівнянь (36)-(38).

Таким чином, з-поміж масштабних множників п'ять виражаються через інші за допомогою рівнянь (36) - (38).

Тепер представимо рівняння (36) - (38) в більш зручній формі - у вигляді рівнянь в умовах подібності.

4 ГІДРОДИНАМІЧНА ПОДІБНІСТЬ

З рівнянь (36), виведених із рівняння гідродинаміки, маємо:

$$\frac{A_\rho A_\omega^2}{A_l} = \frac{A_\mu A_\omega}{A_l^2}$$

або

$$\frac{A_\rho A_\omega A_l}{A_\mu} = 1.$$

Підставивши замість A_ρ, A_ω і т.д. їх значення із рівнянь (27), отримаємо:

$$\frac{\rho\omega l}{\mu} = \frac{\rho'\omega' l'}{\mu'}$$

або

$$\frac{\omega l}{\nu} = \frac{\omega' l'}{\nu'}, \qquad (39)$$

де ν' - кінематична в'язкість.

Рівність комбінації $\frac{\omega l}{\nu}$ для моделі та виробничого апарату виражає таким чином необхідну умову подібності потоків.

Інваріант $\frac{\omega l}{\nu}$ називається критерієм Рейнольдса і позначається Re:

$$\frac{\omega l}{\nu} = \mathrm{Re}.$$

З рівнянь (36) також маємо

$$\frac{A_\rho A_\omega^2}{A_l} = \frac{A_p}{A_l}$$

звідки аналогічно до попереднього:

$$\frac{p - p_0}{\rho\omega^2} = \frac{p' - p_0'}{\rho'\omega'^2}. \qquad (40)$$

Цей критерій подібності названий ім'ям Ейлера:

$$\frac{p - p_0}{\rho\omega^2} = \mathrm{Eu}.$$

З тих самих рівнянь (36) вибираємо третю рівність:

$$A_\rho A_g = \frac{A_\mu A_\omega}{A_l^2}.$$

Звідси слідує що:

$$\frac{\rho g l^2}{\mu\omega} = \frac{\rho' g' l'^2}{\mu'\omega'}.$$

Помножуючи на рівність (39) та враховуючи, що $\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{\rho_0'}{\rho'}$ отримаємо:

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho}\frac{g l^3}{\nu^2} = \frac{\rho' - \rho_0'}{\rho'}\frac{g' l'^3}{\nu'^2}.$$

де ρ_0 - початкова щільність.
Цей критерій називається критерієм Грасгофа:

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho}\frac{g l^3}{\nu^2} = \mathrm{Gr}.$$

У тих випадках, коли підйомна сила обумовлюється різницею температур, ми маємо:

$$\frac{\rho-\rho_0}{\rho}=\beta\left(T_0-T\right),$$

де β - Коефіцієнт розширення.
Відповідно з цим:

$$\mathrm{Gr}=\frac{gl^4}{\nu^2}\beta\left(T_0-T\right).$$

Для ідеальних газів β визначається з рівняння стану ідеальних газів:

$$\beta=\frac{1}{T_0}.$$

Таким чином:

$$\mathrm{Gr}=\frac{gl^3\left(T_0-T\right)}{\nu^2T_0}.$$

При використанні даних, отриманих на моделі, слід задовольнити для всіх відповідних точок на моделі та у виробничому апараті три умови

$$\mathrm{Re}'=\mathrm{Re},\ \mathrm{Eu}'=\mathrm{Eu},\ \mathrm{Gr}'=\mathrm{Gr}. \qquad (41)$$

або, інакше:

$$\mathrm{Re}=\mathrm{idem},\ \mathrm{Eu}=\mathrm{idem},\ \mathrm{Gr}=\mathrm{idem}.$$

Однак теорія та практика показують, що при однорідних потоках у моделі та виробничому апараті встановлюються такі профілі швидкостей, які подібні між собою. Тому для того, щоб переконатися в подібності процесів, немає необхідності перевіряти наявність умов (41) для всіх подібних точок. Якщо, наприклад, у трубопроводі вздовж осі знайдено, що $\mathrm{Re}_{\text{ось}}=\mathrm{Re}'_{\text{ось}}$, де $\mathrm{Re}_{\text{ось}}=\frac{\omega_{ось}d}{\nu}$ для виробничого апарату та моделі, то відповідно до цього $\mathrm{Re}=\mathrm{idem}$ також і для решти точок перерізу потоку. Однорідними потоками називаються такі, що мають, наприклад, турбулентний режим руху, подібні початкові умови (профіль швидкостей при вході в апарат) та подібні крайові умови. Остання умова щодо швидкості руху завжди виконується з тієї причини, що швидкості у стінки як

моделі, так і у виробничому апараті завжди рівні нулю, тобто: $\omega'_{cm} = 0$ і $\omega_{cm} = 0$.

Інші умови подібності - геометрична подібність (включаючи і шорсткість) та ін, природно, повинні бути також виконані. Виникає питання: чи можливе взагалі дотримання умов подібності і в позитивному випадку – за яких обставин.

Якщо, наприклад, при протіканні рідини в трубопроводі (тверді межі) з'являються вільні поверхні рідини, то для їх обліку було б необхідно ввести додаткові умови подібності, що визначаються фізичними законами їх утворення. Це важливо наприклад, у процесах випаровування з утворенням бульбашок пари, де число, форма і величина бульбашок у моделі та у виробничому апараті, взагалі, залежать швидше за все не від масштабу довжини A_l у випарних апаратах, як від тиску, поверхневого натягу тощо. Таким чином, за вільних поверхонь неможливо одночасно виконати всі умови подібності. Те саме відбудеться, коли властивості речовини, як, наприклад, μ, ρ та ін, не є постійними, а змінюються з температурою вздовж потоку.

Для потоків, де ці проблеми немають місця, кількість умов подібності можна ще додатково скоротити, з наступних міркувань. Вздовж потоку перепад статичного тиску, що визначається з рівняння (40), $\mathrm{Eu} = \dfrac{p - p_0}{\rho\omega^2}$, буде змінюватися внаслідок:

1) перетворення потенційної енергії на кінетичну $(p - p_0)_\omega$,

2) тертя $(p - p_0)_{тр}$,

3) зміни висоти стовпа рідини в проміжку між аналізованими поперечними перерізами $(p - p_0)_H$.

Перша частина перепаду тиску $(p - p_0)_\omega$ прямо пропорційна квадрату швидкості, внаслідок чого ця частка критерію Ейлера при подібних полях тиску та швидкості для моделі та виробничого апарату стає рівною:

$$\frac{(p - p_0)_\omega}{\rho\omega^2} = \frac{(p' - p'_0)_\omega}{\rho'\omega'^2} = \mathrm{const}. \qquad (42)$$

Друга частина перепаду тиску при турбулентному режимі, як відомо з гідравліки, становить:

$$(p - p_0)_{тр} = \psi \frac{l}{d}\frac{\gamma\omega^2}{2g} = \frac{l}{d}\rho\omega^2 f_{тр}(\mathrm{Re})$$

або

$$\frac{(p - p_0)_{тр}}{\rho\omega^2} = \frac{l}{d} f_{тр}(\mathrm{Re})$$

та є функцією критерію Рейнольдса.

При ламінарному режимі маємо:

$$\left(p-p_0\right)_{тр}=\frac{4\mu l\omega}{r^2}=\frac{16\mu l\omega}{d^2}.$$

Помноживши чисельник та знаменник нарω,отримаємо:

$$\left(p-p_0\right)_{тр}=32\frac{l}{d}\frac{\rho\omega^2}{2}\frac{1}{\mathrm{Re}}=\frac{l}{d}\rho\omega^2 f_{тр}\left(\mathrm{Re}\right)$$

або

$$\frac{\left(p-p_0\right)_{тр}}{\rho\omega^2}=\frac{l}{d}f_{тр}\left(\mathrm{Re}\right), \qquad (43')$$

тобто, іншу функцію критерію Рейнольдса.

При подібних потоках $c\frac{l}{d}=\frac{l'}{d'}$ і $c\ \mathrm{Re}=\mathrm{Re}'$ і ця частина критерію Ейлера виявляється рівною для моделі та виробничого апарату.

Оскільки статичний тиск сам собою здебільшого не робить істотного впливу утворення потоку, ми можемо знехтувати величиною $\left(p-p_0\right)_H$. Це може бути зроблено стосовно всіх потоків стисливих рідин. Те ж залишається в силі і для газів при невеликому підвищенні тиску, так як стиском уздовж потоку (зміною щільності) можна знехтувати. З рівнянь (42), (43) і (44) випливає таким чином, що для таких подібних потоків умова $\mathrm{Eu}=\mathrm{idem}$ неминуче виконується, оскільки $\mathrm{Re}=\mathrm{idem}$. Умови подібності (41) скорочуються цим до двох, а саме:

$$\mathrm{Re}=\mathrm{idem}\ \text{та}\ \mathrm{Eu}=\mathrm{idem}.$$

5 ТЕПЛОВА ПОДІБНІСТЬ

Щоб зробити, аналогічно попередньому, диференціальні рівняння тепловіддачі для моделі та виробничого апарату ідентичними, необхідно мати рівні коефіцієнти рівняння (37):

$$\frac{A_\omega A_t}{A_l}=\frac{A_\lambda A_t}{A_c A_\rho A_g A_l^2}.$$

Звідси випливає:

$$\frac{\omega l}{\dfrac{\lambda}{c\rho g}}=\frac{\omega' l'}{\dfrac{\lambda'}{c'\rho' g'}}.$$

Замінивши $\frac{\lambda}{c\rho}$ через a (коефіцієнт температуропровідності), отримаємо критерій подібності Пекле:

$$\frac{\omega l}{a} = \frac{\omega' l'}{a'} = \mathrm{Pe}.$$

Таким чином, умовою теплової подібності для моделі та виробничого апарату є:

$$\mathrm{Pe} = \mathrm{idem}.$$

У цьому випадку утворюються подібні температурні поля до стінки, за умови, що температури стінки, як зовнішні умови, включаються до тієї ж температурної подібності. На цю обставину вказує співвідношення коефіцієнтів рівняння (35):

$$A_a = \frac{A_\lambda}{A_l}$$

або

$$\frac{al}{\lambda} = \frac{a'l'}{\lambda'}. \tag{44}$$

Це так званий критерій Нуссельта:

$$\mathrm{Nu} = \frac{al}{\lambda} \tag{45}$$

користування яким полегшує розрахунки з теплопередачі. Його чисельні значення всім потоків з однаковими Re, Gr і Pe рівні між собою залежать лише від значень цих величин. Отже, при геометрично подібних межах потоків:

$$\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Gr}, \mathrm{Pe}), \tag{46}$$

де f – невідома ще функція. Остання, однак, може бути визначена дослідним шляхом; при цьому, згідно (46), для геометрично подібних апаратів тільки три величини впливають на критерій Нуссельта, що представляє велике спрощення в порівнянні з безліччю значень, що характеризують потоки та середовище.

Замість критеріїв Re, Gr та Pe можна ввести й інші, які виходять внаслідок іншого комбінування рівнянь (36), (37) та (38).

Дуже зручним є критерій Прандтля, а саме:

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Re}} = \frac{\frac{\omega l}{a}}{\frac{\omega l}{\nu}} = \frac{\nu}{a}.$$

Цей критерій містить лише фізичні константи речовин, які знаходяться у русі, тоді як у критерії Re, Gr і Pe входять також розміри апарату і характеристика потоку. Отже, можна написати:

$$\mathrm{Nu} = f_0(\mathrm{Re}, \mathrm{Gr}, \mathrm{Pe}),$$

де f_0 - інша, встановлена дослідним шляхом, функція.

Критерій Нуссельта залежить також від геометричної форми апарату. Загалом критерій Нуссельта пов'язаний також із величиною, що виражає відношення довжин $\frac{l}{l_0}$. За l_0 приймається характерна довжина, наприклад, діаметр трубопроводу, а за l - розміри межі потоку.

Вводячи симплекс геометричної подібності $\frac{l}{l_0}$, отримуємо:

$$\mathrm{Nu} = f_1\left(\frac{l}{l_0}, \mathrm{Re}, \mathrm{Pe}, \mathrm{Gr}\right) \tag{47}$$

або

$$\mathrm{Nu} = f_2\left(\frac{l}{l_0}, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \mathrm{Gr}\right) \tag{48}$$

або

$$\mathrm{Nu} = f_3\left(\frac{l}{l_0}, \mathrm{Pe}, \mathrm{Pr}, \mathrm{Gr}\right). \tag{49}$$

Формули (47), (48) і (49) виражають ту саму закономірність. У практичній роботі маєперевагу те рівняння, яке є зручнішим для розрахунку.

Часто шуканою величиною служить коефіцієнт тепловіддачі *a* від стінки до будь-якого середовища. З рівнянь (45) та (48) знаходимо:

$$a = \frac{\lambda}{l}\mathrm{Nu} = \frac{\lambda}{l} f_2\left(\frac{l}{l_0}, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \mathrm{Gr}\right).$$

Наведені вище рівняння дійсні лише в тому випадку, якщо величини λ, c, ρ, μ та ін. по довжині потоку залишаються постійними, тому що тільки при цьому забезпечується сталість масштабних множників. Внаслідок того, що температура

впливає на ρ, λ, μ, суворе виконання умов подібності буває дуже рідко. Все ж таки вплив температури не настільки великий, особливо, коли при розрахунку беруть значення фізичних величин для середньої температури.

Для узагальнення результатів дослідів ці результати обробляються так щоб можна було їх виразити за умов подібності. Функціональна залежність між цими критеріями представляється у вигляді статечної функції, наприклад:

$$\mathrm{Nu} = C\,\mathrm{Re}^n\,\mathrm{Pr}^m,$$

де C, m і n - постійні та абстрактні числа. Такі залежності не можуть бути знайдені теоретично, вони визначаються експериментально. Прийоми знаходження таких залежностей полягають у наступному.

Допустимо, наприклад, що залежність між Re та Nu виражається рівнянням:

$$\mathrm{Nu} = C\,\mathrm{Re}^n.$$

Зображуючи цю залежність графічно на логарифмічній сітці, отримаємо пряму лінію:

$$\lg \mathrm{Nu} = \lg C + n \lg \mathrm{Re}.$$

Для спрощення представимо це рівняння у такому вигляді

$$Y = A + nX.$$

позначивши lgNu через Y, a lgC і lgRe, відповідно, через A і X. Величина n є тангенс кута нахилу прямої до осі $0X$.

Зі співвідношення $\mathrm{Nu} = C\,\mathrm{Re}^n$ знаходимо постійну $C = \dfrac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Re}^n}$.

Якщо точки, відповідні експериментальним даним, задовольняють це рівняння, тобто. якщо всі точки практично укладаються на пряму, то зроблене припущення про статечну залежність слід визнати справедливим. Якщо замість прямої виходить крива лінія, то її замінюють ламаною, і тоді стосовно окремих її ділянок значення C і n різні. Якщо, наприклад, при будь-яких інших постійних числах Pr, Gr, $\dfrac{l}{l_0}$ в рівнянні (48) необхідно знайти вплив на тепловіддачу числа Re, то, маючи на увазі статечний вид функції, можна написати:

$$\mathrm{Nu} = C_k\,\mathrm{Re}^n,$$

де $C_k = C\,\mathrm{Pr}^m\,\mathrm{Gr}^r \left(\dfrac{l}{l_0}\right)^q$

або, логарифмуючи, маємо:

$$\lg \mathrm{Nu} = \lg C_k + n \lg \mathrm{Re}.$$

Це рівняння представляється у вигляді прямої лінії у координатах lgNu і lgRe. Побудувавши цю пряму за результатами дослідів, знаходимо числові значення 1g*Ск* та показник *n*.Аналогічно можуть бути знайдені числові значення *m, r* і *q*.

6 ДИФУЗІЙНА ПОДІБНІСТЬ

Експериментально встановлено, що швидкість дифузії компонента *A* у нерухомому газі або рідині виражається такою залежністю:

$$G_A = -D \operatorname{grad} c_A, \tag{50}$$

де G_A - швидкість дифузії або потік маси на одиницю площі;
D - коефіцієнт дифузії;
c_A - концентрація маси дифузного компонента *A*.
Для мольних співвідношень матимемо:

$$N_A = -D \operatorname{grad} c_A, \tag{51}$$

де N_A - мольна швидкість дифузії компонента *A*;
C_A - мольна концентрація, тобто, число молей *A* на одиницю об'єму середовища.
При ідеальному газі залежність між парціальним тиском та мольною концентрацією представляється у такому вигляді:

$$p_A = C_A RT. \tag{52}$$

Таким чином, для дифузії газу при постійній температурі отримаємо:

$$N_A = -\frac{D}{RT} \operatorname{grad} p_A. \tag{53}$$

Формули (50), (51) і (53) справедливі в тому випадку, коли концентрація дифузного компонента мала.
Розглядаючи з погляду кінетичної теорії взаємну дифузію двох газів *A* і *B* в напрямку осі *z*, отримаємо:

$$N_A = n_A\omega_0 - \frac{1}{3}\lambda_A \frac{\partial n_A}{\partial z}\vec{v}_A, \tag{54}$$

де n_A - мольна щільність газу A;
ω_0 - загальна швидкість газової суміші у напрямку осі z;
λ_A - середня довжина вільного пробігу молекул A;
v_A - Середня мольна швидкість газу A.
Аналогічно для B маємо:

$$N_B = n_B\omega_0 - \frac{1}{3}\lambda_B \frac{\partial n_B}{\partial z}\vec{v}_B. \tag{55}$$

При постійному загальному тиску:

$$n_A + n_B = \text{const} = n$$

або

$$\frac{\partial n_A}{\partial z} + \frac{\partial n_B}{\partial z} = 0. \tag{56}$$

Виключаючи ω_0 з (54) та (55) при використанні (56), знайдемо:

$$n_B N_A - n_A N_B = -\frac{1}{3}\left(n_B\lambda_A\vec{v}_A + n_A\lambda_B\vec{v}_B\right)\frac{\partial n_A}{\partial z}. \tag{57}$$

Для випадку однакової та протиточної молекулярної дифузії двох газів повинні бути $N_A = - N_B$ і тому:

$$N_A = -\frac{1}{3}\frac{n_B\lambda_A\vec{v}_A + n_A\lambda_B\vec{v}_B}{n_A + n_B}\frac{\partial n_A}{\partial z}. \tag{58}$$

Позначивши коефіцієнт дифузії:

$$D = \frac{1}{3}\frac{n_B\lambda_A\vec{v}_A + n_A\lambda_B\vec{v}_B}{n_A + n_B} \tag{59}$$

отримаємо для (58)

$$N_A = -D\frac{\partial n_A}{\partial z}$$

або у загальному вигляді:

$$N_A = -D \operatorname{grad} n_A . \tag{60}$$

Останній вираз ідентичний (51), оскільки мольна концентрація C_A і мольна щільність n_A рівнозначні.

При дифузії газу A через нерухомий газ B маємо $N_B = 0$ і з (57) знайдемо:

$$N_A = -\frac{1}{3} \frac{n_B \lambda_A \vec{v}_A + n_A \lambda_B \vec{v}_B}{n_B} \frac{\partial n_A}{\partial z}$$

або

$$N_A = -\frac{n}{n_B} D \operatorname{grad} n_A , \tag{61}$$

де коефіцієнт дифузії D визначається за допомогою (59).

Вираз (61) може бути представлений у такому вигляді:

$$N_A = -\frac{p}{p_B} D \operatorname{grad} n_A \tag{62}$$

або

$$N_A = -\frac{p}{p_B} \frac{D}{RT} \operatorname{grad} p_A , \tag{63}$$

де p_B - парціальний тиск нерухомого газу B;

p - загальний тиск газової суміші, що приймається незмінним.

Якщо парціальний тиск p_A дифузного компонента A малий і p_B приблизно дорівнює p,то (63) може бути замінено рівністю (53):

$$N_A = -\frac{D}{RT} \operatorname{grad} p_A .$$

Для молекулярної дифузії, що встановилася, в напрямку однієї осі при кінцевому відрізку z з (51) після інтегрування знайдемо

$$N_A = -\frac{D\left(C_{A1} - C_{A2}\right)}{z} \tag{64}$$

та аналогічно (53):

$$N_A = -\frac{D}{RT} \frac{p_{A1} - p_{A2}}{z} . \tag{65}$$

Ці результати для дифузії в рідині та газі дійсні, як було зазначено вище, за умови, що концентрація або парціальний тиск дифузного компонента малі.

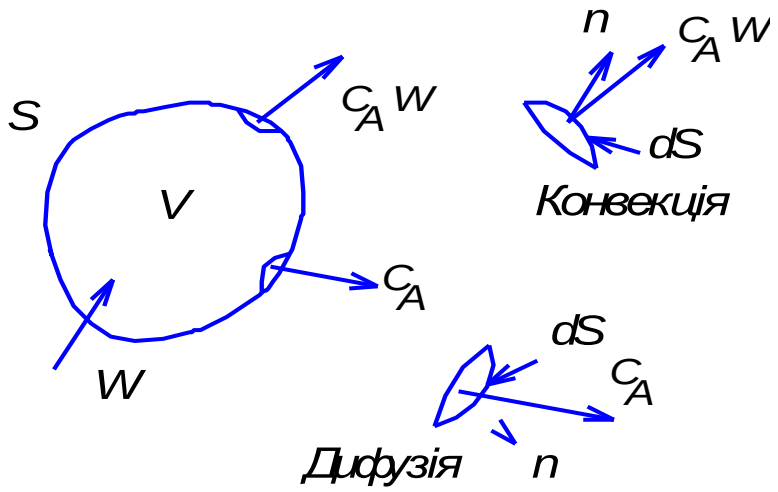


Рисунок 4 – Модель руху внаслідок дифузії та конвекції

Отримані вирази аналогічні таким для одномірної теплопровідності в твердих тілах при стані.

Однак для дифузії в нерухомому шарі зі значним парціальним тиском дифузного компонента повинні застосовуватися (62) або (63). З (63) для одномірної дифузії маємо:

$$N_A = -\frac{p}{p_B}\frac{D}{RT}\frac{dp_A}{dz}. \qquad (66)$$

При постійному загальному тиску $p_A + p_B = p$, звідки:

$$\frac{dp_A}{dz} = -\frac{dp_B}{dz}. \qquad (67)$$

Отже, рівняння (66) може бути записане так:

$$N_A = \frac{p}{p_B}\frac{D}{RT}\frac{dp_B}{dz}.$$

Після інтегрування від p_{B1} до p_{B2} знайдемо:

$$N_A = \frac{pD}{RTz}\ln\frac{p_{B2}}{p_{B1}}$$

або

$$N_A = \frac{D}{RT}\frac{p}{p_{Bm}}\frac{p_{B2}-p_{B1}}{z} = \frac{D}{RT}\frac{p}{p_{Bm}}\frac{p_{A1}-p_{A2}}{z}. \qquad (68)$$

де p_{Bm} - середня логарифмічна різниця парціальних тисків для нерухомого газу B.

Розглянемо тепер об'єм V всередині рідини, поверхня якого S (Рис. 4). Якщо масопередача компонента A має місце внаслідок дифузії, то у будь-якій точці на поверхні відбуватиметься рух маси зі швидкістю G_A на одиницю площі та відповідно до рівняння (50) можемо написати:

$$G_A = -D\,\mathrm{grad}\,c_A,$$

де c_A - концентрація або щільність речовини A.

Для швидкості накопичення речовини A всередині об'єму матимемо:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_V c_A dV.$$

Інтенсивність проходження речовини A через поверхню за рахунок конвекції за швидкості $\vec{\omega}$ для рідкої маси відповідно до формули Остроградського-Гаусса буде:

$$\oint_S c_A\vec{\omega}dS = \int_V \mathrm{div}\left(c_A\vec{\omega}\right)dV.$$

Швидкість виходу речовини A через поверхню за рахунок дифузії становить:

$$\oint_S G_A dS = \int_V \mathrm{div}\,G_A dV.$$

Підставляючи значення G_A з (50), отримаємо для правої частини останньої рівності:

$$-\int D\nabla^2 c_A dV.$$

При сталості маси дифузного компонента A ми повинні мати:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_V c_A dV = -\int_V \mathrm{div}\left(c_A\vec{\omega}\right)dV + \int_V D\nabla^2 c_A dV$$

або для нескінченно малого об’єму:

$$\frac{\partial c_A}{\partial \tau} + \operatorname{div}\left(c_A \vec{\omega}\right) + = D\nabla^2 c_A . \qquad (69)$$

Це рівняння подібне до рівняння безперервності (37); тут є додатковий член $D\nabla^2 c_A$, що описує молекулярну дифузію.

Вираз (69) може бути записаний у такому вигляді:

$$\frac{Dc_A}{d\tau} + c_A \operatorname{div}\vec{\omega} = D\nabla^2 c_A , \qquad (70)$$

де символ $D\frac{c_A}{d\tau}$ як і раніше, є повна, або субстанційна, похідна c_A по τ, тобто.

$$\frac{Dc_A}{d\tau} = \frac{\partial c_A}{\partial \tau} + \vec{\omega}\nabla c_A .$$

Якщо рідина нестисла і, отже, щільність рідкої суміші постійна, то $\operatorname{div}\vec{\omega} = 0$ і (70) набуде наступного вигляду:

$$\frac{\partial c_A}{\partial \tau} + \vec{\omega}\nabla c_A = D\nabla^2 c_A . \qquad (71)$$

Остання рівність є основним рівнянням масопередачі в потоці рідини. При стані матимемо:

$$\vec{\omega}\nabla c_A = D\nabla^2 c_A . \qquad (72)$$

При двох потоках із геометрично подібними межами ми можемо знайти умови подібності до масопередачі. Нехай W_1 - характерна швидкість, L - характерна довжина та ρ - щільність рідкої суміші.

Як і раніше, введемо безрозмірні групи величин:

$$\omega' = \frac{\omega}{W_1} \text{ і т.д.; } x' = \frac{x}{L} \text{ і т.д. } \tau' = \frac{W_1 \tau}{L}; c'_A = \frac{c_A}{\rho} .$$

Тоді (71) може бути представлено у безрозмірному вигляді:

$$\frac{\rho W_1}{L}\frac{\partial c'_A}{\partial \tau'} + \frac{\rho W_1}{L}\left(\vec{\omega}'\nabla' c'_A\right) = \frac{\rho D}{L^2}\nabla'^2 c'_A$$

або

$$\frac{\partial c'_A}{\partial \tau'} + \vec{\omega}'\nabla' c'_A = \frac{\rho D}{W_1 L}\nabla'^2 c'_A. \qquad (73)$$

Для даних граничних умов рішення (73) залежить тільки від $\frac{D}{W_1 L}$.

Зворотне відношення $\frac{W_1 L}{D}$ є аналог критерію Рейнольдса $\frac{W_1 L}{\nu}$. Цей критерій дає міру відносних величин масопередачі за рахунок конвекції масопередачі за допомогою дифузії.

Відзначаючи справедливість рівності:

$$\frac{W_1 L}{D} = \frac{W_1 L}{\nu}\frac{\nu}{D}$$

знайдемо, що умовою повної подібності для руху рідини та масопередачі у двох випадках примусової конвекції при геометрично подібних межах є рівність чисел Рейнольдса та відношення $\frac{\nu}{D}$. Величина $\frac{\nu}{D}$ відома під назвою критерію Шмідта Sc є аналогом критерію Прандтля в теплопередачі. Подібно до критерію Прандтля, він включає тільки величини фізичних властивостей рідини.

Звертаючись до (50), ми можемо для масопередачі виділити множник $\frac{G_A L}{D\Delta c_A}$, де Δc_A - загальна різницю концентрацій; для мольних відносин $\frac{N_A L}{D\Delta C_A}$. Ці безрозмірні групи величин аналогічні критерію Нуссельта теплопередачі.

З рівнянь (7) і (73) ми можемо зробити висновок, що для масопередачі за допомогою примусової конвекції в геометрично подібних системах:

$$\frac{G_A L}{D\Delta c_A}\frac{N_A L}{D\Delta C_A} = f\left(\mathrm{Re}, \mathrm{Sc}\right). \qquad (74)$$

Якщо за аналогією з теплопередачею приймемо для коефіцієнта масопередачі

$$a_\partial = \frac{G_A}{\Delta c_A} = \frac{N_A}{\Delta C_A}$$

то безрозмірні величини коефіцієнта масопередачі у рівнянні (74) може бути написані так:

$$\frac{a_\partial L}{D} = f\left(\mathrm{Re}, \mathrm{Sc}\right). \qquad (75)$$

Для дифузії газів у обчислення зазвичай використовують величину парціального тиску замість значення концентрації. В цьому випадку:

$$a_G = \frac{N_A}{\Delta p_A}. \tag{76}$$

Для критерію Нуссельта отримаємо:

$$\frac{a_G LRT}{D} = f\left(\mathrm{Re}, \mathrm{Sc}\right). \tag{77}$$

Ще одна комбінація параметрів для масопередачі має такий вигляд:

$$\frac{G_A}{W_1 \Delta c_A} = \frac{N_A}{W_1 \Delta C_A} = \frac{a_\partial}{W_1}. \tag{78}$$

Ця безрозмірна група величин є аналогом критерію Стантона теплопередачі.

Відповідно до рівняння (74) ми можемо написати:

$$\frac{a_\partial}{W_1} = f\left(\mathrm{Re}, \mathrm{Sc}\right). \tag{79}$$

Для газоподібних речовин матимемо:

$$\frac{a_G RT}{W_1} = f\left(\mathrm{Re}, \mathrm{Sc}\right). \tag{80}$$

Критерій St виражає відношення дійсної швидкості масопередачі при комбінованому процесі дифузії та конвекції до потоку маси компонента *A*, розповсюджується в ламінарному струмені, що має швидкість W_1. Критерій Нуссельта, з іншого боку, є відношенням дійсної швидкості масопередачі для даних умов до гіпотетичної швидкості масопередачі, що має місце при чистій дифузії з концентраційним $\mathrm{grad}\, d\,\frac{\Delta c_A}{L}$.

Експериментальне вивчення питання, що тут розглядається, з подальшою обробкою результатів призводить до критеріальних формул для масопередачі, наведених у табл. 1.1 із графіком (рис. 5).

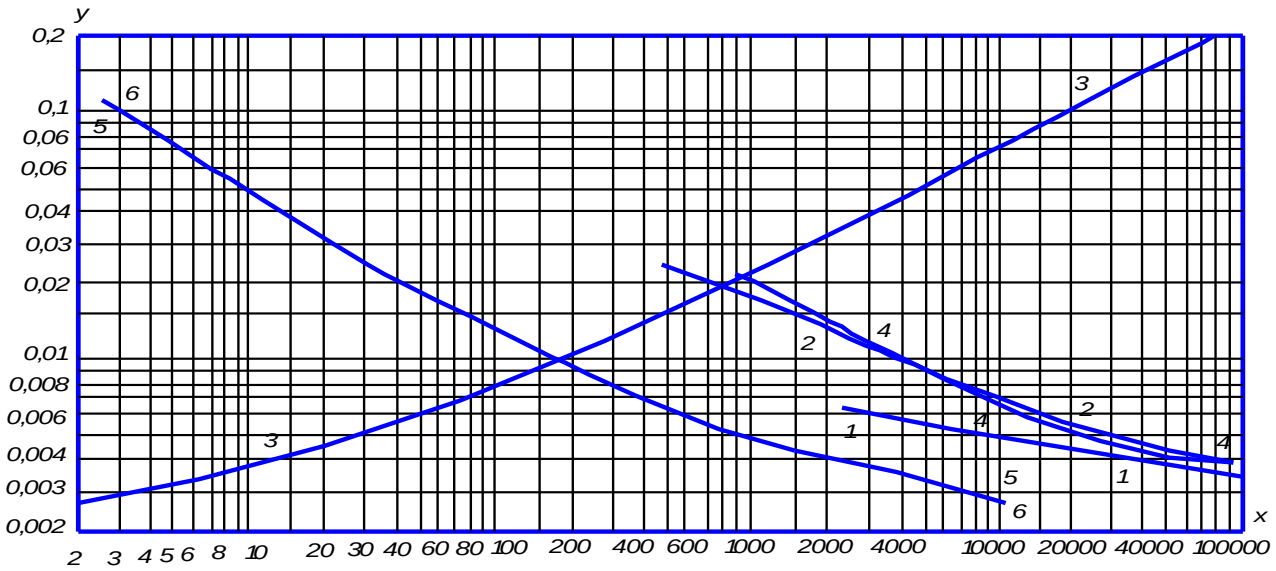


Рисунок 5 – Залежність критеріїв при масопередачі

Таблиця 1.1 – Значення критеріїв

Критерій	Умови руху потоку	X	Y	Межі Sc
1	Всередині труб.	Re	$j_D = \frac{\alpha_G P}{G_M}\mathrm{Sc}^{2/3} = \frac{\alpha_x}{L_M}\mathrm{Sc}^{2/3}$	0,6-3000
2	Рух газів через пучок труб.	Re	$j_D = \frac{\alpha_G P}{G_M}\mathrm{Sc}^{0,56}$	0,6-2,6
3	Газовий потік, що омиває сферичне тіло.	Re Sc2/3	$j_D = \frac{\alpha_G dp 10^{-3}}{D}$	0,6-2,7
4	Рух газів паралельно плоским стінкам.	Re	$j_D = \frac{\alpha_G P}{G_M}\mathrm{Sc}^{2/3}$	0,6-2,1
5	Рух рідин через насадку.	Re/ε	$j_D 10^{-1} = \frac{\alpha_x}{L_M}\mathrm{Sc}^{0,58}10^{-1}$	164-10690
6	Рух газів через насадку.	Re	$j_D 10^{-1} = \frac{\alpha_y}{G_M}\mathrm{Sc}^{2/3}10^{-1}$	0,6

де j_D - безрозмірний комплекс величин = f(Re, Sc)
α_x - коефіцієнт масопередачі для рідин, моль/м^2 год мол. частка;
α_G - коефіцієнт масопередачі для газів, моль/м^2 год (моль/од. об'єму);
α_y - коефіцієнт масопередачі для газів, моль/м^2 год (масаА/масаВ);
dp - діаметр частинок;
P - тиск;
G_M - швидкість газу, кмол/м^{2}год;
L_M - швидкість рідини, кмол/м^{2}год;
ε - порізність насадки.

7 ДИФУЗІЯ У ТУРБУЛЕНТНОМУ ПОТОКУ. ЗВОЛОЖЕННЯ ПОВІТРЯ

Визначити швидкість випаровування води із посудини, встановленої у вигляді дна для газоходу, через який проходить повітря зі швидкістю 6 м/с. Площа поперечного перерізу квадратної судини 0,09м^2; температура води 37,8 °С. Температура повітря при 1 ат 60 °С, парціальний тиск водяної пари в повітрі 0,0315 ат. Середня молекулярна вага повітря 28,7. Щільність повітря:

$$\frac{28,7}{22,4}\frac{273}{273+60}=1,05\ \text{кг/ м}^3$$

В'язкість повітря μ= 0,0195 Па с або 0,07 кг/м год.

Довжина стінки судини *1 = 0,3м.*

Критерій Рейнольдса:

$$\mathrm{Re}=\frac{l\omega\gamma}{\mu}=\frac{0,3\cdot 6\cdot 1,05\cdot 3600}{0,07}=97500$$

Коефіцієнт дифузії D для паро-повітряної суміші при 25,9 °С становить D = 0,258 см^2/с.

У перерахунку на 60 °С отримаємо:

$$D=0,258\left(\frac{273+60}{273+25,9}\right)^{3/2}=0,306\ \text{см}^2/\text{сек}\ \text{ или }\ 0,11\ \text{м}^2/\text{год}.$$

Критерій Шмідта:

$$\mathrm{Sc}=\frac{\mu}{\gamma D}=\frac{0,07}{1,05\cdot 0,11}=0,608.$$

З рис. 5 та табл. 1.1 знайдемо (лінія 4):

$$j_D=0,0037=\frac{\alpha_G p_{B.CP}}{G_M}$$

причому

$$G_M=\frac{\omega\varphi}{M}=\frac{6\cdot 3600\cdot 1,05}{28,7}=790\ \text{кмоль/ м}^2\times\text{год}$$

Парціальний тиск водяної пари на поверхню води при 37,8 °С p_{Ai} = 0,0475ат.

Парціальний тиск водяної пари в газовому потоці p_{AG} = 0,0315ат.
Парціальний тиск повітря на поверхні розділу фаз:

$$p_{Bi} = 1 - 0,0475 = 0,9525 \text{ ат}.$$

Парціальний тиск повітря в газовому потоці:

$$P_{BG} = 1 - 0,0315 = 0,9685 \text{ ат.}$$

Отже, середній парціальний тиск повітря буде:

$$p_{B.CP} = \frac{0,9685 + 0,9525}{2} = 0,961 \text{ ат}$$

Коефіцієнт масопередачі становить:

$$\alpha_G = \frac{0,0037 G_M}{p_{B.CP} \text{Sc}^{2/3}} = \frac{0,0037 \cdot 790}{0,961 \cdot 0,608^{2/3}} = 4,18 \text{ кмоль/ м}^2 \times \text{год} \times \text{ат}$$

Кількість води, що випаровується відповідно до рівняння (76):

$$N_A = \alpha_G \Delta p_A = 4,18(0,0475 - 0,0315) = 0,67 \text{ кмоль/ м}^2 \times \text{год}$$

Швидкість випаровування води:

$$L = 0,67 \cdot 0,09 \cdot 18,02 = 0,98 \text{ кг/ год}$$

За дослідними даними ця величина становить 0,865.

8 ДИФУЗІЯ У ТУРБУЛЕНТНОМУ ПОТОКУ. ВИВІД РІВНЯННЯ ПОДІБНОСТІ

Дослідним шляхом для швидкості випаровування води з поверхні вологих круглих дисків різних діаметрів знайдено наступний вираз:

$$\frac{\omega \cdot d}{p_\partial - p_b} = 3,3 \cdot 10^{-7} (u \cdot d)^{0,56}$$

де ω - швидкість випаровування, гводи /см^2×с
p_∂ - тиск водяної пари при температурі на поверхні диска, мм рт. ст.;
p_b - парціальний тиск водяної пари в повітряному потоці, мм рт. ст.;
u - швидкість повітря, см/с;
d - діаметр диска, см.

Температура повітря за атмосферного тиску була 25 °С.

Перетворити цю емпіричну формулу до критеріального вигляду, прийнявши показник ступеня для критерію Шмідта S з рівним 2/3, щоб зробити даний вираз корисним для розрахунку швидкості випаровування інших рідин з поверхні диска.

Маємо:

$$pд - pb = \Delta p_{am} \cdot 760;\ \ \omega\,\text{г води/ см}^2\times\text{сек} = NA \cdot 18{,}02\,\text{моль води/ см}^2\times\text{сек}$$

Таким чином, отримаємо:

$$\frac{N_A \cdot 18{,}02d}{\Delta p_{am} \cdot 760} = 3{,}3 \cdot 10^{-7}\left(u \cdot d\right)^{0{,}56}$$

Крім того

$$N_A = \alpha_G \cdot \Delta p$$

звідки

$$\alpha_G = \frac{3{,}3 \cdot 10^{-7} \cdot 760 \cdot \left(u \cdot d\right)^{0{,}56}}{18{,}02d} = \frac{1{,}39 \cdot 10^{-5}\left(u \cdot d\right)^{0{,}56}}{d}$$

Далі із табл. 1-1 знайдемо:

$$j_D = \frac{\alpha_G \cdot M_{CP} \cdot p_{B.CP}}{u \cdot \gamma}\mathrm{Sc}^{2/3} = \frac{1{,}39 \cdot 10^{-5} \cdot \left(u \cdot d\right)^{0{,}56} \cdot \mathrm{Sc}^{2/3} \cdot M_{CP} \cdot p_{B.CP}}{d \cdot u \cdot \gamma} =$$

$$= \frac{1{,}39 \cdot 10^{-5} \cdot \mathrm{Sc}^{2/3} \cdot M_{CP} \cdot p_{B.CP} \cdot \left(\dfrac{\gamma}{\mu}\right)^{0{,}44}}{\gamma \cdot \left(\dfrac{d \cdot u \cdot \gamma}{\mu}\right)^{0{,}44}}.$$

Для умов досліду при M_{CP} = 29, μ = 0,00018 Па×с, Sc = 0,60, γ = 0,001186 г/см^3, $p_{B.Cp}$ = 0,95 ат. будемо мати:

$$j_D = \frac{1{,}39 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}60^{2/3} \cdot 29 \cdot 0{,}95 \cdot \left(\dfrac{0{,}001186}{0{,}00018}\right)^{0{,}44}}{0{,}001186 \cdot \mathrm{Re}^{0{,}44}} = \frac{0{,}527}{\mathrm{Re}^{0{,}44}}.$$

9 ТЕПЛО-ДИФУЗІЙНІ ПРОЦЕСИ СУШІННЯ ТВЕРДИХ ТІЛ ГАЗОМ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ШАРИ МАТЕРІАЛУ

Розглянемо шар твердої маси, через який проходить газ із вологістю Y_1 при швидкості G_c кг сухого газу/м^2×год. Максимальна швидкість сушіння $W_{макс}$ буде в тому випадку, якщо газ при виході з апарату насичений парами рідини при температурі адіабатного насичення і, отже, вологість Y_{aH}:

$$W_{макс} = G_C \cdot \left(Y_{aH} - Y_1\right), \tag{81}$$

де W - кількість вологи, що випаровується, кг вологи/м^2×год.

Зазвичай газ йде з вологістю Y_2, і швидкість сушіння будь-якої миті часу буде:

$$W = G_C \cdot \left(Y_2 - Y_1\right). \tag{82}$$

Для нескінченно малого перерізу шару матеріалу, де вологість газу змінюється на dY і кінцева його вологість становить Y, швидкість сушіння дорівнює:

$$dW = G_C dY = \alpha_Y \cdot dS \cdot \left(Y_{aH} - Y\right), \tag{83}$$

де α_Y - коефіцієнт масопередачі у газовій фазі, кг випаровуваємої вологи/м^2×год×ΔY;

S - поверхня контакту фаз, м^2/м^2 поперечного перерізу шару матеріалу.

Позначимо через a поверхню фазового контакту на одиницю об'єму шару матеріалу, товщина якого z_C; тоді отримаємо:

$$dS = a \cdot dz_C. \tag{84}$$

Рівняння (83) набуде наступного вигляду:

$$\int_{Y_1}^{Y_2} \frac{dY}{Y_{aH} - Y} = \int_0^z \frac{\alpha_Y \cdot a \cdot dz_C}{G_C} \tag{85}$$

звідки маємо:

$$\ln \frac{Y_{aH} - Y_1}{Y_{aH} - Y_2} = N = \frac{\alpha_Y \cdot a \cdot z_C}{G_C}, \tag{86}$$

де N- число ступенів масопередачі в газовій фазі шару матеріалу, що розглядається.

Середньою рушійною силою для процесу випаровування вологи буде середня логарифмічна різниця величин Y_{aH}-Y_1 і Y_{aH}-Y_2. Зіставляючи рівняння (81), (82) та (86), отримаємо:

$$\frac{W}{W_{макс}} = \frac{Y_2 - Y_1}{Y_{aH} - Y_1} = 1 - \frac{Y_{aH} - Y_2}{Y_{aH} - Y_1} = 1 - e^{-N} = 1 - e^{-\frac{\alpha_Y \cdot a \cdot z_c}{G_C}}. \qquad (87)$$

Остання рівність дає швидкість сушіння W за умови, якщо $\alpha_Y \times a$ і N відомі. Величина N встановлена для наступних спеціальних випадків.

1. Сушіння твердого матеріалу без пористості

Розмір часток від 2,00 до 0,075 мм, стосовно висоті шару матеріалу z>11,5 мм. Для цього випадку стала швидкість сушіння визначається за допомогою рівняння (81). Вираз (87) може бути використаний як для постійної, так і для змінної швидкості сушіння. Величина a змінюється із вмістом вологи, і тому зручніше визначати число ступенів сушіння за допомогою емпіричної формули:

$$N = \frac{0,332}{d^{0,35}} \left(\frac{d_p \cdot G}{\mu} \right)^{0,215} \left(X \cdot \gamma_{нас} \cdot z_c \right)^{0,64}, \qquad (88)$$

де dp - діаметр частинок, м;

$\gamma_{нас}$ - насипна щільність, кг сухого матеріалу/м^3;

G - масова швидкість газу, кг газу/м^2×год;

μ - в'язкість газу, кг/м×год;

X - вміст вологи у твердій масі;

dpG/μ - Критерій Рейнольдса.

Приклад. Коржик кристалічного осаду піддається сушінню повітрям, що проходить через шар цього матеріалу.

Частинки коржика не мають пористості, їх середній діаметр 0,203 мм. Внаслідок нерозчинності осаду у воді рівноважна вологість його дуже мала. Товщина шару осаду становить 178 мм; $\gamma_{нас}$ матеріалу 1360 кг сухої маси/м^3. Початкова вологість осаду 25 %, а кінцева 0,1 %. Швидкість проходження повітря через шар матеріалу 853 кг сухого повітря/мм^2×год при 32,2 °С і 50 % вологості.

Визначити час сушіння.

Маємо:

$$X_1 = \frac{0,025}{1 - 0,025} = 0,0256 \text{ кг води/кг сухої маси.}$$

$$X_2 = \frac{0,001}{1 - 0,001} = 0,001001 \text{ кг води/кг сухої маси.}$$

За допомогою діаграми *I-d* знайдемо:

Y_1 = 0,0158 кг води/кг сухого повітря, t_{aH} = 23,9 °С.
Y_{aH} = 0,0190 кг води/кг сухого повітря.

Для середнього значення потоку повітря маємо:

$$G = 853 + 853\frac{0,0158 + 0,0190}{2} = 867,85 \text{ кг/м}^2\times\text{год.}$$

Застосовуючи (81), отримаємо:

$$W_{макс} = 853 \cdot (0,0190 - 0,0158) = 2,74 \text{ кг води, що випаровується/м}^2\times\text{год.}$$

В'язкість повітря за середньої температури $\frac{23,85 + 32,2}{2} = 28$ °С становить μ = 0,018 Па×с бо 0,0425 кг/м×год.

Таким чином, для критерію Рейнольдса маємо:

$$\mathrm{Re} = \frac{d_P \cdot G}{\mu} = \frac{0,000203 \cdot 867,85}{0,0425} = 4,14.$$

Використовуючи (88), отримаємо число ступенів сушіння:

$$N = \frac{0,332 \cdot 4,14^{0,215} \cdot (X \cdot 1360 \cdot 0,0178)^{0,64}}{0,000203^{0,35}} = 59,1X^{0,64}.$$

Швидкість сушіння відповідно (87) буде:

$$W = 2,74 \cdot \left(1 - e^{59,1 \cdot X^{0,64}}\right).$$

Наступна таблиця дає значення швидкості сушіння *W* (у кг води/м^2×год) залежно від *X* (у кг води/кг сухої твердої маси) відповідно до останньої формули.

X	0,0256	0,02	0,015	0,010	0,008	0,006	0,004	0,002	0,001
W	2,722	2,720	2,680	2,605	2,560	2,438	2,240	1,830	1,360

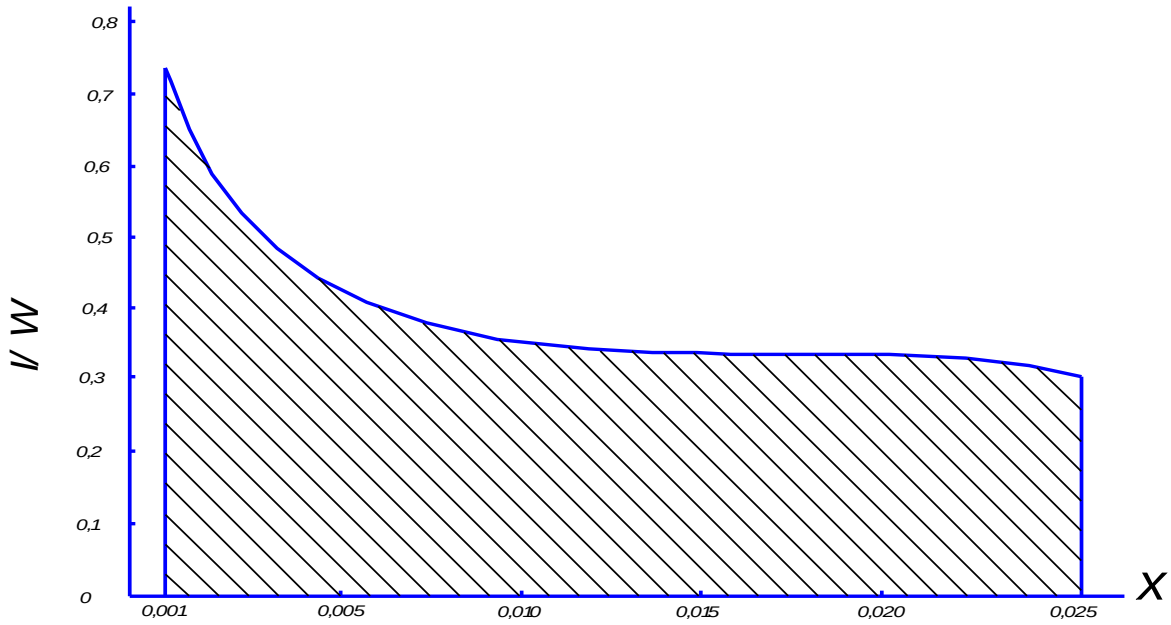


Рисунок 6 – Крива швидкості сушіння

За цими табличними даними на рис. 6 зображено криву швидкості сушіння. Тривалість сушіння визначиться при знаходженні площі під кривою, побудованої в координатах 1/W щодо *X*:

$$\tau = \int_0^{\tau} d\tau = \frac{L}{A}\int_{X_2}^{X_1} \frac{dX}{W}.$$

Величина площі під цією кривою становить 0,0097. Так як:

$$\frac{L}{A} = 1360 \cdot 0,0178 = 24,2 \quad \text{кг сухої твердої маси/м}^2$$

той час сушіння складає:

$$\tau = 24,2 \times 0,0097 = 0,235 \text{ год або} \sim 14 \text{ хв}.$$

2. Сушіння пористих тіл

Розмір часток від 3,0 до 20,0 мм стосовно висоті шару матеріалу від 10,0 до 65 мм.

Під час сушіння при постійній швидкості газ іде ненасиченим, і ця швидкість процесу визначається за допомогою (87). Величина α_Y може бути знайдена з формули:

$$\alpha_Y = \frac{j_D \cdot G_c}{\mathrm{Sc}^{2/3}} \qquad (89)$$

причому j_D, своєю чергою, обчислюється з допомогою кривих на рис. 5. Розмір поверхні контакту фаз то, можливо прирівняна величині поверхні частинок. При сушінні твердих тіл повітрям критерій Шмідта Sc = 0,6.

Приклад. Гранули вологого пористого каталізатора, що мають форму циліндрів діаметром 13,45 мм та висотою 12,85 мм, піддаються сушінню в апараті при пропущенні повітря через шар матеріалу. Каталізатор у шарі заввишки 50,8 мм, рахуючи на сухий залишок, розташований на ситчастих деках. Швидкість проходження повітря дорівнює 3900 кг сухого повітря/м^2×год при 82 °С, вологість повітря 0,01 кг води/кг сухого повітря. Насипна щільність каталізатора 605 кг сухого матеріалу/м^3, а поверхня його частинок становить 282 м^2/м^3 шару каталізатора.

Визначити швидкість сушіння, а також вологість та температуру повітря при виході з апарату протягом періоду постійної швидкості сушіння.

Маємо Y_1 = 0,01 кг води/кг сухого повітря.

З діаграми *I-d*,знаходимо вологість повітря у стані насичення.

Y_{aH} = 0,031 кг води/кг сухого повітря при відповідній температурі адіабатного насичення t_{aH} = 32,2 °С.

Середня швидкість повітря:

$$C = 3900 + 3900\frac{0,01 + 0,031}{2} = 3978 \text{ кг/м}^2\times\text{год}.$$

Середня в'язкість повітря μ = 0,019 Па×с або 0,0685 кг/м×год.

Поверхня частинки каталізатора:

$$f = 0,785\times0,013452\times2+3,14\times0,01345\times0,01285 = 0,00083 \text{ м}^2.$$

Діаметр сферичної частки з такою ж поверхнею складає:

$$d = \sqrt{\frac{0,00083}{\pi}} = 0,0163 \text{ м}.$$

Знайдемо число Рейнольдса:

$$\mathrm{Re} = \frac{d_P \cdot G}{\mu} = \frac{0,0163 \cdot 3978}{0,0685} = 945.$$

Крива 6 на ртс. 1.5 дає j_D = 0,06.

Критерій Шмідта Sc для системи повітря – водяна пара Sc = 0,6. Використовуючи (89), отримаємо:

$$\alpha_Y = \frac{0,06 \cdot 3900}{0,6^{2/3}} = 330 \text{ кг води/м}^2\times\text{год.}$$

Число ступенів сушіння дорівнює:

$$N = \frac{\alpha_Y \cdot a \cdot z_c}{G_C} = \frac{330 \cdot 282 \cdot 0,0508}{3900} = 1,21.$$

Максимальна швидкість сушіння відповідно (81):

$$W_{макс} = G_C \cdot \left(Y_{aH} - Y_1\right) = 3900\left(0,031 - 0,01\right) = 82 = 82 \text{ кг води/м}^2\times\text{год.}$$

Застосовуючи (87), отримаємо:

$$\frac{W}{82} = \frac{Y_2 - 0,01}{0,031 - 0,01} = 1 - e^{-1,21}.$$

Звідки W = 57,5 кг води, що випаровується/м^2×год. Вологість повітря при виході із сушарки V_2 = 0,0162 кг води/кг сухого повітря.

За допомогою діаграми *I-d*, визначаємо температуру повітря, що виходить з апарату *t* = 66,5 °С.

Так як:

$$\frac{L_C}{A} = \gamma_C \cdot z_C = 605 \cdot 0,0508 = 30,8 \text{ кг сухої твердої маси/м}^2$$

то з рівняння матеріального балансу маємо для швидкості сушіння:

$$-\frac{dX}{d\tau} = W\frac{A}{L_C} = \frac{57,5}{30,8} = 1,87 \text{ кг води/кг сухого каталізатора×год.}$$

10 ПОВЕРХНЕВЕ ВИПАРОВУВАННЯ ВОЛОГИ ПРИ НЕРУХОМУ ПОВІТРІ

Шар води з поверхнею 1×1 м^2 перебуває у зіткненні з повітрям за нормальної температури 21,1 °С та відносної вологості 50 %. Температура поверхні води становить 32,2 °С.

Визначимо кількість води, що випаровується за 1 год із квадратного метра її поверхні, вважаючи повітря нерухомим. Молекулярні маси повітря і води приймаються відповідно рівними 29 і 18. Тиск дорівнює 1 ат.

Для повітря при 21,1 °С і 50 % відносної вологості:

$$p_{води} = 0{,}0126 \text{ кг/см}^2,$$
$$p_{пов} = 1{,}033\text{-}0{,}0126 = 1{,}02 \text{ кг/см}^2.$$

для повітря при 32,2 °С у стані насичення

$$p_{води} = 0{,}0485 \text{ кг/см}^2,$$
$$p_{пов} = 1{,}033 - 0{,}0485 = 0{,}985 \text{ кг/см}^2.$$

Значення для щільності, в'язкості, теплопровідності та теплоємності повітря візьмемо за середньої температури 26,6 °С:

$$\gamma = 1{,}185 \text{ кг/м}^2 \text{ або } \rho = 0{,}1205 \text{ кг}\times\text{с}^2/\text{м}^4$$
$$\mu = 0{,}0655 \text{ кг/м}\times\text{год або } 18{,}6\times10^{-7} \text{ кг/м}\times\text{с}$$
$$\lambda = 0{,}022 \text{ ккал/м}\times\text{год}\times\text{град}$$
$$Cp = 0{,}24 \text{ ккал/кг}\times\text{град}$$

Для критеріїв Грасгоффа та Нуссельта в даному випадку маємо:

$$\mathrm{Gr} = \frac{g \cdot l^3}{\nu^2}\left(\frac{\gamma_{mf}}{\gamma_{ms}} - 1\right)$$

де γ_{mf} і γ_{ms} позначають щільності суміші, відповідно, над поверхнею і біля самої поверхні рідини:

$$\mathrm{Nu} = \Phi\ (\mathrm{Gr}\times\mathrm{Pr})$$

причому на основі дослідних даних можна прийняти:

$$\mathrm{Nu} = 0{,}75\ (\mathrm{Gr}\times\mathrm{Pr})1/4.$$

Підставляючи відповідні величини, отримаємо:

$$\mathrm{Gr} = \frac{9{,}81 \cdot l^3}{\left(\frac{18{,}6 \cdot 10^{-7}}{0{,}1205}\right)^2} \left(\frac{29 \cdot 305{,}2}{29 \cdot 294{,}1} - 1\right) = 0{,}43 \cdot 10^8 \cdot l^3$$

і

$$\mathrm{Pr} = \frac{0{,}24 \cdot 18{,}6 \cdot 10^{-7} \cdot 3600 \cdot 9{,}81}{0{,}022} = 0{,}71$$

Таким чином:

$$\mathrm{Nu} = 0{,}75\ (0{,}43 \times 108 \times l^3 \times 0.71)\ 1/4 = 56{,}2 \times \mathrm{l}3/4$$

Коефіцієнт теплопередачі α дорівнює:

$$\alpha = 56{,}2 \cdot l^{3/4} \cdot \frac{0{,}22}{l} = \frac{1{,}24}{l^{1/4}} \text{ ккал/м}^2\times\text{год}\times\text{град}$$

Використовуємо для вологообміну (масопередачі) такий вираз

$$\frac{\alpha_M \cdot l}{D} = 0{,}75 \cdot (\mathrm{Gr})^{1/4} \cdot (\mathrm{Sc})^{1/4}$$

де D - коефіцієнт дифузії;

Sc – критерій Шмідта.

Розділивши критерії рівняння масопередачі на критеріальні рівняння для теплообміну, отримаємо:

$$\frac{\frac{\alpha_M \cdot l}{D}}{\frac{\alpha \cdot l}{\nu}} = \left(\frac{\mathrm{Sc}}{\mathrm{Pr}}\right)^{1/4} = \left(\frac{\mu \cdot \lambda}{C_p \cdot \mu \cdot \rho \cdot D}\right)^{1/4} = \left(\frac{\lambda}{C_p \cdot \rho \cdot D}\right)^{1/4}$$

Вирішуючи для α_M, знайдемо:

$$\alpha_M = \frac{\alpha \cdot D}{\lambda} \cdot \left(\frac{\lambda}{Cp \cdot \rho \cdot D}\right)^{1/4}$$

Після встановлення значення α будемо мати:

$$\alpha_M = \frac{1{,}24 \cdot D}{l^{1/4} \cdot \lambda} \cdot \left(\frac{\lambda}{Cp \cdot \rho \cdot D}\right)^{1/4}$$

Для коефіцієнта дифузії *D* з таблиць маємо: $D = 0{,}0992\ м^2/год$
Тоді:

$$\alpha_M = \frac{1{,}24 \cdot 0{,}0922}{l^{1/4} \cdot 0{,}022} \cdot \left(\frac{0{,}022}{0{,}24 \cdot 1{,}185 \cdot 0{,}0992} \right)^{1/4} = \frac{16{,}3}{l^{1/4}}\ м/год$$

Тут маємо випадок дифузії одного газу — водяної пари — до газового середовища, тобто. повітря, де дійсна така залежність для маси води, що випаровується:

$$N = \alpha_M \cdot \left(\frac{P}{R \cdot T \cdot P_{CP}} \right) \left(P_{A1} - P_{A2} \right)$$

При підстановці числових значень отримаємо:

$$N = \frac{16{,}3}{l^{1/4}} \cdot \left(\frac{1{,}033}{820 \cdot 299{,}6 \cdot \left(\frac{1{,}02 + 0{,}985}{2} \right)} \right) \left(0{,}0485 - 0{,}0426 \right) = \frac{0{,}0246}{l^{1/4}} \frac{кмоль}{м^2 \times год}$$

Так як *l = 1 м,*то величина масопередачі складеN ≈ 0,443 кг/м^2×год.

11 КОНДИЦІОНУВАННЯ РЕАКЦІЙНОЇ СУМІШІ В ПАРОВІЙ ФАЗІ. ПРИГОТУВАННЯ ПОВІТРЯНО-ПАРОВОЇ СУМІШІ ДЛЯ НЕПЕРЕРВНОГО ПАРОФАЗНОГО КАТАЛІТИЧНОГО ОКИСЛЕННЯ ТОЛУОЛУ

При проектуванні дослідної установки для дослідження процесу, що включає парофазне каталітичне окислення толуолу, передбачається можливість безперервного приготування суміші толуолу з повітрям, що містить 5 мол. % толуолу при 32,2 °С та 1 атм. Продуктивність апарату повітря 111 кг/год. Спосіб приготування суміші полягає в адіабатному охолодженні повітря толуолом, що випаровується, у вежі, наповненій насадковими сідлоподібними тілами, розміром 37,5 мм. Визначити розміри насадочної частини апарату.

Молекулярні маси, відповідно, повітря і толуолу становлять 29 та 92,1. При 5%-ної концентрації толуолу в суміші вміст толуолу на 1 кг повітря Y'_2 дорівнює:

$$Y_2' = \frac{5}{95} \cdot \frac{92{,}1}{29} = 0{,}1675 \frac{кг\ толуола}{кг\ воздуха}$$

Крім того, маємо: t_{G2} = 32,2 °С, $_{СВ}$ = 0,24 ккал/кг×град, C_A = 0,30 ккал/кг×град.

Тепловміст суміші:

$$C_{S2} = 0{,}24 + 0{,}30\times0{,}1675 = 0{,}29 \text{ ккал/кг×град}$$

Маємо:

$$t_{G2} - t_{нач} = \left(Y'_{нач} - Y'_2\right)\frac{\lambda_{нач}}{C_{S2}} = 32{,}2 - t_{нач} = Y'_{нач} - 0{,}1675\frac{\lambda_{нач}}{0{,}29}$$

Значення $t_{поч}$ та $Y'_{поч}$ визначаємо методом підбору та складають $t_{поч}$= 31,2 °С і $Y'_{поч}$ = 0,170 $\frac{\text{кг толуола}}{\text{кг воздуха}}$.

Теплота пароутворення толуолу при температурі насичення $\lambda_{поч}$= 102 ккал/кг. Для чистого повітря Y'_1 = 0 та отримаємо:

$$t_{G1} - 31{,}2 = \left(0{,}1700 - 0\right)\frac{102}{0{,}24}.$$

Таким чином, температура, до якої повітря, що надходить в апарат, має бути нагріте, становить t_{G1} = 103,5 °С.

Температура циркулюючого толуолу $t_{поч}$ = 31,2 °С.

Враховуючи, що найменший діаметр вежі приймають подумки рівним восьмиразовому розміру насадки, отримаємо:

$$D = 37{,}5\times8 = 300 \text{ мм} = 0{,}3 \text{ м}$$

Площа поперечного перерізу вежі

$$F = 0{,}785\times0{,}32 = 0{,}073 \text{ м}^2$$

і

$$G'_S = \frac{111}{0{,}0073} = 1520\,\frac{\text{кг повітря}}{\text{м}^2\times\text{год}}$$

Питомий об'єм повітря:

$$V_{H1} = \frac{22{,}4}{M}\cdot\frac{t+273}{273}\cdot\frac{1}{P} = \frac{22{,}4}{29}\cdot\frac{103{,}5+273}{273}\cdot\frac{1}{1} = 1{,}07\,\frac{\text{м}^3}{\text{кг повітря}}$$

Швидкість потоку повітря:

$$W = \frac{1520 \cdot 1,07}{3600} = 0,452 \text{ м/ сек}$$

Користуючись емпіричною формулою для коефіцієнта масопередачі стосовно системи повітря-вода, отримаємо для максимальної щільності зрошення 33 200 кг/м^2×год:

$$k_Y a = 0,5 \cdot G_S'^{0.39} \cdot L'^{0.48} = 0,5 \cdot 1520^{0,39} \cdot 33200^{0,48} = 13110 \text{ кг толуола/ м}^3 \times \text{год } \Delta Y'$$

Для інших паро-повітряних систем значення N змінюється обернено пропорційно величині критерію Шмідта в ступені 0,5. Критерій Шмідта системи повітря-вода становить Sc = 0,60, а системи повітря-толуол Sc = 2,0. Отже, маємо:

$$k_Y a = 13110 \cdot \left(\frac{0,6}{2,0}\right)^{0,5} = 7210 \text{ кг / м}^2 \times \text{год } \Delta Y'$$

Крім того:

$$2,303 \lg \frac{0,1700 - 0}{0,1700 - 0,1675} = \frac{7210 \cdot z}{1520}$$

звідки висота шару насадки z = 0,9м.

Загальна висота вежі повинна включати додатково 0,150 м для розпилення рідини, 0,150 м для насадки над розпилювачем, що вловлює частинки рідини (бризки) з газу, та 0,300 м для простору під ґратами, що підтримують насадку. Таким чином, висота вежі складає 1,5 м.

12 ВИВЕДЕННЯ РІВНЯННЯ ПРОТОЧНОЇ ЕКСТРАКЦІЇ

Процес екстрагування – процес дифузійний. Рушійною силою дифузії є різниця концентрацій розчиненої речовини в дотичних шарах рідини; внаслідок цього розчинена речовина переміщається у бік меншої концентрації.

В екстракційних процесах дифузії майже незмінно супроводжує рух або рідини-розчинника, або маси, що екстрагується, або тої та іншої. Ці фактори впливають істотно на процес екстрагування. Тому рівняння дифузії виявляється недостатнім для характеристики екстрагування у проточній системі. У нашому випадку має місце рух рідини-розчинника.

Диференціальне рівняння для дифузії в середовищі, що рухається, має вигляд:

$$D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right)=\omega_x\frac{\partial c}{\partial x}+\omega_y\frac{\partial c}{\partial y}+\omega_z\frac{\partial c}{\partial z}, \qquad (90)$$

де c - концентрація речовини в розчині;

D - коефіцієнт дифузії.

Це рівняння визначає розподіл концентрації в середовищі, що рухається, і аналогічно диференціальному рівнянню конвективної теплопередачі.

Оскільки, крім концентрації, змінною є ще швидкість, то рівняння (90) має розглядатися разом з диференціальними рівняннями руху рідини і нерозривності (суцільності) потоку при екстрагуванні.

Рівняння руху в даному випадку (рідина нестисла) має вигляд:

$$\rho\frac{\partial\omega_x}{\partial\tau}+\rho\left(\omega_x\frac{\partial\omega_x}{\partial x}+\omega_y\frac{\partial\omega_y}{\partial y}+\omega_z\frac{\partial\omega_z}{\partial z}\right)=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2\omega_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega_z}{\partial z^2}\right).$$

При встановленому русі $\frac{\partial\omega_x}{\partial\tau}=0$.

Для виведення рівняння нерозривності стосовно проточної екстракції приймемо наступні позначення:

c - концентрація видобутої речовини в рідині, кг/м^3;

z - вміст видобутої речовини в масі, що обробляється, кг/м^3,

V - кількість рідини, що проходить через апарат, м^3/м^2×год,

m - об’єм рідини на одиницю площі перерізу апарату та на погонний метр довжини (або висоти) апарату, м^3/м^2×м,

n - об’єм оброблюваної маси у тому ж вираженні, м^3/м^2×м.

Позначимо через dx нескінченно мале збільшення шляху x, проходить потоком вздовж апарату за час $\Delta\tau$. Розглянемо частину апарату між точками x і $x+dx$.

Через $\bar{c}$ позначимо середнє значення c протягом часу $\Delta\tau$.

Тоді $\bar{c}V\Delta\tau$ представляє собою кількість видобутої речовини яка надходить через перетин у точці x за час $\Delta\tau$ та $\bar{c}+d\bar{c}$ дорівнює середньому значенню c у точці $x+dx$ протягом часу $\Delta\tau$.

Звідси $(\bar{c}+d\bar{c})V\Delta\tau$ дорівнює кількості видобутої речовини, що виходить через переріз у точці $x+dx$ за час $\Delta\tau$.

В результаті віднімання знаходимо, що збільшення кількості видобутої речовини в межах простору між перерізами в точках x і $x+dx$ за проміжок часу $\Delta\tau$ складає $-Vd\bar{c}\Delta\tau$.

Припустимо, що c'- середнє значення концентрації в межах простору, відповідного відрізку шляху dx до моменту τ.

Тоді $mc'dx$ виражає кількість видобутої речовини, що міститься в рідині в

цьому просторі на момент τ.

Нехай z' дорівнює середньому значенню концентрації z для оброблюваної маси у просторі, що відповідає відрізку dx до моменту τ.

Тоді $nz'dx$ дорівнює кількості видобутої речовини, що міститься в оброблюваній масі для цього простору на момент часу τ.

На час $\tau+\Delta\tau$ величина c' стає рівною $c'\times\Delta c'$ і z' набуває значення $z'\times\Delta z'$. Тому вираз:

$$\left[m\left(c'+\Delta c'\right)+n\left(z'+\Delta z'\right)\right]dx$$

є загальною кількістю видобутої речовини до часу $\tau+\Delta\tau$.

Отже:

$$\left[m\left(c'+\Delta c'\right)+n\left(z'+\Delta z'\right)\right]dx-\left(mc'+nz'\right)dx=\left[m\Delta c'+n\Delta z'\right]dx$$

є збільшення кількості видобутої речовини за проміжок часу $\Delta\tau$.

Прирівнюючи знову отриманий вираз первісному, отримаємо:

$$V\cdot dc\cdot\Delta\tau+m\cdot\Delta c'\cdot dx+n\cdot\Delta z'\cdot dx=0$$

Поділимо це рівняння на $dx\Delta\tau$ і кожен із цих множників спрямуємо до нуля. Після граничного переходу знайдемо остаточно:

$$V\frac{\partial c}{\partial x}+m\frac{\partial c}{\partial\tau}+n\frac{\partial z}{\partial\tau}=0. \qquad (92)$$

Це рівняння і є рівняння нерозривності (або суцільності) для аналізованого тут процесу проточного екстрагування.

Таким чином, ми маємо систему трьох диференціальних рівнянь, що описують процес проточного екстрагування. Для одномірного руху ці рівняння будуть:

$$\omega\frac{\partial c}{\partial x}=D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \qquad (93)$$

$$\omega\frac{\partial\omega}{\partial x}\rho=\rho g-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}. \qquad (94)$$

$$V\frac{\partial c}{\partial x}+m\frac{\partial c}{\partial\tau}+a\frac{\partial z}{\partial\tau}=0. \qquad (95)$$

Спільне розв'язання цих рівнянь дасть формулу для опису процесу проточного екстрагування. Введемо масштабні множники відповідно до теорії подібності:

$$\frac{x'}{x} = A_l; \frac{\omega'}{\omega} = A_\omega; \frac{\tau'}{\tau} = A_\tau; \frac{v'}{v} = A_v$$

$$\frac{m'}{m} = A_m; \frac{n'}{n} = A_n; \frac{\rho'}{\rho} = A_\rho; \frac{g'}{g} = A_g; \frac{\mu'}{\mu} = A_\mu;$$

$$\frac{\partial c'}{\partial x'} \div \frac{\partial c}{\partial x} = A_{\text{grad}} c_x; \frac{\partial c'}{\partial \tau'} \div \frac{\partial c}{\partial \tau} = A_{\text{grad}} c_\tau$$

$$\frac{\partial z'}{\partial \tau'} \div \frac{\partial z}{\partial \tau} = A_{\text{grad}} c_z; \frac{\partial \omega'}{\partial x'} \div \frac{\partial \omega}{\partial x} = A_{\text{grad}} c_\omega$$

З цих рівнянь маємо:

$$dc' = A_{\text{grad} c_x} \frac{\partial x'}{\partial x} \partial c = A_{\text{grad} c_x} A_l dc = A_c dc$$

$$dc' = A_{\text{grad} c_\tau} \frac{\partial \tau'}{\partial \tau} \partial c = A_{\text{grad} c_\tau} A_\tau dc = A'_c dc$$

Далі:

$$dz' = A_{\text{grad} c_z} \frac{\partial \tau'}{\partial \tau} \partial z = A_{\text{grad} c_z} A_\tau dz = A_z dz$$

$$d\omega' = A_{\text{grad} c_\omega} \frac{\partial x'}{\partial x} \partial \omega = A_{\text{grad} c_\omega} A_l d\omega = A_{\omega x} d\omega$$

З рівнянь (17) - (20) отримуємо:

$$\frac{\frac{\partial c'}{\partial x'}}{\frac{\partial c}{\partial x}} = \frac{A_c}{A_l}; \qquad \frac{\frac{\partial^2 c'}{\partial x'^2}}{\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}} = \frac{A_c}{A_l^2}$$

$$\frac{\frac{\partial c'}{\partial \tau'}}{\frac{\partial c}{\partial \tau}} = \frac{A'_c}{A_\tau}; \qquad \frac{\frac{\partial z'}{\partial \tau'}}{\frac{\partial z}{\partial \tau}} = \frac{A_z}{A_\tau}$$

$$\frac{\frac{\partial \omega'}{\partial x'}}{\frac{\partial \omega}{\partial x}} = \frac{A_{\omega x}}{A_l}; \qquad \frac{\frac{\partial^2 \omega'}{\partial x'^2}}{\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}} = \frac{A_{\omega x}}{A_l^2}$$

Диференціальні рівняння дифузії для моделі напишемо відповідно до рівнянь (93)-(95), причому вхідні сюди величини, на відміну від величин для виробничого апарату, забезпечимо штрихами:

$$\omega' \frac{dc'}{dx'} = D' \frac{d^2 c'}{dx'^2}$$

$$\omega' \frac{\partial \omega'}{\partial x'} \rho' = \rho' \cdot g' - \frac{\partial p'}{\partial x'} + \mu' \frac{\partial^2 \omega'}{\partial x'^2}$$

$$V' \frac{\partial c'}{\partial x'} + m' \frac{\partial c'}{\partial \tau'} + n' \frac{\partial z'}{\partial \tau'} = 0$$

У ці рівняння ми можемо, відповідно до вищенаведених співвідношень, підставити:

$$x' = A_l x; \quad \omega' = A_\omega \omega; \quad \tau' = A_\tau \tau; \quad c' = A_c c$$

$$z' = A_z z; \quad \rho' = A_\rho \rho; \quad m' = A_m m; \quad n' = A_n n; \quad D' = A_D D$$

де величини без штриху належать до виробничого апарату.

Таким чином, для моделі отримуємо з рівняння (93):

$$A_\omega \omega \frac{A_c}{A_l} \cdot \frac{\partial c}{\partial x} = A_D D \frac{A_c}{A_l^2} \cdot \frac{d^2 c}{dx^2}$$

Рівняння (94) дає:

$$A_\omega \omega \frac{A_{\omega x}}{A_l} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} A_\rho \rho = A_\rho \rho A_g g - - \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + A_\mu \mu \frac{A_{\omega x}}{A_l^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}.$$

З рівняння (95) маємо:

$$A_V V \frac{A_c}{A_l} \cdot \frac{\partial c}{\partial x} + A_m m \frac{A_c}{A_\tau} \cdot \frac{\partial c}{\partial \tau} + A_n n \frac{A_z}{A_\tau} \cdot \frac{\partial z}{\partial \tau} = 0$$

За аналогією з теплопередачею можемо написати вираз для коефіцієнта екстракції $\alpha_{ек}$:

$$\alpha_{ек} = -D' \frac{\frac{\partial c'}{\partial x'}}{c' - c'_0}$$

тоді:

$$A_{\alpha ек} \alpha_{ек} = -\frac{A_D A_C}{A_l A_C} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)}{c - c_0}$$

Зважаючи лише на такі процеси, для яких значення масштабних множників перед похідними можна було б скоротити, ми отримаємо:

$$A_\omega \frac{A_c}{A_l} = \frac{A_D A_C}{A_l^2}. \tag{96}$$

$$A_\omega \frac{A_{\omega x}}{A_l} A_\rho = A_\rho A_g = \frac{A_p}{A_l} = A_\mu \frac{A_{\omega x}}{A_l^2}. \tag{97}$$

$$A_V \frac{A_C}{A_l} = A_m \frac{A_C}{A_\tau} = A_n \frac{A_z}{A_\tau}. \tag{98}$$

$$A_{\alpha ек} = \frac{A_D}{A_l}. \tag{99}$$

Отже, якщо масштабні множники задовольняють співвідношенням (96) - (99), то диференціальних рівняннях ці множники можуть бути скорочені і для моделі залишається система диференціальних рівнянь, які повністю ідентичні рівнянням виробничого апарату.

Представимо співвідношення (96) - (99) в більш зручній формі. З (96) маємо:

$$A_\omega = \frac{A_D}{A_l}$$

звідси випливає

$$\frac{\omega l}{D} = \frac{\omega' l'}{D'}$$

тобто маємо аналог критерію подібності Пекле:

$$\mathrm{Pe}' = \frac{\omega l}{D}$$

З (97):

$$\frac{A_\mu A_{\omega x}}{A_l^{\,2}} = \frac{A_\omega A_{\omega x}}{A_l} A_\rho$$

або

$$\frac{\omega l \rho}{\mu} = \frac{\omega' l' \rho'}{\mu'} = \mathrm{Re}$$

З (98) отримуємо:

$$A_V \frac{A_C}{A_l} = A_m \frac{A_C}{A_\tau}$$

або

$$\frac{V\tau}{ml} = \frac{V'\tau'}{m'l'} = \Phi_1$$

Критерій подібності до Φ_1 характеризує кратність обміну розчинника. Далі:

$$A_V \frac{A_C}{A_l} = A_n \frac{A_z}{A_\tau}$$

або

$$\frac{Vc\tau}{nlz} = \frac{V'c\tau'}{n'l'z'} = \Phi_2$$

Критерій подібності Φ_2 характеризує ступінь екстрагування. Маємо також:

$$A_m \frac{A_C}{A_\tau} = A_n \frac{A_z}{A_\tau}$$

або

$$\frac{mc}{nz} = \frac{m'c'}{n'z'} = \Phi_3$$

Критерій подібності Φ_3 характеризує коефіцієнт розподілу розчиненої речовини між двома фазами.

Далі

$$A_{\alpha эк} = \frac{A_D A_c}{A_l A_c}$$

або

$$\frac{\alpha_{эк} l}{D} = \frac{\alpha_{эк}' l'}{D'} = \mathrm{Nu}'$$

тобто отримуємо аналог критерію Нуссельта. Його чисельні значення всім потоків з однаковими Re, Pe' та інших. рівні між собою залежать лише від значень цих величин.

Отже, за геометрично подібної межі потоків:

$$\mathrm{Nu}' = f_0\left(\mathrm{Re}, \mathrm{Pe}', \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\right)$$

де f_0 - функція, що встановлюється експериментально.

Замість критерію Pe можна запровадити й інший, який у результаті іншого комбінування рівнянь (96)—(99). Дуже зручним є аналог критерію Pr', а саме:

$$\mathrm{Pr}' = \frac{\mathrm{Pe}'}{\mathrm{Re}} = \frac{\frac{\omega l}{D}}{\frac{\omega l}{\nu}} = \frac{\nu}{D}$$

де ν - кінематична в'язкість.

Цей критерій містить у собі лише фізико-хімічні постійні речовини, що у русі.

Тоді рівняння проточної екстракції можнанаписатитак:

$$\mathrm{Nu}' = f\left(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}', \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\right)$$

де f – інша функція.

Шуканою величиною є коефіцієнт екстракції $\alpha_{ек}$ на поверхні розділу фаз:

$$\alpha_{ек} = \frac{\mathrm{Nu}' D}{l}$$

де $\alpha_{ек}$ - коефіцієнт екстракції, м^3/м^2×год=м/год,

l - характерний лінійний розмір, м;

D - коефіцієнт дифузії, м^2/год.

Залежність між критеріями подібності зазвичай представляється як стелених функцій; у даному випадку маємо:

$$\mathrm{Nu}' = \psi\, \mathrm{Re}^{a} \cdot \mathrm{Pr}'^{b} \cdot \Phi_1^{\,c} \cdot \Phi_2^{\,d} \cdot \Phi_3^{\,e}$$

де ψ, a, b, c, d, e є постійними та абстрактними числами, що визначаються експериментально.

13 АНАЛІЗ УМОВ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОХІМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ, ЩО ПРОТІКАЮТЬ У ТОНКОМ ШАРУ

Розглянемо процес діазотування; для успішного його проведення потрібно прискорене відведення тепла від реакційної маси і безперервне видалення зі сфери реакції продуктів, що утворюються. Ці умови можуть бути виконані за наявності максимально розвиненої поверхні теплообміну та апарату безперервної дії.

Для здійснення цих умов вихідні речовини, як, анілін, соляна кислота і розчин нітриту натрію безперервно подаються в два кільцеві канали 1 і 2, розташовані один над одним (рис. 7); до них приєднані патрубки 6 і 7.З цих каналів потоки розподіляються за радіальними канавками (лотками) 3. Апарат має сорочку 4 з патрубками 5 для охолодження реакційної маси водою чи розсолом.

Процес діазотування протікає по мірі руху реакційної маси по канавці (лотку) тонкому шарі.

В даному випадку маємо процес теплопередачі в поєднанні з хімічною реакцією або хімічну реакцію, що протікає в тонкому шарі при одночасної теплопередачі. Кількість тепла, що відводиться від реакційної маси, приймемо пропорційним градієнту концентрації продукту, що знову утворюється, і тепловому ефекту реакції (тепловиділення).

Розглянемо в реакційній масі два одиничні майданчики, паралельні дну лотка та розташовані на відстані h і $h+dh$ від рівня реакційного шару. Кількість тепла, що виділяється через ці майданчики за час $d\tau$, буде:

$$Q = q\frac{dc}{dh}d\tau; \quad Q' = q\left[\frac{dc}{dh} + d\left(\frac{dc}{dh}\right)\right]d\tau$$

де q - тепловий ефект реакції, ккал×м^3/кг×год,

c - концентрація знову утворюється речовини, кг/м^3;

$\frac{dc}{dh}$ - концентраційний градієнт, кг/м×м^3.

Якщо розглянути елементарний стовпчик реакційної маси, основи якого збігаються зі згаданими вище одиничними майданчиками, то кількість тепла, що виділяється з цього об'єму за час $d\tau$, буде одно:

$$Q' - Q = qd\left(\frac{dc}{dh}\right)d\tau = q\frac{d^2c}{dh^2}dhd\tau$$

Те саме кількість тепла, зрозуміло, пропорційно кількості що утворюється у цьому об'ємі речовини, тобто пропорційно $dc\ dh$. З диференціального рівняння швидкості хімічної реакції

$$\frac{dc}{d\tau} = k(A-c)(B-c)$$

де k - константа швидкості реакції, м^3/кг×год;
A і B - концентрації вихідних продуктів, кг/м^3, слід:

$$dc\ dh = k(A-c)(D-c)dh\ d\tau$$

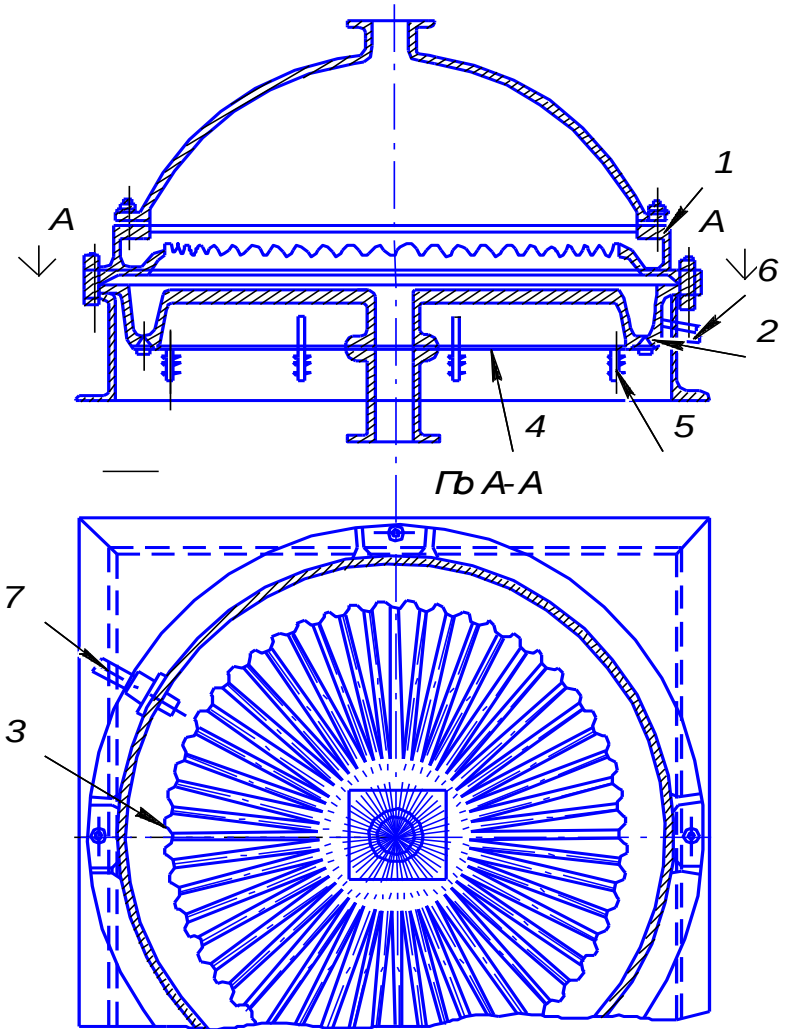


Рисунок 7 – Апарат безперервної дії

Звідси знаходимо:

$$a_0 q \frac{d^2c}{dh^2} = k\left(A-c\right)\left(B-c\right)$$

де a_0 - теплодифузійний коефіцієнт пропорційності, кг×м^2/ккал×м^3.

Останнє рівняння можна представити у вигляді:

$$\frac{d^2c}{dh^2} = \frac{k}{a_0 q} f(c)$$

В результаті ми отримали диференціальне рівняння другого порядку, що встановлює функціональну залежність між h та c.

Цей процес характеризується, крім того, рівнянням теплопровідності в середовищі, що рухається:

$$a\frac{d^2t}{dx^2} = \omega\frac{dt}{dx}$$

де $a - \frac{\lambda}{c\rho}$ - коефіцієнт температуропровідності рідини, м^2/год.

На межі рідкої плівки та стінки апарату має місце тепловіддача. Тому на підставі формули (16) маємо:

$$\alpha = -\lambda \frac{\left(\frac{dt}{dh}\right)}{t - t_0}$$

де α- Коефіцієнт тепловіддачі від реакційної маси до стінки, ккал/м^2×год×град;

$\frac{dt}{dh}$ - температурний градієнт;

t_0 - температура стінки, °С;

t - температура рідини, °С.

При діазотуванні в тонкому шарі режим руху рідини в радіальних канавках (лотках) може бути ламінарним або хвильовим.

У тому та іншому випадку рівняння одновимірного руху має вигляд:

$$\omega\frac{d\omega}{dx}\rho = \rho g - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{d^2\omega}{dx^2}$$

У результаті отримаємо такі диференціальні рівняння, що описують термохімічний процес діазотування в тонкому шарі

$$\frac{d^2c}{dh^2} = \frac{k}{a_0 q} f(c), \tag{100}$$

$$a\frac{d^2t}{dx^2} = \omega\frac{dt}{dx}, \tag{101}$$

$$\omega\frac{d\omega}{dx}\rho = \rho g - \frac{dp}{dx} + \mu\frac{d^2\omega}{dx^2} \tag{102}$$

та умова на кордоні:

$$\alpha = -\lambda\frac{\left(\frac{dt}{dh}\right)}{t - t_0}. \tag{103}$$

Спільне дослідження цих рівнянь методами подібності дає критеріальне рівняння тепло- (або термо-) кінетики безперервного процесу діазотування в тонкому шарі і взагалі фізико-хімічних процесів, що протікають у рухомих шарах або плівках рідини.

Вводячи масштабні множники, отримаємо наступні критеріальні залежності

$$\mathrm{Re} = \frac{\omega x \rho}{\mu}, \tag{I}$$

$$\frac{\rho g x}{p} = \frac{1}{\mathrm{Fr}\cdot\mathrm{Eu}} \tag{II}$$

причому критерій Фруда характеризує силу тяжкості, а критерій Ейлера - перепад тиску.

Далі маємо:

$$\frac{\omega h}{a_0} = \mathrm{Pe}' \tag{Ш}$$

і

$$\frac{kh^2}{a_0 q} = \mathrm{Di}, \tag{IV}$$

де k - постійна, що характеризує швидкість реакції, год$^{-1}$;

h - товщина шару реакційної маси, м;

a_0 - тепло-дифузійний коефіцієнт пропорційності, кг/ккал×м;

q - тепловий ефект реакції, ккал×м^3/кг×год.

Критерій Di характеризує реакційнопровідність взаємодіючого середовища, віднесену до кількості тепла, що відводиться м^2 поверхні теплообміну в годину, при протіканні процесу в шарі рідини, що рухається.

Нарешті:

$$\mathrm{Nu} = \frac{ah}{\lambda}$$

При геометрично подібній межі потоків:

$$\mathrm{Nu} = f_0\left[\mathrm{Re}\left(\mathrm{Fr}\cdot\mathrm{Eu}\right), \mathrm{Pe}', \mathrm{Di}\right]$$

де f_0 - Функція, що встановлюється експериментально.

Критерій Pe' можна замінити зручнішим критерієм Прандтля:

$$\mathrm{Pr}' = \frac{\mathrm{Pe}'}{\mathrm{Re}}$$

Тоді отримаємо:

$$\mathrm{Nu} = f\left[\mathrm{Re}\left(\mathrm{Fr}\cdot\mathrm{Eu}\right), \mathrm{Pr}', \mathrm{Di}\right]$$

Наводячи критеріальну залежність до статечної функції, знаходимо:

$$\mathrm{Nu} = \psi\,\mathrm{Re}^m\left(\mathrm{Fr}\cdot\mathrm{Eu}\right)^n \mathrm{Pr}'^r\,\mathrm{Di}^z$$

де ψ ,m, n, r, z - постійні та абстрактні числа, що встановлюються експериментально.

Шуканою величиною є коефіцієнт тепловіддачі, а на поверхні розділу рідини та внутрішньої стінки сорочки:

$$\alpha = \frac{\mathrm{Nu}\,\lambda}{h}$$

Цей процес з метою визначення витрати v має бути розглянутий додатково з гідродинамічної точки зору. Ми маємо тут встановлений прямолінійно-паралельний перебіг в'язкої нестислої рідини за наявності однієї твердої плоскої стінки та однієї вільної межі, причому друга рідина — газ на вільній поверхні має порівняно малу щільність.

Теоретично динаміки в'язкої нестислої рідини доводиться, що у разі на вільної поверхні розділу нормальна складова напруги має дорівнювати постійному тиску, а дотична складова повинна звертатися в нуль. Таким чином, уздовж вільного кордону тиск не залежатиме відx, тобто.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad . \qquad (104)$$

Отже, тут перепаду тиску вздовж течії не може бути і сама течія може відбуватися при нахилі твердої стінки до горизонту, тобто під дією тяжкості. Для вирішення задачі звернемося до рівнянь (7) та (8), а також (88).

Оскільки траєкторії всіх частинок строго прямолінійні та паралельні між собою, маємо:

$$\omega_y \equiv 0, \quad \omega_z \equiv 0 \,. \tag{105}$$

При цьому припущенні з рівняння нерозривності:

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} = 0 \,. \tag{106}$$

Таким чином, єдина проекція вектора швидкості і вздовж усієї траєкторії залишатиметься постійною і може змінюватися тільки в поперечному траєкторії напрямку.

З урахуванням (105) та (106) диференціальні рівняння руху рідини спростяться:

$$\begin{aligned} & g_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} \right) = 0 \\ & g_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ & g_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{aligned} \,. \tag{107}$$

Позначимо кут нахилу твердої стінки (дна) до горизонту через α і виберемо вісь x паралельно напрямку стінки (рис. 8). Оскільки проекція сили тяжіння на вісь x буде рівна

$$g_x = g \sin \alpha$$

то перше рівняння (107) при обліку (104) та припущенні, що швидкість ω_x не залежить від координати z, представиться у вигляді:

$$\frac{d^2 \omega_x}{dy^2} = -\frac{g}{\nu} \sin \alpha \,. \tag{108}$$

У силу умови прилипання маємо

$$\omega_x = 0 \text{ при } y = 0 \tag{109}$$

і оскільки на вільному кордоні сила в'язкості на одиницю площі повинна

звертатися в нуль, то відповідна гранична умова швидкості буде представлятися у вигляді:

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = h. \tag{110}$$

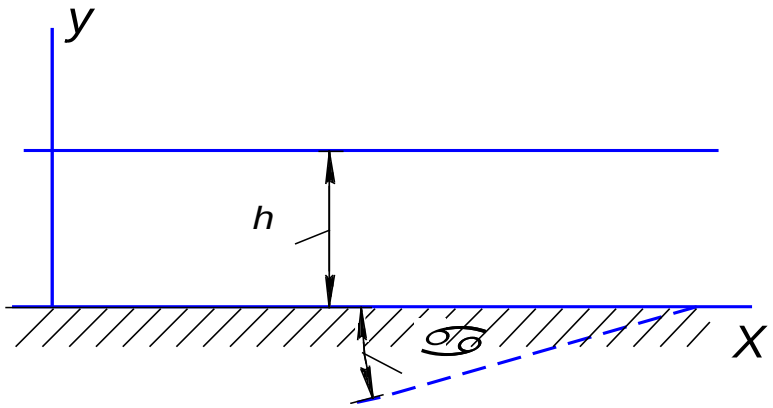


Рисунок 8 – До граничних умов швидкості

Загальне рішення диференціального рівняння (108) має вигляд:

$$\omega_x = -\frac{g}{2v}\sin a y^2 - c_1 y + c_2$$

На підставі граничних умов (109) та (110) отримаємо:

$$c_1 = \frac{gh}{v}\sin\alpha$$

$$c_2 = 2$$

Таким чином, розв'язання задачі буде представлятися у вигляді:

$$\omega_x = \frac{g}{2v}\sin\alpha\left(2yh - y^2\right). \tag{111}$$

Максимальна швидкість має місце на вільній межі:

$$\omega_{\max} = \frac{gh^2}{2v}\sin\alpha. \tag{112}$$

Витрата v дорівнює:

$$v = \int_0^h \omega_x dy = \frac{1}{3}\cdot\frac{gh^3}{v}\sin\alpha. \tag{113}$$

14 КІНЕТИКА ІОННОГО ОБМІНУ

В іонообмінній колоні протікають переважно три процеси, саме: проточна екстракція, реакція обмінного розкладання, що супроводжується дифузією, і фільтрування, тобто рух рідини через шар іоніту.

Виходитимемо з основних положень про кінетику хімічних реакцій для випадку двох протилежно спрямованих реакцій другого порядку. Рівняння швидкості реакції у цьому випадку буде

$$-\frac{d\left(cdx\right)}{d\tau}=k\left(c_{\infty}-c\right)\left(c+\beta\right)dx=kf\left(c\right)dx,$$

де k -постійна величина, що характеризує природу реакції;

$f\left(c\right)=k\left(c_{\infty}-c\right)\left(c+\beta\right);\ \beta=c_{\infty}+\frac{b}{a}$.

Кількість речовини, що вступає в реакцію іонного обміну в елементарному об'ємі за час $d\tau$, складе:

$$g=-d\left(cdx\right)=kf\left(c\right)dxd\tau$$

Складаючи матеріальний баланс так само, як для дифузії, що супроводжується хімічною реакцією, отримаємо рівняння:

$$-D\frac{dc}{dx}d\tau+D\left[\left(\frac{dc}{dx}\right)+d\left(\frac{dc}{dx}\right)\right]d\tau-kf\left(c\right)dxd\tau=0,$$

де D - коефіцієнт дифузії.

Спрощуючи, прийдемо до диференціального рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2c}{dx^2}=\frac{x}{D}f\left(c\right). \qquad (114)$$

Як і для проточної екстракції, маємо додаткові диференціальні рівняння, що описують процес іонного обміну в колоні:

$$D\frac{d^2c}{dx^2}=\omega\frac{dc}{dx}$$

$$\omega\frac{d\omega}{dx}\rho=\rho g-\frac{dp}{dx}+\mu\frac{d^2\omega}{dx^2}$$

$$V\frac{\partial c}{\partial x}+m\frac{\partial c}{\partial \tau}+n\frac{\partial z}{\partial t}=0$$

$$a=-D\frac{\frac{dc}{dx}}{c-c_0}$$

Застосуємо метод масштабних множників для приведення диференціального рівняння іонного обміну (114) до критерію:

$$c'=A_c c;\quad x'=A_l x;\quad k'=A_k k;\quad D'=A_D D$$

Таким чином, для моделі з диференціального рівняння отримуємо:

$$\frac{A_c c}{A^2{}_l}\cdot\frac{d^2c}{dx^2}=\frac{A_k k\cdot A_c f(c)}{A_D D}$$

або

$$\frac{1}{A^2{}_l}=\frac{A_k}{A_D}$$

Звідси знаходимо

$$\frac{kl^2}{D}=\frac{k'l'^2}{D'}$$

тобто. критерій, що характеризує реакцію обмінного розкладання, що супроводжується дифузією

Позначимо критерій іонного обміну через U_0 тоді

$$U_0=\frac{kl^2}{D}$$

Отже, критеріальне рівняння аналізованого тут процесу, що випливає з представлених вище диференціальних рівнянь, набуває такого вигляду:

$$\mathrm{Nu}=\psi\cdot\mathrm{Re}^a\cdot\mathrm{Pr}^b\cdot\Phi_3^c\cdot\Phi_2^d\cdot\Phi_3^e\cdot U_0^h, \qquad (115)$$

де ψ, а, b, c, d, e, h - постійні та абстрактні числа, що встановлюються експериментально.

15 МОДЕЛЮВАННЯ ІОНООБМІННИХ ФІЛЬТРІВ

З метою моделювання іонообмінних фільтрів розглянемо іонообмінну реакцію:

$$NaCl + Кат[H] \leftrightarrow Кат[Na] + HC1.$$

Оскільки ступінь завершеності процесу іонного обміну представляє задану максимально можливу величину, то критерій подібності $Ф_3$, можливо опущений в експериментальних дослідженнях.

Додатково до попередніх прийнято такі позначення:

ω - фіктивна швидкість рідини, м/с;

l - кінцева висота шару іоніту, м;

γ - кінематичний коефіцієнт в'язкості розчину, м^2/ с;

μ - динамічний коефіцієнт в'язкості розчину, кг/м×с;

V - об'єм розчину, профільтрованого до «проскоку», м^3/м^2×с;

c - концентрація видобутої речовини в рідині, кг/м^3;

z - вміст видобутої речовини у твердій масі, кг/м^3;

m - об'єм рідини на одиницю перерізу фільтра і на 1 м висоти апарату, м^3/м^2×м;

n – об’єм іоніту на одиницю перерізу фільтра та на 1 м висоти апарату, м^3/м^2×м;

α - коефіцієнт масопередачі, м^3/м^2×с або м/с;

d - діаметр фільтра, м;

D - коефіцієнт дифузії, м^2/с;

τ - час, с;

$\gamma_р$ - щільність розчину, кг/м^3;

$\gamma_{спр}$ - справжня щільність катіоніту КУ-2, кг/м^3;

$\gamma_{нас}$ - насипна щільність катіоніту КУ-2, кг/м^3;

$G_к$ - маса катіоніту, кг;

$V_{н\ к}$ - об’єм набряклого катіоніту з розчином, м^3.

Коефіцієнт масообміну α, що входить у критерій Нуссельта, визначається за такою формулою:

$$\alpha = \frac{G}{F \cdot \Delta^c \cdot \tau}$$

де G - кількість поглиненої речовини, кг;

F- поверхня зерен катіоніту, м^2;

Δ^c - середня рушійна сила іонообмінного процесу;

τ - час фільтрування, с.

Значення Δ^c обчислюються за формулою:

$$\Delta^c = \frac{r}{2.303 \lg \frac{a_0}{a_o - r}}$$

де r - динамічна ємність до «проскоку» для одиниці об'єму катіоніту, кг/м^3;

a_0 - статична ємність, що відповідає стану рівноваги, віднесена до одиниці об'єму катіоніту, кг/м^3.

Значення обчислених критеріїв подібності представлені у табл. 1.2.

Залежність (115) можна знайти шляхом обробки експериментальних даних.

Визначення коефіцієнта *a*. Використовуючи експериментальні значення критерію Nu при змінних величинах Re, отримаємо:

$$\lg \mathrm{Nu} = \lg C + a \lg \mathrm{Re}$$

Зобразимо залежність між Re та Nu графічно на логарифмічній сітці (рис. 9); значення показника ступеня дорівнює:

$$a = 0{,}92$$

Визначення коефіцієнта *b*. Визначаємо експериментально Nu при змінних значеннях Pr. Маємо:

$$\lg \mathrm{Nu} = \lg C_2 + d \lg \mathrm{Pr}$$

З графіка на рис. 10 знайдемо:

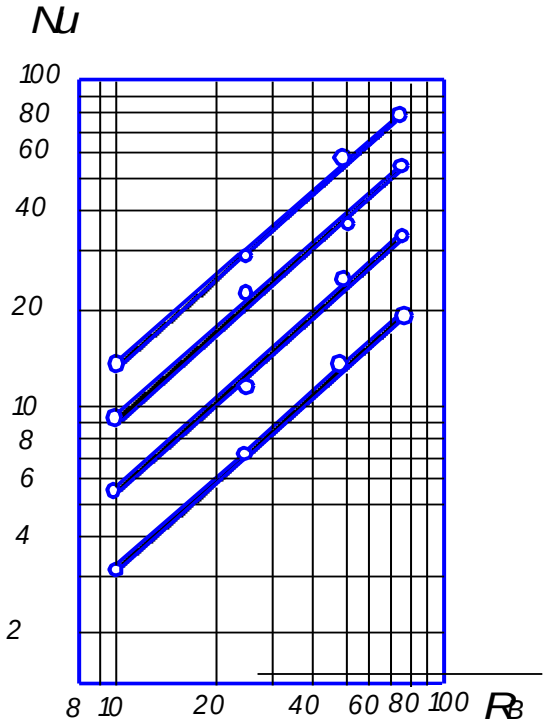
$$c = -2{,}90$$

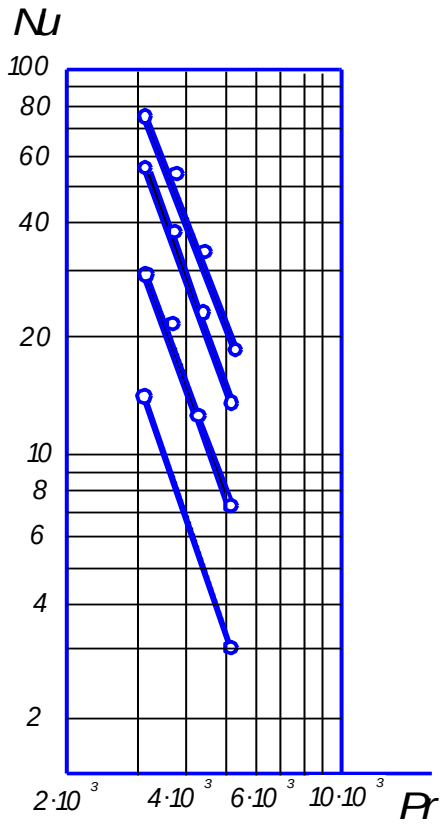
Визначення коефіцієнта *c*. Визначаємо експериментально Nu при змінних значеннях Φ_1. Виробляючи аналогічні побудови, знайдемо із графіка на рис. 11:

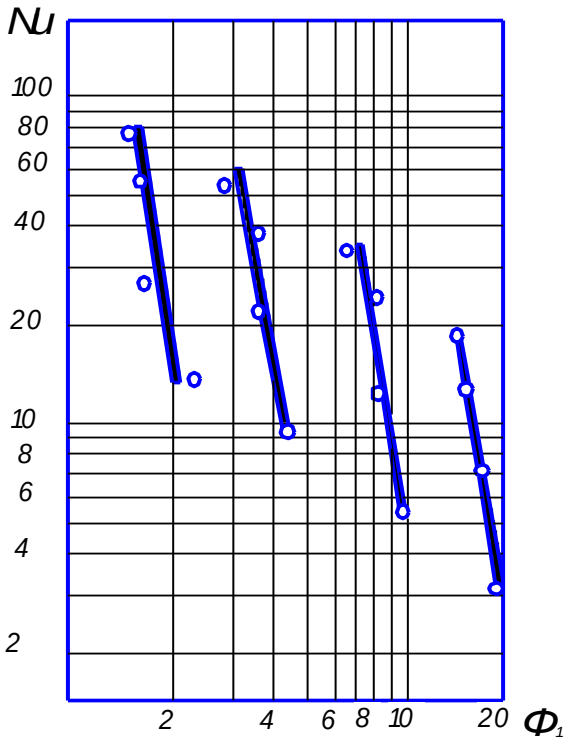
$$c = -6{,}20$$

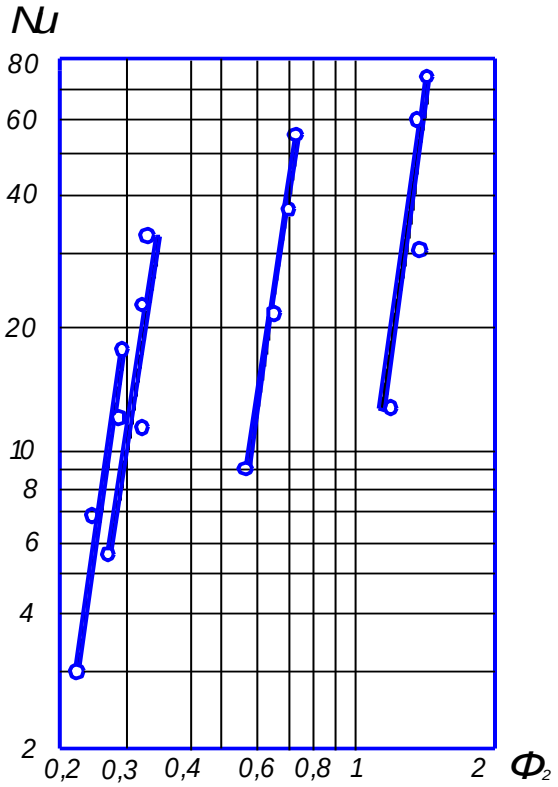
Визначення коефіцієнта *d*. З графіка на рис. 12 знаходимо:

$$d = 5{,}40$$


Nu
100
80
60
40
20
10
8
6
4
2
8
10
20
40
60
80
100
Re


Nu
100
80
60
40
20
10
8
6
4
2
2·10 3
4·10 3
6·10 3
10·10 3
Pr


Nu
100
80
60
40
20
10
8
6
4
2
2
4
6
8
10
20
Φ1

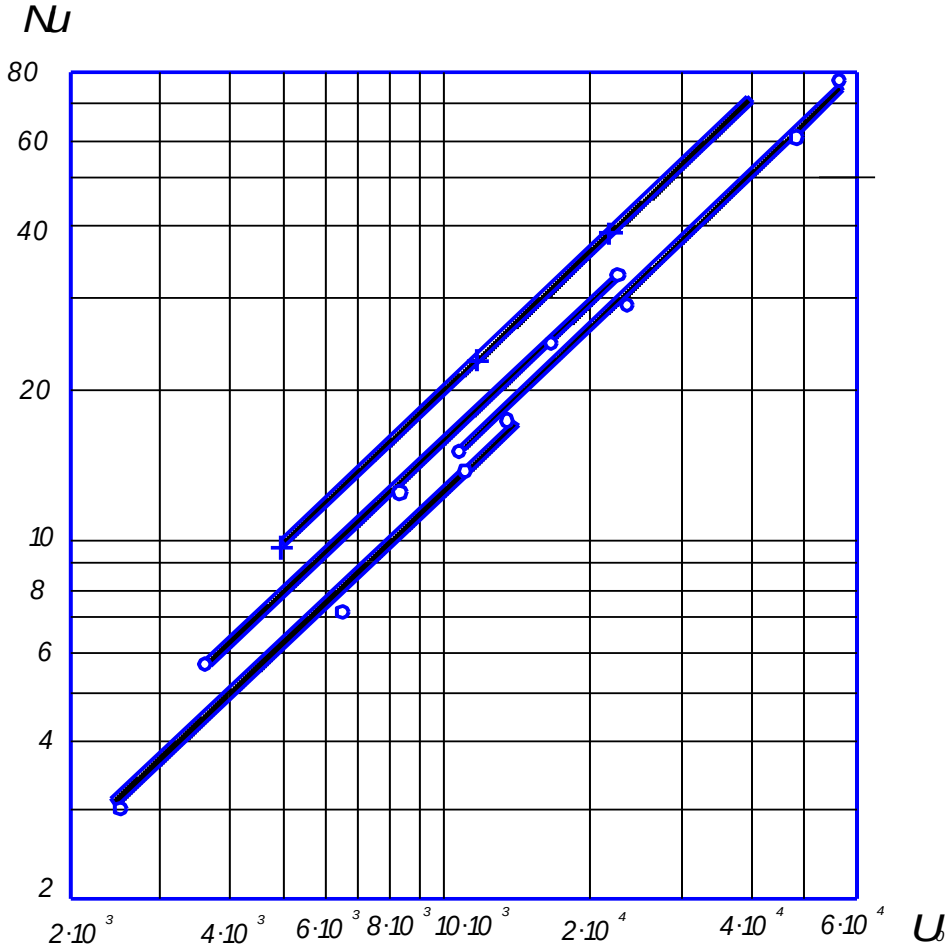

Nu
80
60
40
20
10
8
6
4
2
0,2
0,3
0,4
0,6
0,8
1
2
Φ2

N	ω	G×104	D×1010	μ×104	V×104	c	z	γ_p	Δc	τ	r	α×109	k×106	Re	Pr	Nu	Φ1	Φ2	U0
1	0,0013	4,28	2,3	1,8	967	0,575	18,5	1000	15,8	14500	18,8	78	4,2	10	5100	3,04	18,6	0,220	2440
2	0,0033	3,78	2,3	1,8	870	0,575	16,4	1000	17,3	5150	16,7	180	11,1	25	5100	7,05	16,8	0,248	6270
3	0,0066	3,38	2,3	1,8	780	0,575	14,6	1000	18,5	2250	14,8	346	17,2	50	5100	13,6	15,1	0,280	10500
4	0,0099	3,18	2,3	1,8	750	0,575	13,8	1000	19,1	1500	14	472	22.3	75	5100	18,5	14,5	0,295	12500
5	0,0013	4,20	2,7	1,19	440	1,15	18,3	1000	15,8	6750	18,5	166	7,38	10	4350	5,52	8,7	0,256	3520
6	0,0033	3,43	2,7	1,19	390	1,15	14,8	1000	17,5	2320	15,1	360	17,2	25	4350	12,0	7,5	0,318	8220
7	0,0066	3,34	2,7	1,19	360	1,15	14,5	1000	18,4	1100	14,7	715	34,4	50	4350	23,6	6,9	0,322	16800
8	0,0099	3,18	2,7	1,19	356	1,15	13,8	1000	19,1	720	14,0	975	47,5	75	4350	32,7	6,8	0,340	22600
9	0,0013	4,1	3,2	1,2	230	2,3	17,8	1002	16	3450	18,1	321	12,4	10	3680	9,04	4,4	0,530	5000
10	0,0033	3,4	3,2	1,2	189	2,3	14,8	1002	18,4	980	15	870	31,8	25	3680	22,0	3,6	0,640	12800
11	0,0066	3,1	3,2	1,2	186	2,3	13,5	1002	19,2	520	13,7	1350	58,3	50	3680	38,0	3,5	0,700	23400
12	0,0099	2,94	3,2	1,2	160	2,3	12,8	1002	19,7	320	13,0	1980	123,0	75	3680	55,5	3,0	0,740	49500
13	0,0013	3,5	3,9	1,21	110	4,6	15,2	1006	17,5	1460	15,4	586	34,0	10	3060	13,5	2,4	1,27	11300
14	0,0033	2,97	3,9	1,21	90	4,6	12,9	1006	19,7	510	13,0	1268	72,0	25	3060	29,6	1,7	1,50	24000
15	0,0066	2,97	3,9	1,21	83	4,6	12,9	1006	19,7	250	13,1	2560	134,0	50	3060	59,4	1,6	1,50	44500
16	0.0099	2,72	3,9	1,21	82	4,6	11,18	1006	20,4	170	11,9	3320	17,2	75	3060	77,0	1,5	1,64	5700

Примітка. F =2,36 м^2/кг; l = 0,36 м; $\gamma_{спр.}$ = 1400 кг/м^3; $\gamma_{нас}$ = 800 кг/м^3; a_0 = 26,8 кг/м^3; $G_к$ = 10×10^{-3} кг; d = 9×10^{-3} м; $V_{н\ к}$ = 23×10^{-6} м^3; m = 2,28; n = 0,56.

Визначення коефіцієнта *h*. Визначаємо Nu при змінних значеннях критерію іонного обміну U_0. Користуючись графіком на рис. 13, отримаємо:

$h = 1$



Таким чином, критеріальне рівняння процесу іонного обміну між розчином хлористого натрію та смолою має такий вигляд:

$$Nu = \psi \left(\frac{\omega l}{\nu} \right)^{0.92} \cdot \left(\frac{\nu}{D} \right)^{-2.90} \cdot \left(\frac{V\tau}{ml} \right)^{-0.20} \cdot \left(\frac{Vc\tau}{nlz} \right)^{5.40} \cdot \left(\frac{kl^2}{D} \right).$$

Отримане рівняння дозволяє визначити характер і рівень впливу змінних чинників даний процес іонного обміну і, отже, встановити раціональний режим роботи фільтра.

16 ВИЗНАЧЕННЯ ПОСТФЙНИХ ВЕЛИЧИН У КРИТЕРІАЛЬНИХ РІВНЯННЯХ

Визначення функцій та показників ступеня у критеріальних рівняннях покажемо на прикладі абсорбції.

Часткові коефіцієнти швидкості абсорбції для газової та рідкої фаз, м/с, даються такими критеріальними рівняннями:

$$K_г = f_1 \frac{D_г}{d} \mathrm{Re}_г^k \mathrm{Pr}_г^l \left(\frac{d}{h}\right)^m,$$

$$K_ж = f_2 \frac{D_ж}{d} \mathrm{Re}_ж^n \mathrm{Pr}_ж^p \left(\frac{d}{h}\right)^q.$$

Рівняння для загального коефіцієнта абсорбції, вираженого в кг/м^2×год×мм рт. ст., має вид:

$$K = \frac{1}{\dfrac{1}{f_1 \dfrac{D_г}{d} \mathrm{Re}_г^k \mathrm{Pr}_г^l \left(\dfrac{d}{h}\right)^m \cdot \dfrac{3600M}{22,4 \cdot 760}} + \dfrac{1}{f_2 \dfrac{D_ж}{d} \mathrm{Re}_ж^n \mathrm{Pr}_ж^p \left(\dfrac{d}{h}\right)^q \cdot \dfrac{3600H}{760}}}$$

або

$$K = \frac{1}{\dfrac{1}{0,211 \cdot f_1 \dfrac{D_г}{d} \mathrm{Re}_г^k \mathrm{Pr}_г^l \left(\dfrac{d}{h}\right)^m \cdot M} + \dfrac{1}{4,73 \cdot f_2 \dfrac{D_ж}{d} \mathrm{Re}_ж^n \mathrm{Pr}_ж^p \left(\dfrac{d}{h}\right)^q \cdot H}},$$

де f_1 і f_2 - шукані величини;

k, l, m, n, p, q - показники ступеня критеріїв подібності;

M - молекулярна маса газу, що поглинається;

H - константа Генрі, кг/м^2×ат;

$\mathrm{Re}_г$ - число Рейнольдса для газу $\left(\mathrm{Re}_г = \dfrac{\omega_г d}{\nu_г}\right)$;

$\mathrm{Pe}_ж$ - число Рейнольдса для рідини $\left(\mathrm{Re}_ж = \dfrac{\omega_ж d}{\nu_ж}\right)$;

$\mathrm{Pr}_г$ - число Прандтля для газу $\left(\mathrm{Pr}_г = \dfrac{\nu_г}{D_г}\right)$;

$Pr_{ж}$ - число Прандтля для рідини $\left(Pr_{ж} = \frac{\nu_{ж}}{D_{ж}}\right)$;

$D_{г}$ - коефіцієнт дифузії для газу, м^2/ с;
$D_{ж}$ - коефіцієнт дифузії в рідкій фазі, м^2/с;
D - еквівалентний діаметр насадки, м;
h - висота елемента насадки, м;
$\nu_{г}$ - кінематична в'язкість газової фази, м^2/ с;
$\nu_{ж}$ - кінематична в'язкість рідини, м^2/ с.

Визначення коефіцієнта *k*. Визначаємо експериментально загальні коефіцієнти швидкості абсорбції K при змінному значенні $Re_{г}$.

Для $Re_{г}$ знаходимо:

$$K_1 = \frac{1}{\frac{A}{Re_{г1}^{k}} + \frac{1}{K_{ж}}},$$

$$K_2 = \frac{1}{\frac{A}{Re_{г2}^{k}} + \frac{1}{K_{ж}}},$$

$$K_3 = \frac{1}{\frac{A}{Re_{г3}^{k}} + \frac{1}{K_{ж}}},$$

де

$$A = \frac{1}{0,211 f_1 \frac{D_{г}}{d} Pr_{г}^{l} \left(\frac{d}{h}\right)^{m} M}.$$

Маємо три рівняння із трьома невідомими: A, k, $\frac{1}{K_{ж}}$. При спільному розв'язанні цих рівнянь знаходимо, що K визначається з рівняння:

$$\left(\alpha^{k} - 1\right) = B\left(1 - \beta^{k}\right)$$

$$\alpha = \frac{Re_{г2}}{Re_{г1}}; \quad \beta = \frac{Re_{г3}}{Re_{г1}}; \quad B = \frac{\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2}}{\frac{1}{K_2} - \frac{1}{K_3}}$$

Величина:

$$A = \frac{\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2}}{\frac{1}{\mathrm{Re}^k_{г1}} - \frac{1}{\mathrm{Re}^k_{г2}}}$$

і

$$\frac{1}{K_ж} = \frac{1}{K_1} - \frac{A}{\mathrm{Re}^k_{г1}}.$$

Визначення коефіцієнта *m*. Визначаємо *K* при змінних значеннях $\frac{d}{h}$.

Внаслідок того, що *A* залежить від $\frac{d}{h}$, ми повинні для кожного з значень знайти *A* із трьох значень *K*.

Припустимо, що $\left(\frac{d}{h}\right)_1$ і $\left(\frac{d}{h}\right)_2$ відповідає A_1 і A_2.

Отримуємо:

$$A_1 = \frac{1}{0,211 f_1 \frac{D_г}{d} \mathrm{Pr}^l_г \left(\frac{d}{h}\right)_1^m M},$$

$$A_2 = \frac{1}{0,211 f_1 \frac{D_г}{d} \mathrm{Pr}^l_г \left(\frac{d}{h}\right)_2^m M}.$$

Складаючи ставлення $\frac{A_1}{A_2}$, логарифмуючи та визначаючи з отриманого при цьому рівняння *m*, знайдемо:

$$m = \frac{\lg \frac{A_1}{A_2}}{\lg \frac{h_1}{h_2}}.$$

Визначення коефіцієнта *l*. В даному випадку *K* визначається при змінних значеннях Pr, які можуть бути отримані шляхом випробування іншого газу. Однак при цьому змінюються не тільки Pr, але також *M* та Dr. Значення *A* залежить від $\mathrm{Pr}_г$, тому необхідно для різних газів встановити *A* із трьох значень

K. Припустимо, що для одного газу, для якого відомі Pr_1, Dr_1, M_1 знайдено A_1, а для іншого газу, для якого відомі Pr_2, Dr_2, M_2, знайдено A_2:

$$A_1 = \frac{1}{0,211 f_1 \frac{D_{г1}}{d} \mathrm{Pr}_{г1}^{l} \left(\frac{d}{h}\right)^m M_1},$$

$$A_2 = \frac{1}{0,211 f_1 \frac{D_{г2}}{d} \mathrm{Pr}_{г2}^{l} \left(\frac{d}{h}\right)^m M_2}$$

звідки

$$l = \frac{\lg \frac{A_1}{A_2} \frac{M_1}{M_2} \frac{D_{г1}}{D_{г2}}}{\lg \frac{\mathrm{Pr}_{г_1}}{\mathrm{Pr}_{г_2}}}.$$

Визначення коефіцієнта f_1. Якщо *l* і *m* відомі, значення функції f_1 легко визначається з рівняння:

$$f_1 = \frac{d}{0,211 A D_г \mathrm{Pr}_г^{l} \left(\frac{d}{h}\right)^m M},$$

де *A* - середнє значення цієї величини (оскільки коефіцієнти *k, l, m* обчислені за кількома значеннями *A)*.

Визначення коефіцієнта *n*. Величина *K* перебуває при змінних значеннях $Re_{ж}$, тобто при зміні густини зрошення. Маємо:

для $Re_{ж1}$

$$K_1 = \frac{1}{\frac{1}{K_г} + \frac{E}{\mathrm{Re}_{ж1}^{n}}}$$

для $Re_{ж2}$

$$K_2 = \frac{1}{\frac{1}{K_г} + \frac{E}{\mathrm{Re}_{ж2}^{n}}}$$

для $Re_{ж3}$

$$K_3 = \frac{1}{\frac{1}{K_г} + \frac{E}{\mathrm{Re}_{ж3}^n}}$$

де

$$E = \frac{1}{4{,}83 f_2 \frac{D_ж}{d} \mathrm{Pr}_ж \left(\frac{d}{h}\right)^q H}.$$

Показник ступеня *n*, при розв'язанні цих рівнянь визначається з співвідношення:

$$\left(\alpha^n - 1\right) = z\left(1 - \beta^n\right),$$

де

$$\alpha = \frac{\mathrm{Re}_{ж2}}{\mathrm{Re}_{ж1}}; \quad \beta = \frac{\mathrm{Re}_{ж2}}{\mathrm{Re}_{ж3}}$$

$$z = \frac{\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2}}{\frac{1}{K_2} - \frac{1}{K_3}}.$$

Величина:

$$E = \frac{\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2}}{\frac{1}{\mathrm{Re}_{ж1}^n} - \frac{1}{\mathrm{Re}_{ж2}^n}},$$

$$\frac{1}{K_г} = \frac{1}{K_1} - \frac{E}{\mathrm{Re}_{ж1}^n}.$$

Визначення коефіцієнта *q*. При змінних значеннях $\frac{d}{h}$ знаходимо *K* і визначаємо значення *E*.

Користуючись вищезазначеним способом, отримаємо:

$$q = \frac{\lg \frac{E_1}{E_2}}{\lg \frac{h_1}{h_2}}.$$

Визначення показника ступеня *p*.Змінною величиною тут є $Pr_{ж}$. При цьому одночасно з $Pr_{ж}$, який змінюється при користуванні іншим газом, змінюються $D_{ж}$ та H.

Отже:

$$p = \frac{\lg \frac{E_1 H_1 D_{ж1}}{E_2 H_2 D_{ж2}}}{\lg \frac{Pr_{ж2}}{Pr_{ж1}}}.$$

Визначення функції f_2. За наявності відомих показників ступеня p і q ця функція визначається так:

$$f_2 = \frac{d}{4{,}73 D_{ж} Pr_{ж}^{p} \left(\frac{d}{h}\right)^{q} HE}.$$

Приклад. У трубі діаметром 32мм зі змінною висотою від 320 до 1280 мм при стіканні води по внутрішній поверхні апарату створювалася плівка. Процес абсорбції вивчався стосовно NH_3, SO_2 і HC1 у суміші з повітрям. Використані такі фізичні константи.

Коефіцієнти дифузії у повітрі:

$$D_{NH_3} = 17{,}3\times10^{-6}\ м^2/с$$

$$D_{HCl} = 11{,}8\times10^{-6}\ м^2/с$$

$$D_{SO_2} = 8{,}9\times10^{-6}\ м^2/с$$

Коефіцієнти дифузії у воді;

$$D_{NH_3} = 7{,}3\times10^{-6}\ м^2/с$$

$$D_{HCl} = 9{,}73\times10^{-6}\ м^2/с$$

$$D_{SO_2} = 5{,}4\times10^{-6}\ м^2/с$$

Константи Генрі:

$$H_{NH_3} = 526\ кг/м^3\times ат$$

$$H_{HCl} = 721\ кг/м^3\times ат$$

$$H_{SO_2} = 105\ кг/м^3\times ат$$

Кінематична в'язкість повітря:

$$\nu_{повіт} = 22{,}5\times10^{-6}\ м^2/с$$

Кінематична в'язкість води:

$$\nu_{води} = 3{,}6\times10^{-3}\ м^2/с$$

Застосувавши наведену вище математичну обробку до дослідних даних отримали:

$$k = 0{,}752;\quad l = 0{,}628;\quad m = 0{,}066;\quad f_1 = 0{,}0445$$

$$n = 0{,}324;\quad p = 0{,}165;\quad q = 0{,}503;\quad f_2 = 471$$

Використовуючи ці величини, знаходимо:

$$K_г = 0{,}04455\frac{D_г}{d}\mathrm{Re}_г^{0{,}752}\,\mathrm{Pr}_г^{0{,}628}\left(\frac{d}{h}\right)^{0{,}066}$$

і

$$K_ж = 471\frac{D_ж}{d}\mathrm{Re}_ж^{0/324}\,\mathrm{Pr}_ж^{0{,}165}\left(\frac{d}{h}\right)^{0{,}503}$$

17 МЕТОД АНАЛІЗУ РОЗМІРНОСТІ

Багато процесів, які на практиці, бувають настільки складними, що не можуть бути безпосередньо описані диференціальними рівняннями. У разі дуже цінним математичним прийомом виявлення співвідношення між змінними величинами служить аналіз розмірності. Цей метод аналізу процесів не дає повних відомостей про співвідношення між змінними, яке, зрештою, має бути виявлено експериментально.

Тим не менш, цей метод дозволяє значно скоротити об’єм експериментальних робіт.

Таким чином, ефективне використання методу аналізу розмірності можливе лише при комбінуванні його з експериментом; причому повинні бути відомі всі фактори або змінні величини, що впливають на досліджуваний процес.

Аналіз розмірності дає логічне розподілення величин по безрозмірним групам.

У загальному вигляді функціональна залежність N може бути представлена так

$$N = f\,(\omega, L, \rho, \mu,\ g,\ p,\ \ldots)$$

або

$$N = f(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k). \qquad (116)$$

Сюди входять, включаючи величину N, $(k+1)$ величин. Вони можуть бути змінними, постійними, розмірними та безрозмірними. Однак у даному випадку потрібно, щоб для чисельних величин, що входять до рівняння, що характеризує фізичне явище, була прийнята та сама система основних одиниць вимірювання. За дотримання цієї умови рівняння залишається справедливим при довільно вибраній системі одиниць виміру. Далі ці основні одиниці повинні бути незалежними за своїми розмірностями, а число їх таким, щоб була можливість представити через них розмірності всіх інших величин, що входять у функціональну залежність (116).

Такими одиницями виміру можуть бути будь-які три величини, що входять до рівняння (116) і є незалежними один від одного щодо розмірності. Прийнявши, наприклад, за одиниці виміру довжину L та швидкість ω, ми тим самим маємо заданими одиницю довжини L та одиницю часу $T = \frac{L}{\omega}$.Таким чином, для третьої одиниці виміру не можна приймати будь-яку величину, розмірність якої містить лише довжину і час, як, наприклад, прискорення, так як одиниця цієї величини вже є заданою в результаті вибору одиниці довжини та швидкості. Отже, додатково повинна бути обрана будь-яка величина, розмірність якої входить маса, наприклад, щільність, в'язкість, сила і т.п.

Насправді, наприклад, при гідравлічних дослідженнях, виявляється доцільним прийняти такі три одиниці виміру; швидкість ω_0 будь-якої частинки потоку; будь-яку довжину, наприклад, діаметр трубопроводу D або його довжину L;щільність ρ_0 вибраної частинки.

Розмірність цих одиниць виміру:

$$[\omega] = \text{м/с};\ [L] = \text{м і } [\rho] = \text{кг}\times\text{с}^2/\text{м}^4.$$

Таким чином, рівняння для розмірностей відповідно до рівняння (116) може бути представлене в наступному вигляді:

$$[N] = [\omega]^x \times [L]^y \times [\rho]^z;$$

$$[n_i] = [\omega]^{xi} \times [L]^{yi} \times [\rho]^{zi};$$

Значення величинNіni,взятих у системі основних одиниць (метр, секунда, кг-сила), можна виразити безрозмірними числами:

$$\pi = \frac{N}{\omega_0^x L_0^y \rho_0^z}$$

$$\pi_i = \frac{n_i}{\omega_0^{x_i} L_0^{y_i} \rho_0^{z_i}}$$

Отже, замість рівняння (116) можна написати рівняння, у якому всі величини виражені у відносних одиницях (по відношенню до ω_0, L_0 і ρ_0):

$$\frac{N}{\omega_0^x L_0^y \rho_0^z} = f\left(\frac{n_1}{\omega_0^{x_1} L_0^{y_1} \rho_0^{z_1}}, \frac{n_2}{\omega_0^{x_2} L_0^{y_2} \rho_0^{z_2}}, \ldots, \frac{n_k}{\omega_0^{x_k} L_0^{y_k} \rho_0^{z_k}}\right)$$

Так як n_1, n_2, n_3 є, відповідно, ω_0, L_0 і ρ_0, то перші три члени рівняння перетворюються на три одиниці і функціональна залежність набуває вигляду:

$$\pi = f(1,\ 1,\ 1, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \ldots, \pi_k)$$

Отже, функціональна залежність у загальному випадку між $(k+1)$ розмірними величинами N і $n_i(\omega,\ L,\ \rho,\ \mu,\ g,\ p,\ \ldots)$ виражається як співвідношення між $(k+1-3)$ величинами π і πi, (i = 4, 5, ...,k), кожна з яких є безрозмірна статечна комбінація величин, що входять до функціональної залежності.

Ця теорема називається π-теорема; вона дозволяє при дослідженні визначити зв'язок між самими змінними, а між деякими, складеними за певними законами безрозмірними їх відносинами.

Безрозмірні числа π носять характер критеріїв подібності, як це видно з такого прикладу.

Приклад. Функціональну залежність для сили опору *T (кг),* яку випробовує пластина при обтіканні її рідиною у напрямі її довжини, можна як:

$$T = f(\omega, S, \rho, \mu, g, p, \frac{a}{L}, 0°)$$

Потрібно визначити цю залежність за умов подібності.

Основні одиниці:

ω - швидкість обтікання;

S - площа пластини;

ρ - щільність рідини.

Величина $\frac{a}{L}$ є відношення висоти пластини до її довжини, $\theta°$ - кут нахилу пластини до напрямку потоку.

Таким чином, величини $\frac{a}{L}$ і $\theta°$ безрозмірні, решта шість - розмірні; три з них: ω, S і ρ прийнято за основні. Відповідно до π-теореми тут можливі тільки

три безрозмірні співвідношення. Отже:

$$\pi = f(1,\ 1,\ 1,\ \pi_4,\ \pi_5,\ \pi_6,\ \frac{a}{L},\ \theta^\circ)$$

або

$$\frac{T}{\omega^x S^y \rho^z} = f\left(1, 1, 1, \frac{\mu}{\omega^{x_1} S^{y_1} \rho^{z_1}}, \frac{g}{\omega^{x_2} S^{y_2} \rho^{z_2}}, \frac{p}{\omega^{x_3} S^{y_3} \rho^{z_3}}, \frac{a}{l}, \theta^\circ\right)$$

Враховуючи рівність розмірностей для чисельника та знаменника, знайдемо показники ступенів

$$[T] = \left[\omega^x\ S^y\ \rho^z\right]$$

або

$$кг = (м/с)x\ (м2)y\ (кг \times c^2\ /м4)z$$

звідки

1 = z (показники зліва і справа прикг)
0 = x+2y –4z (показники при метрах)
0 = -x + 2z (показники за секунди)

розв'язання цих рівнянь дає:

$$z = 1;\ x = 1;\ y = 1$$

Аналогічно отримаємо:

z1= 1; x1 = 1 та y1 = 0,5
z2= 0; x2 = 2 та y2 = - 0,5
z3= 1; x3 = 2 та y3 = 0

Звідси маємо:

$$\pi = \frac{T}{\omega^2 S \rho};\quad \pi_4 = \frac{\mu}{\omega\rho\sqrt{S}}$$

$$\pi_5 = \frac{g\sqrt{S}}{\omega^2};\quad \pi_6 = \frac{p}{\omega^2 \rho}$$

Очевидно, значення π_4 і π_6 є критеріями Рейнольдса та Ейлера. Величина π_5 є критерієм Фруда:

$$\mathrm{Fr} = \frac{gl}{\omega^2}$$

що враховує вплив сил тяжіння. Зазвичай як критерій Фруда приймають зручнішу для розрахунків зворотну величину:

$$\mathrm{Fr} = \frac{\omega^2}{gl}$$

Шукана функціональна залежність має вигляд:

$$\frac{T}{\rho\omega^2 S} = f\left(\mathrm{Re}, \mathrm{Fr}, \mathrm{Fu}, \frac{a}{L}, \theta^\circ\right)$$

Звідси можна зробити висновок, що, досліджуючи цей процес при деяких розмірах, швидкостях тощо, ми можемо встановити, як він протікатиме при інших, розмірах і швидкостях у тому випадку, якщо безрозмірні відносини, складені з цих змінних, для обох випадків будуть однаковими.

Отже, висновки, отримані з дослідів з тілами даних розмірів, що рухаються з даною швидкістю і т.д., будуть очевидно справедливі і для будь-яких інших розмірів-тіла, швидкості і т.д. за умови рівності безрозмірних відносин я з тими, що спостерігалися при дослідах.

Приклад. Усередині гріючої труби куба колони ректифікації (рис. 14) протікає теплоносій із середньою швидкістю ω_0 (м/с). Діаметр труби d, а довжина l.

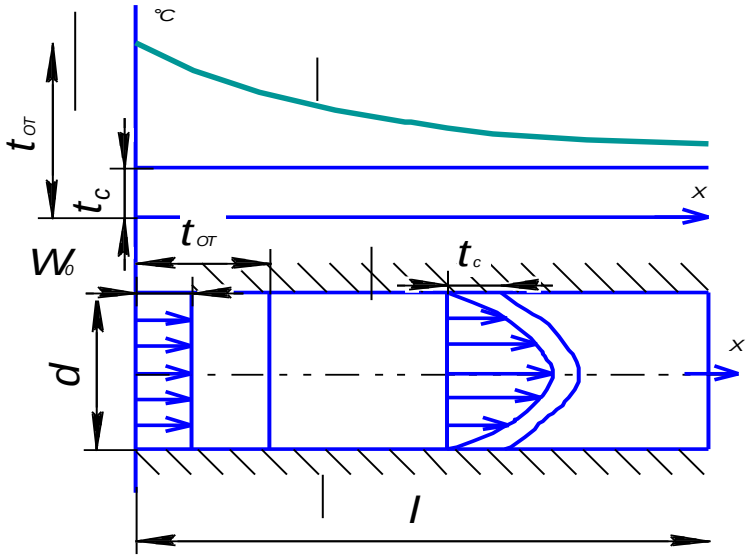


Рисунок 14 – До теорії розмірності

Температура теплоносія під час входу в трубу становить $t_{от}$. Температура стінки труби постійна за її довжиною і дорівнює $t_c < T_{от}$. Знайти рівняння подібності для тепловіддачі у трубі.

Середнє теплове навантаження поверхні труби, тобто. кількість тепла, що передається через одиницю площі в одиницю часу дорівнює:

$$q = -\frac{\lambda_T}{l}\int_0^l \frac{\partial \vartheta}{\partial r}_{r=\frac{d}{2}} dx. \qquad (117)$$

де λ_m - теплопровідність теплоносія;

$\vartheta = t - t_c$ - різниця між температурами теплоносія та стінки труби.

Розподіл різниці температур ϑ та швидкості ω у потоці описується наступними диференціальними рівняннями:

$$\left(\vec{\omega}\,\mathrm{grad}\,\vartheta\right) = a\nabla^2\vartheta, \qquad (118)$$

$$\mathrm{rot}\left(\vec{\omega}\,\mathrm{grad}\,\vartheta\right)\vec{\omega} = \nu\,\mathrm{rot}\,\nabla^2\vartheta, \qquad (119)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{\omega} = 0. \qquad (120)$$

Як граничні умови ставлять b, l, ν, a, λ_T, а також розподілу температури та швидкості на твердих та рідких межах потоку:

При $x = 0$ та $0 \le r \le \frac{d}{2}$ маємо $\vec{\omega} = \omega_0$ та $\vartheta = t_{om} - t_c = \Delta t$

При $r = \frac{d}{2}$ та $0 \le x \le l$ маємо $\vec{\omega} = 0$ та $\vartheta = t_c - t_c = 0$. (121)

З рівнянь (119), (120) та граничних умов для швидкостей (121) випливає, що:

$$\vec{\omega} = f_1\left(r, x, \nu, d, \omega_0\right). \qquad (122)$$

З рівняння (118) та граничних умов для температури (121) випливає, що:

$$\vartheta = f_2\left(r, x, \vec{\omega}, a, d, \Delta t\right). \qquad (123)$$

Підставивши (122) до (123), отримаємо:

$$\vartheta = f_3\left(r, x, a, \nu, d, \omega_0, \Delta t\right). \qquad (124)$$

Підставивши (124) та (117), знайдемо величини, від яких залежить середнє теплове навантаження поверхні труби:

$$q = -\frac{\lambda_T}{l}\int_0^l \left[\frac{\partial}{\partial r} f_3\left(r, x, a, \nu, d, \omega_0, \Delta t\right)\right]_{r=\frac{d}{2}} dx = \frac{\lambda_T}{4} f_4\left(\nu, a, d, \omega_0, \Delta t, l\right). \qquad (125)$$

Рівняння (125) містить n = 6 розмірних величин, визначення яких використано k = 3 первинні одиниці вимірювання: метр, секунда, градус:

[d]= м; [a] =[ν] = м2/с; [ω_0]= м/с; Δt=град; q/λ_T=град/м.

Отже, безрозмірна форма рівняння (125) має містити n-k =6 – 3 = 3 критерії подібності.

Для отримання рівняння подібності зменшимо метр, секунду та градус відповідно в L, T і θ раз і перепишемо (125) у нових одиницях:

$$\left(\frac{\text{м}}{L}, \frac{\text{сек}}{T}, \frac{\text{град}}{\theta}\right),$$

$$\frac{q}{\lambda_T} \cdot \frac{\theta}{L} = f_4\left(\nu \frac{L}{T} L, a \frac{L}{T} L, d \cdot L, \omega_0 \frac{L}{T}, \Delta t \cdot \theta, l \cdot L\right). \qquad (126)$$

Поклавши $d \times L$ =1, $\omega_0 L/T$=1 та $\Delta t \times \theta$= 1, отримаємо:

$$L = \frac{1}{d}, \ \frac{L}{T} = \frac{1}{\omega_0}, \ \theta = \frac{1}{\Delta t}.$$

Підставивши L, T та θ в (126), знайдемо:

$$\frac{qd}{\lambda_T \Delta t} = f_4\left(\frac{\nu}{\omega_0 d}, \frac{a}{\omega_0 d}, 1, 1, 1, \frac{l}{d}\right).$$

Замінивши f_4 на f та враховуючи, що $\frac{q}{\Delta t} = a$, перепишемо останнє рівняння так:

$$\frac{ad}{\lambda_T} = f\left(\frac{\omega_0 d}{\nu}, \frac{\omega_0 d}{a}, \frac{l}{d}\right)$$

або

$$\text{Nu} = f\left(\text{Re}, \text{Pe}, \frac{l}{d}\right) = F\left(\text{Re}, \text{Pr}, \frac{l}{d}\right). \qquad (127)$$

18 КОЕФІЦІЄНТ ТЕПЛОВІДДАЧІ ПРИ КОНДЕНСАЦІЇ ПАРІВ

Розглянемо плоску стінку з товщиною, що дорівнює одиниці, розташовану під кутом φ до горизонтальної осі (рис. 15). Нехай на відстані x від верхнього кінця стінки товщина шару рідини становить s. Сила прискорення, що діє елемент маси конденсату в напрямку осі x на відстані s-y, буде:

$$(s-y)dx\gamma g\sin\varphi,$$

де γ - щільність рідини;

g - gприскорення сили тяжіння.

Гальмівна сила складається з затримуючого зусилля з боку газу або пари на вільній поверхні конденсату і з затримуючого зусилля внутрішньої граничної плівки елемента рідини, що розглядається. Ця сила дорівнює:

$$\mu\frac{\partial\omega_y}{\partial y}dx,$$

де μ - d'язкість.

Для рівноважних умов маємо:

$$(s-y)dx\gamma g\sin\varphi=\mu\frac{\partial\omega_y}{\partial y}dx,$$

де ω - івидкість рідини

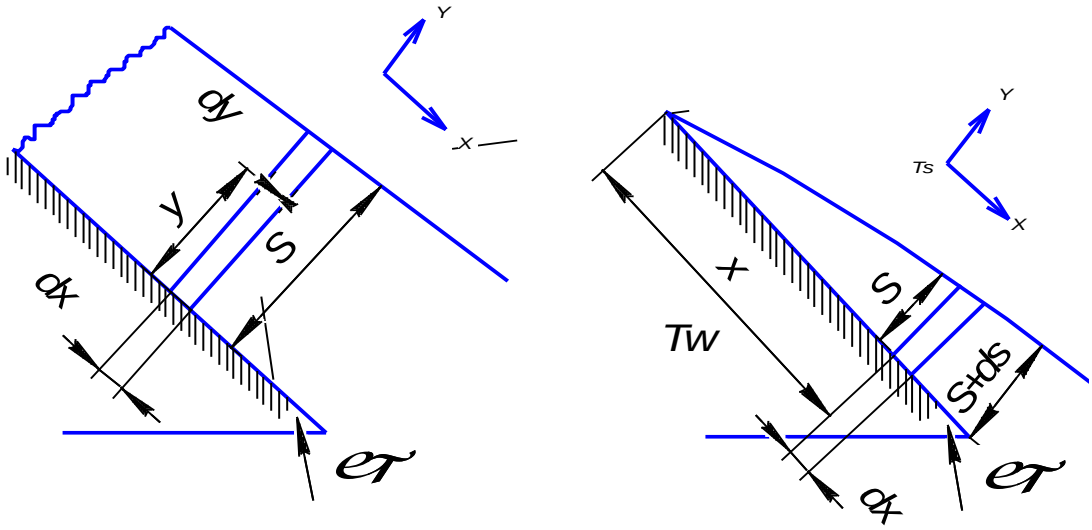


Рисунок 15, 16 – До моделі тепловіддачі

Таким чином

$$d\omega_y = \frac{\gamma g \sin\varphi}{\mu}(s - y)dy$$

і

$$\omega_y = \frac{\gamma g \sin\varphi}{\mu}\left(sy - \frac{1}{2}y^2\right) + C.$$

При $y = 0$ маємо $\omega_y = 0$; отже $C = 0$. Кількість рідини G, проходить над поверхнею, так само

$$G = \int_0^s \left[\frac{\gamma g \sin\varphi}{\mu}\left(sy - \frac{1}{2}y^2\right)\right]\gamma dy = \frac{\gamma^2 g \sin\varphi}{\mu}\left(\frac{s^3}{2} - \frac{s^3}{6}\right) = \frac{\gamma^2 g \sin\varphi s^3}{3\gamma}$$

і середня швидкість рідини буде:

$$\omega_{cp} = \frac{\gamma g \sin\varphi s^2}{3\mu}.$$

Для вертикальної стінки маємо:

$$\sin\varphi = 1$$

і

$$\omega_{cp} = \frac{\gamma g s^2}{3\mu}.$$

Так як в даному випадку рідина виходить в результаті конденсації пари, то на верхньому кінці стінки товщина шару плівки дорівнює нулю і при наближенні до основи остання збільшується.

При встановлених умовах різниця значень масових швидкостей рідини на відрізках довжин x і $x + dx$ залежить від конденсації парів над малим елементом поверхні за довжиною dx (рис. 16). Якщо товщина шару рідинної плівки збільшується від s до $s + ds$, то збільшення масової швидкості потоку рідини становитиме:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\gamma^2 g \sin\varphi s^3}{3\mu}\right)ds = \frac{\gamma^2 g \sin\varphi s^2 ds}{\mu}.$$

Позначимо температури пари та стінки, відповідно, через $t_П$ і $t_{СТ}$, тоді для кількості тепла, що передається за рахунок теплопровідності, матимемо:

$$\lambda(t_П - t_{СТ})\frac{dx}{s},$$

де λ - коефіцієнт теплопровідності конденсату.

Таким чином, швидкість конденсації на аналізованому майданчику стінки дорівнює:

$$\lambda\left(t_{П}-t_{СТ}\right)\frac{dx}{sr},$$

де r- теплота пароутворення рідини.

Отже:

$$\lambda\left(t_{П}-t_{СТ}\right)\frac{dx}{sr}=\frac{\gamma^{2}g\sin\varphi s^{2}ds}{\mu}.$$

Після інтегрування отримаємо:

$$\mu\lambda\left(t_{П}-t_{СТ}\right)x=\gamma^{2}g\sin\varphi s^{4}\frac{1}{4}r.$$

Маємо:

$$s=\sqrt[4]{\frac{4\mu\lambda x\left(t_{П}-t_{СТ}\right)}{g\sin\varphi r\gamma^{2}}}.$$

Коефіцієнт тепловіддачі α при $x-\bar{x}$ дорівнює λ/s, тому:

$$\alpha=\sqrt[4]{\frac{\gamma^{2}g\sin\varphi r\lambda^{3}}{4\mu x\left(t_{П}-t_{СТ}\right)}}$$

і

$$\mathrm{Nu}=\frac{ax}{\lambda}=\sqrt[4]{\frac{\gamma^{2}g\sin\varphi rx^{3}}{4\mu\lambda\left(t_{П}-t_{СТ}\right)}}.$$

Цей вираз дає значення α та Nu для окремих точок при $x = x$.

Середнє значення коефіцієнта тепловіддачі для всієї поверхні стінки між x= 0 та x=x дорівнює:

$$\alpha_{СР}=\frac{1}{x}\int_{0}^{x}\alpha dx=\frac{1}{x}\int_{0}^{x}Kx^{-\frac{1}{4}}dx=\frac{1}{x}K\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{4}{3}Kx^{-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\alpha=0{,}943\sqrt[4]{\frac{\gamma^{2}gr\lambda^{3}}{\mu x\Delta t}}.$$

Для вертикальної поверхні $\sin\varphi$= 1 і тому:

$$\alpha_{ср}=0{,}943\sqrt[4]{\frac{\gamma^{2}gr\lambda^{3}}{\mu x\Delta t}}.$$

19 ПОВЕРХНЕВІ ЯВИЩА ДЛЯ СТРУМЕНЯ З РІДИННИХ КАПЕЛЬ

В цьому випадку ми будемо розглядати потік рідини, що випливає з розпилювальної труби або сопла з утворенням струменя рідинних крапель. Цікавим є визначення середнього діаметра крапель рідини в струмені.

Приймемо

$$d_0 = f\left(\gamma, \mu, \sigma, g, d, \omega\right)$$

де d_0 - середній діаметр крапель;
ω - швидкість руху рідини в трубі;
d - діаметр відкритого кінця труби;
σ - поверхневий натяг рідини.
Використовуючи γ, d і ω як основні величини, отримаємо:

для d_0

$$\pi_1 = \frac{d_0}{d},$$

для μ

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\gamma\omega d} \text{ - зворотне число Рейнольдса}$$

для σ

$$\pi_3 = \frac{\sigma}{\gamma\omega^2 d} \text{ - зворотне число Вебера}$$

для g

$$\pi_4 = \frac{gd}{\omega^2} \text{-зворотне число Фруда.}$$

Таким чином, остаточно матимемо:

$$\frac{d_0}{d} = f\left(\frac{\gamma\omega d}{\mu}, \frac{\gamma\omega^2 d}{\sigma}, \frac{\omega^2}{gd}\right)$$

або

$$\frac{d_0}{d} = f\left(\mathrm{Re}, \mathrm{We}, \mathrm{Fr}\right).$$

20 ПРИМУСОВА КОНВЕКЦІЯ ПРИ ВИСОКІЙ ШВИДКОСТІ ПОТОКУ

Якщо при русі рідини відбувається частковий обмін між тепловою енергією та спрямованою кінетичною енергією, наприклад, при закінченні газу із сопла або дифузора, то ми не можемо надавати теплу незалежні розмірності. В цьому випадку можна застосувати такий же метод аналізу розмірностей, як і для примусової конвекції в трубі, але з використанням чотирьох основних одиниць вимірювання μ, L, τ і t.

Тепер ми маємо прийняти:

$$q = f\left(\Delta t, \lambda, c_p, \gamma, \mu, d, \omega_0, t_{cp}\right).$$

Вибираючи наступні основні величини з урахуванням зазначених вище одиниць виміру, отримаємо:

$$\begin{array}{cccc} \Delta t & \lambda & d & \omega_0 \\ t & \dfrac{ML}{\tau^3 t} & L & \dfrac{L}{\tau} \end{array}.$$

Внаслідок аналізу розмірностей знайдемо:

для q

$$\pi_1 = \frac{qd}{\Delta t \lambda}$$ - критерій Nu

для c_{cp}

$$\pi_2 = \frac{c_{cp}\Delta t}{\omega_0^{\ 2}}$$ - механічний коефіцієнт тепла

або

$$\frac{Ic_{cp}\Delta t}{\omega_0^{\ 2}}$$

для γ

$$\pi_3 = \frac{\gamma \omega_0^{\ 2} d}{\Delta t \lambda}$$

для μ

$$\pi_4 = \frac{\mu \omega_0^{\ 2}}{\Delta t \lambda}$$

для t_{cp}

$$\pi_5 = \frac{t_{cp}}{\Delta t}$$

або

$$\frac{\Delta t}{t_{cp}}.$$

Відмітимо, що $\pi_1 \times \pi_2 = I \times \mathrm{Pe} \times \mathrm{Pr}$ та $\pi_2 \times \pi_4 = \mathrm{Pr}$; новим тут є безрозмірне відношення π_2 або його обернена величина, яка зручніша для користування.

Таким чином:

$$\mathrm{Nu} = f\left(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \frac{\omega_0^{\,2}}{Ic_p\Delta t}, \frac{\Delta t}{t_{cp}}\right).$$

Фізичний зміст критерію $\frac{\omega_0^{\,2}}{Ic_p\Delta t}$ стає ясним з того, що $\frac{1}{2}\omega_0^{\,2}$ виражає кінетичну енергію, віднесену до одиниці маси потоку, тоді як $Ic_p\Delta t$ є міра зміни ентальпії на одиницю маси при підвищенні температури Δt.

Значення нового критерію може бути обґрунтовано також відомим рівнянням для потоку ідеального газу, що стискається, за відсутності тепловіддачі і роботи тертя:

$$Ic_p + \frac{1}{2}\omega^2 = \mathrm{cons\,t}.$$

У зв'язку з цим можна стверджувати, що $\frac{\omega_0^{\,2}}{2}Ic_p$ вказує порядок величини коливань температури, що мають місце у потоці внаслідок явищ стиснення. При низьких швидкостях ця динамічна температурна різниця зазвичай мала в порівнянні з різницею, що вимірюється Δt. Однак за високої швидкості потоку вони можуть бути одного порядку. Для ідеального газу ми можемо написати:

$$Ic_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1}R.$$

Отже:

$$Ic_p\Delta t = \frac{\gamma}{\gamma - 1}Rt_{cp}\frac{\Delta t}{t_{cp}} = \frac{a_0^2}{\gamma - 1}\frac{\Delta t}{t_{cp}}.$$

де $a_0 = \sqrt{\gamma R t_{cp}}$ - швидкість звуку в газі за температури *tcp*.

Таким чином, ставлення $\frac{\omega_0^{\,2}}{Ic_p\Delta t}$ дорівнює $(\gamma-1)\frac{t_{cp}}{\Delta t}\mathrm{Ma}^2$, де $Ma=\frac{\omega_0}{a_0}$ - критерій Маха для потоку у цій точці.

У результаті маємо:

$$\mathrm{Nu}=f\left(\mathrm{Re},\mathrm{Pr},\mathrm{Ma},\frac{\Delta t}{t_{cp}}\right).$$

Використовуючи інші основні величини, наприклад Δt, c_p, γ, d, ω_0, ми отримаємо для π_1:

$$\pi_1=\frac{q}{\Delta t\gamma\omega_0 c_p}=\frac{a}{\gamma\omega_0 c_p}\ \text{критерій Стантона (St)}$$

і відповідно:

$$\mathrm{St}=f\left(\mathrm{Re},\mathrm{Pr},\frac{l}{d}\right),$$

$$\mathrm{St}=\frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Pr}}.$$

За наявності високих температурних різниць слід врахувати зміни фізичних констант із температурою. Тому на додаток до Δt вводиться ще одна величина t_{cp} - середня температура маси рідини.

Тоді:

$$\mathrm{Nu}=f\left(\mathrm{Re},\mathrm{Pr},\frac{\Delta t}{t_{cp}}\right).$$

Дослідним шляхом встановлено, що для випадку турбулентного потоку у довгій трубі з Re >>2100 та для рідин з числом Pr >>0,5 коефіцієнти швидкості тепловіддачі можуть бути обчислені з наступного виразу:

$$\mathrm{Nu}=0{,}023\mathrm{Re}^{0{,}8}\,\mathrm{Pr}^{0{,}4}.$$

Для ламінарних потоків та в'язких рідин маємо:

$$\mathrm{Nu}=0{,}027\left(\frac{\mu}{\mu_{cm}}\right)^{0{,}14}\mathrm{Re}^{0{,}8}\,\mathrm{Pr}^{0{,}33}.$$

де μ і μ_{cm} - в'язкості відповідно при середній температурі маси та температурі стінки.

21 ВІЛЬНА КОНВЕКЦІЯ

Приймемо, що тепловий потік q для випадку тепловіддачі конвекцією від вертикальної стінки залежить від наступних змінних величин, включаючи висоту стінки L:

$$q = f\left(\Delta t, \beta g, \gamma, \lambda, c_p, \mu, L\right),$$

де β - коефіцієнт розширення рідини.

Ця залежність між вісьмома величинами призводить до співвідношення між трьома безрозмірними групами при використанні M, L, τ, t і h як основні одиниці виміру, причому h- кількість тепла.

Виберемо такі величини:

$$\begin{matrix} \Delta t & \lambda & \gamma & \mu & L \\ t & \dfrac{h}{L\tau t} & \dfrac{M}{L^3} & \dfrac{M}{L\tau} & L \end{matrix}.$$

Тоді матимемо:

для q

$$\pi_1 = \frac{qL}{\Delta t \lambda} = \frac{aL}{\lambda} \text{ - критерій Nu}$$

для βg

$$\pi_2 = \frac{\beta g \Delta t \gamma^2 L^3}{\mu^2} = \frac{\beta g \Delta t L^3}{\gamma^2} \text{ - критерій Gr}$$

для c_p

$$\pi_3 = \frac{\mu c_p}{\lambda} \text{ - критерії Pr}$$

Таким чином, для тепловіддачі вільною конвекцією від вертикальної стінки одержимо:

$$\mathrm{Nu} = f\left(\mathrm{Gr}, \mathrm{Pr}\right).$$

Для ламінарного потоку з твором Gr×Pr у межах від 104 до 108 практично знайдено:

$$\mathrm{Nu} = 0{,}56\,\mathrm{Gr}^{1/4}\,\mathrm{Pr}^{1/4}.$$

Якщо Gr×Pr> 109, то Nu пропорційний величині (Gr×Pr)1/3. У цьому

випадку можуть бути використані такі формули:

$$\text{для газів}\ \mathrm{Nu} = 0{,}12\,\mathrm{Gr}^{1/3}\,\mathrm{Pr}^{1/3}$$

$$\text{для рідин}\ \mathrm{Nu} = 0{,}17\,\mathrm{Gr}^{1/3}\,\mathrm{Pr}^{1/3}$$

Для тепловіддачі конвекцією від горизонтальних циліндрів за умов Nu і Pr використовується значення діаметра і при Gr×Pr < 108 маємо

$$\mathrm{Nu} = 0{,}47\,\mathrm{Gr}^{1/4}\,\mathrm{Pr}^{1/4}.$$

22 ВИТРАТА ЕНЕРГІЇ ДЛЯ ВЕНТИЛЯТОРА

Розглянемо серію геометрично подібних вентиляторів. Нехай n і d, відповідно, швидкість обертання та діаметр колеса, а v об'єм потоку. Приймемо, що витрати енергії N на обертання вентилятора є функція γ, μ, n, d, v або:

$$f(N, \gamma, \mu, n, d, v) = 0.$$

Як і раніше, маємо шість змінних величин при трьох основних одиницях вимірювання і, отже, аналіз повинен завершуватися трьома безрозмірними відносинами.

Виберемо γ, n і d як первинні одиниці. Для π_1 встановлюємо $\dfrac{N}{\gamma^{a1} n^{b1} d^{c1}}$.

Прирівнюючи розмірності чисельника та знаменника, знайдемо:

$$a1 = 1,\ \mathrm{b1} = 3,\ \mathrm{c1} = 5,$$

$$\pi_1 = \frac{N}{\gamma n^3 d^5} \text{ - коефіцієнт витрати енергії.}$$

Для π_2 отримаємо $\dfrac{\mu}{\gamma^{a2} n^{b2} d^{c2}}$:

$$a2 = 1,\ \mathrm{b2} = 1,\ \mathrm{c2} = 2.$$

Таким чином

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\gamma n d^2} \text{ - зворотне число Рейнольдса.}$$

Для π_3 маємо $\frac{\nu}{\gamma^{a3} n^{b3} d^{c3}}$:

$$a3 = 0,\ b3 = 1,\ c3 = 3.$$

$$\pi_3 = \frac{\nu}{nd^3}.$$

В результаті отримаємо:

$$\frac{N}{\gamma n^3 d^5} = f\left(\frac{\nu}{nd^3}, \frac{\gamma n d^2}{\mu}\right)$$

Зазначимо, що тут потік газу прийнято нестислим.

Так як рух газу при його проходженні через вентилятор є сильно турбулентним, то ефект зміни в'язкості буде незначно малий у порівнянні з інерційними явищами.

Тому ми можемо не враховувати зміни, пов'язані з числом Рейнольдса, й у практичних цілей користуватися спрощеним виразом:

$$\frac{N}{\gamma n^3 d^5} = f\left(\frac{\nu}{nd^3}\right).$$

23 ВИТРАТА ЕНЕРГІЇ НА ПЕРЕМІШУВАННЯ РІДИН У РЕАКЦІЙНИХ АПАРАТАХ

Для подібності у двох змішувальних системах потрібно:

1. Геометрична і гранична подібність, при якій відносини величин для систем, що розглядаються, повинні бути рівні між собою.
2. Кінетична подібність, де швидкості у відповідних точках мають бути в такому ж відношенні, як швидкості в інших відповідних точках. Таким чином, шляхи руху рідини мають бути подібними.
3. Динамічна подібність, яка вимагає, щоб відношення сил у відповідних точках дорівнювало відношенню сил в інших відповідних точках.

Якщо граничні умови фіксовані, ми можемо висловити одну змінну, наприклад, потужність P через інші незалежні змінні:

$$P = f(D, \mu, g, \gamma, N)$$

де D - діаметр;

N - швидкість обертання мішалки.

Представляючи цю залежність як твори ступенів, отримаємо:

$$P = K(Da\mu^b ge\gamma^f Ni).$$

При використанні одиниць виміру *L, M* і *T* знайдемо:

$$\frac{ML^2}{T^3} = \left[L^a \left(\frac{M}{LT}\right)^b \left(\frac{L}{T^2}\right)^e \left(\frac{M}{L^3}\right)^f \left(\frac{1}{T}\right)^i \right].$$

Прирівнюючи один одному розмірності в обох частинах рівності, матимемо:

для *L*: 2 = a - b + e- 3*f*
для *M:*1 =*b*+ f
для *T:*- 3= -*b* - *2e* - *f*

Виразимо ці значення через *b* і *e*, тоді отримаємо:

$$f = 1 - b$$

$$a = 2 + b - e + 3 - 3b = 5 - 2b - e$$

$$i = - b - 2e + 3$$

і

$$P = K\left[D^{-2b-e+5} \mu^b g^e \gamma^{1-b} N^{-b-2e+3} \right] =$$
$$= K\left[\left(D^5 \gamma N^3\right) \left(\frac{D^2 N\gamma}{\mu}\right)^{-b} \left(\frac{DN^2}{g}\right)^{-e} \right]$$

або

$$\frac{P}{D^5 N^3} = K\left[\frac{D^2 N\gamma}{\mu}\right]^{-b} \left[\frac{DN^2}{g}\right]^{-e}$$

або

$$N_P = K\,\mathrm{Re}^n\,\mathrm{Fr}^r.$$

Критерій Рейнольдса $\frac{D^2 N}{\mu}$ тут є ставлення сили інерції до сил в'язкості, а критерій Фруда — вплив сили тяжкості. Для трилопатевих мішалок *K* =41.

24 ВИЗНАЧЕННЯ ШУКАНИХ ПАРАМЕТРІВ ДЛЯ МОДЕЛІ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСІВ

Для охолодження води повітрям спроектований новий тип трубчастого теплообмінного апарату. Дані про гідравлічний опір потоку води в такому теплообміннику відсутні. Передбачається спробувати модель теплообмінника, довжина якого становить 1/10 довжини виробничого апарату. Швидкість води у виробничому апараті 756 л/хв за середньої температури 49 °С.

1. Яка швидкість повітря при 15,7 °С та тиску 1 атм у моделі може створити умови, подібні до таких у виробничому апараті?
2. Якщо перепад тиску моделі для швидкості потоку, встановленої в 1, дорівнює 760 мм вод. ст., то який перепад тиску буде у виробничому апараті?

Для води при 49 °С:

$$\nu = 0{,}0567\times10^{-5}\ м^2/с,$$
$$\rho = 987\ кг/м^3.$$

Для повітря при 15,7 ° С:

$$\nu = 0{,}147\times10^{-4}\ м^2/с,$$
$$\rho = 1{,}22\ кг/м^3.$$

де ν - в'язкість;
ρ - щільність.

1. Для динамічної подібності виробничого апарату моделі необхідно, щоб числа Рейнольдса були рівні між собою.

Величини, що входять у критерій Рейнольдса, представлені у табл. 1.3.

З рівності чисел Рейнольдса отримаємо:

$$Q = \frac{10\cdot0{,}756\cdot0{,}147\cdot10^{-4}}{100\cdot0{,}0567\cdot10^{-5}} = 2{,}0.$$

Таким чином, швидкість повітря в моделі повинна дорівнювати 2,0 $м^3$/хв.

2. Якщо між моделлю та виробничим апаратом існує динамічна подібність, то повинні дорівнювати між собою числа Ейлера (табл. 1.4).

Таблиця 1.3

Величини	Модель	Виробничий апарат
Довжина	L	$10L$
Об'ємна швидкість потоку, м^3/хв	Q	0,756
Швидкість	Q/L^2	$0{,}756/100L^2$
Кінематична в'язкість, м2/с	$0{,}147\times10^{-4}$	$0{,}0567\times10^{-5}$
Число Рейнольдса	$L\frac{Q}{L^2}\frac{1}{0{,}147\cdot10^{-4}}$	$10L\frac{0{,}756}{100L^2}\frac{1}{0{,}0567\cdot10^{-5}}$

Таблиця 1.4

Величини	Модель	Виробничий апарат
Довжина	L	$10\ L$
Перепад тиску, мм вод. ст.	760	ΔP
Швидкість	$2{,}0/L^2$	$0{,}756/100L^2$
Щільність, кг/м^3	1,22	987
Число Ейлера	$\frac{760g}{1{,}22\left(\frac{2{,}0}{L^2}\right)^2}$	$\frac{\Delta Pg}{987\left(\frac{0{,}756}{100L^2}\right)^2}$

Оскільки числа Ейлера рівні між собою, маємо:

$$\Delta P=\frac{760\cdot987\cdot0{,}756^2}{1{,}22\cdot2{,}0^2\cdot100^2}=8{,}82\,.$$

Ми знайшли величину перепаду тиску у виробничому апараті, яка відповідає перепаду тиску 760 мм вод. ст.для моделі.

25 ПРИКЛАДИ РІШЕННЯ ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ З ВИКОРИСТАННЯМ ТЕОРІЇ РОЗМІРНОСТІ.

Задача 1. Знайти період коливань математичного маятника.

Під математичним маятником будемо розуміти важку матеріальну точку, яка підвішена на невагомому та недеформованому стержні, який закріплений іншим своїм кінцем так, що може вільно обертатися в деякій вертикальній площині навколо точки підвісу.

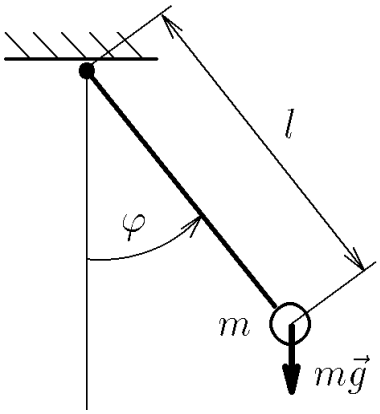


Рисунок 25.1 – Математичний маятник

Спочатку виберемо систему одиниць в якій будемо працювати. В загальному випадку будемо користуватися міжнародна система одиниць СІ, хоча інколи використання інших систем одиниць фізичних величин може полегшити розв'язання задачі, що ми покажемо далі.

Наступним кроком складемо перелік фізичних величин, від яких може залежати відповідь. Очевидно, що період коливання може залежати від довжини маятника, його маси, прискорення вільного падіння і кутової амплітуди коливань. Випишемо розмірності цих величин, застосовуючи основну систему величин, тобто масу, довжину і час: $[t] = T$, $[l] = L$, $[m] = M$, $[g] = LT^{-2}$, φ – безрозмірна величина.

Оскільки одна з величин безрозмірна (кут φ), то період коливань можна представити у вигляді:

$$T = C(\varphi) \times m^{\alpha} \times l^{\beta} \times g^{\gamma}, \qquad (25.1)$$

де $C(\varphi)$ – парна функція, яка залежить від кутової амплітуди коливання і вигляд якої є невизначеною в рамках методу розмірностей;

α, β, γ – невідомі показники степенів відповідних фізичних величин.

У рівняння (25.1) замість фізичних величин підставимо їх розмірності:

$$T^{1} = M^{\alpha} \times L^{\beta} \times L^{\gamma} \times T^{-2\gamma}. \qquad (25.1^{/})$$

Прирівняємо степені однорідних одиниць величин:

M: $\alpha = 0$;
L: $\beta + \gamma = 0$;
T: $-2\gamma = 1$.

Розв'язуючи систему рівнянь, одержимо: $\alpha = 0$, $\beta = 1/2$, $\gamma = -1/2$.

Остаточна формула для знаходження періоду коливань математичного маятника матиме вигляд:

$$T = C(\varphi) \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (25.2)$$

Отже, період коливань маятника не залежить від його маси, а залежить лише від довжини маятника, та географічної широти.

Подальші дослідження не пов`язані з аналізом розмірностей, тому лише зауважимо, що для малих значень амплітуди $C(\varphi)$ може бути покладеним рівним 2π. Як відомо, кожен методичний прийом не є ідеальним, це відноситься і до методу розмірностей. Разом з тим, він поєднує необхідність аналізу фізичної залежності шуканої величини від інших величин або в теоретичному плані, або експериментально.

Задача 2. Вивести формулу шляху рівноприскореного руху без початкової швидкості.

Будемо шукати формулу у вигляді степеневої функції виду:

$$l = f(a, t),$$

або

$$l = C \times a^{\alpha} \times t^{\beta}.$$

На підставі правила про однорідність фізичних формул можемо написати:

$$[l] = [a]^{\alpha} \times [t]^{\beta}$$

або

$$L = L^{\alpha} \times T^{-2\alpha} \times L^{\beta},$$

звідки одержимо такі значення коефіцієнтів: $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Отже, шукана формула має вигляд:

$$l = C \times a \times t^2. \qquad (25.3)$$

Постійний множник C методом розмірностей не може бути визначений, про це йшлося вище.

Задача 3. Довести, що друга космічна швидкість залежить від розмірів планети – R, прискорення вільного падіння – g і не залежить від маси ракети m.

Представимо функціональну залежність між даними величинами у

вигляді:

$$v = C \times R^{\alpha} \times g^{\beta} \times m^{\gamma}.$$

Розмірність цього співвідношення запишеться так:

$$LT^{-1} = L^{\alpha} \times L^{\beta} \times T^{-2\beta} \times M^{\gamma},$$

де використані розмірності швидкості, прискорення, маси і відстані.

Очевидно, що показник ступеня $\gamma = 0$ і тоді повинні виконуватися наступні рівності для показників степенів:

L: $1 = \alpha + \beta,$

T: $-1 = -2\beta.$

Отже, маємо, що $\alpha = 1/2$ і $\beta = 1/2$. Таким чином, формула для другої космічної швидкості має вигляд:

$$v = C \cdot \sqrt{R \cdot g}\,. \qquad (25.4)$$

Задача 4. Оцініть гравітаційний тиск у центрі Землі.

Зрозуміло, що безпосередньо виміряти цю величину неможливо. Розв’яжемо задачу методом розмірностей. Проаналізуємо умову й укладемо повний перелік фізичних величин, які відбивають істотні, на нашу думку, грані виникнення гравітаційного тиску: p — тиск, який необхідно оцінити, m — маса, R — радіус Землі й гравітаційна стала G. Розмірності даних фізичних величин мають наступний вигляд:

$$[p] = M \times L^{-1} \times T^{-2},\ [m] = M,\ [R] = L,\ [G] = M^{-1} \times L^{3} \times T^{-2}.$$

Розв’язок задачі шукатимемо у вигляді рівності:

$$p = f(m, R, G),$$

або

$$p = x \cdot \times m^{\alpha} \times R^{\beta} \times G^{\gamma},$$

де x — числовий коефіцієнт, значення якого в межах методу розмірностей є невизначеним,

α, β і γ — невідомі показники степенів відповідних фізичних величин.

Запишемо рівність розмірностей одиниць фізичних величин:

$$M^{1} \times L^{-1} \times T^{-2} = M^{\alpha} \times L^{\beta} \times M^{-\gamma} \times L^{3\gamma} \times T^{-2\gamma}.$$

Прирівняємо степені однорідних одиниць величин:

L: $-1 = \beta + 3\gamma$;
T: $-2 = -2\gamma$;
M: $1 = \alpha - \gamma$;

Розв'язуючи систему рівнянь, одержимо: $\alpha = 2$, $\beta = -4$, $\gamma = 1$. Остаточна формула матиме вигляд:

$$p = x \cdot \frac{m^2 \cdot G}{R^4}. \qquad (25.5)$$

Для оцінки тиску покладемо $x = 1$. Тоді:

$$p = \frac{m^2 \cdot G}{R^4}. \qquad (25.5')$$

При підстановці відповідних величин отримаємо, що тиск у центрі Землі $p = 1{,}4 \cdot\times\ 10^{12}$ Па. Цікаво, що геофізики в ході спеціальних досліджень оцінюють цей тиск як $4\cdot\times10^{12}$ Па, як бачимо ці величини одного порядку.

Задача 5. Визначити напруженість магнітного поля нескінченно довгого соленоїда, якщо радіус витка – R, число витків на одиницю довжини – n.

Природно припустити, що напруженість магнітного поля всередині соленоїда (поза соленоїдом магнітного поля не буде, тому що силові лінії магнітного поля, що йдуть всередині соленоїда, не виходять з нього, а замикаються в нескінченності, де знаходяться кінці нескінченно довгого соленоїда) буде пропорційна числу витків, що припадають на одиницю довжини і, крім того, буде функціонально залежати від сили струму і радіуса витка. Тому можна написати наступний вираз для напруженості магнітного поля даного соленоїда:

$$H = n \times f(I, R) = C \times n \times I^{\alpha} \times R^{\beta}.$$

Далі поступаємо за загальним правилом. Запишемо рівність розмірностей одиниць фізичних величин:

$$I^1 \times L^{-1} = L^{-1} \times I^{\alpha} \times L^{\beta},$$

звідки, прирівнюючи відповідні показники ступеня, отримуємо: $x = 1$, $y = 0$.

І, отже, шукана формула має наступний вигляд:

$$H = C \times n \times I. \qquad (25.6)$$

Напруженість магнітного поля всередині нескінченно довгого соленоїда не залежить від радіуса витка R.

Задача 6. Дослідити залежність напруженості електричного поля зарядженої нескінченної площини від густини електричного заряду і відстані від площини до точки спостереження.

В силу нескінченної протяжності зарядженої площини, вона є площиною симетрії, тому досить досліджувати поле по одну сторону від неї. Для розв'язання даної задачі скористаємось системою одиниць Гауса (у цій системі $\varepsilon_0 = 1$, а діелектрична стала ε – число), включимо діелектричну сталу в сталий множник C, будемо шукати вираз для напруженості як функцію густини зарядів – ω і найкоротшої відстані від площини до точки спостереження – R (із симетрії задачі і відсутності струму уздовж поверхні випливає, що вектор напруженості направлений перпендикулярно до цієї поверхні):

$$E = C \times f(\omega, R) = C \times \omega^{\alpha} \times R^{\beta}.$$

Запишемо розмірності даних величин в системі одиниць Гауса:

$$[E] = M^{1/2} \times L^{-1/2} \times T^{-1},$$
$$[\omega] = M^{1/2} \times L^{-1/2} \times \mathrm{T}^{-1}.$$

Запишемо рівність розмірностей одиниць фізичних величин:

$$M^{1/2} \times L^{-1/2} \times T^{-1} = M^{1/2\times\alpha} \times L^{-1/2\times\alpha} \times T^{-\alpha} \times L^{\beta}.$$

Після того, як прирівняємо показники степенів відповідних величин, отримаємо: $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Таким чином, напруженість поля однорідно зарядженої нескінченної площини пропорційна густині заряду і не залежить від відстані до площини, тобто поле однорідне і визначається за формулою:

$$E = C \times \varepsilon \times \omega. \qquad (25.7)$$

Задача 7. Встановити залежність періоду коливань в коливальному контурі від його індуктивності і ємності (формула Томсона).

Аналізуючи фізичний зміст завдання, припустимо, що шукана величина може залежати від ємності – C, індуктивності – L і, можливо, від початкового заряду на пластинах конденсатора – Q. Останнє припущення, взагалі кажучи, зайве, тому що період коливань повинен бути характеристикою самого коливального контуру. Але це ми покажемо в процесі розв'язання.

Функціональну залежність періоду коливань від ємності, індуктивності і заряду запишемо так:

$$T = x \cdot \times C^{\alpha} \times L^{\beta} \times Q^{\gamma}.$$

На підставі однорідності обох сторін цієї рівності маємо:

$$[T] = [C]^{\alpha} \times [L]^{\beta} \times [Q]^{\gamma},$$

де $[T] = T$, $[C] = L^{-2} \times M^{-1} \times T^{4} \times I^{2}$, $[L] = L^{2} \times M \times T^{-2} \times I^{-2}$, $[Q] = T \times I$.

Таким чином, отримуємо наступну рівність:

$$T = L^{-2\alpha} \times M^{-\alpha} \times T^{4\alpha} \times I^{2\alpha} \times L^{2\beta} \times M^{\beta} \times T^{-2\beta} \times I^{-2\beta} \times T^{\gamma} \times I^{\gamma}.$$

Прирівнюючи показники степеня відповідних величин, отримаємо систему чотирьох рівнянь:

$$\begin{aligned} L&: \quad 0 = -2\alpha + 2\beta, \\ M&: \quad 0 = -\alpha + \beta, \\ T&: \quad 1 = 4\alpha - 2\beta + \gamma, \\ I&: \quad 0 = 2\alpha - 2\beta + \gamma, \end{aligned}$$

Розв’язок даної системи: $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/2$, $\gamma = 0$.

Тоді шукана формула має вигляд:

$$T = x \cdot \sqrt{L \cdot C} \ . \qquad (25.8)$$

Задача 8. Оцінити інтервал часу, протягом якого в озері розтане шматок льоду у вигляді кульки з радіусом r = 5 см. Температура води в озері t_0 = 8 °С. Коефіцієнт теплопровідності води k = 0,6 Дж/(с·× м·× К).

Оскільки у задачі мова йде про оцінку інтервалу часу танення шматка льоду, її доцільно розв’язати методом розмірностей.

Є очевидним, що час танення льоду залежить від питомої теплоти плавлення льоду, його маси та кількості теплоти, яка надходить від навколишнього середовища. Оскільки маса льоду визначається густиною і об’ємом, а кількість теплоти — теплопровідністю, температурою середовища та площею поверхні дотику, включимо у перелік величини, які визначають час танення льоду, питому теплоту плавлення λ і густину льоду ρ, радіус кульки R, коефіцієнт теплопровідності k і температуру води t_0. Розмірності даних величин мають наступний вигляд:

$$[\tau] = T,\ [\lambda] = L^{2} \times T^{-2},\ [\rho] = M \times L^{-3},$$
$$[R] = L,\ [k] = M \times L \times T^{-3} \times \theta^{-1},\ [t_0] = \theta.$$

Вважаючи показник степеня при λ рівним одиниці, розв’язок задачі шукатимемо у вигляді рівності:

$$\tau = \lambda \cdot \times f(\rho, R, k, t_0),$$

або: $\tau = \lambda \cdot \times x \cdot \times \rho^{\alpha} \times R^{\beta} \times k^{\gamma} \times t_0^{c}$,

де x — числовий коефіцієнт, значення якого в межах методу розмірностей є невизначеним,

α, β, γ і c — невідомі показники степенів відповідних фізичних величин.

Запишемо рівність розмірностей одиниць фізичних величин:

$$T^1 = L^2 \times T^{-2} \times M^{\alpha} \times L^{-3\alpha} \times L^{\beta} \times M^{\gamma} \times L^{\gamma} \times T^{-3\gamma} \times \theta^{-\gamma} \times \theta^{c}.$$

Прирівняємо степені однорідних одиниць величин:

L: $0 = 2 - 3\alpha + \beta + \gamma$;
T: $1 = -2 - 3\gamma$;
M: $0 = \alpha + \gamma$;
θ: $0 = -\gamma + c$.

Розв’язуючи систему рівнянь, одержимо: $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = c = -1$. Остаточна формула для знаходження часу танення матиме вигляд:

$$\tau = x \cdot \frac{\lambda \cdot \rho \cdot r^2}{k \cdot t_0}. \qquad (25.9)$$

Для оцінки часу покладемо $x = 1$. Тоді:

$$\tau = \frac{\lambda \cdot \rho \cdot r^2}{k \cdot t_0}. \qquad (25.9')$$

Аналітичний шлях розв’язання цієї задачі може бути таким.

Вважатимемо, що вся кулька знаходиться у воді, температура льоду $t_л = 0$ °C, а процес танення льоду відбувається повільно. За цих умов миттєвий розподіл температури у воді навколо кульки льоду буде таким, як і у стаціонарному випадку, тобто з незмінним значенням температур на кінцях розглядуваної ділянки (на поверхні льоду 0 °C, а на значній відстані від кульки + 8 °C).

Для визначення розподілу температури у просторі навколо кульки охопимо її сферами двох радіусів R і R_0 (рисунок 25.2).

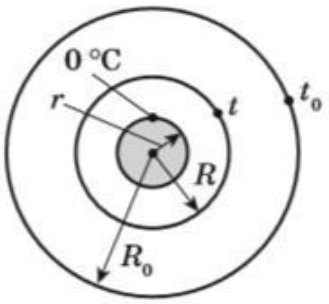


Рисунок 25.2 – Визначення розподілу температури

Для теплового потоку, що проходить через сферу радіуса R, можна записати:

$$\frac{dQ}{d\tau} = -k \cdot \frac{dt}{dR} \Delta S ,$$

де R — радіус сфери, на поверхні якої температура води t (0 °C < t < 8 °C).

Температура води на поверхні сфери радіуса R_0 становить t_0 = 8 °C. Оскільки температури середовищ, що відповідають положенню цих двох сфер, незмінні, то тепловий потік, який надходить до льодяної кульки від води через сферу радіуса R, є величиною сталою. Тобто:

$$\frac{dQ}{d\tau} = -k \cdot \frac{dt}{dR} \cdot 4\pi \cdot R^2 = \text{const} . \qquad (25.10)$$

Останнє рівняння можна записати так:

$$C_1 \cdot \frac{dR}{R^2} = -dt , \qquad (25.11)$$

де $C_1 = \frac{1}{4\pi \cdot k} \cdot \frac{dQ}{d\tau}$ — деяка стала величина.

Інтегруючи диференціальне рівняння (25.11), можна записати:

$$\frac{C_1}{R} = t + C_2 , \qquad (25.12)$$

де C_2 — стала інтегрування.

Сталі C_1 і C_2 можна визначити, використовуючи граничні умови: якщо $R = R_0$, то $t = t_0$, якщо $R = r$, то t = 0 °C. За цих умов система рівнянь запишеться так:

$$\begin{cases} \dfrac{C_1}{R_0} = t_0 + C_2; \\ \dfrac{C_1}{r} = C_2. \end{cases}$$

Розв’язуючи систему рівнянь, одержимо:

$$C_1 = \frac{t_0 \cdot R_0 \cdot r}{r - R_0};$$

.

$$C_2 = \frac{t_0 \cdot R_0}{r - R_0}$$

Підставляючи ці вирази у рівняння (25.12), одержимо співвідношення, яке описує розподіл температури у воді навколо кульки:

$$t = \frac{C_1}{R} - C_2 = \frac{t_0 \cdot R_0 \cdot r}{\left(r - R_0\right) \cdot R} - \frac{t_0 \cdot R_0}{r - R_0}.$$

За умови $R_0 \gg r$ останнє рівняння набуде вигляду:

$$t = t_0 - \frac{r}{R} \cdot t_0 .$$

Диференціюючи дане рівняння, визначимо градієнт температури у воді навколо льоду:

$$\frac{dt}{dR} = \frac{r \cdot t_0}{R^2}.$$

З урахуванням останньої рівності рівняння (25.10) для визначення кількості теплоти, яку одержує кулька від оточуючої води за інтервал часу $d\tau$, можна записати так:

$$dQ = -4\pi \cdot R^2 \cdot k \cdot \frac{r \cdot t_0}{R^2} d\tau = -4\pi \cdot k \cdot r \cdot t_0 \cdot d\tau. \qquad (25.13)$$

Внаслідок поглинання цієї кількості теплоти розтане маса льоду:

$$dm = \rho \cdot dV = 4\pi \cdot r^2 \cdot \rho \cdot dr .$$

Враховуючи, що $dQ = \lambda \cdot dm$, можна записати:

$$dQ = 4\pi \cdot r^2 \cdot \rho \cdot \lambda \cdot dr, \qquad (25.14)$$

де λ — питома теплота плавлення,
dr — товщина шару льоду, який розплавився.
Прирівнюючи праві частини рівнянь (25.13) і (25.14), одержимо:

$$-4\pi \cdot k \cdot r \cdot t_0 \cdot d\tau = 4\pi \cdot r^2 \cdot \rho \cdot \lambda \cdot dr.$$

Звідси:

$$d\tau = -\frac{\rho \cdot \lambda \cdot r}{k \cdot t_0} dr.$$

Інтегруючи останній вираз, одержимо:

$$\tau = -\frac{\rho \cdot \lambda}{2k \cdot t_0} \cdot r^2 \Big|_{r_0}^{0} = \frac{\rho \cdot \lambda \cdot r_0^2}{2k \cdot t_0}. \qquad (25.15)$$

Як бачимо, одержане нами співвідношення (25.15) з точністю до числового коефіцієнта $x = 1/2$ збігається з формулою (25.9), одержаною методом аналізу розмірностей. Підставляючи в останню формулу значення фізичних величин, оцінимо час танення такої кульки льоду у воді:

$$\tau = 5 \times 10^4 \text{ сек.}$$

Задача 9. Куля випущена з початковою швидкістю u в горизонтальному напрямку на висоті h від земної поверхні. Визначити дальність горизонтального польоту кулі.

Дальність польоту кулі l у цьому випадку може залежати від початкової швидкості u, початкової висоти h, та прискорення вільного падіння g. Тоді можемо записати наступний вираз:

$$R = C \cdot u^{\alpha} \cdot h^{\beta} \cdot g^{\gamma}.$$

Розмірність цього співвідношення запишеться так:

$$L = (LT^{-1})^{\alpha} \times L^{\beta} \times (LT^{-2})^{\gamma}.$$

L: $\quad 1 = \alpha + \beta + \gamma,$
T: $\quad 0 = -\alpha - 2\gamma.$

Оскільки маємо систему лише двох рівнянь з трьома невідомими показниками, то два з них повинні бути виражені через третій:

$$\alpha = \alpha, \beta = 1 - \alpha/2, \gamma = - \alpha/2.$$

Звідки:

$$R = C \cdot h \cdot \left(\frac{u}{\sqrt{h \cdot g}} \right)^{\alpha}. \qquad (25.16)$$

В даній задачі чотири фізичні величини виражені через дві основні величини, а отже повний розв’язок отримати неможливо. Кількість фізичних змінних не можна зменшити. Але чи можливо збільшити кількість основних одиниць виміру?

Для цього використаємо доповнення Хантлі, тобто «розкладемо» розмірність довжини по трьох взаємно перпендикулярних напрямках. Ці основні величини можна назвати векторними одиницями довжини, які розрізняються індексами, тобто $[L_x]$, $[L_y]$, $[L_z]$. Первісну розмірність для відмінності будемо називати скалярною одиницею довжини і позначати як $[L]$. У тих випадках, коли необхідно підкреслити векторні властивості розмірності довжини, в той час як напрямок вектору не має значення, можна використовувати позначення $[L_v]$. Векторна одиниця довжини $[L_v]$ утворюється при додаванні векторів $[L_x]$, $[L_y]$ і $[L_z]$.

Додатковою перевагою при використанні векторних довжин в якості основних одиниць виміру є та обставина, що замість трьох тепер маємо п'ять основних одиниць. Отже, якщо всі вони незалежні, в загальному випадку ми отримаємо систему з п'яти незалежних рівнянь замість звичайних трьох, що зв'язують невідомі показники формули розмірності. Таким чином, стає можливим виводити шляхом лише аналізу розмірностей формули фізики, які містять більше число змінних величин і розмірних постійних величин, ніж раніше. Використовуючи L_x, L_y, L_z, M і T, можна отримати систему з п'яти рівнянь, хоча часто лише чотири з цих рівнянь є незалежними.

Розглянемо знову задачу про політ кулі, яка раніше була вирішена лише частково. І нами був отриманий наступний розв’язок:

$$R = C \cdot h \cdot \left(\frac{u}{\sqrt{h \cdot g}} \right)^{\alpha}.$$

Неважко зрозуміти, що оцінка значення α залежить від експериментально знайденої залежності, наприклад, R від h. Спробуємо знайти цю залежність не виконуючи експеримент. Запишемо розмірності даних фізичних величин з використанням векторних довжин: $[R] = L_x$, $[h] = L_z$, $[u] = L_x \times T^{-1}$, $[g] = L_z \times T^{-2}$.

Як і раніше:

$$L_x = (L_x \times T^{-1})^{\alpha} \times L_z^{\beta} \times (L_z \times T^{-2})^{\gamma}$$

$$\begin{array}{ll} L_x: & 1 = \alpha, \\ L_z: & 0 = \beta + \gamma, \\ T: & 0 = -\alpha - 2\gamma. \end{array}$$

$$\alpha = 1, \beta = 1/2, \gamma = -1/2.$$

Звідси:

$$R = C \cdot u \cdot \sqrt{\frac{h}{g}}. \qquad (25.17)$$

Таким чином за допомогою нових векторних основних одиниць аналіз розмірностей дозволяє отримати повний розв'язок даної задачі.

Задача 10. Куля випущена з початковою швидкістю u і під кутом φ до горизонтальної площини. Знайти дальність польоту.

Якщо не вводити векторні позначення, то розмірності таких фізичних величин запишемо наступним чином: $[R] = L$, $[u] = L \times T^{-1}$, $[g] = L \times T^{-2}$, $[\varphi] = L \times L^{-1}$.

Функцію запишемо у вигляді:

$$R = C \cdot u^{\alpha} \cdot g^{\beta} \cdot \varphi^{\gamma},$$

тоді рівняння розмірності матиме вигляд:

$$L = \left(L \cdot T^{-1}\right)^{\alpha} \cdot \left(L \cdot T^{-2}\right)^{\beta}.$$

Кут φ, який є безрозмірною величиною, відсутній в цьому рівнянні, і ми отримаємо формулу виду:

$$R = C \cdot \frac{u^2}{g}. \qquad (25.18)$$

Такий результат нічого не говорить про залежність R від кута φ.

Повторимо ті ж обчислення але використаємо векторні властивості одиниць довжини. Як і раніше, позначимо горизонтальне і вертикальне переміщення індексами x і z. Замість u запишемо u_x і u_z. Запишем функцию у вигляді:

$$R = C \cdot u_x^{\alpha} \cdot u_z^{\beta} \cdot g^{\gamma}.$$

Тоді:

$$L_x = (L_x \times T^{-1})^{\alpha} \times (L_z \times T^{-1})^{\beta} \times (L_z \times T^{-2})^{\gamma}$$

$$L_x: \quad 1 = \alpha,$$
$$L_z: \quad 0 = \beta + \gamma,$$
$$T: \quad 0 = -\alpha - \beta - 2\gamma.$$

Звідси:

$$\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -1.$$

Тому:

$$R = C \cdot u_x \cdot \frac{u_z}{g}. \qquad (25.19)$$

$$R = C \cdot \frac{u^2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi}{g}. \qquad (25.19')$$

Якщо замість С підставити 2, то одержимо повний розв’язок задачі:

$$R = 2 \cdot \frac{u^2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi}{g}. \qquad (25.19'')$$

26 ПРИКЛАДИ ТА ЗАДАЧІ З ТЕОРІЇ ПОДІБНОСТІ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛООБМІНУ

Приклад 1. Система диференціальних рівнянь, що описують конвективний теплообмін при вільному русі середовища з перевагою в’язкого тертя, має вигляд:

$$\alpha \cdot \Delta T = -\lambda \cdot \mathrm{grad}\, T, \qquad (26.1)$$

$$W \cdot \mathrm{grad}\, T = a \cdot \nabla^2 T, \qquad (26.2)$$

$$g \cdot \beta \cdot \Delta T = \nu \cdot \nabla^2 W, \qquad (26.3)$$

$$\mathrm{div} W = 0. \qquad (26.4)$$

До умов однозначності цієї задачі входять: геометрична характеристика тіла, розподіл температури на поверхні тіла та в середовищі, фізичні властивості середовища (β, λ, a, ν) і прискорення сили тяжіння g.

Знайти невизначальні та визначальні критерії цієї системи рівнянь.

Розв'язання. Для двох подібних процесів теплообміну рівняння (26.1) можна записати:

$$\alpha' \cdot \Delta T' = -\lambda' \cdot \mathrm{grad}\, T', \tag{26.5}$$

$$\alpha'' \cdot \Delta T'' = -\lambda'' \cdot \mathrm{grad}\, T''. \tag{26.6}$$

При цьому множники перетворення:

$$C_\alpha = \frac{\alpha''}{\alpha'}, C_T = \frac{\Delta T''}{\Delta T'} = \frac{T''}{T'}, C_\lambda = \frac{\lambda''}{\lambda'}, C_l = \frac{l''}{l'}.$$

І відповідно:

$$\alpha'' = C_\alpha \cdot \alpha', \Delta T'' = C_T \cdot \Delta T', \lambda'' = C_\lambda \cdot \lambda', \mathrm{grad}\, T'' = \frac{dT''}{dl''} = \frac{C_T}{C_l} \mathrm{grad}\, T'.$$

Підставляючи знайдені величин в рівняння (26.6), можна одержати:

$$C_\alpha C_T \lambda' \Delta T' = -\frac{C_\lambda C_T}{C_l} \mathrm{grad}\, T'.$$

Оскільки знайдене рівняння має бути тотожним рівнянню (26.5), то:

$$C_\alpha C_T = \frac{C_\lambda C_T}{C_l}.$$

Звідки $\frac{C_\alpha C_l}{C_\lambda} = 1$, відповідно інваріант подібності:

$$\frac{\alpha' \cdot l'}{\lambda'} = \frac{\alpha'' \cdot l''}{\lambda''} = \frac{\alpha \cdot l}{\lambda} = \mathrm{idem}.$$

Знайдений критерій подібності $\mathrm{Nu} = \frac{\alpha \cdot l}{\lambda}$ є невизначальним, бо величина коефіцієнта тепловіддачі α не входить у перелік величин, які визначають умови однозначності поставленої задачі.

Аналогічно, користуючись рівнянням (26.2), можна дістати:

$$C_W \frac{C_T}{C_l} W' \mathrm{grad}\, T' = \frac{C_a C_T}{C_l^2} a' \nabla^2 t',$$

звідки:

$$C_W = \frac{C_a}{C_l},$$

або

$$\frac{C_W \cdot C_l}{C_a} = 1.$$

Відносно інваріант подібності:

$$\frac{W' \cdot l'}{a'} = \frac{W'' \cdot l''}{a''} = \frac{W \cdot l}{a} = \text{idem}.$$

Знайдений критерій подібності $\text{Pe} = \frac{W \cdot l}{a}$ також є невизначальним, оскільки швидкість не входить в умови однозначності задачі.

З рівняння (26.3) можна одержати:

$$C_g \cdot C_\beta \cdot C_{\Delta T} \cdot g' \cdot \beta' \cdot \Delta T' = C_V \cdot \frac{C_W}{C_l^2} \cdot \nu'^2 \cdot \nabla^2 \cdot W'$$

$$C_g \cdot C_\beta \cdot C_{\Delta T} = C_V \cdot \frac{C_W}{C_l^2}$$

або

$$\frac{C_g \cdot C_\beta \cdot C_{\Delta T}}{C_V \cdot C_W} \cdot C_l^2 = 1.$$

Виключаючи C_W підстановкою $C_W = \frac{C_a}{C_l}$, дістаємо індикатор подібності:

$$\frac{C_g \cdot C_\beta \cdot C_{\Delta T}}{C_V \cdot C_a} \cdot C_l^3 = 1.$$

Відносно інваріант подібності будемо мати визначальний критерій:

$$\frac{\beta \cdot g \cdot \Delta T \cdot l^3}{\nu \cdot a} = \frac{\beta \cdot g \cdot \Delta T \cdot l^3}{\nu^2} \cdot \frac{\nu}{a} = \text{Gr} \cdot \text{Pr}.$$

Рівняння (26.4), переписане з множниками перетворення, має вигляд:

$$\frac{C_W}{C_l} \cdot \text{div} W = 0$$

і отже, не дає критеріїв подібності.

Таким чином, досліджуючи теплообмін при вільному русі середовища з перевагою в'язкого тертя, модна одержати залежність:

$$\mathrm{Nu} = f\left(\mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Pr}\right)$$

враховуючи при цьому, що невизначальний критерій Пекле виклю-чено при сумісному використанні рівнянь (26.3) і (26.3).

Приклад 2. Система диференціальних рівнянь і умов однозначності для конвективного теплообміну при вимушеному безнапірному русі в'язкої рідини дає залежність:

$$\alpha = f\left(l, d, W, v, c, \rho, \lambda, T\right)$$

Звести цю залежність до безрозмірної форми (за допомогою π–теоремами, методом перетворення розмірностей).

Розв'язання. Задане рівняння має дев'ять розмірних величин:

$$\alpha\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\times\text{К}}\right];\ \ l, d\left[\text{м}\right];\ W\left[\frac{\text{м}}{\text{сек}}\right];\ v\left[\frac{\text{м}^2}{\text{сек}}\right];\ C\left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\times\text{К}}\right];$$

$$\rho\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right];\ \lambda\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}\times\text{К}}\right];\ T\left[\text{К}\right]$$

Незалежними одиницями вимірювання будуть:

$$\left[\text{м}\right], \left[\text{сек}\right], \left[\text{кг}\right], \left[\text{Дж}\right], \left[\text{К}\right].$$

Введемо нові одиниці вимірювання:

$$\left[\text{м}'\right], \left[\text{сек}'\right], \left[\text{кг}'\right], \left[\text{Дж}'\right], \left[\text{К}'\right],$$

які відповідно в L, τ, G, Q, Θ раз менші від попередніх. Тоді величини, що входять у вихідне рівняння, у новій системі одиниць набирають вигляду:

$$a' = a\cdot\frac{Q}{\tau\cdot L^2\cdot\Theta};\ l' = l\cdot L;\ d' = d\cdot L;\ W' = W\cdot\frac{L}{\tau};\ v' = v\cdot\frac{L^2}{\tau};$$

$$C' = C\cdot\frac{Q}{G\cdot\Theta};\ \rho' = \rho\cdot\frac{G}{L^3};\ \lambda' = \lambda\cdot\frac{Q}{\tau\cdot L\cdot\Theta};\ T' = T\cdot\Theta.$$

Оскільки характер вихідного рівняння не залежить від системи одиниць вимірювання, можна записати:

$$\alpha' = f\left(l', d', W', v', c', \rho', \lambda', T'\right)$$

або

$$a \cdot \frac{Q}{\tau \cdot L^2 \cdot \Theta} = f\left(l \cdot L, d \cdot L, W \cdot \frac{L}{\tau}, v \cdot \frac{L^2}{\tau}, C \cdot \frac{Q}{G \cdot \Theta}, \rho \cdot \frac{G}{L^3}, \lambda \cdot \frac{Q}{\tau \cdot L \cdot \Theta}, T \cdot \Theta\right).$$

Враховуючи, що вибір нової системи одиниць є довільним, приймаємо:

$$l \cdot L = 1, W \cdot \frac{L}{\tau} = 1, \ \rho \cdot \frac{G}{L^3} = 1, \lambda \cdot \frac{Q}{\tau \cdot L \cdot \Theta} = 1, T \cdot \Theta = 1.$$

звідки масштабні коефіцієнти дорівнюють:

$$L = \frac{1}{l}, \tau = \frac{W}{L}, \ \Theta = \frac{1}{T}, G = \frac{1}{\rho \cdot L^3}, Q = \frac{W}{\lambda \cdot l^2 \cdot T}.$$

Підставляння знайдених виразів у вихідну формулу дає:

$$\alpha \cdot \frac{l}{\lambda} \square f\left(1, \frac{d}{l}, 1, \frac{v}{W \cdot l}, \frac{W \cdot l}{\lambda}, c, \rho, 1, 1, 1\right)$$

Враховуючи, що $\frac{\lambda}{c \cdot \rho} = \alpha$, в остаточній формі маємо:

$$\mathrm{Nu} = f\left(\frac{d}{l}, \frac{1}{\mathrm{Re}}, \mathrm{Pe}\right).$$

Таким чином, з дев’яти розмірних величин ми одержали чотири безрозмірних (m = 4; n = 9; P = 5), тобто виконується умова $m = n - P$.

Приклад 3. Емпіричне рівняння для конвективного теплообміну при вільному русі середовища має вигляд:

$$\alpha = g^a \cdot l^b \cdot d^f \cdot c^i \cdot v^k \cdot \rho^p \cdot \lambda^\gamma \cdot \Delta T^S \cdot \beta^j.$$

Звести це рівняння до безрозмірної форми через аналіз розмірностей.

Розв'язання: Змінні, що входять у задане рівняння, мають такі розмірності:

$$\alpha\left[\frac{\text{Дж}}{\text{сек}\times\text{м}^2\times\text{К}}\right];\ \ l, d\left[\text{м}\right];\ g\left[\frac{\text{м}}{\text{сек}^2}\right];\ v\left[\frac{\text{м}^2}{\text{сек}}\right];\ C\left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\times\text{К}}\right];$$

$$\rho\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right];\ \lambda\left[\frac{\text{Дж}}{\text{сек}\times\text{м}\times\text{К}}\right];\ \Delta T\left[\text{К}\right];\ \beta\left[K^{-1}\right]$$

Незалежними первинними розмірностями будуть:

$$\left[\text{Дж}\right],\left[\text{м}\right],\left[\text{сек}\right],\left[\text{К}\right],\left[\text{кг}\right].$$

Порівнюючи показники степеня для одиниць вимірювання, що входять у рівняння як з лівого, так і з правого боку, можна одержати рівняння, що зв'язують між собою показники степеня:

при [Дж] $1 = i + r$;

при [м] $- 2 = b + f + a + 2k - 3p - r$;

при [с] $- 1 = -2a - k - r$;

при [К] $- 1 = - i - r + s - j$;

при [кг] $0 = - i + p$.

Звідси маємо:

$$p = i,\ r = 1 - i,\ s = f,\ k = -2a + i,\ b = 3a - f - 1.$$

Підставляючи знайдені вирази у вихідне рівняння, матимемо:

$$\alpha = g^a \cdot l^{3a-f-1} \cdot \left(c\cdot\rho\right)^i \cdot d^f \cdot v^{-2a+i} \cdot \lambda^{1-i} \cdot \left(\Delta T\cdot\beta\right)^j$$

або

$$\frac{\alpha\cdot l}{\lambda} = \left(\frac{g\cdot l^3}{v^2}\right)^a \cdot \left(\frac{d}{l}\right)^f \cdot \left(\frac{c\cdot\rho}{\lambda}\cdot v\right)^i \cdot \left(\beta\cdot\Delta T\right)^j.$$

Ураховуючи те, що $\frac{\lambda}{c \cdot \rho} = a$, одержуємо:

$$\mathrm{Nu} = (\mathrm{Ga})^a \cdot \left(\frac{d}{l}\right)^f \cdot (\mathrm{Pr})^i \cdot (\beta \cdot \Delta T)^j.$$

Якщо $a = j$, то остаточно безрозмірна форма даного рівняння має вигляд:

$$\mathrm{Nu} = (\mathrm{Ga})^a \cdot \left(\frac{d}{l}\right)^f \cdot (\mathrm{Pr})^i.$$

Приклад 4. Треба дослідним способом визначити розподілення температур у довгому стальному валу ($d = 2r = 400$ мм) за час $\tau = 2{,}5$ год після завантаження його в піч.

Коефіцієнти теплопровідності, температуропровідності та тепловіддачі відповідно дорівнюють:

$$\lambda = 36\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}\times\text{К}};$$

$$a = 4{,}25 \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{м}^2}{\text{год}};$$

$$\alpha = 100\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\times\text{К}}.$$

Дослідження вирішено проводити на моделі вала, виконаній легованої сталі. Для моделі:

$$\lambda = 13{,}5\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}\times\text{К}};$$

$$a = 2 \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{м}^2}{\text{год}};$$

$$\alpha = 150\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\times\text{К}}.$$

Визначити діаметр d_M моделі вала та інтервал часу τ_M, після якого необхідно починати вимірювання поля температури у моделі.

Розв'язання. Використовуючи третю теорему подібності, діаметр моделі знайдемо з умови $\mathrm{Bi}_M = \mathrm{Bi}$, інтервал часу – з умови $\mathrm{Fo}_M = \mathrm{Fo}$.

Числа Bi та Fo для вала:

$$\mathrm{Bi} = \frac{\alpha \cdot r_0}{\lambda} = \frac{100 \cdot 0,2}{36} = 0,556;$$

$$\mathrm{Fo} = \frac{a \cdot \tau}{r_0^2} = \frac{4,25 \cdot 10^{-2} \cdot 2,5}{0,2^2} = 2,66.$$

Тоді:

$$\mathrm{Bi}_M = \frac{\alpha_M \cdot r_{0_M}}{\lambda_M} = 0,556;$$

звідки:

$$r_{0_M} = \frac{\lambda_M}{\alpha_M} \cdot 0,556 = \frac{13,5}{150} \cdot 0,556 = 0,05 \text{ м}.$$

$$d_M = 2r_{0_M} = 2 \cdot 0,05 = 0,1 \text{ м}.$$

Аналогічно дістаємо:

$$\mathrm{Fo}_M = \frac{a_M \cdot \tau_M}{r_{0_M}^2} = 2,66$$

звідки:

$$\tau_M = 2,66 \cdot \frac{r_{0_M}^2}{a_M} = 2,66 \cdot \frac{0,05^2}{0,02} = 0,333 \text{ год}.$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Теплообмін при безнапірній течії в'язкої рідини описується системою диференціальних рівнянь:

$$\alpha \cdot \Delta T = -\lambda \cdot \mathrm{grad} T,$$

$$W \cdot \mathrm{grad} T = a \cdot \nabla^2 T,$$

$$g \cdot \beta \cdot \Delta T = \nu \cdot \nabla^2 W,$$

$$\mathrm{div} W = 0.$$

В умови однозначності входять: геометрична характеристика каналу l, швидкість течії W, фізичні параметри середовища (ν, a, λ). Знайти невизначальні і визначальні критерії подібності даної системи рівнянь.

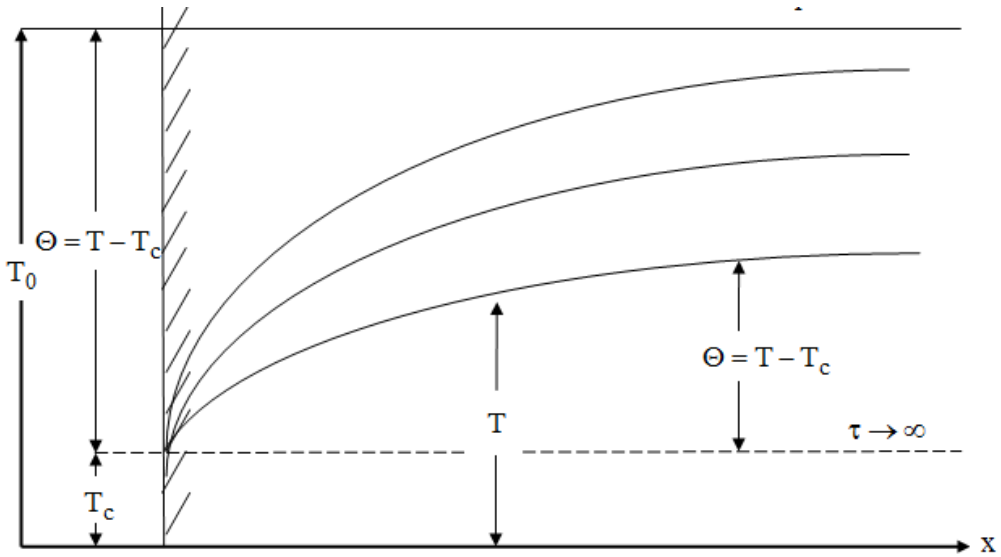
2. При експериментальному вивченні процесу конвективного теплообміну при обтіканні повітрям, при температурі 20 °С та швидкості 12 м/с, моделі стінки з висотою 0,1 м отримали коефіцієнт тепловіддачі від стінки до повітря дорівнює 23 Вт/(м^2 × К).

а) Як потрібно змінити розміри моделі, щоб зберегти подібність температурних полів, якщо замість повітря будуть використані димові гази при температурі 400 °С, а середній коефіцієнт тепловіддачі від газів до стінки дорівнює 970 Вт/(м$^{2\cdot}$× К).

б) Для якої швидкості вітру, буде зберігатись гідродинамічна подібність процесів, якщо реальна стінка має висоту 5 м, при той самій температурі повітря.

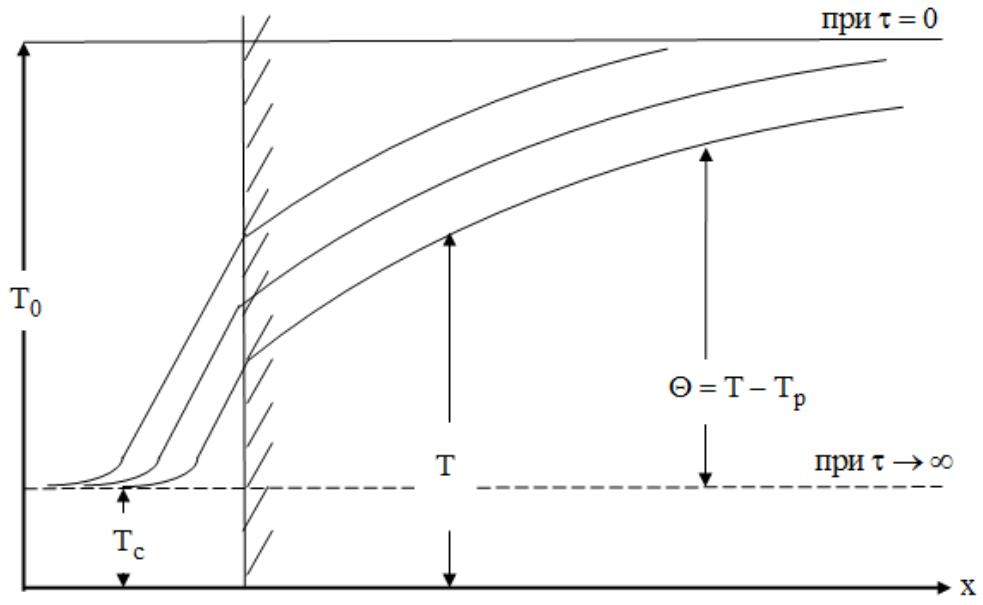
Визначальними критеріями є Nu та Re.

3. Напівобмежене тіло (ділянка $x \geq 0$) має температуру T_0. У початковий момент часу температура поверхні тіла швидко знижується до величини $T_c < T_0$, яка потім підтримується сталою величиною. Знайти систему визначальних параметрів для нестаціонарного поля температури в тілі і звести цю систему до безрозмірного вигляду.



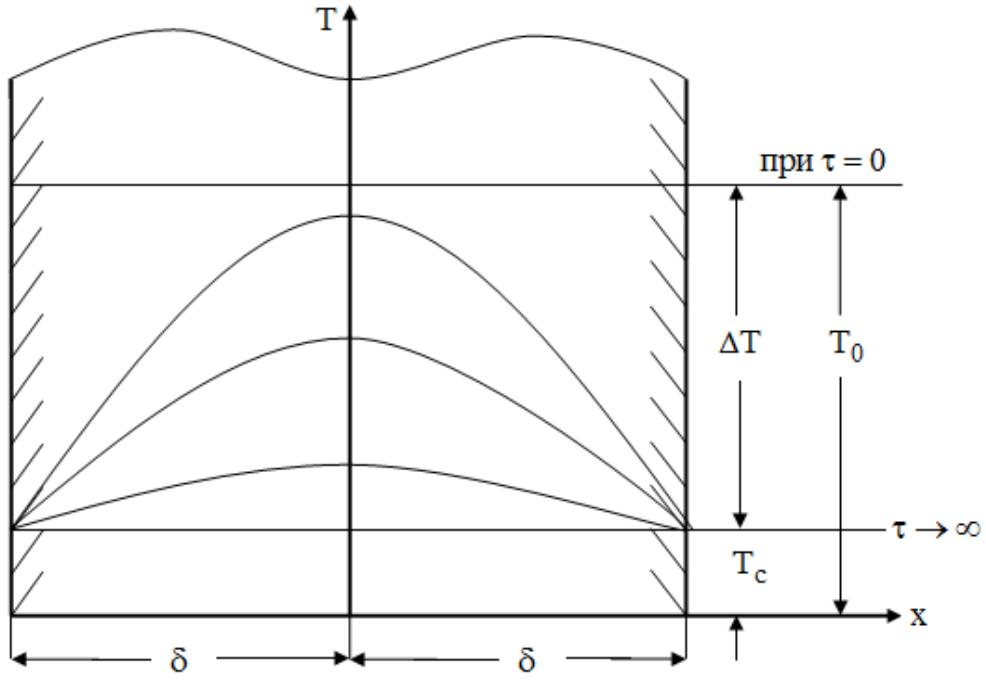
Спочатку записати диференціальне рівняння, початкові і граничні умови процесу, що допоможе визначити систему визначальних параметрів, а потім звести цю систему до безрозмірного вигляду за допомогою перетворювання розмірностей.

4. Напівобмежене тіло має температуру T_0. У початковий момент часу температура рідини, яка обтікає тіло, швидко знижуються до $T_p < T_0$. Потім ця температура протягом усього часу підтримується сталою величиною. На поверхні тіла заданий коефіцієнт тепловіддачі α.



Знайти систему визначальних параметрів для нестаціонарного поля температури в тілі і звести цю систему до безрозмірного вигляду.

5. Плоска стінка має температуру T_0. У початковий момент часу температура на поверхнях стінки швидко знижується до величини $T_c < T_0$, яка потім підтримується сталою величиною. Знайти систему визначальних параметрів для нестаціонарного поля температури у пластині і звести цю систему до безрозмірного вигляду.



6. Система визначальних параметрів для нестаціонарного поля температури у циліндрі має вигляд:

$$T - T_0 = f\left(\tau, r, r_0, \frac{q_l}{\lambda}, a\right).$$

Звести цю систему до безрозмірної форми.

7. Система визначальних параметрів для нестаціонарного поля температури в кулі має вигляд:

$$T - T_0 = f\left(\tau, r, r_0, a, \frac{\lambda_c}{\alpha}, T_p - T_0\right).$$

Звести цю систему до безрозмірної форми.

8. Звести до безрозмірної форми для визначення коефіцієнта тепловіддачі конвекцією рівняння, що застосовується при розрахунку пластинчастих повітряпідігрівачів:

$$\alpha = 0,00365 \cdot \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^{0,6} \cdot (c \cdot \rho)^{0,4} \cdot W.$$

9. Показати, що емпіричне рівняння для коефіцієнта тепловіддачі при вимушеному русі в'язкої рідини:

$$\alpha = W^a \cdot l^b \cdot d^f \cdot \nu^h \cdot \lambda^k \cdot c^r \cdot \rho^s$$

зводиться до вигляду

$$\mathrm{Nu} = \mathrm{Re}^a \cdot \mathrm{Pr}^r \cdot \left(\frac{l}{d}\right)^b.$$

Розв'язати задачу за допомогою π–теореми і аналізу розмірностей.

10. Звести до безрозмірної форми рівняння теплообміну на межі між стінкою і рухомим середовищем:

$$\alpha \cdot (T_c - T_p) = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx}.$$

11. Визначити, при якій витраті води (T_1 = 288 K) в трубі з внутрішнім діаметром d_1 = 18 мм течія стане гідродинамічно подібною до руху повітря,

температура якого T_2 = 1073 К, у повітроводі діаметром d_2 = 4000 мм при швидкості 12 м/с.

12. При експериментальному визначенні коефіцієнтів тепловіддачі для вимушеного руху середовища в циліндричних трубах води (t_1 = 30 °С; d_1 = 110 мм) і повітря при атмосферному тиску (t_2 = 120 °С; d_2 = 300 мм) відповідно знайдені коефіцієнти тепловіддачі: α_1 = 1050 Вт/м^2 К; α_2 = 64 Вт/м^2 К. З'ясувати, чи подібні ці процеси, та визначити відношення швидкостей робочих середовищ і коефіцієнтів тепловіддачі, що зумовлюють подібність цих явищ.

13. Нагріту стальну кулю занурили у ванну з маслом для загартовування. Розрахувати теплову модель цієї кулі, яка зроблена з бетону і охолоджується потоком повітря. Задані такі величини:

для стальної кулі: $\lambda = 40\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}\times\text{К}}$; $C = 0{,}1\frac{\text{кДж}}{\text{кг}\times\text{К}}$; $\rho = 7900\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$;

$d = 0{,}2$ м, $T_0 = 873$ К; $T_p = 473$ К; $\alpha = 500\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\times\text{К}}$,

для бетонної кулі: $\lambda_M = 1{,}1\frac{\text{Вт}}{\text{м}\times\text{К}}$; $C_M = 0{,}27\frac{\text{кДж}}{\text{кг}\times\text{К}}$; $\rho = 2300\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$;

$T_0 = 373$ К; $T_p = 293$ К; $\alpha = 10\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\times\text{К}}$.

Визначити діаметр моделі d_M, співвідношення між часом і температурами для зразка та моделі.

14. Визначити значення коефіцієнта кінематичної в'язкості та швидкості течії рідини в моделі, в якій досліджується теплообмін при вимушеній конвекції. Коефіцієнт температуропровідності:

$$a_M = 0{,}8\cdot 10^{-6}\,\frac{\text{м}^2}{\text{сек}}.$$

У зразку, який являє собою трубу діаметром d = 0,4 м, тече повітря при тиску 1 бар з температурою 170 °С. Швидкість течії повітря W = 80 м/с. Діаметр труби моделі в 5 разів менший, ніж діаметр труби зразка.

15. В трубі рухається повітря зі швидкістю W = 15 м/с. Температура повітря 603 К. Яка повинна бути швидкість води у гідродинамічній моделі, лінійні розміри якої у 20 разів більші за розміри зразка. Температура води $Тв$ = 293 К.

Перевод одиниць виміру тиску

Одиниця переводу	В одиницю					
	Па (Н/м)	МПа	бар	атм	мм.рт.ст.	мм.вод.ст.
	множник					
Па (Н/м)	1	1×10^{-6}	1×10^{-5}	$9{,}87\times10^{-6}$	0,0075	0,1
МПа	1×10^{6}	1	10	9,87	$7{,}5\times10^{3}$	1×10^{5}
бар	1×10^{5}	1×10^{-1}	1	0,987	750	$1{,}019\times10^{4}$
атм	$1{,}01\times10^{5}$	1×10^{-1}	1,013	1	759,9	10332
мм.рт.ст.	133,3	133×10^{-6}	$1{,}33\times10^{-3}$	$1{,}33\times10^{-3}$	1	13,3
мм.вод.ст.	10	1×10^{-5}	$9{,}7\times10^{-5}$	$9{,}8\times10^{-5}$	0,075	1

ДОДАТКИ

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ І ОДИНИЦІ ВИМІРЮВАННЯ ОСНОВНИХ ВЕЛИЧИН ТЕПЛОФІЗИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ПРИВЕДЕНІ В СИСТЕМІ СІ

Позначення, формула	Одиниця виміру	Показник
$a = \frac{\lambda}{c\rho}$	[м^2/с]	температуропровідність
β	[1/К]; [м/с]	коефіцієнт об'ємного розширення; коефіцієнт масовіддачі
c	[кДж/кг×град]	теплоємність
C_0	[Вт/м^{2}К^4]	коефіцієнт випромінювання абсолютно чорного тіла
d	[м]	діаметр труби
D	[м^2/с]	коефіцієнт дифузії
F	[м^2]	площа поверхні теплообміну
g	[м^2/с]	прискорення сили тяжіння
G	[кг/с]	масова витрата
E	[Па]	максимальна пружність водяної пари
h, H	[м]	висота
i	[кДж/кг]	ентальпія
J		функція Бесселя
k	[Вт/м^{2}К]	коефіцієнт теплопередачі
l, L	[м]	довжина, що визначає розмір
m	[кг]	маса
P	[Па]	тиск
q	[Вт/м^2]	щільність теплового потоку
Q	[Вт]	тепловий потік
r	[м]	радіус труби
R	[м^{2}К/Вт]	термічний опір
t, T	[°С], [К]	температура
Δt	[град]	температурний напір
$t_н$	[°С]	температура насичення
V	[м^3]	об’єм
ω	[м/с]	швидкість
α	[Вт/м^{2}К]	коефіцієнт тепловіддачі
δ	[м]	товщина
ε		ступінь чорноти
λ	[Вт/мК]	коефіцієнт теплопровідності
μ	[Н×с/м^2]	динамічний коефіцієнт в'язкості
ν	[м^2/с]	кінематичний коефіцієнт в'язкості
ρ	[кг/м^3]	щільність
τ	[с]	час
φ	[%]	відносна вологість
θ		безрозмірна температура

КРИТЕРІЇ ПОДІБНОСТІ

Позначення, формула	Назва критерію
$\mathrm{Nu} = \dfrac{al}{\lambda}$	критерій Нуссельта
$\mathrm{Re} = \dfrac{\omega l}{\nu}$	критерій Рейнольдса
$\mathrm{Pe} = \dfrac{\omega l}{a}$	критерій Пекле
$\mathrm{Ga} = \dfrac{gl^3}{\nu^2}$	критерій Галілея
$\mathrm{Gr} = \dfrac{gl^3\beta\Delta t}{\nu^2}$	критерій Грасгофа
$\mathrm{Pr} = \dfrac{\gamma}{a}$	критерій Прандтля
$\mathrm{Ra} = \mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Pr} = \dfrac{gl^3\beta\Delta t}{\nu^2}$	критерій Релея
$\mathrm{Bi} = \dfrac{\alpha l}{\lambda}$	критерій Біо
$\mathrm{Fo} = \dfrac{a\tau}{l^2}$	критерій Фур'є
$\mathrm{Ar} = \dfrac{gl^3}{\nu}\dfrac{\Delta p}{p}$	критерій Архімеда
$\mathrm{Nu} = \dfrac{\beta l}{D}$	дифузійний критерій Нуссельта
$\mathrm{Pr}_D = \dfrac{\nu}{D}$	дифузійний критерій Прандтля

Таблиця 1

Співвідношення між одиницями виміру у різних системах

Параметр	Одиниця виміру
Тиск	1 Па = 1Н/м^2 = 0,102 мм вод. ст. = 7,5×10^{-3} мм рт. ст.
Енергія, кількість теплоти	1 Дж = 0,239 кал
Потужність, тепловий потік	1 Вт = 0,86 ккал/год
Щільність теплового потоку	1 Вт/м^2 = 0,8598 ккал/(м^2×год)
Тепловміст, теплота фазового перетворення	1 Дж/кг = 0,23885×10^{-3} ккал/кг
Коефіцієнт теплопровідності	1 Вт/(м×К) = 0,86 ккал/(м×год×^{0}С)
Коефіцієнт тепловіддачі, теплопередачі	1 Вт/(м^2) ×К) = 0,8598 ккал/(м^2×год×^{0}С)
Кінематичний коефіцієнт в'язкості, коефіцієнт температуропровідності, коефіцієнт дифузії	1 м^2/с = 3600 м^2/год
Щільність потоку маси	1 кг/(с×м^2) = 3600 кг/(год×м^2)
Коефіцієнт масовіддачі	1 м/с = 3600 м/год

Таблиця 2

Теплофізичні властивості деяких матеріалів

Найменування матеріалів	t, °C	ρ, кг/м^3	λ, Вт/м К	c_p, кДж/кгК	a×10^6, м^2/с
Метали та сплави					
Алюміній	0	2700	209,3	0,896	86,7
Бронза (95 % Cu, 5 % Al)	20	8660	83,0	0,410	23,3
Дюралюміній (94 - 95 % Al, 3 - 5 % Cu)	20	2800	164,4	0,883	66,7
Залізо	0	7880	74,4	0,440	21,5
Латунь (70 % Cu, 30 % Zn)	20	8520	110,7	0,385	33,8
Мідь	0	8930	389,6	0,368	112,5
Рідкий натрій	100	928	86,1	1,384	66,9
Нікель	0	8900	67,4	0,427	17,8
Олово	0	7300	66,3	0,222	41,1
Ртуть	0	13600	8,2	0,139	4,3
Срібло	0	10500	418,7	0,234	170,0
Сталь вуглецева (C = 0,5 %)	20	7830	53,6	0,456	14,7
Сталь нержавіюча IXI8H9T	20	7900	16,0	0,502	4,04
Титан	0	4540	15,1	0,532	6,2
Чавун (C = 4 %)	20	7270	51,9	0,419	17,0
Неметалеві матеріали					
Папір звичайний	20	-	0,14	1,5	-
Графіт	20	1600	163	0,83	-
Кам'яне вугілля	20	1400	0,136	1,131	1,03
Картон звичайний	20	700	0,1744	1,507	0,168
Шкіра	30	1000	0,160	-	-
Парафін	20	920	0,27	-	-
Пінопласт	20	125	0,052	1,26	-
Пінополістирол	20	150	0,05	1,34	-
Пінополістирол	20	40	0,038	1,34	-
Пінополіуретан	20	80	0,041	1,47	-
Пінополіуретан	20	40	0,029	1,47	-
Гума	0	1200	0,163	1,38	0,0985
Сланець	100	2800	1,49	-	-
Слюда	20	2600	0,4652	0,879	-
Скло звичайне	20	2500	0,7443	0,67	0,444
Скло кварцове	20	2210	1,75	-	-
Текстоліт	20	1300	0,2326	1,465	-
Порцеляна	95	2400	1,035	1,09	0,398
Фторопласт	-3	2120	0,0602	0,91	0,031
Целулойд	30	1400	0,21	-	-
Ебоніт	20	1200	0,17	-	-

Таблиця 3

Коефіцієнти для розрахунку охолодження або нагрівання пластини завтовшки 2δ

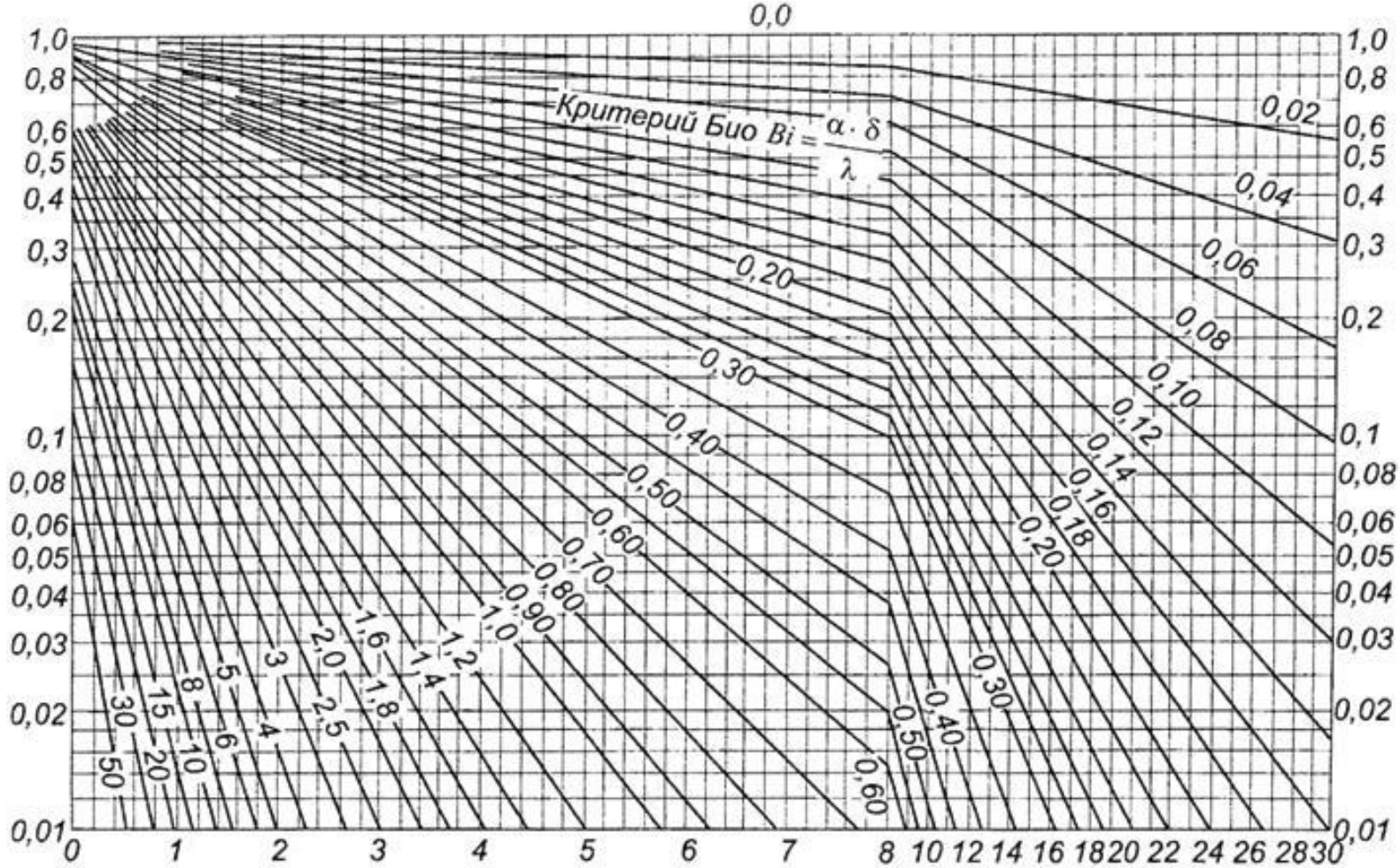
$B_i = \frac{a\delta}{\lambda}$	ε_1	ε_1^2	P	N	$B_i = \frac{a\delta}{\lambda}$	ε_1	ε_1^2	P	N	$B_i = \frac{a\delta}{\lambda}$	ε_1	ε_1^2	P	N
0,00	0,0000	0,0000	1,000	1,000	0,55	0,6800	0,462	0,836	1,076	6,0	1,3496	1,82	0,273	1,248
0,01	0,0998	0,0100	0,997	1,002	0,60	0,7051	0,497	0,823	1,081	7,0	1,3766	1,90	0,241	1,254
0,02	0,1410	0,0199	0,993	1,003	0,70	0,7506	0,564	0,798	1,092	8,0	1,3978	1,95	0,216	1,257
0,04	0,1987	0,0397	0,987	1,006	0,80	0,7910	0,626	0,774	1,102	90	1,4149	2,00	0,196	1,260
0,06	0,2425	0,0584	0,981	1,010	0,90	0,8274	0,684	0,751	1,111	10	1,1289	2,04	0,180	1,262
0,08	0,2791	0,0778	0,974	1,013	1,00	0,8603	0,740	0,729	1,119	12	1,4420	2,08	0,152	1,265
0,10	0,3111	0,0968	0,967	1,016	1,20	0,9171	0,841	0,689	1,134	14	1,4560	2,12	0,132	1,267
0,12	0,3397	0,1154	0,960	1,020	1,40	0,9649	0,931	0,653	1,148	16	1,470	2,16	0,116	1,268
0,14	0,3656	0,1337	0,954	1,023	1,60	1,0008	1,016	0,619	1,159	18	1,4830	2,20	0,104	1,269
0,16	0,3896	0,1518	0,948	1,026	1,80	1,0440	1,090	0,587	1,169	20	1,4961	2,24	0,094	1,270
0,18	0,4119	0,1697	0,942	1,029	2,00	1,0769	1,160	0,559	1,179	25	1,5070	2,27	0,076	1,271
0,20	0,4328	0,1874	0,936	1,031	2,2	1,1054	1,222	0,535	1,186	30	1,5200	2,30	0,065	1,271
0,22	0,4525	0,2048	0,930	1,034	2,4	1,1300	1,277	0,510	1,193	35	1,5260	2,33	0,056	1,272
0,24	0,4712	0,2220	0,924	1,037	2,6	1,1541	1,332	0,488	1,200	40	1,5325	2,35	0,050	1,272
0,26	0,4889	0,2390	0,918	1,040	2,8	1,1747	1,380	0,468	1,205	50	1,5400	2,37	0,040	1,272
0,28	0,5058	0,2558	0,912	1,042	3,0	1,1925	1,420	0,448	1,210	60	1,5451	2,39	0,0333	1,273
0,30	0,5218	0,2723	0,906	1,045	3,5	1,2330	1,52	0,406	1,221	70	1,5490	2,40	0,0286	1,273
0,35	0,5590	0,3125	0,891	1,052	4,0	1,2646	1,59	0,370	1,229	80	1,5514	2,41	0,0250	1,273
0,40	0,5932	0,3516	0,877	1,058	4,5	1,2880	1,66	0,338	1,235	90	1,5520	2,41	0,0222	1,273
0,45	0,6240	0,3894	0,863	1,064	5,0	1,3138	1,73	0,314	1,240	100	1,2260	2,42	0,0200	1,273
0,50	0,6533	0,4264	0,849	1,070	5,5	1,3340	1,78	0,293	1,244	∞	1,5708	2,467	0,0000	1,273

Таблиця 4

Коефіцієнти для розрахунку охолодження або нагрівання довгого циліндра радіусом ro

$B_i = \frac{ar_0}{\lambda}$	ε_1	ε_1^2	*P0*	*N0*	$B_i = \frac{ar_0}{\lambda}$	ε_1	ε_1^2	*P0*	*N0*	$B_i = \frac{ar_0}{\lambda}$	ε_1	ε_1^2	*P0*	*N0*
0,00	0,0000	0,0000	1,000	1,000	0,55	0,9808	0,962	0,869	1,124	6,0	2,0490	4,20	0,299	1,527
0,01	0,1412	1,0200	0,998	1,002	0,60	1,0184	1,036	0,858	1,134	7,0	2,0937	4,38	0,262	1,541
0,02	0,1995	0,0398	0,995	1,005	0,70	1,0873	1,184	0,836	1,154	8,0	2,1286	4,53	0,234	1,551
0,04	0,2814	0,0792	0,990	1,010	0,80	1,1490	1,322	0,815	1,172	90	2,1566	4,65	0,210	1,560
0,06	0,3438	0,1183	0,985	1,014	0,90	1,2048	1,453	0,795	1,190	10	2,1795	4,75	0,191	1,566
0,08	0,3960	0,1569	0,980	1,019	1,00	1,2558	1,580	0,774	1,208	12	2,2181	4,92	0,161	1,575
0,10	0,4417	0,1951	0,975	1,024	1,20	1,3450	1,81	0,738	1,239	14	2,2428	5,03	0,137	1,581
0,12	0,4726	0,2329	0,970	1,029	1,40	1,4250	2,03	0,704	1,268	16	2,2627	5,12	0,120	1,585
0,14	0,5200	0,2704	0,965	1,034	1,60	1,4900	2,22	0,671	1,295	18	2,2760	5,18	0,106	1,588
0,16	0,5545	0,3075	0,960	1,039	1,80	1,5460	2,39	0,639	1,319	20	2,2890	5,24	0,095	1,590
0,18	0,5868	0,3443	0,956	1,044	2,00	1,5994	2,55	0,610	1,340	25	2,3108	5,34	0,076	1,595
0,20	0,6170	0,3807	0,951	1,048	2,2	1,6432	2,70	0,584	1,357	30	2,3261	5,41	0,065	1,598
0,22	0,6455	0,4167	0,946	1,053	2,4	1,6852	2,84	0,558	1,375	35	2,3366	5,46	0,056	1,600
0,24	0,6726	0,4524	0,941	1,057	2,6	1,7234	2,97	0,534	1,392	40	2,3455	5,50	0,050	1,602
0,26	0,6983	0,4877	0,937	1,062	2,8	1,7578	3,09	0,513	1,406	50	2,3572	5,55	0,040	1,603
0,28	0,7229	0,5226	0,932	1,067	3,0	1,7887	3,20	0,492	1,420	60	2,3651	5,59	0,0333	1,604
0,30	0,7465	0,5572	0,927	1,071	3,5	1,8547	3,44	0,446	1,449	70	2,3707	5,62	0,0286	1,604
0,35	0,8012	0,642	0,915	1,082	4,0	1,9081	3,64	0,407	1,472	80	2,3750	5,64	0,0250	1,605
0,40	0,8516	0,726	0,903	1,093	4,5	1,9519	3,81	0,374	1,489	90	2,3791	5,66	0,0222	1,605
0,45	0,8978	0,806	0,891	1,103	5,0	1,9898	3,96	0,345	1,504	100	2,3809	5,67	0,0200	1,606
0,50	0,9408	0,888	0,880	1,114	5,5	2,0224	4,09	0,320	1,516	∞	2,4048	5,784	0,0000	1,606

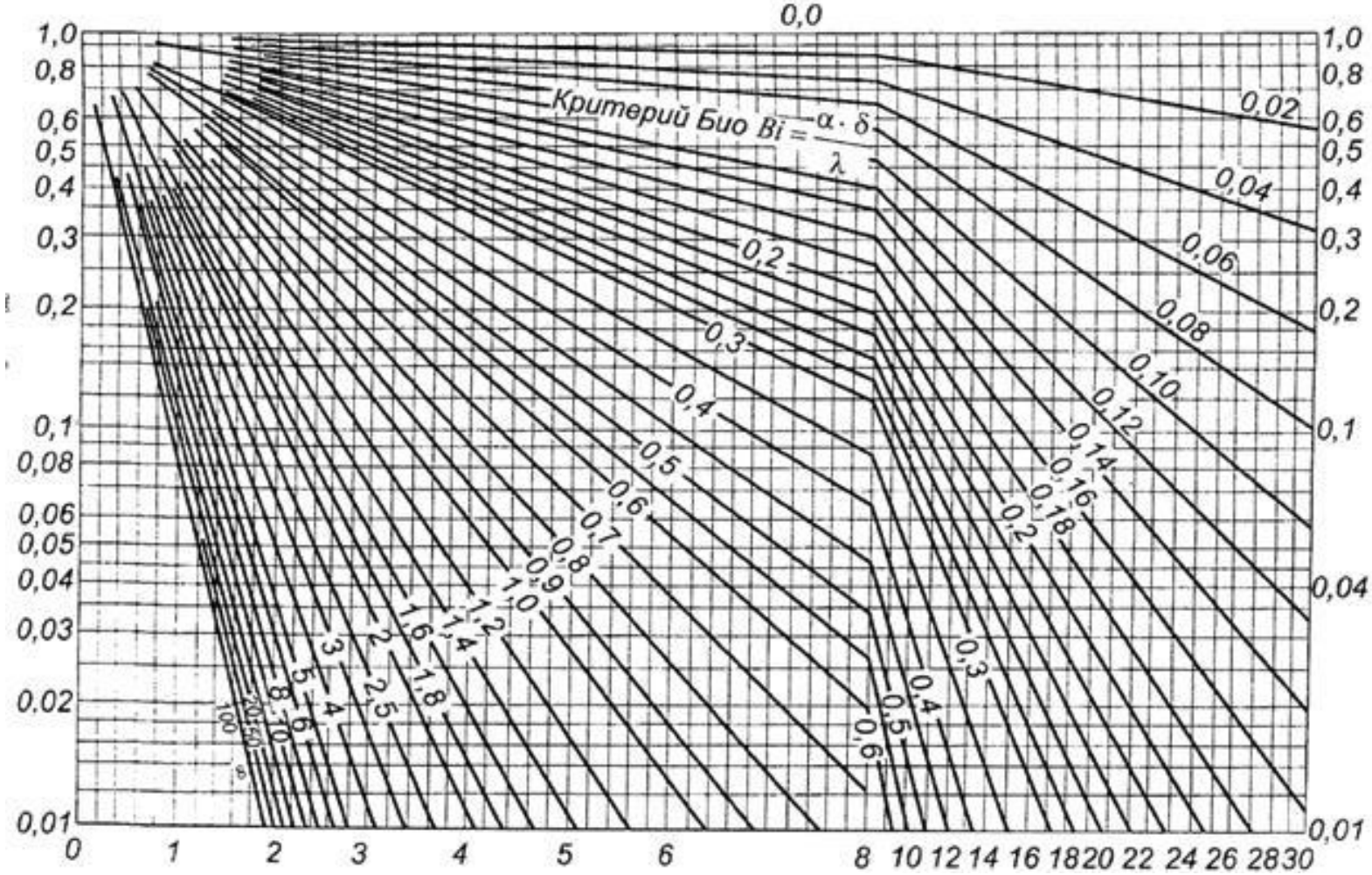
$$\Theta_{x=\delta} = \frac{t_{x=\delta} - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}}$$



$$\mathrm{Fo} = \frac{a \cdot \tau}{\delta^2}$$

Залежність $\Theta = f_2(\mathrm{Fo}, \mathrm{Bi})$ для поверхні тонкої пластини

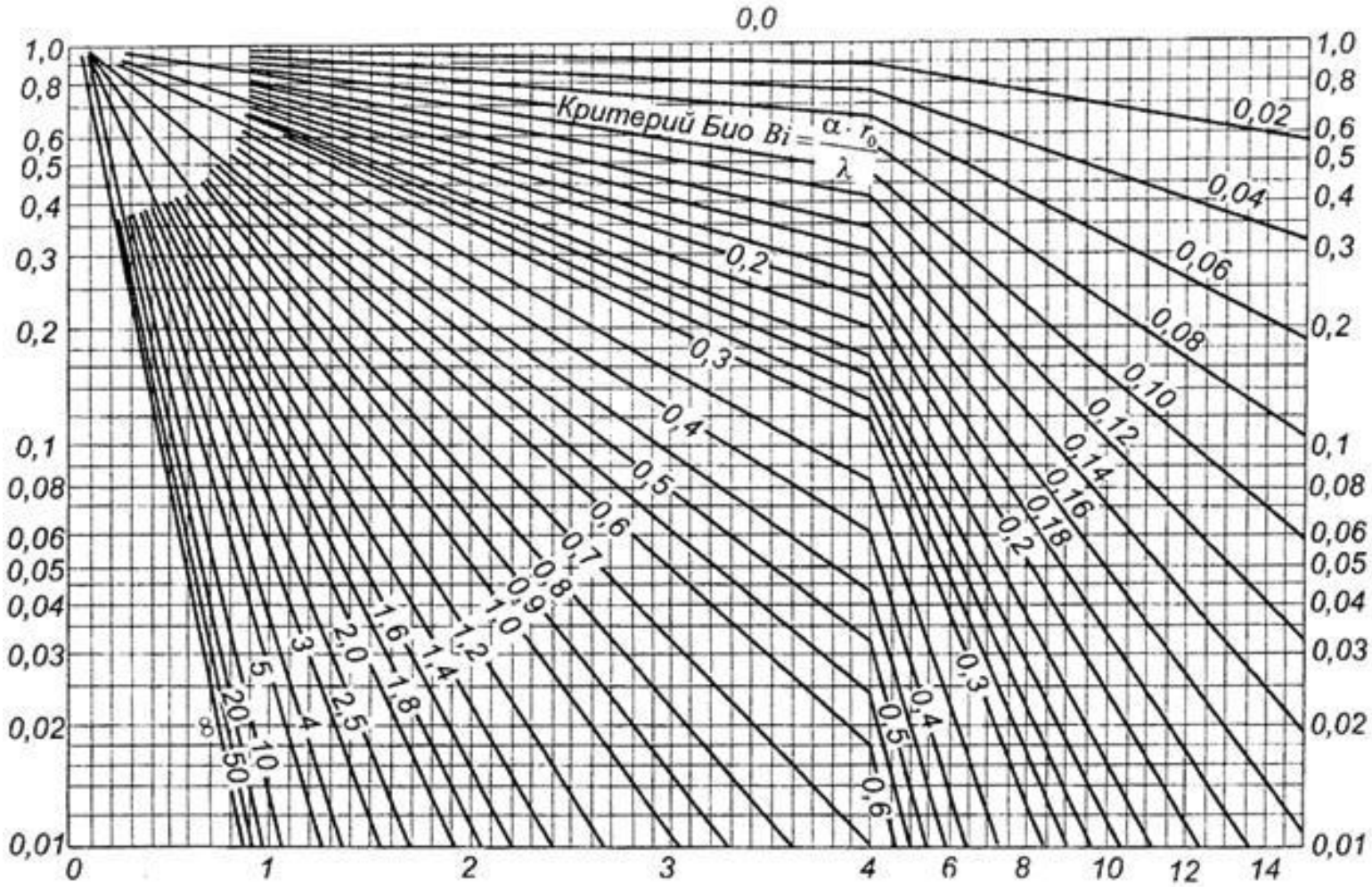
$$\Theta_{x=\delta} = \frac{t_{x=\delta} - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}}$$



$$\mathrm{Fo} = \frac{a \cdot \tau}{\delta^2}$$

Залежність $\Theta = f_2(\mathrm{Fo}, \mathrm{Bi})$ для середини тонкої пластини

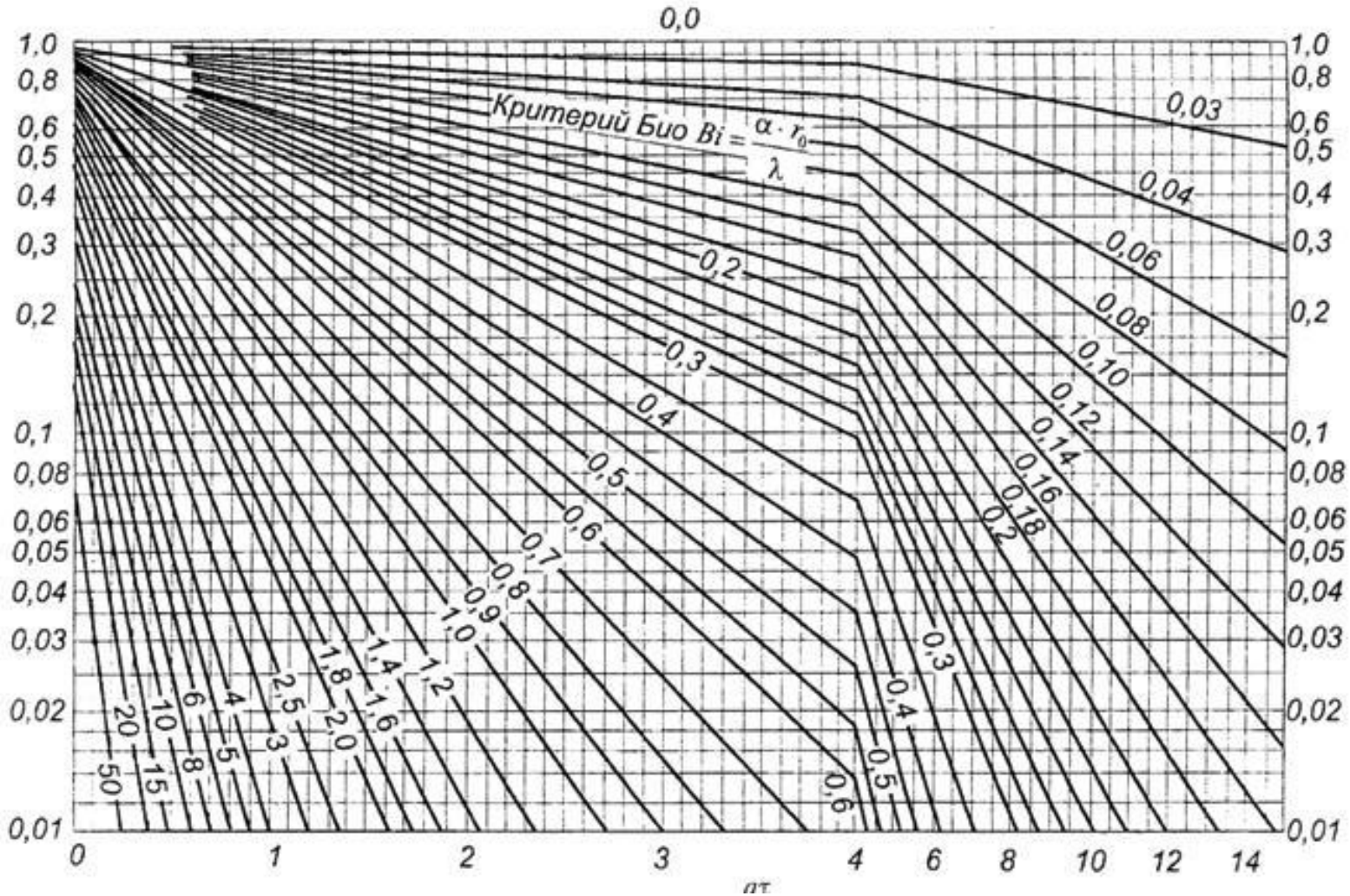
$$\Theta_{x=\delta} = \frac{t_{x=\delta} - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}}$$



$$\mathrm{Fo} = \frac{a \cdot \tau}{\delta^2}$$

Залежність $\Theta = f_2(\mathrm{Fo}, \mathrm{Bi})$ для осі циліндра

$$\Theta_{x=\delta} = \frac{t_{x=\delta} - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}}$$

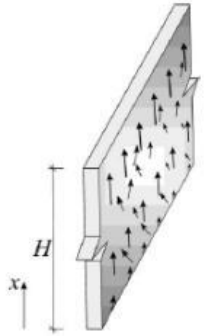
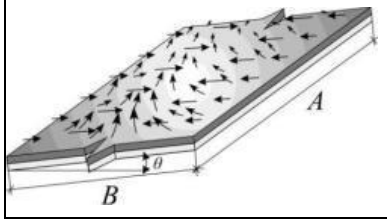


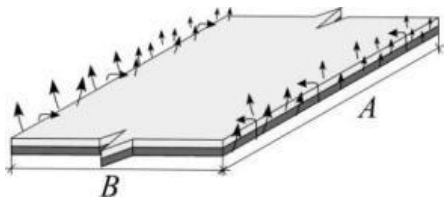
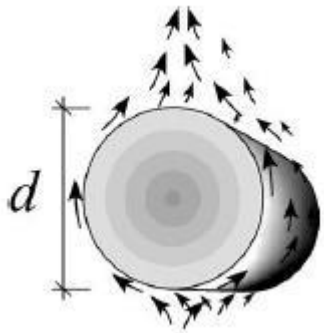
$$\mathrm{Fo} = \frac{a \cdot \tau}{\delta^2}$$

Залежність $\Theta = f_2(\mathrm{Fo}, \mathrm{Bi})$ для поверхні циліндра

Теплообмін при природній конвекції

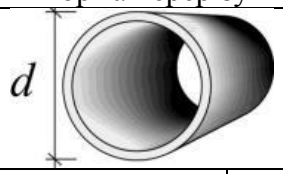
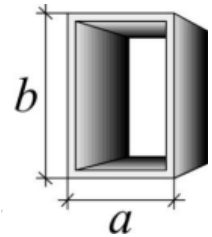
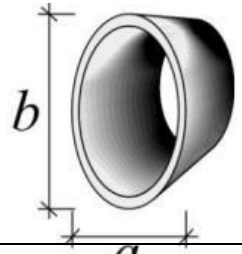
$\overline{\mathrm{Nu}} = \dfrac{\bar{\alpha} l}{\lambda} = C \cdot \left(\mathrm{Gr} \cdot \mathrm{Pr}\right)^n + K$, K - середнє число Nu; l - визначальний розмір, м; теплофізичні властивості рідини визначаються при $t_{ср} = \dfrac{t_{ст} + t_{ж}}{2}$.

Форма перерізу		C	n	K	Режим течії	Визначальний розмір
	$\overline{\mathrm{Nu}}$	$\dfrac{0,67}{\left[1+\left(\dfrac{0,492}{\mathrm{Pr}}\right)^{9/16}\right]^{4/9}}$	1/4	0,68	$\mathrm{Ra}<1\times10^9$	H
	$\sqrt{\overline{\mathrm{Nu}}}, \sqrt{\mathrm{Nu}_x}$	$\dfrac{0,387}{\left[1+\left(\dfrac{0,492}{\mathrm{Pr}}\right)^{9/16}\right]^{8/27}}$	1/6	0,825	$\mathrm{Ra}>1\times10^9$	H – при розрахунках $\overline{\mathrm{Nu}}$ та x при розрахунках Nu_x
		0,54	1/4	0	$10^4<\mathrm{Ra}<10^7$	$L = F/P$ при A/B < 10, F - площа пластини, м^2; P - периметр пластини, м; $l = B$, A/B > 10
		0,14	1/3	0	$10^7<\mathrm{Ra}<10^{11}$	
	При розрахунку тепловіддачі похилої пластини, що нагрівається зверху, рекомендується провести розрахунок для вертикальної пластини, де при розрахунку критерію Gr замість g потрібно використовувати $g \cdot \cos(\theta)$, потім розрахувати тепловіддачу за формулами для горизонтальної пластини, тільки замість g потрібно підставити $g \cdot \sin(\theta)$, і за розрахункове прийняти більше зі значень, що вийшли.					

	0,27	1/4	0	$10^5<Ra<10^{11}$	
	0,47	1/4	0	$10^4<Ra<10^9$	
	0,1	1/3	0	$Ra>10^9$	*d*

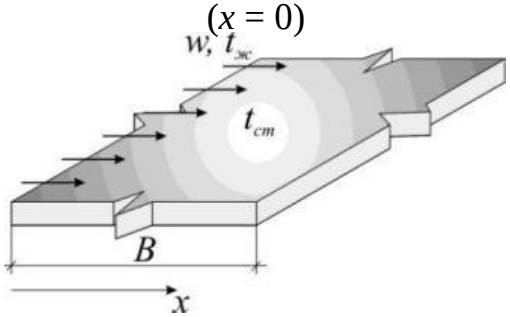
Теплообмін при вимушеному русі рідини

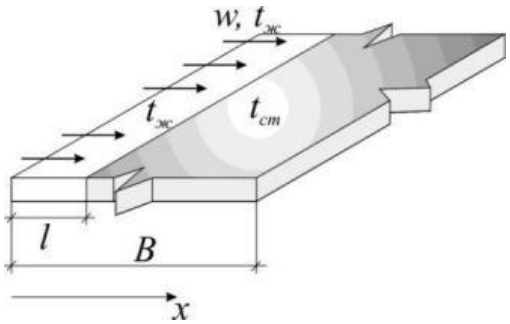
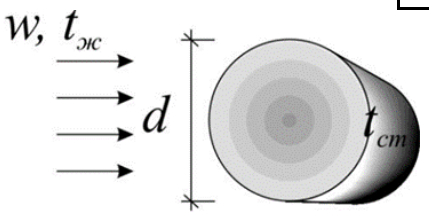
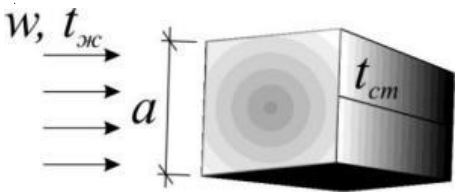
У трубах різного поперечного перерізу $\overline{\mathrm{Nu}} = \frac{\bar{\alpha} l}{\lambda} = C \cdot \mathrm{Re}^m \cdot \mathrm{Pr}^n \cdot K; l = \frac{4F}{P}$, F – площа перерізу труби, м^2; P – периметр перерізу труби, м; теплофізичні властивості рідини визначаються при $t_{ср} = \frac{t_{ст} + t_{ж}}{2}$.

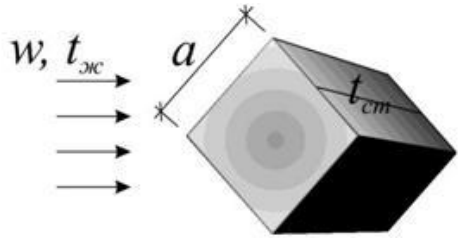
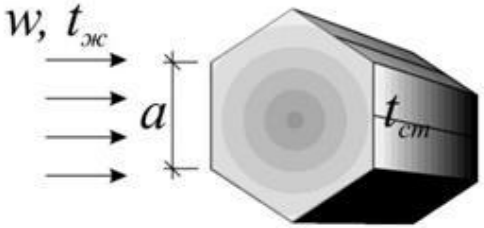
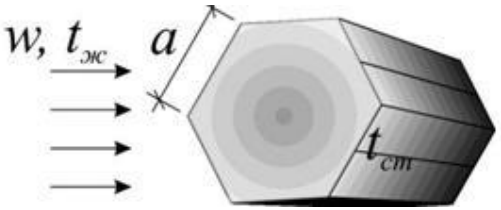
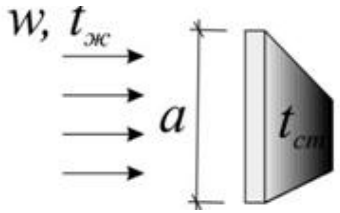
Форма перерізу		C	m	n	K	Режим течії	Визначальний розмір
		1,86	1/3	1/3		Re<2000, поблизу входу в трубу (до 10D)	d
		3,66	0	0	1	Re<2000, на відстані більше 10D	
		0,023	0,8	0,4	1	Re>2000 (для газів)	
		0,0270	0,8	0,33		Re>2000, 0,6<Pr<100 (рідини)	
	a/b=1	2,98	0	0	1	Re<2000	D_h = 4 F/P
	2	3,39	0	0	1		
	3	3,96	0	0	1		
	4	4,44	0	0	1		
	6	5,14	0	0	1		
	8	5,60	0	0	1		
	∞	7,54	0	0	1	Re<2000	l = 4 F/P
	a/b=1	3,66	0	0	1		
	2	3,74	0	0	1		
	4	3,79	0	0	1		
	8	3,72	0	0	1		
	16	3,65	0	0	1		
	φ=10°	1,61	0	0	1	Re<2000	l = 4 F/P
	30°	2,26	0	0	1		
	60°	2,47	0	0	1		
	90°	2,34	0	0	1		
	120°	2,00	0	0	1		

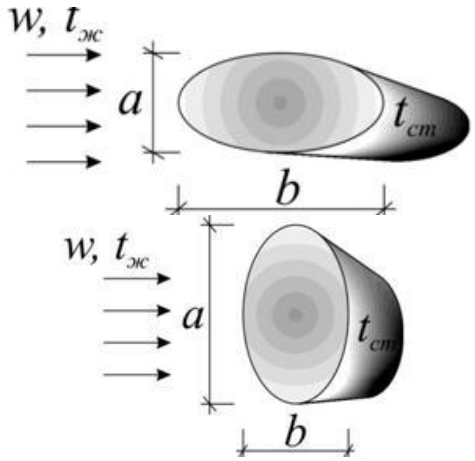
При зовнішньому обтіканні тіл різного поперечного перерізу $Q = \alpha \cdot F\left(t_{ст} - t_{ж}\right)$.

$\mathrm{Nu}_x = \dfrac{\alpha \cdot x}{\lambda} = C \cdot \mathrm{Re}_x^m \cdot \mathrm{Pr}^n$ – локальне значення числа Nu у точці *x*; $\overline{\mathrm{Nu}}_x = \dfrac{\bar{\alpha} \cdot l}{\lambda} = C \cdot \mathrm{Re}^m \cdot \mathrm{Pr}^n$ - середнє значення Nu для площі поверхні нагрівання від початку пластини до відстані *x*; теплофізичні властивості рідини визначаються при $t_{ср} = \dfrac{t_{ст} + t_{ж}}{2}$.

Форма перерізу		C	m	n	Режим течії	Визначальний розмір
пластина нагрівається спочатку ($x = 0$) 	Nu_x	0,332	1/2	1/3	$\mathrm{Re}<5\cdot10^5$	x
	$\overline{\mathrm{Nu}}$	0,664	1/2	1/3		B
	Nu_x	0,029	4/5	1/3	$\mathrm{Re}>5\cdot10^5$	x
	$\overline{\mathrm{Nu}}$	0,037	4/5	1/3		B
пластина нагрівається з $x = l$	Nu_x	$\dfrac{0,332}{\left[1-\left(\dfrac{l}{x}\right)^{3/4}\right]^{1/3}}$	1/2	1/3	$\mathrm{Re}<5\cdot10^5$	x
	$\overline{\mathrm{Nu}}$	$\dfrac{0,664\cdot\left[1-\left(\dfrac{l}{x}\right)^{3/4}\right]^{2/3}}{1-\dfrac{l}{x}}$	1/2	1/3		x

Форма перерізу		C	m	n	Режим течії	Визначальний розмір
	Nu_x	$\dfrac{0,029}{\left[1-\left(\dfrac{l}{x}\right)^{9/10}\right]^{1/9}}$	1/2	1/3	$Re<5\cdot10^5$	x
	$\overline{Nu}$	$\dfrac{0,037\cdot\left[1-\left(\dfrac{l}{x}\right)^{9/10}\right]^{8/9}}{1-\dfrac{l}{x}}$	1/2	1/3		B
		0,989	0,33	1/3	$0,4<Re<4$	d
		0,911	0,385	1/3	$4<Re<40$	
		0,683	0,466	1/3	$40<Re<4000$	
		0,193	0,618	1/3	$4\times10^3<Re<4\times10^4$	
		0,027	0,805	1/3	$4\times10^4<Re<4\times10^5$	
		0,178	0,699	1/3	$2,5\times10^3<Re<8\times10^3$	$\dfrac{4a}{\pi}$
		0,102	0,675	1/3	$5\times10^3<Re<1\times10^5$	

Форма перерізу	C	m	n	Режим течії	Визначальний розмір
	0,290 0,246	0,624 0,588	1/3 1/3	$2{,}5\times10^3<Re<7{,}5\times10^3$ $5\times10^3<Re<1\times10^5$	$\frac{4a}{\pi}$
	0,160 0,039	0,638 0,782	1/3 1/3	$5\times10^3<Re<1{,}95\times10^4$ $1{,}95\times10^4<Re<1\times10^5$	$\frac{6a}{\pi}$
	0,153	0,638	1/3	$5\times10^3<Re<1\times10^5$	$\frac{6a}{\pi}$
	0,228	0,731	*1/3*	$4\times10^3<Re<1{,}5\times10^4$	*a*

Форма перерізу	C	m	n	Режим течії	Визначальний розмір
	0,248	0,612	1/3	$2{,}5\times10^3 < Re < 1{,}5\times10^4$	$\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$
	0,094	0,804	1/3	$3\times10^3 < Re < 1{,}5\times10^4$	$\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$

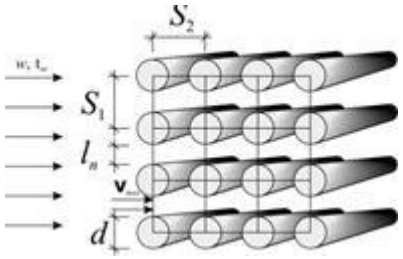
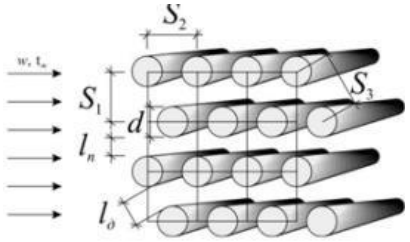
При омиванні пучків труб

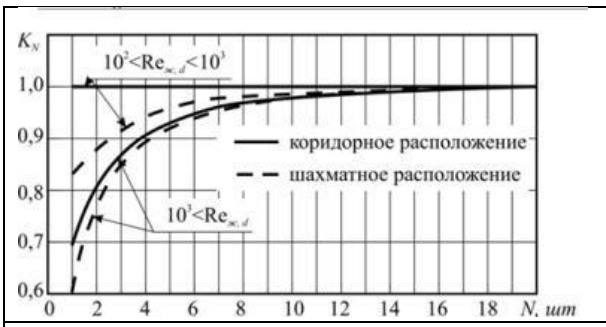
$$\overline{\mathrm{Nu}} = C \cdot \mathrm{Re}^{m}_{ж\,d} \cdot \mathrm{Pr}^{0.36}_{ж} \left(\frac{\mathrm{Pr}_{ж}}{\mathrm{Pr}_{c}}\right)^{n} \cdot K_N \cdot K_{\varphi}$$

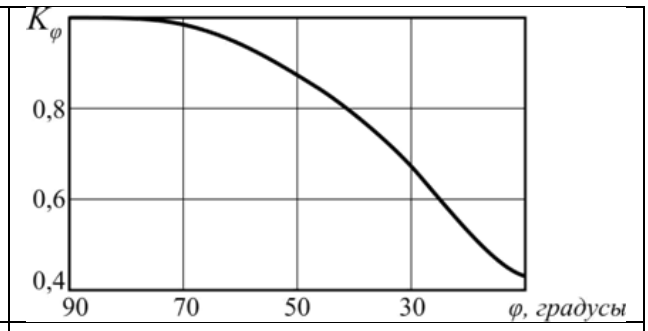
$\overline{\mathrm{Re}^{m}_{ж\,d}} = \dfrac{\omega_{max} \cdot d}{\nu}$, ω_{max} – максимальна швидкість усередині пучка, м/с; d – діаметр труб пучка, м; ν – кінематична в'язкість рідини, м^2/с; n = 0 для газів та n = 1/4 для рідин.

При коридорному розташуванні труб у пучку максимальна швидкість рідини розвивається в поперечному ререрізі між трубами пучка (l_n) , і $\omega_{\max} = \dfrac{S_1}{S_1 - d}\omega$. При шаховому розташуванні, якщо відстань між трубами по діагоналі ($2l_\partial$) більше відстані між трубами у поперечному перерізі (l_n), тоді швидкість рідини максимальна у поперечному перерізі, і її можна визначити за формулою для коридорного розташування труб. Якщо ж $2l_\partial < l_n$,

швидкість максимальна в діагональному перерізі, і визначається за формулою $\omega_{\max} = \dfrac{S_1}{2(S_3 - d)}\omega$, де $S_3 = \sqrt{S_1^2 + \left(\dfrac{S_2}{2}\right)^2}$ - відстань між трубами у діагональному перерізі; K_N – коефіцієнт, що враховує нерівномірність тепловіддачі рядів труб у пучку, визначається в залежності від номера ряду по ходу руху рідини N по рис.; $K\varphi$ – коефіцієнт, що враховує зміну тепловіддачі пучків труб при омиванні їх рідиною під кутом φ – визначається за графіком на рис.

Розташування пучків		C	m	Режим течії
коридорне 	$S_1 / S_2 \geq 0{,}7$	0,52	0,5	$100<Re_{ж,\,d}<10^3$
		0,27	0,63	$10^3<Re_{ж,\,d}<2\times10^5$
		0,033	0,8	$2\times10^5<Re_{ж,\,d}$
шахове 	$S_1 / S_2 \leq 2$	0,71	0,5	$100<Re_{ж,\,d}<10^3$
		$0{,}35\times(S_1/S_2)^{0,2}$	0,6	$10^3<Re_{ж,\,d}<2\times10^5$
	$S_1 / S_2 > 2$	0,4	0,6	$2\times10^5<Re_{ж,\,d}$
		$0{,}31\times(S_1/S_2)^{0,2}$	0,8	





Тепловіддача при кипінні та конденсації

Тепловіддача при кипінні рідин в умовах вільного руху - $10^{-5}<Re^*<10^4$.

$$Nu^* = c \times Re^{*n} \times Pr_{ж},$$

де c = 0,0625 та n = 0,50 при $Re^*<10^{-2}$;
c = 0,1250 та n = 0,65 при $Re^*<10^{-2}$.

У цьому рівнянні:

$$Nu^* = \frac{\alpha \cdot l^*}{\lambda_{ж}}, \quad Re^* = \frac{W^* \cdot l^*}{\nu_{ж}}$$

де наведена швидкість пароутворення, м/с:

$$W^* = \frac{q}{r \cdot \rho''},$$

а величина, м:

$$l^* = \frac{\left(c_p \cdot \rho' \cdot \sigma \cdot t_н\right)}{\left(r \cdot \rho''\right)^2}$$

Усі фізичні властивості вибираються за температури насичення $t_н$.

Тепловіддача при плівковій конденсації нерухомої пари на вертикальній поверхні для ламінарного перебігу плівки:

$$Re_н<1600 \text{ та } z_н<2300$$

$$Re_н = 3{,}8\, z_н^{0{,}78} \times (Pr_н/Pr_c)^{0{,}25},$$

де $Re_н = \alpha \times \Delta t \times H \times B$ – наведений критерій Рейнольдса;

$z_н = \Delta t \times H \times A$ – наведена довжина поверхні;

$\Delta t = t_н - t_c$ - температурний тиск;

A, B – комплекси, значення яких для води наведені в таблиці

$t_н$, °С	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220
А, 1/м×°С	5,16	11,4	20,9	34,5	51,5	70,3	94,0	122	150	182	218
В×10^3, м	1,62	2,55	3,64	4,89	6,29	7,67	9,31	11,1	12,9	15,1	17,7

Тепловіддача при плівковій конденсації нерухомої пари на вертикальній поверхні при змішаному перебігу плівки:

$$230 < z_н < 3900,$$

$$Re_н = [253 + 0{,}062\ (Pr_н/Pr_c)^{0{,}25} \times Pr_н^{0{,}5}(z_н - 2300)]^{1{,}33}.$$

Тепловіддача при плівковій конденсації нерухомої пари на горизонтальних трубах при ламінарному перебігу плівки:

$$z_н < 3900;$$

$$Re_н = 3{,}5\ z_н^{0{,}75}(Pr_н/Pr_c)^{0{,}25}.$$

В критеріях $Re_н$ та $z_н$ замість H потрібно підставляти πr, де r - радіус труби, м.

Тепломасовіддача при випаровуванні рідини в пароподібне середовище в умовах природної конвекції:

$$Nu = 5\ (Ar \times Pr)^{0{,}104},$$

при $(Ar \times Pr) = 3 \times 10^6 + 2 \times 10^8$:

$$Nu_D = 0{,}66\ (Ar \times Pr_D)^{0{,}26},$$

при $(Ar \times Pr_D) = 3 \times 10^6 + 2 \times 10^8$.

Тепломасовіддача при випаровуванні рідини в парогазове середовище в умовах вимушеної конвекції:

$$Nu = A \times Re^n \times Pr^{0{,}33} \times Gu^{0{,}175} \times \theta^2,$$

$$Nu_d = B \times Re^n \times Prd^{0{,}33} \times Gu^{0{,}135} \times \theta^2.$$

У цих рівняннях:

$Gu = \frac{Tc - Tм}{Tc}$, $\theta = \frac{Tc}{Tn}$, Tc, $Tм$ – абсолютні температури середовища по сухому та мокрому термометрам, Tn - абсолютна температура поверхні рідини.

Значення A, B та n залежно від числа Рейнольдса наведені в таблиці

Re	A	B	n
$3{,}15 \times 10^3 \div 2{,}2 \times 10^4$	0,51	0,49	0,61
$2{,}2 \times 10^4 \div 3{,}15 \times 10^5$	0,027	0,0248	0,9

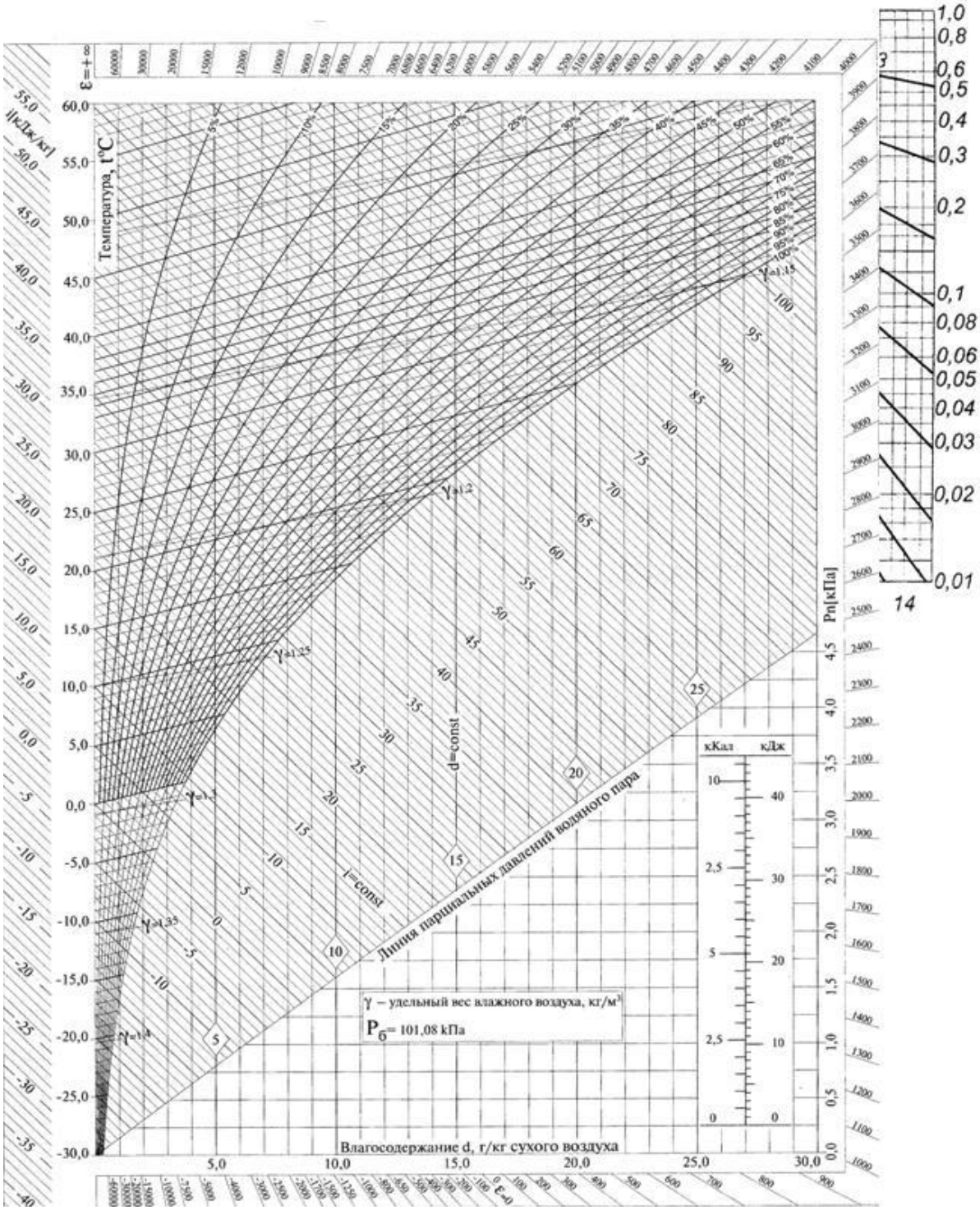
Теплофізичні властивості сухого повітря при тиску 101325 Па (760 мм рт.ст.)

t, °C	ρ, кг/м^3	c_p, кДж/кг×К	$\lambda \times 10^2$, Вт/м×К	$a \times 10^6$, м^2/с	$\mu \times 10^6$, Па×с	$\nu \times 10^6$, м^2/с	Pr
-50	1,584	1,013	2,04	12,7	14,6	9,23	0,728
-40	1,515	1,013	2,12	13,8	15,2	10,04	0,728
-30	1,453	1,013	2,20	14,9	15,7	10,80	0,723
-20	1,395	1,009	2,28	16,2	16,2	12,79	0,716
-10	1,342	1,009	2,36	17,4	16,7	12,43	0,712
0	1,293	1,005	2,44	18,8	17,2	13,28	0,707
10	1,247	1,005	2,51	20,0	17,6	14,16	0,705
20	1,205	1,005	2,59	21,4	18,1	15,06	0,703
30	1,165	1,005	2,67	22,9	18,6	16,00	0,701
40	1,128	1,005	2,76	2403	19,1	16,96	0,699
50	1,093	1,005	2,83	25,7	19,6	17,95	0,698
60	1,060	1,005	2,90	27,2	20,1	18,97	0,696
70	1,029	1,009	2,96	28,6	20,6	20,02	0,694
80	1,000	1,009	3,05	30,2	21,1	21,09	0,692
90	0,972	1,009	3,13	31,9	21,5	22,10	0,690
100	0,946	1,009	3,21	33,6	21,9	23,13	0,688
120	0,898	1,009	3,34	36,8	22,8	25,45	0,686
140	0,854	1,013	3,49	40,3	23,7	27,80	0,684
160	0,815	1,017	3,64	43,9	24,5	30,09	0,682
180	0,779	1,022	3,78	47,5	25,3	32,49	0,681
200	0,746	1,026	3,93	51,4	26,0	34,85	0,680
250	0,674	1,038	4,27	61,0	27,4	40,61	0,677
300	0,615	1,047	4,60	71,6	29,7	48,33	0,674
350	0,566	1,059	4,91	81,9	31,4	55,46	0,676
400	0,524	1,068	5,21	93,1	33,0	63,09	0,678
500	0,456	1,093	5,74	115,3	36,2	79,38	0,686
600	0,404	1,114	6,22	138,3	39,1	96,89	0,699
700	0,362	1,135	6,71	163,4	41,8	115,4	0,706
800	0,329	1,156	7,18	188,8	44,3	134,8	0,713
900	0,301	1,172	7,63	216,2	46,7	155,1	0,712
1000	0,277	1,185	8,07	245,9	49,0	177,1	0,719
1100	0,257	1,197	8,50	276,2	51,2	199,3	0,722
1200	0,239	1,210	9,15	316,5	53,5	233,7	0,724

Для зручності проведення розрахунків з використанням комп'ютерних програм (Excell, Mathcad тощо) можна використовувати наступні залежності для визначення основних теплофізичних властивостей повітря при атмосферному тиску та відповідній абсолютній температурі – T(K):

Параметр	Формула	Розмірність	Діапазон темперетур, К
Щільність	$\rho(T) = \dfrac{353}{T}$	кг/м^3	100÷3000
Динамічна в'язкість	$\mu(T) = \dfrac{145,8 \cdot T^{1,5}}{T + 110,4} \cdot 10^{-8}$	кг/м×сек	100÷3000
Кінематична в'язкість	$\nu(T) = \dfrac{\mu(T)}{\rho(T)}$	м^2/с	100÷3000
Теплопровідність	$\lambda(T) = \dfrac{0,6325 \cdot 10^{-5} \cdot \sqrt{T}}{\left(1 + \dfrac{245,4 \cdot 10^{\frac{12}{T}}}{T}\right) \cdot 2,388 \cdot 10^{-3}}$	Вт/м×К	100÷3000
Ізобарна теплоємність	$c_p(T) = 0,000040074 \cdot T^2 - 0,20182 \cdot T + 1030,8$	Дж/кг×К	240÷500
Температуро-провідність	$a(T) = \dfrac{\lambda(T)}{c_p(T) \cdot \rho(T)}$	м^2/с	240÷500
Число Прандтля	$\mathrm{Pr}(T) = \dfrac{\nu(T)}{a(T)}$		

i-d діаграма вологого повітря



Термодинамічні властивості сухої насиченої водяної пари та води на лінії насичення

t, °C	p, МПа	v', м^3/кг	v'', м^3/кг	i', кДж/кг	i'', кДж/кг	s', кДж/кг×К	s'', кДж/кг×К
0	0,000611	0,0010002	206,3	0,0	2500,8	0,0	9,1544
10	0,001227	0,0010004	106,42	42,04	2519,2	0,1511	8,8995
20	0,002337	0,0010018	57,84	83,90	2537,2	0,2964	8,6663
30	0,004241	0,0010044	32,93	125,69	2555,6	0,4367	8,4523
40	0,007375	0,0010079	19,55	167,51	2573,6	0,5723	8,2560
50	0,012335	0,0010121	12,05	209,30	2591,6	0,7038	8,0751
60	0,01992	0,0010171	7,678	251,12	2609,2	0,8311	7,9084
70	0,03116	0,0010228	5,045	292,99	2626,4	0,9550	7,7544
80	0,04736	0,0010290	3,409	334,94	2643,1	1,0752	7,6116
90	0,07011	0,0010359	2,361	376,98	2659,5	1,1924	7,4785
100	0,101325	0,0010435	1,673	419,10	2675,8	1,3071	7,3545
110	0,14327	0,0010515	1,210	461,34	2691,3	1,4185	7,2386
120	0,19854	0,0010603	0,8917	503,7	2706,3	1,5278	7,1269
130	0,27011	0,0010697	0,6683	546,4	2720,6	1,6345	7,0271
140	0,3614	0,0010798	0,5087	589,1	2734,0	1,7392	6,9304
150	0,4760	0,0010906	0,3926	632,2	2746,5	1,8418	6,8383
160	0,6180	0,0011021	0,3068	675,3	2757,8	1,9427	6,7508
180	1,0027	0,0011275	0,1939	763,3	2778,4	2,1395	6,5858
200	1,5550	0,0011565	0,1272	852,4	2793,0	2,3308	6,4318
210	1,9080	0,0011726	0,1044	897,6	2798,0	2,4246	6,3577
220	2,3202	0,0011900	0,08606	943,7	2801,4	2,5179	6,2848
240	3,3480	0,0012291	0,05967	1037,5	2803,1	2,7022	6,1425
250	3,978	0,0012512	0,05005	1086,1	2801,0	2,7934	6,0721
260	4,694	0,0012755	0,04215	1135,0	2796,4	2,8851	6,0014
280	6,419	0,0013321	0,03013	1236,8	2779,6	3,0685	5,8579

300	8,592	0,0014036	0,02164	1344,8	2749,1	3,2540	5,7049
310	9,869	0,001447	0,01831	1402,2	2727,3	3,3507	5,6233
320	11,290	0,001499	0,01545	1462,0	2699,6	3,4495	5,5354
330	12,864	0,001562	0,01297	1526,1	2665,7	3,5521	5,4412
340	14,608	0,001639	0,01078	1594,8	2621,8	3,6605	5,3361
350	16,537	0,001741	0,008805	1671,4	2564,4	3,7786	5,2117
360	18,674	0,001894	0,006943	1761,4	2481,1	3,9163	5,0530
370	21,053	0,00222	0,00493	1892,4	2330,8	4,1135	4,7951
374	22,087	0,00280	0,00361	2031,9	2172,7	4,3258	4,5418

Теплофізичні властивості води на лінії насичення

t, °C	$p\times10^{-5}$, Па	ρ, кг/м^3	c_p, кДж/кг×К	$\lambda\times10^2$, Вт/м×К	$\nu\times10^6$, м^2/с	$\beta\times10^4$, 1/К	$\sigma\times10^4$, Н/м	Pr
0,01	1,013	999,9	4,218	55,1	1,789	-0,63	756,4	13,67
10	1,013	999,7	4,193	57,4	1,306	0,70	741,6	9,52
20	1,013	998,2	4,182	59,9	1,006	1,82	726,9	7,02
30	1,013	995,7	4,178	61,8	0,805	3,21	712,2	5,42
40	1,013	992,2	4,170	63,5	0,659	3,87	696,5	4,31
50	1,013	988,1	4,181	64,8	0,556	4,09	676,9	3,54
60	1,013	963,2	4,184	65,9	0,478	5,11	662,2	2,98
70	1,013	977,8	4,189	66,8	0,415	5,70	643,5	2,55
80	1,013	971,8	4,196	67,5	0,365	6,32	625,9	2,21
90	1,013	965,3	4,205	68,0	0,326	6,99	607,2	1,95
100	1,013	958,4	4,217	68,3	0,295	7,52	588,6	1,75
110	1,43	951,0	4,230	68,5	0,272	8,08	569,0	1,60
120	1,98	943,1	4,245	68,6	0,152	8,264	548,4	1,47
130	2,70	934,8	4,264	68,6	0,233	9,19	528,8	1,36
140	3,61	926,1	4,286	68,5	0,217	9,72	507,2	1,26
150	4,76	917,0	4,311	68,4	0,203	10,3	486,6	1,17
160	6,18	907,4	4,346	68,3	0,191	10,7	466,0	1,10
170	7,92	697,3	4,380	67,9	0,181	11,3	443,4	1,05
180	10,03	886,9	4,417	67,4	0,173	11,9	422,8	1,00
190	12,55	888,0	4,459	67,0	0,165	12,6	400,2	0,96
200	15,55	863,0	4,505	66,3	0,158	13,3	376,7	0,93
210	19,08	852,8	4,555	65,5	0,153	14,1	354,1	0,91
220	23,20	840,3	4,614	64,5	0,148	14,8	331,6	0,89
230	27,98	827,3	4,681	63,7	0,145	15,9	310,0	0,88

240	33,48	813,6	4,756	62,8	0,141	16,8	285,5	0,87
250	39,78	799,0	7,842	61,8	0,137	18,1	261,9	0,86
260	46,94	784,0	4,980	59,3	0,135	19,7	237,4	0,892
270	55,05	767,9	5,120	57,8	0,113	21,6	214,8	0,905
280	64,19	750,7	5,300	56,5	0,131	23,7	191,3	0,917
290	74,45	732,3	5,500	54,8	0,129	26,2	168,7	0,944
300	85,92	712,5	5,760	53,2	0,128	29,2	144,2	0,986
310	98,70	691,1	6,110	51,4	0,128	32,9	120,7	1,05
320	112,90	667,1	6,570	49,4	0,128	38,2	98,10	1,14
330	128,65	640,2	7,250	47,1	0,127	43,3	76,71	1,25
340	146,08	610,1	8,200	44,6	0,127	53,4	56,70	1,42
350	165,37	574,1	10,10	43,1	0,126	66,8	38,16	1,70
360	186,74	528,0	14,65	36,7	0,126	109	20,21	2,66

Теплофізичні властивості водяної пари при атмосферному тиску

t, °С	ρ, кг/м^3	c_p, кДж/кг×К	$\lambda\times10^3$, Вт/м×К	$\nu\times10^6$, м^2/с	$\mu\times10^6$, Па×с	а×10^6, м^2/с
0	0,0048	1,8581	16,2	1704,16	8,18	1812,5
20	0,01	1,8590	17,8	960	9,6	874,6
40	0,05	1,8600	19,5	208,0	10,4	209,6
60	0,14	1,8700	21,2	80,0	11,2	80,70
80	0,29	1,8800	22,9	41,03	11,9	42,00
100	0,59	1,8891	24,6	20,53	12,08	22,0
120	1,12	1,8900	25,9	11,96	13,4	12,2
140	1,99	1,9000	27,9	7,0	14,1	7,3
160	3,27	1,9100	30,1	4,55	14,9	4,8
180	5,16	1,9200	32,6	3,04	15,7	3,2
200	7,86	1,9393	33,7	2,04	16,05	2,2
300	46,2	1,9991	45,6	0,43	20,00	0,4
370	203,0	56,52	50,1	0,166	33,37	0,0150

Властивості робочих рідин

t, °C	ρ, кг/м^3	c_p, кДж/кг×К	λ, Вт/м×К	$\mu\times10^4$, Па×с	Pr
Азот					
-203	830	1,083	0,150	2,48	1,79
-200	818,0	1,082	0,146	1,94	1,43
-195	798,0	1,079	0,139	1,51	1,17
-190	778,0	1,077	0,132	1,26	1,02
-185	758,0	1,074	0,125	1,08	0,92
-180	732,0	1,072	0,117	0,95	0,87
-175	702,0	1,070	0,110	0,86	0,83
-170	672,0	1,068	0,103	0,80	0,82
-160	603,0	1,063	0,089	0,72	0,86
-150	474,0	1,059	0,075	0,65	0,92
Фреон – 113					
-50	1720	0,600	0,120	23,0	11,5
-30	1683	0,613	0,119	16,04	8,26
-20	1664	0,619	0,118	13,23	6,94
-10	1643	0,626	0,118	11,08	5,88
0	1621	0,632	0,117	9,42	5,09
10	1599	0,644	0,108	8,12	4,84
20	1576	0,656	0,098	7,07	4,73
30	1553	0,664	0,097	6,22	4,26
40	1529	0,669	0,095	5,53	3,89
50	1503	0,647	0,094	5,02	3,45
Етиловий спирт					
-30	825,0	1,25	0,177	34	24,01
-10	813,0	1,31	0,173	22	16,65
10	798,0	1,37	0,170	15	12,08
30	781,0	1,44	0,168	10,2	8,74
50	762,2	1,51	0,166	7,2	6,55
70	743,1	1,58	0,165	5,1	4,88
90	725,3	1,65	0,162	3,7	3,74
110	704,1	1,72	0,160	2,8	3,01
130	676,7	1,78	0,159	2,1	2,35
Трансформаторна олія					
0	892,5	1,549	0,112	629,8	866
10	886,4	1,620	0,112	335,5	484
20	880,3	1,666	0,110	198,2	298
30	874,2	1,729	0,110	128,5	202
40	868,2	1,788	0,109	89,4	146
50	862,1	1,846	0,108	65,3	111
60	856,0	1,905	0,107	49,5	87,8
70	850,0	1,964	0,106	38,6	11,3
80	843,9	2,096	0,106	30,8	59,3
90	837,8	2,065	0,105	25,4	50,5
100	831,8	2,144	0,104	21,3	43,9
110	825,7	2,202	0,103	18,1	38,8
120	819,6	2,261	0,102	15,7	34,9

Натрій					
500	828,1	0,904	70,08	2,4	0,0030
600	805,4	0,904	64,62	2,1	0,0029
700	763,5	0,904	60,81	1,9	0,0028
800	757,3	0,904	57,81	1,8	0,0028
900	745,4	0,904	53,35	1,7	0,0028
1000	725,4	0,904	49,08	1,6	0,0029
1100	690,8	0,904	45,08	1,6	0,0032
1200	669,0	0,904	41,08	1,5	0,0033

Ступінь чорноти повного нормального випромінювання для різних матеріалів

Найменування матеріалу	t, °C	ε
Алюміній полірований	50-500	0,04-0,06
Алюміній окислений	50-500	0,2-0,3
Латунь полірована	200	0,03
Золото поліроване	225-635	0,018-0,035
Мідь полірована	50-100	0,02
Мідь окислена	50	0,88
Нікель полірований	225-375	0,07-0,087
Нікель окислений	200-600	0,37-0,48
Олово луджене	25	0,043-0,064
Платиновий дріт	500-1000	0,1-0,16
Сталь листова, шліфована	950-1100	0,55-0,61
Сталь листова, прокат	50	0,56
Сталь окислена	200-600	0,8
Сталь нержавіюча	700	0,45
Свинець окислений	25	0,281
Срібло поліроване	225-625	0,02-0,032
Титан полірований	200	0,15
Титан окислений	500	0,5
Чавун обточений	800-1000	0,6-0,7
Хром	100-1000	0,08-0,26
Цинк окислений	400	0,11
Азбестовий картон	24	0,96
Папір тонкий	19	0,924
Вода	0-100	0,95-0,963
Гіпс	20	0,903
Цегла шамотна	1100	0,75
Цегла вогнетривка	-	0,8-0,9
Мармур сіруватий, полірований	22	0,931
Гума тверда	23	0,945
Гума м'яка	24	0,859
Скло гладке	22	0,937
Толь	21	0,910
Фарфор глазурований	22	0,924
Штукатурка вапняна	10-88	0,91
Алюмінієві фарби різної давності та зі змінним вмістом Al	100	0,27-0,67

Алюмінієвий лак по шорсткій поверхні	20	0,39
Бетон, гладка поверхня	20	0,62
Граніт сірий, світлий, полірований	20	0,42
Дерево незабарвлене	20	0,7-0,9
Вапняк шліфований	20	0,4
Кварц плавлений	20	0,932
Лак чорний	40-95	0,96-0,98
Олійні фарби різних кольорів	100	0,92-0,96
Пісковик шліфований червоний	20	0,57
Руберойд	20	0,93
Сажа, свічка кіптява	95-270	0,952
Вугілля очищене	125-625	0,81-0,79
Шелак чорно-матовий	75-145	0,91
Емаль біла	19	0,897

Коефіцієнти дифузії пари різних рідин у повітря

Найменування рідини	*T*, К	*D*, м^2/с
Авіаційний бензин	293	9,1
Аміак	293	22,7
Ацетон	273	10,9
Бензол	293	9,0
Гелій	273	63,0
Гексан	293	7,55
Двоокис вуглецю	293	16,5
Вібутілфталат	293	3,1
Йод	298	1,08
Кисень	273	17,8
Метан	273	19,6
Метиловий спирт	293	15,33
Октан	293	5,76
Ртуть	614	47,3
Сірчистий ангідрид	293	12,2
Сірковуглець	293	9,83
Толуол	293	8,0
Оцтова кислота	293	12,15
Хлор	293	12,4
Циклогексан	293	7,45
Етилацетат	298,9	8,7
Етиловий спирт	298	13,5
Ацетилен	289	19,1
Вода	298	26,0
Дифеніл	298	7,27
Нафталін	298	6,11
Хлорбензол	298,9	7,4
Хлороформ	273	9,1
Шестифториста сірка	289,6	9,6

Значення максимальної пружності водяної пари *E* (Па) для різних температур при нормальному барометричному тиску

Для температур від 0 до – 40 °С (над льодом)

t, °С	*E*	*t*, °С	*E*	*t*, °С	*E*	*t*, °С	*E*	*t*, °С	*E*
0,0	610	-5,4	388	-10,6	245	-16,0	151	-23,0	77
-0,2	601	-5,6	381	-10,8	240	-16,2	148	-23,5	73
-0,4	591	-5,8	376	-11,0	235	-16,4	145	-24,0	69
-0,6	581	-6,0	368	-11,2	232	-16,6	142	-24,5	65
-0,8	573	-6,2	363	-11,4	229	-16,8	140	-25,0	62
-1,0	562	-6,4	356	-11,6	225	-17,0	137	-25,5	59
-1,2	553	-6,6	351	-11,8	221	-17,2	135	-26,0	56
-1,4	544	-6,8	344	-12,0	217	-17,4	132	-26,5	54
-1,6	534	-7,0	340	-12,2	213	-17,6	130	-27,0	51
-1,8	526	-7,2	332	-12,4	209	-17,8	127	-27,5	49
-2,0	517	-7,4	327	-12,6	206	-18,0	125	-28,0	47
-2,2	509	-7,6	321	-12,8	203	-18,2	123	-28,5	44
-2,4	500	-7,8	315	-13,0	199	-18,4	120	-29,0	41
-2,6	492	-8,0	309	-13,2	195	-18,6	118	-29,5	39
-2,8	484	-8,2	304	-13,4	191	-18,8	115	-29,8	38
-3,0	476	-8,4	299	-13,6	187	-19,0	113	-30,0	37
-3,2	468	-8,6	293	-13,8	184	-19,2	111	-31,0	36
-3,4	460	-8,8	289	-14,0	181	-19,4	109	-32,0	30
-3,6	452	-9,0	284	-14,2	178	-19,6	107	-33,0	27
-3,8	444	-9,2	279	-14,4	175	-19,8	105	-34,0	25
-4,0	436	-9,4	273	-14,6	172	-19,9	104	-35,0	22
-4,2	428	-9,6	268	-14,8	169	-20,0	103	-36,0	20
-4,4	423	-9,8	264	-15,0	165	-20,5	98	-37,0	18
-4,6	415	-9,9	262	-15,2	162	-21,0	93	-38,0	16
-4,8	408	-10,0	260	-15,4	159	-21,5	89	-39,0	14
-5,0	401	-10,2	255	-15,6	156	-22,0	85	-40,0	12
-5,2	396	-10,4	251	-15,8	153	-22,5	81	-41,0	11

Для температур від 0 до 50°С (над водою)

t	0,0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8
0	611	620	629	633	639	648
1	657	666	676	681	685	696
2	705	716	726	732	737	748
3	758	769	799	785	791	802
4	818	825	836	842	848	860
5	872	885	897	904	909	922
6	934	948	961	968	974	938
7	1001	1016	1029	1037	1044	1053
8	1073	1088	1102	1109	1117	1132
9	1148	1164	1181	1188	1196	1212
10	1228	1244	1261	1269	1278	1294
11	1312	1330	1348	1357	1365	1384

12	1402	1421	1440	1449	1458	1478
13	1497	1517	1537	1542	1557	1577
14	1585	1618	1640	1650	1661	1682
15	1705	1726	1749	1761	1772	1794
16	1817	1841	1865	1877	1889	1913
17	1937	1962	1986	2000	2011	2037
18	2063	2089	2115	2129	2142	2169
19	2197	2225	2251	2266	2281	2309
20	2338	2366	2395	2411	2426	2455
21	2486	2517	2563	2563	2579	2611
22	2643	2675	2709	2725	2742	2775
23	2809	2842	2877	2894	2913	2947
24	2983	3019	3055	3074	3093	3130
25	3167	3205	3243	3262	3282	3320
26	3360	3400	3440	3460	3482	3527
27	3564	3607	3648	3671	3692	3735
28	3779	3823	3868	3890	3912	3959
29	4004	4051	4099	4122	4146	4186
30	4242	4291	4340	4366	4390	4440
31	4492	4543	4595	4622	4647	4700
32	4750	4810	4860	4890	4910	4970
33	5030	5090	5140	5170	5200	5260
34	5320	5380	5440	5470	5500	5560
35	5620	5680	5750	5780	5810	5880
36	5940	6010	6070	6110	6190	6210
37	6270	6340	6410	6450	6480	6550
38	6620	6700	6770	6800	6840	6920
39	6990	7070	7140	7180	7220	7300
40	7370	7450	7530	7570	7610	7690
41	7770	7860	7940	7980	8030	8110
42	8200	8280	8370	8410	8460	8550
43	8640	8730	8820	8850	8910	9010
44	9100	9190	9280	9340	9360	9480

МІЖНАРОДНА СИСТЕМА ОДІНИЦЬ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН

Міжнародна система одиниць фізичних величин. Розвиток міжнародного співробітництва у другій половині XX ст. зумовивши необхідність розробки нової системи одиниць вимірювань, яка б замінила існуючі на той час системи (СГС, МКС та ін.). У 1945 р. Міжурядова генеральна конференція з мір вагів ухвалила таку систему, з 1960 р. уточнювала її і дала назву System International unites (Міжнародна система одиниць) із міжнародним скороченням SI (українською мовою — СІ). СІ має низку переваг над системами, які існували раніше: вона універсальна, охоплює всі галузі науки, техніки, господарства та ін. Тому вона отримала визнання у багатьох країнах світу. Рекомендовані міжнародні позначення наводяться у табл. 1-6. Українські та міжнародні позначення для одиниць фізичних величин подані відповідно до таких державних стандартів України: ДСТУ 3651.0-97. Метрологія. Одиниці фізичних величин Міжнародної системи одиниць. Основні положення, назви та позначення та ДСТУ 3651.2-97. Метрологія. Одиниці фізичних величин. Фізичні сталі та характеристичні числа. Основні положення, назви та значення.

Використовуються також позасистемні одиниці. Деякі з них вибрали завдяки зручності застосування у певних галузях, інші збереглися завдяки історичним традиціям. Відмова від них зараз неможлива у зв'язку з їх широким розповсюдженням. Часто доводиться мати справу з британськими одиницями (дюйм, фут, фунт, унція, барель та ін.). Другу групу створюють давньоруські одиниці (пуд, вершок, сажень та ін.). У метеорології атмосферний тиск прийнято вимірювати в міліметрах ртутного столбика, незважаючи на існування в СІ одиниці тиску — Паскаль. Для переведення їх в одиниці СІ є спеціальні таблиці. Серед позасистемних одиниць слід виділити десяткові кратні й частинні одиниці, найменування яких утворені за допомогою префіксів мілі-, мікро-, мега, тера- та ін.

Таблиця 1. Фундаментальні фізико-хімічні сталі

Назва величини	Позначення	Рівняння	Значення величини
Швидкість світла у вакуумі	c	-	$2{,}99792458 \cdot 10^{8}$ м/с
Прискорення вільного падіння (стандартне значення)	g	–	9,80665 м/с^2
Гравітаційна стала	G	–	$6{,}6720 \cdot 10^{11}$ Н × м^2/кг^2
Магнітна стала	μ_0	–	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м = $1{,}2566370614 \cdot 10^{-6}$ Гн/м
Електрична стала	ε_0	-	$8{,}85418782 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Стала Планка	h	–	$6{,}626176 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Стала Дірака	h^{-}	$\frac{h}{2\pi}$	$1{,}0545887 \cdot 10^{-34}$ Дж·с

Назва величини	Позначення	Рівняння	Значення величини
Елементарний електричний заряд	e	–	$1{,}6021892\cdot10^{-19}$ Кл
Маса спокою електрона	m_e	–	$9{,}109534\cdot10^{-31}$ кг = 5,4858026104 а.о.м.
Енергія спокою електрона	–	$m_e c^2$	0,5110034 МеВ = $8{,}187241\cdot10^{-14}$ Дж
Маса спокою протону	m_p	–	$1{,}6726485\cdot10^{-27}$ кг = 1,007276470 а.о.м.
Енергія спокою протону	–	$m_p c^2$	938,2796 МеВ = $1{,}503302\cdot10^{-10}$ Дж
Маса спокою нейтрону	m_n	–	$1{,}6749543\cdot10^{-27}$ кг = 1,008665012 а.о.м.
Енергія спокою нейтрону	–	$m_n c^2$	939,5731 МеВ = $1{,}505374\cdot10^{-10}$ Дж
Відношення заряду електрона до його маси (заряд електрона)	–	$\frac{^{-}e}{m_e}$	$-1{,}7588047\cdot10^{-11}$ Кл/кг
Відношення заряду електрона до маси протону	–	$\frac{^{-}e}{m_p}$	$-9{,}57883\cdot10^{-7}$ Кл/кг
Відношення маси протона до маси електрона	–	m_p/m_e	1836,15152
Магнетон Бора	$\mu_Б$	$\frac{eh^{-}}{2m_e}$	$9{,}274078\cdot10^{-24}$ Дж/Тл
Ядерний магнетон	μ_N	$\frac{eh^{-}}{2m_p}$	$5{,}050824\cdot10^{-27}$ Дж/Тл
Атомна одиниця маси	а.о.м.	$\frac{m\left(^{12}C\right)}{12}$	$1{,}6605655\cdot10^{-27}$ кг
Маса спокою атома водороду (^{1}H)	m_H	–	$1{,}67355948\cdot10^{-27}$ кг = 1,007825036 а.о.м.
Маса спокою дейтерію (^{2}H)	m_d	–	$3{,}34454795\cdot10^{-27}$ кг = 2,014101795 а.о.м.
Маса спокою α-частинки (^{4}He)	m_α	–	$6{,}6465849\cdot10^{-27}$ кг = 4,002603267 а.о.м.
Число Авогадро	N_A	–	$6{,}022045\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$
Число Фарадея	F	$N_A\cdot e$	$9{,}648456\cdot10^{4}$ Кл/моль
Стала Больцмана	k	–	$1{,}380662\cdot10^{-23}$ Дж/К

Назва величини	Позначення	Рівняння	Значення величини
Універсальна газова стала	R	$k \cdot N_A$	8,31441 Дж/(моль·К)
Молярний об'єм ідеального газу за нормальних умов (T = 273,15 К, p = 101325 Па)	V_H	$\frac{R \cdot T}{p}$	$22{,}41383 \cdot 10^3$ м^3/моль
Число Лошмідта	N_L	$\frac{N_A}{V}$	$2{,}686754 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$
Стала Рідберга (для атома водороду $^1H_1$)	R	$\frac{m \cdot e^4}{8\varepsilon_0^2 \cdot h^3 \cdot c}$	$1{,}097373177 \cdot 10^7$ м$^{-1}$
Радіус першої боровської орбіти	α_0	$\frac{\varepsilon_0 \cdot h^2}{\pi \cdot e^2 \cdot m_e}$	$0{,}52917706 \cdot 10^{-10}$ м
Радіус електрона класичний	r_e	–	$2{,}817938 \cdot 10^{-15}$ м
Комптонівська длина хвилі електрона	λ_e	$\frac{h}{m_e \cdot c}$	$2{,}426311 \cdot 10^{-12}$ м
Магнітний момент електрона	μ_e	–	$9{,}284777 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл
Магнітний момент протону	μ_p	–	$1{,}410607 \cdot 10^{-26}$ Дж/Тл
Магнітний момент нейтрону	μ_n	–	$0{,}966237 \cdot 10^{-26}$ Дж/Тл
Гіромагнітне відношення протона	γ_p	–	$2{,}675221 \cdot 10^{-8}$ 1/(с·Тл)
Стала Стефана – Больцмана	σ	$\frac{2\pi^5 \cdot k^4}{15h^3 \cdot c^2}$	$5{,}67032 \cdot 10^8$ Вт/(м^2·К^4)
Стала першого закону Віна	c_1	$\frac{h \cdot c}{X \cdot k}$	$2{,}897790 \cdot 10^{-3}$ м·К
Стала другого закону Віна	c_2	$\frac{2p \cdot X^5 \cdot k^5}{h^4 \cdot c^3 \cdot \left(e^x - 1\right)}$	$1{,}28667 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м^3·К^5)
Енергія іонізації атома водороду	Ei	$\frac{m \cdot e^4}{8\varepsilon_0^2 \cdot h^2}$	$2{,}179907 \cdot 10^{-18}$ Дж = 1,360580 еВ
1 електронвольт	–	–	$1{,}6021892 \cdot 10^{-19}$ Дж
Абсолютний нуль температури	–	–	- 273,15 °С
Атмосфера нормальна	–	–	101325 Па
Потрійна точка води	–	–	273,16 К

Числова стала x = 4,96511423 є коренем трансцендентного рівняння $x \cdot e^x - 5(e^x - 1) = 0$.

Таблиця 2. Математичні сталі

π = 3,14159265	e = 2,71828183	lg$e$ = 0,434294482
1/π = 0,318309886	1/e = 0,367879441	ln10 = 2,30258509
π^2 = 9,86960440	e^2 = 7,38905610	ln2 = 0,693147181
$\sqrt{-\pi}$ = 1,77245385	$\sqrt{-e}$ = 1,64872127	1 рад = 57,30 °
$\sqrt[3]{-\pi}$ = 1,46459189	$\sqrt[3]{-e}$ = 1,39561243	1° = 0,0175 рад

Таблиця 3. Префікси для позначення похідних одиниць метричних систем, кратних і часткових головної одиниці

Префікс	**Множник**	**Скорочене позначення**		**Префікс**	**Множник**	**Скорочене позначення**	
укр.	**міжнар.**	**укр.**	**міжнар.**	**укр.**	**міжнар.**	**укр.**	**міжнар.**
дека	10	да	da	деци	10^{-1}	д	d
гекто	10^2	г	h	санти	10^{-2}	с	c
кіло	10^3	к	к	мілі	10^{-3}	м	m
мега	10^6	М	M	мікро	10^{-6}	мк	μ
гіга	10^9	Г	G	нано	10^{-9}	н	n
тера	10^{12}	Т	T	піко	10^{-12}	п	p
пета	10^{15}	П	P	фемто	10^{-15}	ф	f
екса	10^{18}	Е	E	атто	10^{-18}	а	a

Таблиця 4. Латинський алфавіт

Літери	**Назва**	**Літери**	**Назва**	**Літери**	**Назва**
Aa	а	Jj	йот	Ss	ес
Bb	бе	Kk	ка	Tt	те
Cc	це	Ll	ель	Uu	у
Dd	де	Mm	ем	Vv	ве
Ee	є	Nn	ен	Ww	дубль-ве
Ff	еф	Oo	о	Xx	ікс
Gg	ге	Pp	пе	Yy	ігрек
Hh	аш	Qq	ку	Zz	зет
Ii	і	Rr	ер		

Таблиця 5. Грецький алфавіт

Літери	Назва	Літери	Назва	Літери	Назва
Αα	альфа	Ιι	йота	Ρρ	ро
Ββ	бета	Κκ	каппа	Σσ, ς	сигма сігма
Γγ	гама	Λλ	лямбда	Ττ	тау
Δδ	дельта	Μμ	мю(мі)	Υυ	іпсилон
Εε	епсилон	Νν	ню (ні)	Φφ	фі
Ζζ	дзета	Ξξ	ксі	Χχ	хі
Ηη	ета	Οο	омікрон	Ψψ	псі
Θθ	тета	Ππ	пі	Ωω	омега

Таблиця 6. Одиниці вимірювання і розмірності фізичних величин

6.1. Основні одиниці СІ

Величина	**Одиниця**			
	найменування	**позначення**		
укр.		**міжнар.**	**символ**	
Довжина	метр	м	m	L
Маса	кілограм	кг	kg	M
Годину	секунда	с	s	T
Сила електричного струму	ампер	А	A	I
Термодинамічна температура	кельвін	К	K	Θ
Сила світла	кандела	кд	cd	J
Кількість речовини	моль	моль	mol	N

6.2. Додаткові одиниці СІ

Величина	**Одиниця**		
	найменування	**позначення**	
укр.		**міжнар.**	
Плоский кут	радіан	радий	rad
Тілесний кут	стерадіан	ср	sr

6.3. Внесистемні одиниці, їх зв'язок з одиницями СІ

Найменування величини укр.	**Одиниці вимірювання**			
	найменування	**позначення**		**співвідношення з одиницею СІ**
		міжнар.		
Довжина	мікрон	мк	μ	1 мк = 10^{-6} м
	ангстрем	Å	Å	1 Å = 10^{-10} м
	світловий рік	св. рік	ly	1 св. рік = $9{,}46 \cdot 10^{15}$ м
	парсек	пк	pc	1 пк = $3{,}09 \cdot 10^{16}$ м
	астрономічна одиниця	а.о.	AU	1 а.о. = $1{,}50 \cdot 10^{11}$ м
Маса	тонна	т	t	1 т = 10^{3} кг
	центнер	ц	q	1 ц = 100 кг
	атомна одиниця маси	а.о.м.	u	1 а.о.м. = $1{,}66 \cdot 10^{-7}$ кг
Година	хвилина	хв	min	1 хв = 60 с
	година	год	h	1 рік = 3600 с
	доба	доба	d	1 день = 86 400 с
Плоский кут	градус	.°	.°	$1° = \pi/180 = 1{,}75 \cdot 10^{-2}$ рад
	хвилина	.'	.'	$1' = \pi/108 \cdot 10^{-2} = 2{,}91 \cdot 10^{-4}$ рад
	секунда	."	."	$1'' = \pi/648 \cdot 10^{-3} = 4{,}85 \cdot 10^{-6}$ рад
Площа	ар	а	a	1 а = 10^{2} м^{2}
	гектар	га	ha	1 га = 10^{4} м^{2}
Об'єм	літр	л	L(l)	1 л = 10^{-3} м^{3}
Кут повороту	оберт	об	rev	1 об = 2π рад
Частота обертання (кутова швидкість)	оберт за секунду	об/с	rev/s	1 об/с=1 с$^{-1}$
	оберт за хвилину	об/хв	rev/min	1 об/хв = 0,0167 с$^{-1}$
Сила (вага)	кілограм-сила	кгс	kgf	1 кгс = 9,81 Н
	тонна-сила	тс	Tf, tf	1 тс = $9{,}81 \cdot 10^{3}$ Н
Робота	ват-год	Вт-год	Wh	1 Вт-год = $3{,}6 \cdot 10^{3}$ Дж
Енергія	електрон-вольт	еВ	eV	1 еВ = $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Дж
Теплота	калорія	кал	cal	1 кал = 4,19 Дж

Найменування величини укр.	Одиниці вимірювання			
	найменування	позначення		співвідношення з одиницею СІ
		міжнар.		
Потужність	кінська сила	к. с.	h. p.	1 к. с. = 735,5 Вт
Тиск	бар	бар	bar	1 бар = 10^5 Па
	міліметр ртутного столбика	мм рт. ст.	mm Hg	1 мм рт.ст. = 133,3224 Па
	торр	Торр	Torr	1 Торр = 1/760 атм = 133,3224 Па
	міліметр водяного столбика	мм вод. ст.	mm H_2O	1мм вод. ст. = 9,81 Па
	стандартна атмосфера	атм	atm	1 атм = $1{,}01325 \cdot 10^5$ Па
	кілограм-сила на квадратний сантиметр	кгс/см^2	kgf/cm^2	1 кгс/см^2 = $9{,}81 \cdot 10^4$ Па
	технічна атмосфера	ат	at	1 ат = $9{,}81 \cdot 10^4$ Па
Температура	градус Цельсія	°С	°C	1°С = 1 К
Логарифмічна величина	бел	Б	B	-
	децибел	дБ	dB	-
Напруження (механічне)	кілограм-сила на квадратний міліметр	кгс/мм^2	kgf/mm^2	1 кгс/мм^2 = $9{,}81 \cdot 10^6$ Па
Напруженість магнітного поля	ерстед	Е	Oe	1 Е = 79,5775 А/м
Доза випромінювання	рад	рад	rad	1 рад = 0,01 Дж/кг
Потужність дози випромінювання	рад за секунду	рад/с		1 рад/с=0,01 Вт/кг
Експозиційна доза	рентген	Р	R	1 Р = $2{,}58 \cdot 10^{-4}$ Кл/кг
Активність ізотопу	кюрі	Кі	Ci	1 Кі = $3{,}700 \cdot 10^{10}$ с$^{-1}$
Відносна величина	відсоток	%	%	1% = 10^{-2}
	мільйонна частка	млн$^{-1}$	mln^{-1}	1 млн$^{-1}$ = 10^{-6}

6.4. Похідні одиниці СІ, що мають власні найменування

Величина укр.	**Одиниця**			**Вираження похідної одиниці**	
	найменування	**позначення**		**через інші одиниці СІ**	**через основні та додаткові одиниці СІ**
		міжнар.			
Частота	герц	Гц	Hz	-	$с^{-1}$
Рівень інтенсивності звуку, звукового тиску	бел, децибел	Б, дБ	B, dB	1	1
Сила, вага	ньютон	Н	N	$м·кг·с^{-2}$	$м·кг·с^{-2}$
Тиск, механічне напруження, модуль пружності.	паскаль	Па	Pa	$Н/м^2$	$м^{-1}·кг·с^{-2}$
Енергія, робота, кількість теплоти	джоуль	Дж	J	Н·м	$м^2·кг·с^{-2}$
Потужність, потік енергії	ват	Вт	W	Дж/с	$м^2·кг·с^{-3}$
Електричний заряд	кулон	Кл	C	А·с	А·с
Електрична напруга, електричний потенціал, електрорушійна сила	вольт	В	V	Вт/А	$м^2·кг·с^{-3}·А^{-1}$
Електрична ємність	фарада	Ф	F	Кл/В	$м^{-2}·кг^{-1}·с^4·А^2$
Електричний опір	ом	Ом	Ω	В/А	$м^2·кг·с^{-3}·А^{-2}$
Електрична провідність	сименс	См	S	$Ом^{-1}$	$м^{-2}·кг^{-1}·с^3·А^2$
Магнітний потік, потік магнітної індукції	вебер	Вб	Wb	В·с	$м^2·кг·с^{-2}·А^{-1}$
Магнітна індукція, густина магнітного потоку	тесла	Тл	T	$Вб/м^2$	$кг·с^{-2}·А^{-1}$
Індуктивність	генрі	Гн	H	Вб/А	$м^2·кг·с^{-2}·А^{-2}$
Оптична сила	діоптрія	дптр	D	$м^{-1}$	$м^{-1}$
Світловий потік	люмен	лм	lm	кд·ср	кд·ср
Освітленість	люкс	лк	lx	$лм/м^2$	$кд·ср·м^{-2}$
Активність радіоактивного джерела	беккерель	Бк	Bq	$с^{-1}$	$с^{-1}$
Поглинена доза	грей	Гр	Gy	Дж/кг	$м^2·с^{-2}$
Еквівалентна доза	зиверт	Зв	Sv	Дж/кг	$м^2·с^{-2}$

6.5. Одиниці вимірювання і розмірності основних величин у системі СІ

6.5.1. Одиниці простору і часу

Розмір укр.	Символ міжнар.	Позначення одиниці		Розмірність у СІ
Довжина	*l*	м	m	м
Час	*t*	с	s	с
Площа	*S*, A	$м^2$	m^2	$м^2$
Об'єм	*V*	$м^3$	m^3	$м^3$
Кутова швидкість	ω	рад/с	rad/s	$с^{-1}$
Кутове прискорення	ε	$рад/с^{-2}$	rad/s^{-2}	$с^{-2}$
Швидкість	v	м/с	m/s	м/с
Прискорення	*a*	$м/с^{-2}$	m/s^{-2}	$м/с^{-2}$

6.5.2. Одиниці періодичних величин і пов'язаних з ними характеристик

Величина укр.	Символ міжнар.	Позначення одиниці		Розмірність у СІ
Частота	ν, n, f	Гц	Hz	$с^{-1}$
Кругова частота	ω	рад/с	rad/s	рад/с
Період	*T*	с	s	с
Довжина хвилі	λ	м	m	м
Хвильове число	σ	$м^{-1}$	m^{-1}	$м^{-1}$
Кругове хвильове число	*k*	рад/м	rad/m	рад/м
Фазова швидкість, швидкість звуку	c, v	м/с	m/s	м/с
Коефіцієнт загасання	β	$с^{-1}$	$с^{-1}$	$с^{-1}$
Логарифмічний декремент згасання	λ	1	1	1
Звуковий тиск	*p*	Па, $Н/м^2$	Pa, N/m^2	$кг/(м·с^2)$
Інтенсивність звуку	I	$Вт/м^2$	W/m^2	$кг/с^3$
Рівень інтенсивності звуку	$L_Б$, $L_{дБ}$	Б, дБ	B, dB	1
Уровень звукового тиску	$L_Б$, $L_{дБ}$	Б, дБ	B, dB	1
Гучність	E	фон	phon	1

6.5.3. Механічні одиниці

Величина укр.	Символ міжнар.	Позначення одиниці		Розмірність у СІ
Маса	m	кг	kg	кг
Момент інерції	I, J	кг·м^2	kg·m^2	кг·м^2
Густина	ρ	кг/м^3	kg/m^3	кг/м^3
Питома вага	γ	Н/м^3	N/m^3	кг/(м^2·с^2)
Питомий об’єм	ν	м^3/кг	m^3/kg	м^3/кг
Імпульс	P	кг·м / с	kg·m/s	м·кг/с
Сила	F	Н	N	м·кг/с^2
Імпульс сили	I	Н·с	N·s	м·кг/с
Момент імпульсу	L	кг·м^2/с	kg·m^2/s	м^2·кг/с
Момент сили, момент парі сил, обертаючий момент	M	Н·м	N·m	м^2·кг/с^2
Імпульс моменту сили	H	Н·м·с	N·m·s	м^2·кг/с
Тиск	p	Па, Н/м^2	Pa, N/m^2	кг/(м·с^2)
Нормальне напруження	σ	Па, Н/м^2	Pa, N/m^2	кг/(м·с^2)
Дотичне напруження	τ	Па, Н/м^2	Pa, N/m^2	кг/(м·с^2)
Модуль лінійного розтягування (модуль Юнга)	E	Па, Н/м^2	Pa, N/m^2	кг/(м·с^2)
Модуль зсуву	G	Па, Н/м^2	Pa, N/m^2	кг/(м·с^2)
Модуль різнобічного стиснення	K	Па, Н/м^2	Pa, N/m^2	кг/(м·с^2)
Енергія	E	Дж	J	м^2·кг/с^2
Робота	A, W	Дж	J	м^2·кг/с^2
Кінетична енергія	$E_{кін}$, T	Дж	J	м^2·кг/с^2
Потенційна енергія	$E_{пот}$, U	Дж	J	м^2·кг/с^2
Об'ємна густина енергії	w	Дж/м^3	J/m^3	кг/(м·с^2)
Потужність	P, N	Вт	W	м^2·кг/с^3
Коефіцієнт корисної дії (КПД)	η	1	1	1
Коефіцієнт динамічної в'язкості (коефіцієнт внутрішнього тренія)	η	Па·с	Pa·s	кг/(м·с)
Коефіцієнт кінематичної в'язкості	ν	м^2/с	m^2/s	м^2/с
Коефіцієнт поверхневого натягу	σ	Н/м; Дж/м^2	N/m; J/m^2	кг/с^2

6.5.4. Одиниці молекулярної фізики

Величина укр.	Символ міжнар.	Позначення одиниці		Розмірність у СІ
Ат. н.	Z	1	1	1
Відносна ат. м.	A_r	1	1	1
Відносна мол. м.	M_r	1	1	1
Молярна маса	M	кг/моль	kg/mol	кг/моль
Молярний об'єм	V_m	м^3/моль	m^3/mol	м^3/моль
Об'ємна концентрація молекул або частинок	n	м$^{-3}$	m^{-3}	м$^{-3}$
Масова концентрація речовини	ρ	кг/м^3	kg/m^3	кг/м^3
Молярна концентрація речовини	c	моль/м^3	mol/m^3	моль/м^3
Моляльність	b, m	моль/кг	mol/kg	моль/кг
Густина	ρ	кг/м^3	kg/m^3	кг/м^3
Найбільш вірогідна швидкість	$v_{вір}$	м/с	m/s	м/с
Середня арифметична швидкість	<v>	м/с	m/s	м/с
Середня квадратична швидкість	$v_{с.к.}$	м/с	m/s	м/с
Середня довжина вільного пробігу	λ	м	m	м
Коефіцієнт дифузії	D	м^2/с	m^2/s	м^2/с
Коефіцієнт внутрішнього тертя (коефіцієнт в'язкості)	η	Па·с	Pa·s	кг/(м·с)

6.5.5. Теплові одиниці

Величина укр.	Символ міжнар.	Позначення одиниці		Розмірність у СІ
Температура	T	К	K	К
Температура за Цельсієм	t,θ	°С	°C	°С
Градієнт температури	dT/dx	К/м	K/m	К/м
Температурний коефіцієнт лінійного розширення	α_l	К$^{-1}$	K^{-1}	К$^{-1}$
Температурний коефіцієнт об'ємного розширення	α_V, α	К$^{-1}$	K^{-1}	К$^{-1}$
Теплота, кількість теплоти	Q	Дж	J	м^2·кг/с^2
Питома теплота випаровування	r	Дж/кг	J/kg	м^2/с^2
Питома теплота плавлення	λ	Дж/кг	J/kg	м^2/с^2

Величина укр.	Символ міжнар.	Позначення одиниці		Розмірність у СІ
Тепловий потік	Ф	Вт	W	$м^2·кг/с^3$
Поверхнева густина теплового потоку	Q, φ	$Вт/м^2$	W/m^2	$кг/с^3$
Коефіцієнт теплопровідності	к	Вт/(м·К)	W/(m·K)	$м·кг/(с^3·К)$
Коефіцієнти тепловіддачі та теплопередачі	K	$Вт/(м^2·К)$	$W/(m^2·K)$	$кг/(с^3·К)$
Коефіцієнт температуропровідності|	a	$м^2/с$	m^2/s	$м^2/с$
Термічний опір	R	К/Вт	K/W	$К·с^3/(м^2·кг)$
Теплоємність	C	Дж/К	J/K	$м^2·кг/(с^2·К)$
Питома (масова) теплоємність	c	Дж/(кг·К)	J/(kg·K)	$м^2/(с^2·К)$
Молярна теплоємність	C_μ	Дж/(моль·К)	J/(mol·K)	$м^2·кг/(с^2·К·моль)$
Питома теплоємність при сталому об'ємі	C_V	Дж/(кг·К)	J/(kg·K)	$м^2/(с^2·К)$
Питома теплоємність при сталому тиску	C_p	Дж/(кг·К)	J/(kg·K)	$м^2/(с^2·К)$
Молярна теплоємність при сталому об'ємі	$C_{V\mu}$	Дж/(моль·К)	J/(mol·K)	$м^2·кг/(с^2·К·моль)$
Молярна теплоємність при сталому тиску	$C_{p\mu}$	Дж/(моль·К)	J/(mol·K)	$м^2·кг/(с^2·К·моль)$
Показник адіабати	γ	1	1	1
Ентропія	S	Дж/К	J/K	$м^2·кг/(с^2·К)$
Енергія	E	Дж	J	$м^2·кг/с^2$
Внутрішня енергія	U	Дж	J	$м^2·кг/с^2$
Ентальпія	H	Дж	J	$м^2·кг/с^2$
Вільна енергія Гельмгольця	F	Дж	J	$м^2·кг/с^2$
Вільна енергія Гіббса	G	Дж	J	$м^2·кг/с^2$
Хімічний потенціал	μ	Дж/моль	J/mol	$м^2·кг/(с^2·моль)$
Електрохімічний потенціал	$\mu\sim$	Дж/моль	J/mol	$м^2·кг/(с^2·моль)$

6.5.6. Електричні та магнітні одиниці

Величина укр.	Символ міжнар.	Позначення одиниці		Розмірність у СІ
Електричний заряд	q	Кл	C	А·с
Лінійна густина заряду	τ	Кл/м	C/m	А·с/м
Поверхня густина заряду	σ	Кл/м^2	C/m^2	А·с/м^2
Об'ємна густина заряду	ρ	Кл/м^3	C/m^3	А·с/м^3
Напруженість електричного поля	E	В/м	V/m	м·кг/(А·с^3)
Електрична індукція	D	Кл/м^2	C/m^2	А·с/м^2
Електрична стала	ε_0	Ф/м	F/m	А^2·с^4/(м^3·кг)
Абсолютна діелектрична проникність	ε_a, ε	Ф/м	F/m	А^2·с^4/(м^3·кг)
Відносна діелектрична проникність	ε, ε_r	1	1	1
Потік електричної індукції	Ψ	Кл	C	А·с
Електричний потенціал	φ	В	V	м^2·кг/(А·с^3)
Напруга, різниця потенціалів	U, $\Delta\varphi$	В	V	м^2·кг/(А·с^3)
Електрорушійна сила (ЕРС)	ε	В	V	м^2·кг/(А·с^3)
Електроємність	C	Ф	F	А^2·с^4/(м^2·кг)
Електричний дипольний момент	p	Кл·м	C·m	А·с·м
Вектор поляризації (поляризованість)	P	Кл/м^2	C/m^2	А·с/м^2
Діелектрична сприйнятливість	χ	1	1	1
Сила струму. Густина	I	А	A	А
Густина струму	J	А/м^2	A/m^2	А/м^2
Електричний опір	R	Ом	Ω	м^2·кг/(А^2·с^3)
Електрична провідність	σ	См	S	А^2·с^3/(м^2·кг)
Питомий електричний опір	ρ	Ом·м	Ω·m	м^3·кг/(А^2·с^3)
Питома електрична провідність	γ, σ	См/м	S/m	А^2·с^3/(м^3·кг)
Рухливість іонів	b	м^2/В·с	m^2/(V·s)	А·с^2/кг
Напруженість магнітного поля	H	А/м	A/m	А/м
Магнітна стала	μ_0	Гн/м	H/m	м·кг/(А^2·с^2)
Абсолютна магнітна проникність	μ_a, μ	Гн/м	H/m	м·кг/(А^2·с^2)
Відносна магнітна проникність	μ, μ_r	1	1	1
Магнітна індукція	B	Тл	T	кг/(А·с^2)
Магнітний потік	Φ	Вб	Wb	м^2·кг/(А·с^2)

Величина укр.	Символ міжнар.	Позначення одиниці		Розмірність у СІ
Магнітний момент	p_m	А·м^2	A·m^2	А·м^2
Вектор інтенсивності намагнічення (намагніченість)	M	А/м	A/m	А/м
Індуктивність і взаємна індуктивність	L	Гн	H	м^2·кг/(А^2·с^2)
Магнітна сприйнятливість	к, χ	1	1	1
Магніторушійна сила	F	А	A	А
Магнітний опір	R_m	А/Вб	A/Wb	А^2·с^2/(м^2·кг)
Ємнісний опір	X_C	Ом	Ω	м^2·кг/(А^2·с^3)
Індуктивний опір	X_L	Ом	Ω	м^2·кг/(А^2·с^3)
Імпеданс, повний електричний опір	Z	Ом	Ω	м^2·кг/(А^2·с^3)
Добротність	Q	1	1	1
Об'ємна густина енергії електромагнітного поля	w	Дж/м^3	J/m^3	кг/(м·с^2)
Вектор Пойнтинга	I, S	Вт/м^2	W/m^2	кг/с^3

6.5.7. Оптичні одиниці

Величина укр.	Символ міжнар.	Позначення одиниці		Розмірність у СІ
Сила світла	J	кд	cd	кд
Світловий потік	Ф	лм	lm	кд·ср
Освітленість	E	лк	lx	кд·ср·м$^{-2}$
Спектральна об'ємна густина енергії випромінювання (при даній довжині хвилі)	W_f	Дж/м^4	J/m^4	кг/(м^2·с^2)
Потужність випромінювання, потік енергії випромінювання	P, Φ	Вт	W	м^2·кг/с^3
Густина потоку енергії випромінювання	φ, ψ	Вт/м^2	W/m^2	кг/с^3
Енергетична світимість	Re	Вт/м^2	W/m^2	кг/с^3
Спектральний коефіцієнт поглинання	$\alpha(\lambda)$	1	1	1
Спектральний коефіцієнт відбиття	$\rho(\lambda)$	1	1	1
Спектральний коефіцієнт пропускання	$\tau(\lambda)$	1	1	1
Спектральний коефіцієнт енергетичної яскравості	$\beta(\lambda)$	1	1	1
Оптична густина	D	1	1	1

Величина укр.	Символ міжнар.	Позначення одиниці		Розмірність у СІ
Натуральний (лінійний) показник послаблення	μ, μ_i	$м^{-1}$	m^{-1}	$м^{-1}$
Коефіцієнт поглинання	α	$м^{-1}$	m^{-1}	$м^{-1}$
Молярний показник поглинання	ε	$м^2$/моль	m^2/mol	$м^2$/моль
Абсолютний показник заломлення	n	1	1	1
Відносний показник заломлення	n_{ij}	1	1	1
Фокусна відстань	f	м	m	м
Оптична сила лінзb	D	дптр	D	$м^{-1}$
Кут повороту площини поляризації	α	рад	rad	рад
Молярна оптична обертальна здатність	α_n	рад·$м^2$/моль	rad·m^2/mol	рад·$м^2$/моль
Питома (масова) оптична обертальна здатність розчину	α_m, $[\alpha]$	рад·$м^2$/кг	rad·m^2/kg	рад·$м^2$/кг

6.5.8. Одиниці атомної та ядерної фізики

Величина укр.	Символ міжнар.	Позначення одиниці		Розмірність у СІ
Атомний номер (ат. н.)	Z	1	1	1
Число нейтронів	N	1	1	1
Масове число, число нуклонів	A	1	1	1
Магнітний момент частинки або ядра	μ	А·$м^2$	А·m^2	А·$м^2$
Гіромагнітне відношення	γ	А·$м^2$/(Дж·с)	А·m^2/(J·s)	А·с/кг
g–Фактор атома або електрона	g	1		1
g–Фактор ядра чи ядерної частинки	g	1	1	1
Кутова частота Лармора	ω_L	рад/с	rad/s	рад/с
Кутова частота прецесії	ω_N	$с^{-1}$	s^{-1}	$с^{-1}$
Циклотронна кутова частота	ω_C	рад/с	rad/s	рад/с
Орбітальне квантове число	l_i, L	1	1	1
Спінове квантове число	s_i, S	1	1	1
Спін	S	Дж·с	J·s	кг·$м^2$/с
Квантове число повного моменту імпульсу	j_i, J	1	1	1
Квантове число ядерного спіну	I	1	1	1

Величина укр.	Символ міжнар.	Позначення одиниці		Розмірність у СІ
Головне квантове число	n	1	1	1
Магнітне квантове число	m, M	1	1	1
Дефект маси	Δm	кг	kg	кг
Середній час життя (радіонукліда)	τ	с	s	с
Активність (радіонукліда у джерелі)	A	Бк	Bq	$с^{-1}$
Стала радіоактивного розпаду (радіонукліда)	λ	$с^{-1}$	s^{-1}	$с^{-1}$
Період напіврозпаду радіонукліда	$T_{½}$	с	s	с

6.5.9. Одиниці ядерних реакцій та іонізуючого випромінювання

Величина укр.	Символ міжнар.	Позначення одиниці		Розмірність у СІ
Переріз взаємодії	σ	$м^2$	m^2	$м^2$
Лінійний коефіцієнт послаблення	μ, μ_l	$м^{-1}$	m^{-1}	$м^{-1}$
Масовий коефіцієнт послаблення	μ_m	$м^2$/кг	m^2/kg	$м^2$/кг
Молярний коефіцієнт послаблення	μ_c	$м^2$/моль	m^2/mol	$м^2$/моль
Атомний коефіцієнт послаблення	μ_a, $\mu_{ат}$	$м^2$	m^2	$м^2$
Шар половинного послаблення	$d_{1/2}$	м	m	м
Середній лінійний пробіг частинки	R, R_l	м	m	м
Лінійна густина іонізації	N_{il}	$м^{-1}$	m^{-1}	$м^{-1}$
Середня тривалість пробігу	l, λ	м	m	м
Експозиційна доза	$D_{екс}$	Кл/кг	C/kg	А·с/кг
Потужність експозиційної дози	$P_{екс}$	Кл/(кг·с)	C/(kg·s)	А/кг
Поглинена доза	$D_{пог}$	Гр	Gy	$м^2/с^2$
Потужність поглиненої дози	$P_{пог}$	Гр/с	Gy/s	$м^2/с^3$
Еквівалентна доза	H	Зв	Sv	$м^2/с^2$
Потужністьеквівалентної дози	H	Зв/с	Sv/s	$м^2/с^3$

6.6. Температурні шкалі

6.6.1. Співвідношення між одиницями (градусами) різних шкал

Одиниця	**К**	**°С**	**°F**	**°Ra**	**°R**
Кельвін, К	1	1	1,8	1,8	0,8
Градус Цельсія, °С	1	1	1,8	1,8	0,8
Градус Фаренгейта, °F	0,556	0,556	1	1	0,445
Градус Ренкіна, ° Ra	0,556	0,556	1	1	0,445
Градус Реомюра, °R	1,25	1,25	2,25	2,25	1

6.6.2. Співвідношення між значеннями температури у різних шкалах

Температура	Еквівалент за шкалою	
Цельсія	Кельвіна	
X °C (шкала Цельсія)	X °C	(X + 273,15) К
X °R (шкала Реомюра)	5/4X °C	5/4X + 273,15 К
X °f (шкала Фаренгейта)	5/9(X - 32) °C	5/9X + 255,38 К
X ° Ra (шкала Ренкіна)	5/9X - 273,15 °C	5/9X К
X К (шкала Кельвіна)	(X - 273,15) °C	X К

Список використаної літератури

1. Автоматизація виробничих процесів [Електронний ресурс] : навчально-методичний посібник / уклад. : В.В. Тичков, Р.В. Трембовецька, К.В. Базіло ; М-во освіти і науки України, Черкаси. держ. технол. ун-т. – Черкаси: ЧДТУ, 2016. – 142 с.

http://elib.chdtu.edu.ua/e-books/3209

2. Автоматизація виробничих процесів. Дифузійні процеси (обладнання для сушіння) [Електронний ресурс] : навчально-методичний посібник для практичних робіт для здобувачів освітнього ступеня «бакалавр» галузей знань 15 «Автоматизація та приладобудування» та 18 «Виробництво та технології» усіх форм навчання / упоряд. : В.В. Тичков, В.Я. Гальченко, Р.В. Трембовецька, З.В. Бондарчук; М-во освіти і науки України, Черкаси. держ. технол. ун-т. – Черкаси: ЧДТУ, 2018. – 179 с.

http://elib.chdtu.edu.ua/e-books/3018

3. Автоматизація виробничих процесів. Технічні засоби автоматизації. Навчально-методичний посібник з практичних робіт для здобувачів освітнього ступеня «бакалавр» галузі знань 15 «Автоматизація та приладобудування» та 18 «Виробництво та технології» всіх форм навчання [Електронний ресурс] / упоряд.: В.В. Тичков, В.Я. Гальченко, Р.В. Трембовецька, К.В. Базіло; М-во освіти та науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси: ЧДТУ, 2020. – 322 с.

http://elib.chdtu.edu.ua/e-books/3512

4. Конспект лекцій з навчальної дисципліни «Процеси та апарати харчового виробництва» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня зі спеціальності 133 Відділове машинобудування за освітньо-професійною програмою «Галузеве машинобудування»./Укл.: Білоус О.І. – Кам'янське: ДДТУ, 2019р. - 67с.

http://www.dstu.dp.ua/Portal/Data/1/3/1-3-kl27.pdf

5. Потапов В.О. Моделювання технологічних процесів харчових виробництв. Навчальний посібник: – Х.: ХДУХТ, 2008 – 148 с.

https://elib.hduht.edu.ua/bitstream/123456789/1690/1/н.п.%20Моделювання.pdf

6. Виробничі процеси та обладнання об'єктів автоматизації [Текст]: Підручник для студентів вищих навчальних закладів/І. Ш. Нелюдів. Кривий Ріг: Криворізький коледж НАУ, 2017р. - 444 с.

https://openarchive.nure.ua/bitstream/document/9556/3/Pidruchnyk.PDF

7. Проць Я.І., Данилюк О.А., Лобур Т.Б. Автоматизація неперервних технологічних процесів. Навчальний посібник для технічних спеціальностей вищих навчальних закладів. – Тернопіль: ТДТУ ім. І.Пулюя, 2008. - 239с.

http://elartu.tntu.edu.ua/bitstream/123456789/789/1/Texbook-Prots_Daniluk_Lobur-Automation_of_continuous_manufacturing_processes__2008.pdf

8. Навчальний посібник „Обладнання автоматизованого виробництва“ „Сучасні тенденції розвитку систем автоматизації“ для поглибленого вивчення дисципліни. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 131 „Прикладна механіка“, спеціалізації „Технології комп'ютерного конструювання верстатів, роботів та машин“; КПІ ім. Ігоря Секорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 5.65Мбайт). -Київ: КПІім. Ігоря Секорського, 2020. – 260 с.
https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/31516/1/Oblad_avt_vyrob_TENDENTSII.pdf

9. Автоматизація виробничих процесів: підручник / О.І. Черевко, Л.В. Кіптела, В.М. Михайлов та ін.; Харків. держ. ун-т харч. та торгівлі. - Харків: ХДУХТ, 2014. - 186 с.
https://elib.hduht.edu.ua/bitstream/123456789/1539/1/Реп.ек.229030%20Підручник%20Автоматизація%20orig.pdf

10. Ловейкін В.С. Теорія технічних систем/В.С. Ловейкін, Ю.О. Ромасевич. - К.: ЦП "КОМПРИНТ", 2017. - 291 с.
https://nubip.edu.ua/sites/default/files/u132/teoriya_tehnichnih_sistem_loveykin_romasevich.pdf

11. Основи теорії подібності та аналізу розмірностей та їх застосування у завданнях механіки: Навчальний посібник / Упорядники: Т.Ю.Кепіч та О.Г.Куценко - К., 2004.
http://www.mechmat.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2018/03/otparm.pdf

12. Ропай В.А. Методичні вказівки до самостійних робіт студентів за дисципліною «Методи подібності та розмірності у механіці», що навчаються за освітньою програмою «Промислова естетика та сертифікація виробничого обладнання» спеціальності 132 «Матеріалознавство» / В.А. Ропай, - Нац. техн. ун-т "Дніпровська політехніка". - Д. НТУ "ДП", 2019. - 12 с. https://btpm.nmu.org.ua/ua/download/metod/132%20Метод%20вказ%20МПРМ.pdf

13. Поперечний О. М., Потапов В. О., Корнійчук В. Г. Моделювання процесів та обладнання харчових виробництв. Підручник. – К.: Центр учбової літератури, 2012. – 312 с.

14. ДСТУ ISO 80000-1:2016 Величини та одиниці. Частина 1. Загальні положення (ISO 80000-1:2009; ISO 80000-1:2009/Cor.1:2011, IDT).

15. Ткаченко С. Й. Нові аспекти застосування теорії подібності у теплотехнічних розрахунках систем біоконверсії [Електронний ресурс] / С. Й. Ткаченко, Н. В. Резидент // Наукові праці ВНТУ. - 2009. - №2.
http://www.nbuv.gov.ua/old_jrn/e-journals/VNTU/2009-2/2009-2.files /uk /09sjtobs_ua.pdf

16. Особливості застосування газодинамічної теорії подібності у процесі калібрування та повірки лічильників природного газу / М. П. Андріїшин, О. М. Чернишенко, О. В. Едель // Нафтогазова галузь України. – 2015. – № 6. – С. 33-36.
http://elar.nung.edu.ua/handle/123456789/291

17. Процеси та апарати. Механічні та гідромеханічні процеси: Підручник / В.С. Бойко, К.О. Самойчук, В.Г. Тарасенко, В.О. Верхоланцева, Н.О. Паляничка, Є.В. Михайлов, О.О. Червоткіна Мелітополь:, 2021. 445 с.
http://elar.tsatu.edu.ua/bitstream/123456789/14736/1/Підручник%20Процеси%20в%20репозитарій.pdf
18. ДСТУ IEC 60050-112:2018 Міжнародний електротехнічний словник. Частина 112. Величини та одиниці (IEC 60050-112:2010, IDT)
19. ДСТУ ISO 80000-9:2016 Величини та одиниці. Частина 9. Фізична хімія та молекулярна фізика (ISO 80000-9:2009; ISO 80000-9:2009/Amd. 1:2011, IDT)
20. ДСТУ 2681-94 Метрологія. Терміни та визначення. З поправкою
21. ДСТУ ISO 80000-3:2016 Величини та одиниці. Частина 3. Простір та година (ISO 80000-3:2006, IDT)
22. ДСТУ ISO 80000-5:2016 Величини та одиниці. Частина 5. Термодинаміка (ISO 80000-5:2007, IDT)
23. ДСТУ ISO 80000-8:2016 Величини та одиниці. Частина 8. Акустика (ISO 80000-8:2007, IDT)
24. ДСТУ ISO 80000-11:2016 Величини та одиниці. Частина 11. Характеристики (ISO 80000-11:2008, IDT)
25. ДСТУ ISO 80000-12:2016 Величини та одиниці. Частина 12. Фізика твердого тіла (ISO 80000-12:2009, IDT)
26. ДСТУ IEC 80000-13:2016 Величини та одиниці. Частина 13. Інформатика та інформаційні технології (IEC 80000-13:2008, IDT)
27. ДСТУ IEC 80000-14:2016 Величини та одиниці. Частина 14. Телебіометрія, що стосується фізіології людини (IEC 80000-14:2008, IDT)
28. ДСТУ ISO 80000-7:2016 Величини та одиниці. Частина 7. Світло (ISO 80000-7:2008, IDT)
29. ДСТУ IEC 80000-6:2016 Величини та одиниці. Частина 6. Електромагнітні явища (IEC 80000-6:2008, IDT)
30. Гальченко В.Я. Популяційні метаевристичні алгоритми оптимізації роєм частинок: Навчальний посібник/В.Я. Гальченко, О.М. Якимів. - Черкаси: ФОП Третяков О.М., 2015. - 160 с.
31. Гальченко В.Я. Лінійні задачі оптимізації. MathCAD – практикум: Навчальний посібник / В.Я. Гальченко, Р.В. Трембовецька. - Черкаси: ФОП Третяков О.М., 2016. - 116 с.
32. Гальченко В.Я. Нелінійні задачі оптимізації. MathCAD – практикум: Навчальний посібник / В.Я. Гальченко, Р.В. Трембовецька. - Черкаси: ФОП Третяков О.М., 2017. - 167 с.
33. Гальченко В.Я. MathCAD: математичні методи та інструментальні засоби оптимізації. Навчальний посібник/В.Я. Гальченко, Р.В. Трембовецька. - Черкаси: ПП Гордієнко Є.І., 2018. - 516 с.
34. Гальченко В. Я., Трембовецька Р. В., Тичков В. В. Накладні вихрострумові перетворювачі з однорідною чутливістю. – Харків: СД НТМ «Новий курс». – 2021. – 280 с.