

УДК 519.876.5

[0000-0003-1741-9329] **Д. В. Тичков,**

e-mail: dmytro.tychkov@gmail.com

[0000-0002-5927-0326] **М. О. Бондаренко, д-р техн. наук, професор**Черкаський державний технологічний університет МОН України  
б-р Шевченка, 460, м. Черкаси, 18006, Україна

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СТАТИЧНИХ ТА КВАЗИСТАТИЧНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ ПОЛІВ НАДМАЛОЇ ПОТУЖНОСТІ ПІД ПОЛІЕЛЕКТРОДНИМ ЦИЛІНДРИЧНИМ ДАВАЧЕМ

*У статті наводяться результати математичного моделювання статичних та квазі-статичних електричних полів надмалої потужності, яке проводиться шляхом розв'язання системи аналітичних рівнянь, що базуються на диференціальних рівняннях Лапласа. Особливістю цієї моделі є те, що в ній враховується динаміка зміни електричного поля та його розмірів у процесі сканування останнього поліелектродним циліндричним давачем, а також вплив зовнішніх кліматичних факторів (температури, відносної вологості) та електромеханічний вплив з боку досліджуваної поверхні. На основі проведеного аналітичного моделювання складено комп'ютерну модель, в основу якої покладено метод скінченних елементів, а програмне забезпечення моделі створено на об'єктно-орієнтованій мові програмування Python 3.10. Розроблена модель дозволяє з високою точністю (розбіжність між даними математичної та аналітичної моделей не більша 2,15 %, а з експериментально отриманими даними – не перевищує 7,15 %), а також у режимі реального часу будувати графіки розподілу напруженості електричного поля та електричного заряду, а також визначати діапазони параметрів цих полів, дотримання яких не призводить до електричного пробою.*

**Ключові слова:** математична модель, аналітичне рівняння, поліелектродний циліндричний давач, електричне поле, напруженість, електричний заряд.

**Вступ.** Перспективи застосування мікроелектронних технологій, що набули значного розвитку останнім часом, пов'язані з перевагами сучасних схмотехнічних рішень, які реалізуються з використанням таких технологій: високі технологічність, продуктивність, екологічність та економічність, а також можливість інтегрування з іншими спорідненими технологіями точного приладобудування та мікросхмотехніки [1]. Проте, незважаючи на усі переваги вищезазначених технологій, а також виробів, що виготовляються за їх допомогою, основною перешкодою до подальшого удосконалення таких виробів є зменшення їх масово-габаритних характеристик.

Наслідками такого зменшення габаритів електронних схем та пристроїв на їх основі разом із застосуванням специфічних матеріалів (сегнето-, п'єзоелектриків, електретів, метаматеріалів тощо) і під впливом зовнішніх кліматичних (температура, вологість) та електромеханічних чинників є виникнення та накопичення в матеріалах цих пристроїв електричних зарядів і полів, створених ними [2]. Ці електричні поля, з одного боку, є необхідним

фізичним явищем, що має місце для будь-яких електричних пристроїв, і полягають у забезпеченні основних їх функцій (електричної ємності, елементів оперативної пам'яті тощо), проте, з другого боку, можуть мати негативні впливи як на елементи таких пристроїв, так і на елементи, які взаємодіють з такими електронними пристроями ззовні, наприклад, електростатичне притягання мікрочастинок атмосферної вологи та пилу, в результаті чого зменшуються якість та швидкість передавання електричного сигналу (особливо високочастотного), охолоджувальна та електропровідна здатність компонентів схем, а також виникає можливість електростатичного пробою, що спричиняє електромеханічне руйнування електронних мікроелементів і введення їх, як наслідок, з ладу [3].

При цьому залучення існуючих методів та засобів вимірювання електричних полів надмалої потужності, які мають місце на поверхнях пристроїв мікроелектроніки, обмежене відсутністю належного математичного апарату, що дозволило б з достатньою точністю, швидкодією та надійністю визначати ос-

новні силові й енергетичні характеристики досліджуваних електричних полів.

Тому питання аналітичного та комп'ютерного моделювання статичних і квазістатичних електричних полів надмалої потужності на поверхнях матеріалів різної провідності пристроїв мікроелектроніки під поліелектродним циліндричним давачем з високою точністю та швидкодією, а також можливістю інтегрування такого математично-програмного забезпечення в апаратну базу інформаційно-вимірювального устаткування є актуальним.

**Аналіз наявних досліджень.** Дослідженнями електричних полів для визначення їх характеристик в електронних пристроях займається ряд провідних вітчизняних та закордонних вчених, як-то: С. В. Бірюков, В. В. Довгуша, Є. П. Д'яков, О. В. Маслєєва, Н. А. Шавріна, Дж. П. Бут, Л. Ценгель, Ф. Олендорф, Т. Він та інші [4-7]. Проте, незважаючи на наукові здобутки цих вчених, невирішеним досі залишається важливе питання моделювання електричних полів надмалої потужності, що виникають на поверхнях мікроелектронних пристроїв з метою встановлення граничних значень цих характеристик, перевищення яких призводить до виникнення електричного пробою.

Ще одна причина необхідності моделювання електричних полів надмалої потужності на поверхнях пристроїв мікроелектроніки під давачами електричного поля полягає у можливості застосування останніх не лише за нормальних умов, але й в екстремальних кліматичних умовах, природа впливу яких на електричні поля досі не вивчена.

У той же час з низки наукових праць відомо [8-10], що одним із найбільш ефективних типів давачів є поліелектродні давачі циліндричної форми, що дозволяють визначати як стаціонарні, так і квазістаціонарні електричні поля та проводити їх математичне моделювання в полярній системі координат.

Проте, за даними аналізу наукової літератури та Інтернет-джерел, авторами зроблено висновок про відсутність моделей, що дозволяють досліджувати електричні поля надмалої потужності, сформовані на поверхнях фрагментів пристроїв мікроелектроніки під поліелектродним циліндричним давачем.

**Мета та задачі дослідження.** Метою роботи є проведення аналітичного та комп'ютерного моделювання статичних і ква-

зістатичних електричних полів надмалої потужності на поверхнях матеріалів різної провідності під поліелектродним циліндричним давачем.

Для досягнення цієї мети в роботі вирішувалися такі завдання:

- встановлення основних параметрів і факторів при дослідженні електричних полів надмалої потужності;

- постановка і аналітичний розв'язок задачі на визначення розподілу електричної напруженості та електричних зарядів у просторі та на поверхні матеріалів;

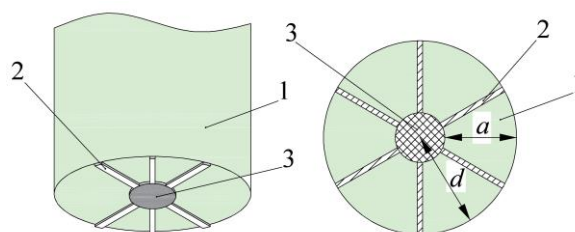
- дослідження результатів моделювання електричних полів надмалої потужності на поверхнях матеріалів різної провідності під поліелектродним циліндричним давачем.

#### **Виклад основного матеріалу**

##### ***Аналітичне моделювання розподілу електричних полів у просторі та на діелектричних поверхнях***

При розрахунку розподілу електричного поля по досліджуваній пласкій поверхні остання розглядається як напівобмежене середовище (висота формування електричного поля над поверхнею набагато менша за товщину та розміри поверхні зразка) при тому, що зразки можуть мати довільну форму. При цьому вважаємо, що сканування простору або заданої ділянки поверхні відбувається з використанням давача, запропонованого автором конструкції.

Схематична конструкція такого давача, що являє собою поліелектродний циліндричний давач з радіально розташованими електродами, кількість яких варіюється від 6 до 12, наведена на рисунку 1.



**Рисунок 1. Схематичне зображення поліелектродного циліндричного давача з радіально розташованими електродами:**

- 1 – діелектрична циліндрична основа;
- 2 – металеві електроди (Au999);
- 3 – осердя-ізолятор давача;
- $a$  – довжина електрода,
- $d$  – діаметр перетину торця давача

Особливість розробленої математичної моделі електричних полів полягає в урахуванні цієї моделлю впливу зовнішніх факторів на формування та зміну розподілу електричних потенціалів цих полів. Як такі зовнішні фактори обрано температуру ( $T$ ) і відносну вологу ( $\varphi$ ) навколишнього середовища, а також коефіцієнт електромеханічного впливу ( $K_{em}$ ), притаманний значній номенклатурі діелектричних матеріалів (сегнето-, п'єзоелектрики), що використовуються в елементній базі мікроелектроніки.

Ці фактори є незалежними один від одного, проте вплив, який вони справляють на електропровідність середовища, може бути описаний таким рівнянням [11]:  $\sigma = enu_n + epu_p$ , де  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл – елементарний заряд;  $n, p$  – відповідно, концентрації носіїв заряду ( $n$  – електронів,  $p$  – дірок (для напівпровідникових матеріалів));  $u_n$  та  $u_p$  – відповідно, рухливість носіїв заряду (електронів:  $u_n \approx T^{3/2}$  та дірок:  $u_p \approx T^{3/2}$ ).

Тому електропровідність досліджуваного середовища залежно від:

- температури навколишнього середовища ( $T$ ):

$$\sigma_T = \frac{e(n+p)}{\sqrt{T^3}} = \sigma_0 \exp\left(\frac{-W_0}{kT}\right),$$

де  $\sigma_0$  – базова електропровідність середовища за нормальних умов ( $T = 273$  К);  $W_0$  – робота виходу заряджених частинок з поверхонь матеріалів (для випадку напівпровідника – ширина забороненої зони);  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – стала Больцмана;

- відносної вологості навколишнього середовища ( $\varphi$ ):

$$\sigma_\varphi = \sigma_0 \exp\left(\frac{-1}{1-\varphi}\right);$$

- електромеханічного впливу ( $K_{em}$ ):

$$\sigma_K = K_{em} \sqrt{\frac{4,9 \cdot C_{11}}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}} = \sigma_0 \cdot K_{es} \cdot K_{em},$$

де  $K_{em}$  – коефіцієнт електромеханічного впливу;  $K_{es}$  – коефіцієнт пружної жорсткості:  $K_{es} = \sqrt{4,9 \cdot C_{11}}$ ,  $C_{11}$  – пружна жорсткість матеріалу при постійному електричному полі;  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Кл<sup>2</sup>/Н·м<sup>2</sup> – діелектрична стала;  $\varepsilon_r$  – діелектрична проникність механічно вільного зразка.

Узагальнений коефіцієнт електропровідності середовища від впливу зовнішніх факторів, описаних вище, може бути представлений таким чином:

$$\sigma' = 3\sigma_0 \left[ e^{\frac{kT(\varphi-1)}{kT-W_0(\varphi-1)}} + K_{es} \cdot K_{em} \right].$$

Розглянемо тривимірний випадок у циліндричній системі координат. При цьому циліндричні координати  $r, \alpha$  та  $z$  пов'язані з декартовими співвідношеннями  $x = r \cos \alpha$ ,  $y = r \sin \alpha$ ,  $z = z$ .

Функція  $u(x, y, z)$  перетворюється на функцію  $u(r \cos \alpha, r \sin \alpha, z)$ . Тут третя змінна  $z$  залишається незмінною, а у вираз з визначення двовимірного оператора Лапласа в полярних координатах додається лише друга похідна по  $z$  [12]:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (1)$$

Ця функція задовольняє рівнянню Лапласа, тому вона є гармонійною. У кожній задачі, пов'язаній з рівнянням Лапласа, шуканий розв'язок виділяється з багатьох гармонійних функцій певною додатковою умовою, яка найчастіше є крайовою.

Отже, рівняння Лапласа має вигляд [13]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0, \quad (1')$$

де враховано, що  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ , через циліндричну симетрію поля.

Вирішимо рівняння Лапласа методом Фур'є (поділу змінних), який полягає в тому, що спочатку знаходиться розв'язок рівняння (1') у вигляді [14]

$$u(r, \alpha) = R(r)\Phi(\alpha), \quad (2)$$

де невідомі функції  $R(r)$  і  $\Phi(\alpha)$  залежать кожна лише від однієї змінної ( $r$  або  $\alpha$ ).

Підставляючи рівняння (2) в рівняння Лапласа (1'), знаходимо

$$\frac{\Phi}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{d\alpha^2} = 0. \quad (3)$$

Множенням обох частин цього рівняння на  $r^2/R\Phi$  отримуємо

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) = - \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\alpha^2}. \quad (4)$$

Ліва та права частини рівняння (4) залежать від різних незалежних змінних. Отже, рівність може бути дотримана лише в тому випадку, коли її ліва та права частини дорівнюють окремо тій самій сталій величині.

Тому вважаємо, що:

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) = n^2, \quad \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\alpha^2} = -n^2, \quad (5)$$

де  $n^2$  – деяка стала величина.

Розв’язок рівняння для  $\Phi$  є очевидним:

$$\Phi = \begin{cases} B_1 \alpha + B_2 & \text{при } n = 0 \\ A_1 \sin n\alpha + A_2 \cos n\alpha & \text{при } n \neq 0 \end{cases}. \quad (6)$$

Розв’язок рівняння для  $R$  шукаємо у вигляді  $R = Ar^\beta$  ( $\beta \neq 0$ ). Підставляючи цей вираз у перше з рівнянь (5), отримуємо рівність

$$\beta^2 = n^2, \quad (7)$$

з якої випливає, що  $\beta = \pm n$ . При  $n = 0$  перше з рівнянь (5) спрощується до вигляду:

$r \frac{dR}{dr} = \text{const}$ , розв’язок якого може бути представлений функцією  $R = D_1 \ln r + D_2$ .

Отже, остаточний розв’язок рівняння (5) може бути представлено у вигляді системи

$$R = \begin{cases} D_1 \ln r + D_2 & \text{при } n = 0 \\ C_1 r^n + C_2 r^{-n} & \text{при } n \neq 0 \end{cases}. \quad (8)$$

Знаходимо розв’язок задачі (2) за умови, що  $u$  не залежить від  $r$ , тобто при  $n = 0$ , підставивши в систему (8), отримаємо:  $D_1 = 0$ . Тоді з системи (6) отримаємо  $u(\alpha) = B_1 \alpha + B_2$ . Граничні умови для  $u$  мають вигляд:  $u(0) = 0$ ,  $u(\alpha_0) = U_0$ , тобто  $0 = B_2$ ,  $U_0 = B_1 \alpha_0$ . Отже,  $u(\alpha) = U_0 \alpha / \alpha_0$ .

Остаточно напруженість статичного електричного поля дорівнює

$$E_\alpha = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} = -\frac{U_0}{r \alpha_0}. \quad (9)$$

В той же час у випадку квазістатичних електричних полів (врахувавши, що швидкість зміни потенціалу такого поля  $v \neq 0$ ), видозмінивши рівняння (1) та (1') таким чином:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad (10)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}, \quad (10')$$

де  $v$  – швидкість зміни електричного поля,  $v = \Delta u / \Delta t$ ; і розв’язуючи це рівняння у послідовності аналогічно як для стаціонарних полів (див. рівняння (2)-(8)) та врахувавши узагальнений коефіцієнт електропровідності середовища від впливу зовнішніх факторів  $\sigma'$ , отримуємо рівняння для напруженості квазістаціонарного електричного поля:

$$E_\alpha = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{u^2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{k}{\varepsilon} \sigma' = \frac{U_0}{r \alpha_0} (v-1) + \frac{k}{\varepsilon} \sigma', \quad (11)$$

де  $k = 9 \cdot 10^9$  м/Ф – електростатична стала;  $\varepsilon$  – діелектрична проникність середовища.

Далі розглядатимемо розрахунки основних силових та енергетичних характеристик електричних полів, виходячи з того, що маємо справу саме з квазістаціонарними електричними полями (для випадку стаціонарних полів будемо враховувати в цих рівняннях, що  $v = 0$ ).

Поверхнева густина зарядів на пластинках:

$$\sigma = \pm \varepsilon_0 E_\alpha (1 \pm v) + \sigma' = \mp \frac{\varepsilon_0 U_0}{r \alpha_0} (1 \mp v) + \sigma'. \quad (12)$$

Заряд на кожному з електродів (за модулем), розподіленому по довжині  $L$ , виражається формулою

$$Q = L \left( \int_a^b \sigma (1+v) dr + \sigma' \right) = \frac{L \cdot \varepsilon_0 \cdot U_0}{\alpha_0} \cdot (1+v) \cdot \ln \frac{b}{a} + L \cdot \sigma'. \quad (13)$$

### **Розроблення комп'ютерної моделі визначення електричних полів надмалої потужності під впливом зовнішніх факторів**

Для розв’язку поставленої математичної задачі (визначення розрахункових значень силових та енергетичних характеристик електричних полів) було написано спеціалізований програмний продукт на інтерпретованій об’єктно-орієнтованій мові програмування Python 3.10, який може бути легко інтегрований в апаратні засоби інформаційно-вимірювальної системи. Бібліотеки цієї мови містять спеціалізовані інструменти для математичних розрахунків, за допомогою яких можна ефективно та з високою точністю проводити моделювання різноманітних процесів та явищ, зокрема в електростатиці та електродинаміці [15].

За допомогою цієї програми було проведено моделювання відповідно до складеної вище математичної моделі для розрахунку параметрів статичних і квазістатичних електричних полів (рисунк 2).

```

rorahnpryz+rozpodil.py > ...
1 #py-script
2 import math
3 import numpy as np
4 from math import *
5 from fractions import Fraction
6 from decimal import Decimal
7 import matplotlib.pyplot as plt
8 import csv
9 import numpy
10 from numpy import array
11
12 #py-script
13 #
14 e0 = 8.05*(10**12) #Діелектрична проникність зразка
15 e = 7 #Діелектрична проникність зразка
16 eair = 1.00005 #Діелектрична проникність середовища
17 C11 = 8*(10**10) #Пружна жорсткість матеріалу
18 Kes = sqrt(4.9 * C11) # Kes
19 Kem = 0.095 #Коефіцієнт електро механічного вплив
20 T = 293 #Температура оточуючого середовища
21 fi = 0.6 #Вологість оточуючого середовища
22 k = 1.38*(10**23) #Стала Больцмана
23 W0 = 1.12*(1.6*(10**19)) #Робота виходу заряджених частинок з поверхонь матеріалів:
24 W0=10**20 #Базова електропровідність середовища за нормальних умов:
25
26 #Електростатична стала
27 kes=9*(10**9)
28
29 #Електростатична стала
30 #
31
32 ##Sigma1 o1 Узагальнений коефіцієнт електропровідності середовища від впливу зовнішніх
33 math1 = (k*T*(fi-1))
34 math2 = (k*T*W0*(fi-1))
35 e = exp(math1/math2)
36 p1 = 3*W0*(e+Kes*Kem)
37 ##Sigma1 o1
38
39 print("p1", p1)

```

PROBLEMS OUTPUT DEBUG CONSOLE TERMINAL

o1 1.784382246844832e-15  
PS D:\p1\viser\ >

Рисунок 2. Фрагмент лістингу та результатів розрахунку математичної задачі на об'єктно-орієнтованій мові програмування Python 3.10

Алгоритм розрахунку математичної моделі в Python 3.10 зображено на рисунку 3, послідовність якого полягає в наступному.

1) Обираються вихідні параметри вимірювальної системи (кількість електродів, габарити давача, початкові енергетичні параметри системи – залишковий поверхневий потенціал, швидкість зміни електричного поля в просторі та часі) та встановлюються сталі величини (діелектричні сталі, електричні та механічні характеристики матеріалів і середовищ досліджуваних поверхонь).

2) Проводиться розрахунок розподілу напруженості однорідного електричного поля під давачем та між його електродами.

3) Проводиться розрахунок заряду (за модулем) під давачем між кожним з його електродів по довжині.

4) Проводиться корекція розподілу заряду під давачем (шляхом перерахунку розподілу цих зарядів із циліндричних в декартові координати).

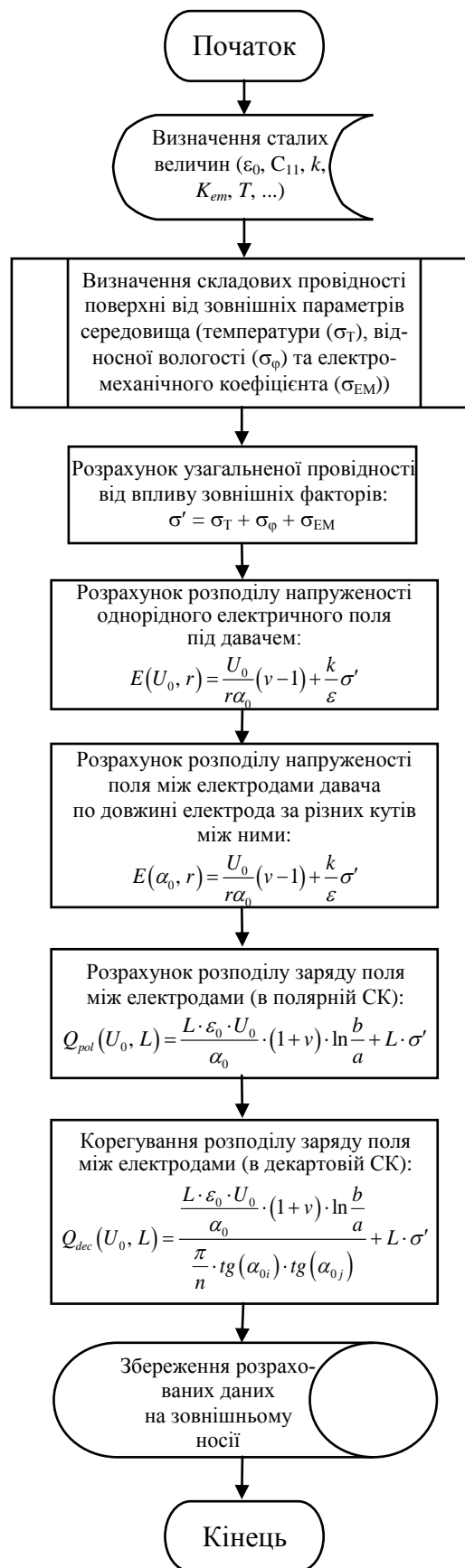


Рисунок 3. Алгоритм розрахунку математичної моделі динамічних та квазістатичних електричних полів надмалої потужності

5) Здійснюється розрахунок поверхневої електричної ємності під давачем.

6) Встановлюється градувальна характеристика поліелектродного циліндричного давача з радіальними електродами.

7) Створюється геометрична модель поверхні досліджуваного зразка з відповідними розмірами поверхневих елементів і структур, а також давача.

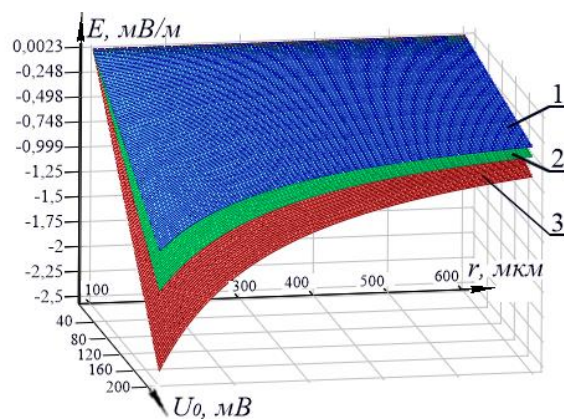
8) Проводиться розбиття об'єкта на кінцеві елементи, враховуючи необхідну точність розрахунку.

9) Наводяться результати розв'язання математичної задачі. Перед початком розрахунку необхідно врахувати час проведення одного циклу вимірювання (залежно від висоти простору над досліджуваним зразком). Час обирається в діапазоні від 0 до 1 с, з інтервалом 40 мс. Також необхідно вказати відносну точність визначення параметрів електричного поля, яка становить 2,5 %.

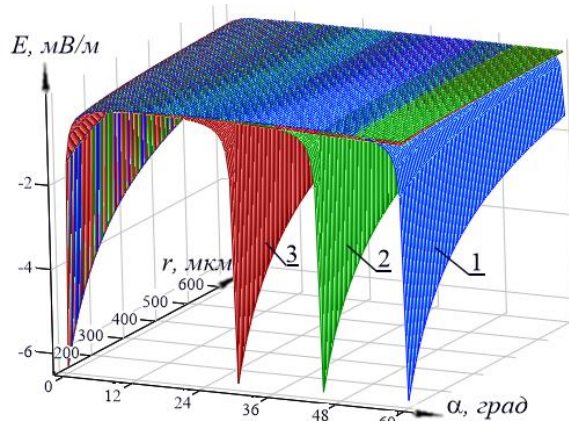
**Результати досліджень.** За результатами роботи розробленої програми було проаналізовано розподіл електричних полів на поверхнях різноманітних виробів мікроелектроніки, отриманий аналітично та в результаті комп'ютерного моделювання.

Результати аналізу зображені у вигляді графіків залежностей напруженості електричного поля (рисунок 4) та електричного заряду (рисунок 5) по висоті від досліджуваної поверхні, побудованих за аналітичними формулами (11), (13) та за допомогою розробленої програми.

**Обговорення результатів.** Як можна побачити з графіка залежності напруженості електричного поля  $E$  від поверхневого потенціалу  $U_0$  за різних кутів  $\alpha$  між електродами давача, що проводить вимірювання на кремнієвій пластині з рівномірно розподіленим по її поверхні електричним зарядом (рисунок 4, а), збільшення поверхневого потенціалу з одночасним зменшенням відстані від місця визначення напруженості до центра вимірювального давача (вздовж вимірювального електроду) веде до гіперболічного збільшення напруженості електричного поля (при цьому знак вектора напруженості вказує на те, що поверхневий заряд досліджуваної поверхні є меншим за значенням, аніж заряд на електродах самого давача).



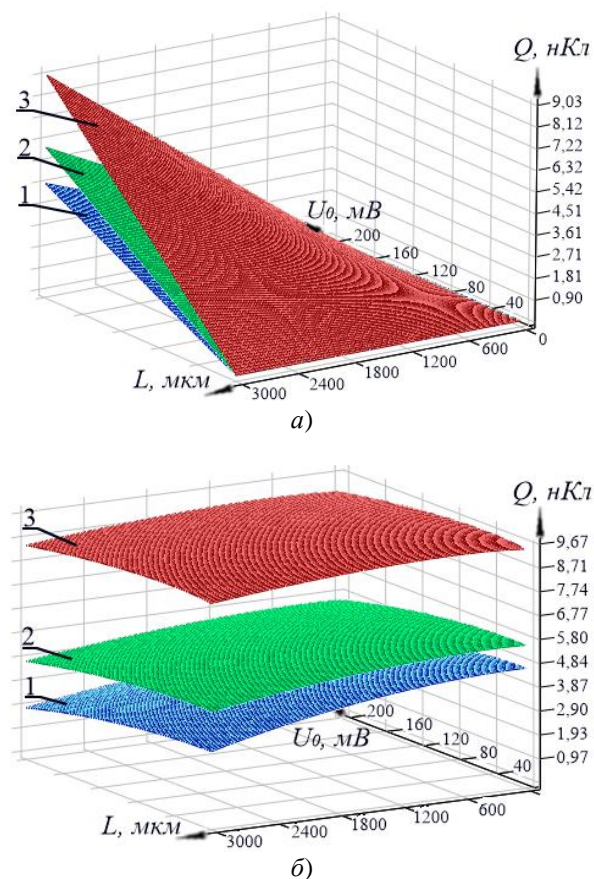
а)



б)

**Рисунок 4.** Графіки залежності напруженості поля від поверхневого потенціалу по довжині електроду за різних кутів між електродами (а) та між електродами давача по довжині електроду за різних кутів між ними (б), отримані моделюванням у розробленому програмному продукті та аналітично (●); виріб – фрагмент кремнієвої пластини з рівномірно розподіленим по її поверхні електричним зарядом, 1 –  $\alpha = 60$  град ( $n = 6$ ), 2 –  $\alpha = 45$  град ( $n = 8$ ), 3 –  $\alpha = 30$  град ( $n = 12$ )

Таке різке зростання (за модулем) напруженості електричного поля пов'язане, на думку автора, з радіальним розташуванням електродів давача, коли відстань між ними зменшується у міру наближення до центру давача. В той же час, розглянувши графік залежності напруженості поля  $E$  від поверхневого потенціалу  $U_0$ , яка виникає між окремими електродами давача (рисунок 4, б), можна спостерігати рівномірний розподіл напруженості (що відповідає рівномірно розподіленому по поверхні заряду).



**Рисунок 5.** Отримані математичним моделюванням (а) та скореговані (б) залежності розподілу заряду поля від поверхневого потенціалу по висоті електрода за різних кутів між електродами: отримані моделюванням у розробленому програмному продукті та аналітично (•); виріб – фрагмент кремнієвої пластини з рівномірно розподіленим по її поверхні електричним зарядом, 1 –  $\alpha = 60$  град ( $n = 6$ ), 2 –  $\alpha = 45$  град ( $n = 8$ ), 3 –  $\alpha = 30$  град ( $n = 12$ )

Як можна побачити з графіка залежності розподілу заряду поля від поверхневого потенціалу по висоті електрода за різних кутів  $\alpha$  між електродами давача, що проводить вимірювання на кремнієвій пластині з рівномірно розподіленим по її поверхні електричним зарядом (рисунок 5, а), збільшення поверхневого потенціалу з одночасним збільшенням відстані від досліджуваної поверхні до робочої поверхні вимірювального давача веде до майже лінійного збільшення електричного заряду. Таке зростання пов'язане з формою розподілу вектора електричної напруженості (див. рисунок 4): при збільшенні чисельного значення цього вектора (за модулем) залежно від відстані до досліджуваної поверхні збільшується і заряд, який визначається в цій точці поля. В той же час, розглянувши графік залеж-

ності розподілу заряду поля від поверхневого потенціалу по висоті електрода в декартовій системі координат (рисунок 5, б), можна спостерігати більш рівномірний розподіл заряду поля від поверхневого потенціалу по висоті електродів за різних кутів між ними.

Таким чином, із залученням мови програмування Python 3.10 розроблено динамічну комп'ютерну програму визначення електричних полів надмалої потужності під впливом зовнішніх факторів, яка дозволяє з високою точністю (розбіжність між результатами математичного моделювання й експериментально отриманими даними становить 2,2-7,15 %) та в режимі реального часу візуалізувати розподіл електричного поля, а також визначати діапазони силових та енергетичних параметрів такого поля, дотримання яких не призводить до електричного пробою.

**Висновки.** Проведене аналітичне моделювання статичних та квазістатичних електричних полів надмалої потужності ґрунтується на розв'язанні системи аналітичних рівнянь, в основі яких лежать диференціальні рівняння Лапласа, що враховують динаміку зміни електричного поля та їх розмірів під поліелектродним циліндричним давачем, а також вплив зовнішніх факторів (температури, відносної вологості, електромеханічного впливу на та з боку поверхні).

Із залученням спеціально розробленого програмного забезпечення на об'єктно-орієнтованій мові програмування Python 3.10 розроблено динамічну комп'ютерну модель визначення електричних полів надмалої потужності під впливом зовнішніх факторів в просторі та з часом. Така модель дозволяє з високою точністю (розбіжність між даними, отриманими в результаті математичного моделювання, та експериментально отриманими даними не перевищує 7,15 %) та в режимі реального часу візуалізувати розподіл електричного поля, а також визначати діапазони силових (напруженості електричного поля) та енергетичних (розподілу поверхневого заряду) параметрів такого поля, дотримання яких не призводить до електричного пробою.

*Наукова новизна:* в результаті проведеного моделювання вперше отримані математичні закономірності впливу змін параметрів статичних та квазістатичних електричних полів (швидкості зміни форми та положення таких полів у часі та просторі) та змін зовнішніх факторів (температури, відносної вологості,

електромеханічного впливу) на силові й енергетичні характеристики електричних полів мікроелектронних пристроїв, що дозволяє з високою точністю та адекватністю визначати критичні значення цих параметрів, перевищення яких призводить до електричного пробою та руйнування компонентів таких мікроелектронних пристроїв.

*Практична значущість* можливостей розробленої моделі, а також програмного засобу для її реалізації полягає в експериментально підтверджених результатах розрахунку основних силових і енергетичних параметрів електричного поля, що підтверджують високу точність та оперативність такого моделювання, а використання сучасної мови програмування Python 3.10 дозволяє гнучко інтегрувати таке програмне забезпечення в апаратну частину інформаційно-виміральної системи.

У подальших дослідженнях планується змоделювати та дослідити процес виникнення та просторово-часових змін динамічних електричних полів над поверхнями різної електропровідності під поліелектродним циліндричним давачем.

#### Список використаних джерел

- [1] A. Keshari, J. Rao, and A. Sree Rama Murthy, "Design and development of instrumentation for the measurement of sensor array responses", *Review of Scientific Instruments*, no. 91, p. 024101, 2020. doi: 10.1063/1.5128967.
- [2] D. Galler, and G. Slenski, "Causes of aircraft electrical failures", *Aerospace and Electronic Systems Magazine, IEEE*, vol. 6, no. 3, p. 8, 1991. doi: 10.1109/62.90949.
- [3] Douglas C. Smith, "Destroying electronic components from across the room with ESD", *In Compliance*, 2022. [Online]. Available: <https://incompliancemag.com/article/destroying-electronic-components-from-across-the-room-with-esd/>
- [4] X. H. Francis, and R. J. Palisano, *The Application of Electric Fields in Biology and Medicine, Electric Field*. Mohsen Sheikholeslami Kandelousi, IntechOpen, 2017. doi: 10.5772/intechopen.71683.
- [5] P. E. Secker, and J. N. Chubb, "Instrumentation for electrostatic measurements", *J. Electrostatics*, vol. 16, pp. 1-19, 1984. doi: 10.1016/0304-3886(84)90015-9.
- [6] W. Liqiu, D. Yongjie, and Yu. Daren, *Application of an Electric Field to Low-Frequency Oscillation Control in Hall Thrusters, Electric Field*. Mohsen Sheikholeslami Kandelousi, IntechOpen, 2017. doi: 10.5772/intechopen.71009.
- [7] Z. Yan, J. X. Li, Z. Y. Dong, and Y. Zhu, "Prediction and improvement of the electric field distribution in high voltage AC substations", *Electric Power Systems Research*, vol. 11, iss. 2, pp. 153-159, 1986.
- [8] В. М. Шарапов, І. Г. Мінаєв, К. В. Базіло та ін., *Ємнісні датчики*. Черкаси, Україна: Брама-Україна, 2010.
- [9] O. Larsson, *Polyelectrolyte-Based Capacitors and Transistors*. Norrköping, Sweden, 2011.
- [10] L. K. Baxter, *Capacitive Sensors: Design and Applications*. London, UK: Wiley-IEEE Press, 1996.
- [11] В. М. Кириленко, К. В. Кириленко, та В. М. Головка, *Електротехнічні матеріали. Частина 1. Діелектричні матеріали*. Київ, Україна: НТУУ "КПІ ім. Ігоря Сікорського", 2021.
- [12] J. J. Eun, P. Sucheol, and S. Ch. Won, "Electrostatics with reflection symmetry and exact solution of the Dunkl-Laplace equation in cylindrical coordinates", *J. Korean Phys. Soc.*, vol. 68, iss. 3, pp. 379-382, 2016. doi: 10.3938/jkps.68.379.
- [13] A. L. Pérez-Martínez, M. d. P. Aguilar-Del-Valle, and A. Rodríguez-Gomez, "Do it by yourself: An instructional derivation of the Laplacian operator in spherical polar coordinates", *Mathematics*, no. 9, pp. 2943-2975, 2021. doi: 10.3390/math9222943.
- [14] D. S. Shamshirgar, R. Yokota, A.-K. Tornberg, and B. Hess, "Regularizing the fast multipole method for use in molecular simulation", *The Journal of Chemical Physics*, vol. 151 (23), p. 234113, 2019. doi: 10.1063/1.5122859.
- [15] R. Harrison, R. Mohan, R. Gorham, C. Kieslich, and D. Morikis, "AESOP: A Python library for investigating electrostatics in protein interactions", *Biophysical Journal*, vol. 112, iss. 9, pp. 1761-1766, 2017.



## References

- [1] A. Keshari, J. Rao, and A. Sree Rama Murthy, "Design and development of instrumentation for the measurement of sensor array responses", *Review of Scientific Instruments*, no. 91, p. 024101, 2020. doi: 10.1063/1.5128967.
- [2] D. Galler, and G. Slenski, "Causes of aircraft electrical failures", *Aerospace and Electronic Systems Magazine, IEEE*, vol. 6, no. 3, p. 8, 1991. doi: 10.1109/62.90949.
- [3] Douglas C. Smith, "Destroying electronic components from across the room with ESD", *In Compliance*, 2022. [Online]. Available: <https://incompliancemag.com/article/destroying-electronic-components-from-across-the-room-with-esd/>
- [4] X. H. Francis, and R. J. Palisano, *The Application of Electric Fields in Biology and Medicine, Electric Field*. Mohsen Sheikholeslami Kandelousi, IntechOpen, 2017. doi: 10.5772/intechopen.71683.
- [5] P. E. Secker, and J. N. Chubb, "Instrumentation for electrostatic measurements", *J. Electrostatics*, vol. 16, pp. 1-19, 1984. doi: 10.1016/0304-3886(84)90015-9.
- [6] W. Liqiu, D. Yongjie, and Yu. Daren, *Application of an Electric Field to Low-Frequency Oscillation Control in Hall Thrusters, Electric Field*. Mohsen Sheikholeslami Kandelousi, IntechOpen, 2017. doi: 10.5772/intechopen.71009.
- [7] Z. Yan, J. X. Li, Z. Y. Dong, and Y. Zhu, "Prediction and improvement of the electric field distribution in high voltage AC substations", *Electric Power Systems Research*, vol. 11, iss. 2, pp. 153-159, 1986.
- [8] V. M. Sharapov, I. H. Minaiev, K. V. Bazilo et al., *Capacitive sensors*. Cherkasy, Ukraine: Brama-Ukraina, 2010 [in Ukrainian].
- [9] O. Larsson, *Polyelectrolyte-Based Capacitors and Transistors*. Norrköping, Sweden, 2011.
- [10] L. K. Baxter, *Capacitive Sensors: Design and Applications*. London, UK: Wiley-IEEE Press, 1996.
- [11] V. M. Kyrylenko, K. V. Kyrylenko, and V. M. Holovko, *Electrical materials. Part 1. Dielectric materials*. Kyiv, Ukraine: NTUU "KPI im. Ihorii Sikorskoho", 2021 [in Ukrainian].
- [12] J. J. Eun, P. Sucheol, and S. Ch. Won, "Electrostatics with reflection symmetry and exact solution of the Dunkl-Laplace equation in cylindrical coordinates", *J. Korean Phys. Soc.*, vol. 68, iss. 3, pp. 379-382, 2016. doi: 10.3938/jkps.68.379.
- [13] A. L. Pérez-Martínez, M. d. P. Aguilar-Del-Valle, and A. Rodríguez-Gomez, "Do it by yourself: An instructional derivation of the Laplacian operator in spherical polar coordinates", *Mathematics*, no. 9, pp. 2943-2975, 2021. doi: 10.3390/math9222943.
- [14] D. S. Shamshirgar, R. Yokota, A.-K. Tornberg, and B. Hess, "Regularizing the fast multipole method for use in molecular simulation", *The Journal of Chemical Physics*, vol. 151 (23), p. 234113, 2019. doi: 10.1063/1.5122859.
- [15] R. Harrison, R. Mohan, R. Gorham, C. Kieslich, and D. Morikis, "AESOP: A Python library for investigating electrostatics in protein interactions", *Biophysical Journal*, vol. 112, iss. 9, pp. 1761-1766, 2017.

**D. V. Tychkov,**

e-mail: dmytro.tychkov@gmail.com

**M. O. Bondarenko, Dr. Sc., Professor**

Cherkasy State Technological University

Shevchenko Blvd, 460, Cherkasy, 18006, Ukraine

## MATHEMATICAL MODEL OF STATIC AND QUASI-STATIC ELECTRIC FIELDS OF ULTRA-LOW POWER UNDER A POLYELECTRODE CYLINDRICAL TRANSDUCER

*The article has established that the simulation of static and quasi-static electric fields of ultra-low power on the surfaces of materials of different conductivity of microelectronic devices with the possibility of integration into the hardware base of the information and measurement equipment cre-*

ated on the basis of such mathematical software modeling is an actual issue. Therefore, the main goal of this article is to carry out analytical and computer modeling of static and quasi-static electric fields of ultra-low power on the surfaces of materials of different conductivity under a polyelectrode cylindrical transducer. The results of mathematical modeling of static and quasi-static electric fields of ultra-low power, which is carried out by solving a system of analytical equations based on Laplace's differential equations, are presented. The peculiarity of this model is that it takes into account the dynamics of changes in the electric field and its dimensions in the process of scanning the latter by a polyelectrode cylindrical transducer, as well as the influence of external climatic (temperature, relative humidity) factors and electromechanical influence on the part of the investigated surface. On the basis of the performed analytical modeling, a computer model has been created based on the finite element method, and the model software has been created using the Python 3.10 object-oriented programming language. The developed model allows with high accuracy (the difference between the data of mathematical and analytical models does not exceed 2.15%, and with the experimentally obtained data - does not exceed 7.15%), as well as in real time, to build the distribution graphs of the intensity of electric field and electric charge, as well as to determine the parameter ranges of these fields, compliance with which does not lead to an electric breakdown. The scientific novelty of the article is that, for the first time, as a result of mathematical modeling, mathematical regularities of the influence of changes in the parameters of static and quasi-static electric fields of microelectronic devices (speed of changes in the shape and position of such fields in time and space), as well as changes in external factors on the power and energy characteristics of these fields are obtained. This makes it possible to determine with high accuracy and adequacy the critical values of such parameters, the excess of which leads to electrical breakdown and destruction of components of micro-electronic devices. The practical significance of the capabilities of the developed model, as well as the software tool for its implementation, lies in the experimentally confirmed results of calculating the main force and energy parameters of the electric field. In further research, it is planned to simulate and investigate the process of emergence and spatio-temporal changes of dynamic electric fields over surfaces of different electrical conductivity under a polyelectrode cylindrical transducer.

**Keywords:** mathematical model, analytical equation, polyelectrode cylindrical transducer, electric field, electric tension, electric charge.

Стаття надійшла 19.01.2023

Прийнято 09.02.2023