УДК 004.02:62-1/-9]004.94

[0000-0002-4720-0267] **О. О. Ситник**[1]**,** *д-р техн. наук, професор,*
[0000-0003-1329-635X] **В. Б. Кисельов**[1]**,** *канд. техн. наук, доцент,*
[0000-0002-2755-3890] **Г. О. Кисельова**[1]**,** *ст. викладач,*
e-mail*:* annakys.777@gmail.com
[0000-0003-2128-2388] **В. І. Костюченко**[2]**,** *канд. техн. наук, доцент*
e-mail: vitalii.kostiuchenko@nuos.edu.ua
[1]Черкаський державний технологічний університет
б-р Шевченка, 460, м. Черкаси, 18006, Україна
[2]Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова
пр. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54025, Україна

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ НАДІЙНОСТІ КОМП'ЮТЕРНОЇ ТЕХНІКИ

Стаття присвячена побудові математичної моделі надійності пристроїв комп'ютерної техніки. Математична модель побудована шляхом використання рівняння дифузії ймовірностей, яке відповідає стохастичному процесу і являє собою двопараметричну функцію, оцінки параметрів якої мають досить прості аналітічні вирази, що задовольняє вимогам інженерної практики. Комп'ютерна техніка знаходить широке застосування як різні пристрої (персональні комп'ютери, комп'ютери, ноутбуки, мейнфрейми, кластери, сервери, робочі станції). Їх основне призначення полягає в забезпеченні для користувача постійного доступу до інформації, яка зберігається на їх носіях, та можливості безперервної обробки цієї інформації, що зумовлює необхідність постійної підтримки подібних систем у працездатному стані. Таким чином, комп'ютерна техніка належить до систем, які вимагають високого ступеня (рівня) надійності. Враховуючи, що рівень надійності будь-якої техніки в процесі її експлуатації постійно знижується, що зумовлено процесами старіння та зношування, визначення та прогнозування надійності є актуальним науково-технічним завданням. Одними з найбільш поширених методів визначення та прогнозування стану об'єкта в будь-який момент часу є ймовірнісно-фізичні методи, які базуються на застосуванні імовірнісних моделей для обробки статистичної інформації, отриманої в процесі експлуатації, або випробування реальних фізичних об'єктів. Незалежно від типу комп'ютерної техніки, до її складу входять електронні, електричні та електромеханічні елементи, зі збереженням їх функціональних властивостей на весь період застосування. Відповідно до сучасних поглядів на роботу електронних, електричних та електромеханічних елементів комплексним фактором, що характеризує технічний стан елемента, є якісне проходження електричного сигналу через контактні з'єднання, яке визначається величиною контактного опору. Отримана математична модель щільності розподілу є двопараметричною функцією, параметри якої мають фізичну інтерпретацію у вигляді швидкості зміни контактного опору та середньоквадратичного відхилення швидкості.

Ключові слова: *ймовірнісно-фізичний метод, двопараметрична функція, визначальний параметр, контактний опір, рівняння Фоккера-Планка-Колмогорова.*

Вступ. Останнім часом під поняттям комп'ютерної техніки розуміють комплекс, що описує весь спектр застосовуваних комп'ютерних систем – від персональних комп'ютерів до периферійного й офісного обладнання, яке працює спільно з комп'ютерами і забезпечує деяку додаткову функціональність (друк або сканування документів, доступ до мережі, захист від збоїв живлення тощо). Особливості роботи комп'ютерної техніки зумовлені дією цілого комплексу різних факторів, одні з яких пов'язані з конструкцією, технологією, виготовленням, застосованими матеріалами, а інші є наслідком умов експлуатації. Процеси, які супроводжують і визначають надійність комп'ютерної техніки, надзвичайно складні, мають випадковий характер і ще недостатньо вивчені. Нині немає загальноприйнятої теорії зношування і старіння елементів комп'ютерної техніки, на підставі якої можна було б вирішувати завдання надійності останньої.

Багато дослідників вважають, що пошук шляхів створення якісних та високонадійних компонентів комп'ютерної техніки вимагає

DOI: 10.24025/2306-4412.4.2022.269282

вирішення питань, пов'язаних з вивченням природи і закономірностей виникнення відмов [1-5].

Роботу компонентів комп'ютерної техніки супроводжує цілий комплекс складних механо-фізико-хімічних і електричних процесів. Диференціація цих ще недостатньо вивчених нині процесів, корельованих і некорельованих, що відбуваються одночасно і послідовно, є складною науковою проблемою. Для розуміння найважливіших фізичних процесів, що в результаті призводять до відмови, низкою вчених зроблено вже багато. Зокрема, вплив різних факторів на характеристики електричних контактів з новими даними про передачу електричного струму на мікро- і нанорівнях розглянуто в роботі Міленко Брауновича, Миколи Мишкіна, Валерія Кончіца [19] та Пола Слейда [20]. Вивченню теорії нелінійних рівнянь Фоккера-Планка, які використовуються в ймовірнісно-фізичному методі прогнозування надійності, присвячені роботи Володимира Богачова, Миколи Крилова, Майкла Рокнера, Станіслава Шапошникова [3] та Френка Даніеля [15].

Істотний внесок у розвиток методів розрахунку кількісних показників надійності компонентів електронної техніки зробили вітчизняні вчені В. П. Стрельніков і А. В. Федухин [1, 2], [4-9]. Із зарубіжних вчених, відомих своїми роботами в області теорії надійності, необхідно відзначити таких, як: Дейв Саурабх, Абхішек Рагхуванші [13], Даніель Сорін [14], Джітендра Кумар, Вікас Шінде та Мукта Калра [16], Мостафа Абд-Ель-Барр [17], Марвін Раусанд, Арнліот Хойланд [18] та Мартін Шуман [21].

Мета та задачі дослідження. Об'єктом дослідження є пристрої комп'ютерної техніки та їх елементи.

Метою дослідження є комплексне рішення задачі дослідження надійності комп'ютерної техніки та її елементів, що включає: розробку математичної моделі надійності, яка дозволяє оцінити і прогнозувати показники надійності при скорочених у часі випробуваннях; вибір визначального параметра, що має найкращі прогнозуючі властивості.

Пристрої комп'ютерної техніки переважно складаються з електронних та електромеханічних компонентів: друкованих плат з електронними та електричними елементами (транзисторами, діодами, мікросхемами, резисторами, конденсаторами і т. ін.), електричних та електромеханічних з'єднань (роз'ємних та нероз'ємних) між компонентами; електромеханічних приводів. Основною причиною виходу з ладу таких пристроїв є порушення контакту всередині елементів або між елементами, яке може бути визначено в часі як зміна контактного опору.

У низці робіт [19, 20] відзначається, що зміна контактного опору в процесі експлуатації має три характерні ділянки. Перша ділянка, що характеризується порівняно збільшеним розкидом та інтенсивністю зміни динамічного контактного опору ($R_{кд}$), відповідає припрацюванню. Далі настає режим з усталеною середньою швидкістю зміни $R_{кд}$ і стабільнішим його значенням і, нарешті, при подальшій експлуатації настає етап, коли швидкість збільшення $R_{кд}$ значно зростає і швидко настає повне порушення контакту. Таким чином, процес зміни якості контактування проходить, як правило, за класичною схемою загальних процесів зношування, старіння, розрегулювання.

З огляду на викладені вище міркування про деякі механо-фізико-хімічні аспекти досліджуваного процесу, можна припустити, що його кінетика для досить загального випадку може бути описана стохастичним диференціальним рівнянням першого порядку такого вигляду [3, 15]:

$$d\varepsilon(t) = A(t)dt + B(t)d\eta(t), \qquad (1)$$

де ε – деякий визначальний параметр, що характеризує якість контактування (рівень шуму або відносний час перевищення заданого рівня шуму, або будь-який інший параметр);

$A(t)$, $B(t)$ – деякі детерміновані функції, що характеризують зміну відповідно середнього значення і дисперсії визначального параметра;

$\eta(t)$ – випадкова складова.

Різноманіття статистично підсумованих флуктуацій, зазначених вище тільки частково, некорельованих і слабокорельованих, які формують у підсумку процес $\eta(t)$, дає підставу вважати останній нормально розподіленим з математичним очікуванням, рівним нулю, і дисперсією, пропорційною часу. Враховуючи останнє припущення, рівняння (1) являє собою стохастичне диференціальне рівняння (типу рівняння Іто) [15], яке описує випадковий марківський процес дифузійного типу.

Нижче ми будемо розглядати і будувати математичну модель для усталеного режиму,

DOI: 10.24025/2306-4412.4.2022.269282

при якому середня швидкість зміни визначального параметра є сталою величиною $A(t) = a$. Беручи до уваги постійність коефіцієнта варіації, наприклад такого параметра, як $R_{кд}$, можна припустити, що і середньоквадратичне відхилення швидкості зміни визначального параметра також є сталою величиною, тобто $B(t) = b$, а отже, модель досліджуваного процесу в цьому випадку можна записати в такому вигляді:

$$d\varepsilon(t) = adt + bd\eta(t). \tag{2}$$

Тобто процес зміни якості контактування в усталеному режимі роботи пропонується описувати стохастичним диференціальним рівнянням Іто з постійними коефіцієнтами зносу (a) і дифузії (b).

Завдання визначення аналітичних виразів для характеристик надійності вирішується повністю, якщо відома перехідна імовірність випадкового процесу поведінки визначального параметра і задані його граничні значення. Щільність імовірності перебування визначального параметра в заданій області збігається зі щільністю імовірності напрацювання на відмову. Імовірність же досягнення меж має відомий зв’язок з імовірністю переходу процесу з одного стану в інший. Перехідна щільність, що описує динаміку визначального параметра, може бути визначена безпосередньо з рішення рівняння динаміки (2), проте є сенс застосувати інший, більш раціональний спосіб, використовуючи рівняння дифузії імовірностей, відповідне стохастичному процесу (2).

Відомо, що перехідна щільність дифузійного марківського процесу є рішенням рівняння Фоккера-Планка-Колмогорова [3, 15], яке в цьому випадку буде мати такий вигляд:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\omega(\varepsilon_0,\ t;\ \varepsilon,\ \tau)}{\partial\tau} - \frac{b^2}{2}\cdot\frac{\partial^2\omega(\varepsilon_0,\ t;\ \varepsilon,\ \tau)}{\partial\varepsilon^2} + \\ &+a\cdot\frac{\partial\omega(\varepsilon_0,\ t;\ \varepsilon,\ \tau)}{\partial\varepsilon} = 0.\end{aligned} \tag{3}$$

Щільність імовірності розподілу часу виходу процесу із заданої області пов’язана зі щільністю умовної перехідної імовірності процесу в такий спосіб [3]:

$$g(t) = \left[-\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{\varepsilon_{кр}^{-}}^{\varepsilon_{кр}^{+}}\omega(\varepsilon_0,\ t;\ \varepsilon,\ \tau)d\varepsilon\right]_{\tau=t}. \tag{4}$$

В останньому рівнянні позначено: $\omega(\varepsilon_0,\ t;\ \varepsilon,\ \tau) -$ щільність імовірності переходу з початкового стану $(\varepsilon_0,\ t)$ в поточний стан $(\varepsilon,\ \tau)$; $\varepsilon_{кр}^{-}$, $\varepsilon_{кр}^{+}$ – відповідно нижня і верхня межі області можливих значень визначального параметра.

Щільність імовірностей розподілу напрацювання для загального випадку можна записати тоді в такому вигляді [2]:

$$f(t) = \int\limits_0^\infty g(t)\cdot\varphi(T-t)dt, \tag{5}$$

де $\varphi(T-t) -$ щільність імовірності розподілу початкового часу, відповідного ε_0 (наприклад, щільність імовірності розподілу часу припрацювання).

Таким чином, визначення закону розподілу напрацювання на відмову зводиться до вирішення рівнянь (3), (4), (5).

Вид виразу для закону розподілу напрацювання на відмову визначається передусім вирішенням рівняння дифузії імовірності (3), що являє собою параболічне диференціальне рівняння в частинних похідних. Рішення цього рівняння насамперед залежить від крайових умов, що випливають із фізичних обмежень досліджуваного процесу.

Початкові умови в найзагальнішому випадку можуть бути задані у вигляді рівності щільності перехідної імовірності деякому довільному розподілу початкової ординати:

$$\omega(\varepsilon_0,\ t;\ \varepsilon,\ \tau)\big|_{\tau=t} = \omega_0(\varepsilon). \tag{6}$$

Функція $\omega_0(\varepsilon)$, виходячи із суті шуканої функції як щільності імовірності, повинна задовольняти умові нормування, тобто при $\tau = t$ інтеграл $\int\omega_0(\varepsilon)d\varepsilon = 1$ для області інтегрування, що містить точку ε_0, і дорівнює нулю в іншому випадку.

Коли початкове значення ординати процесу задано (наприклад, зміна визначального параметра починається з будь-якої детермінованої величини), розподіл початкової ординати $\omega_0(\varepsilon)$ вироджується в дельта-функцію:

$$\omega(\varepsilon_0,\ t;\ \varepsilon,\ \tau)\big|_{\tau=t} = \delta(\varepsilon-\varepsilon_0). \tag{7}$$

Нижче при вирішенні рівняння дифузії імовірностей (3) як початкові умови прийма-

DOI: 10.24025/2306-4412.4.2022.269282

ється (7). Більш загальні початкові умови виду (6) не викликають принципових труднощів при знаходженні рішень.

Щодо визначення області зміни ординат досліджуваного процесу, то тут є сенс розглянути дві схеми постановки граничних умов, кожна з яких призводить до певного виразу для функції розподілу напрацювання на відмову.

Модель надійності, що випливає з рішення рівняння Фоккера-Планка-Колмогорова. Як перший більш загальний випадок постановки граничних умов, відповідних досліджуваному процесу, можна прийняти наступне:

$$\left.\frac{\partial\omega\left(\varepsilon_0,\ t;\ \varepsilon,\ \tau\right)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_{кр}^-}=0, \tag{8}$$

$$\omega\left(\varepsilon_0,\ t;\ \varepsilon,\ \tau\right)\Big|_{\varepsilon=\varepsilon_{кр}^+}=0, \tag{9}$$

Аналітичний вираз граничної умови (8) фізично означає наявність відбиваючого екрана в точці $\varepsilon=\varepsilon_{кр}^-$, тобто, коли реалізації процесу досягають лівої межі, вони відбиваються від неї як від дзеркального екрана і продовжують брати участь у процесі. При цьому через присутність таких реалізацій маса потоку імовірності переходу наче зсувається вліво, тим самим зменшується імовірність досягнення правих критичних значень.

Необхідність умови типу (9), тобто присутність поглинаючого екрана на правій межі, обумовлено тим, що, з огляду на немонотонний випадковий характер окремих реалізацій процесу, останні можуть після перетину критичного рівня повертатися назад в допустиму зону і далі брати участь у процесі. При наявності ж поглинаючої межі реалізації, вперше досягши її, наче прилипають до неї і далі в процесі не беруть участь. Фізична дія правої поглинаючої межі зводиться до деформування розподілу перехідної імовірності таким чином, що зменшується розсіювання, а середнє значення зміщується вліво.

Перейдемо до вирішення рівняння (3) для крайових умов (6), (8), (9).

Ввівши нову залежну змінну

$$\omega=\omega^*\cdot e^{\frac{a}{b^2}\cdot\left(\varepsilon-\varepsilon_0\right)-\frac{a^2\cdot t}{2\cdot b^2}}, \tag{10}$$

отримуємо для ω^* диференціальне рівняння

$$\frac{\partial\omega^*}{\partial t}=\frac{b^2}{2}\cdot\frac{\partial\omega^*}{\partial\varepsilon^2}. \tag{11}$$

Крайові умови при цьому набувають вигляду

$$\omega^*\left(\varepsilon_0,\ t;\ \varepsilon,\ \tau\right)\Big|_{\tau=t}=\omega_0^*\left(\varepsilon\right); \tag{12}$$

$$\left[\frac{\partial\omega^*\left(\varepsilon_0,\ t;\ \varepsilon,\ \tau\right)}{\partial\varepsilon}+\right.$$
$$\left.+\frac{a}{b^2}\cdot\omega^*\left(\varepsilon_0,\ t;\ \varepsilon,\ \tau\right)\right]_{\varepsilon=\varepsilon_{кр}^-}=0; \tag{13}$$

$$\omega^*\left(\varepsilon_0,\ t;\ \varepsilon,\ \tau\right)\Big|_{\varepsilon=\varepsilon_{кр}^+}=0. \tag{14}$$

Функція $\omega^*\left(\varepsilon\right)$ задовольняє зазначеним умовам для $\omega_0\left(\varepsilon\right)$.

Для рішення рівняння (3) з крайовими умовами (7), (8), (9) з метою спрощення введемо нормування за визначальним параметром $\xi=\varepsilon/\varepsilon_{кр}^+$ і приймемо: $\xi_{кр}^-=0$, $\xi_{кр}^+=1$, $t=0$.

Конструюємо розв'язок рівняння (11), намагаючись задовольнити граничній умові при $\xi=0$, шляхом відповідного вибору продовження початкової функції за межі границі у від'ємну область.

$$\omega^*=\frac{1}{b\cdot\sqrt{2\cdot\pi\cdot\tau}}\times$$
$$\times\int_0^\infty\left\{\omega_0^*\left(\alpha\right)\cdot\left[e^{-\frac{(\alpha-\xi)^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}}-e^{-\frac{(\alpha-\xi+2)^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}}\right]+\right. \tag{15}$$
$$\left.+\omega_0^*\left(-\alpha\right)\cdot\left[e^{-\frac{(\alpha+\xi)^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}}-e^{-\frac{(\alpha+\xi+2)^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}}\right]\right\}d\alpha.$$

Тут α – введений параметр інтегрування з розмірністю і областю існування, яка збігається з ξ.

Перший доданок у квадратних дужках в підінтегральному виразі є частинним рішенням рівняння (11) для будь-якого α і умов (12), (14), в чому можна переконатися простою підстановкою.

Для того щоб скласти умову для виконання (13), обчислимо $\left(\partial\omega^*/\partial\xi\right)_{\xi=0}$ і $\left(\omega^*\right)_{\xi=0}$, диференціюючи і підставляючи відповідні значення в (15):

$$\left(\omega^*\right)_{\xi=0}=\frac{1}{b\cdot\sqrt{2\cdot\pi\cdot\tau}}\times$$
$$\times\int_0^\infty\left[\omega_0^*\left(\alpha\right)-\omega_0^*\left(-\alpha\right)\right]\cdot\left[e^{-\frac{\alpha^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}}-e^{-\frac{(\alpha+2)^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}}\right]d\alpha;$$

DOI: 10.24025/2306-4412.4.2022.269282

$$\left(\frac{\partial\omega^*}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}=\frac{1}{b\cdot\sqrt{2\cdot\pi\cdot\tau}}\times$$

$$\int_0^\infty\left\{\left[\omega_0^*(\alpha)-\omega_0^*(-\alpha)\right]\cdot\frac{\alpha}{2\cdot b^2\cdot\tau}\cdot e^{-\frac{\alpha^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}}-\right.$$

$$\left.-\left[\omega_0^*(\alpha)-\omega_0^*(-\alpha)\right]\cdot\frac{\alpha+2}{2\cdot b^2\cdot\tau}\cdot e^{-\frac{(\alpha+2)^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}}\right\}d\alpha.$$

Робимо заміну $z(\alpha)=\omega_0^*(\alpha)-\omega_0^*(-\alpha)$ і, інтегруючи по частинах, отримуємо:

$$\left(\frac{\partial\omega^*}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}=\frac{1}{b\cdot\sqrt{2\cdot\pi\cdot\tau}}\times$$

$$\times\left\{-z(\alpha)\cdot e^{-\frac{\alpha+2}{2\cdot b^2\cdot\tau}}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}}z'd\alpha+\right.$$

$$\left.+z(\alpha)\cdot e^{-\frac{\alpha+2}{2\cdot b^2\cdot\tau}}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha+2}{2\cdot b^2\cdot\tau}}z'd\alpha\right\}.$$

Беручи до уваги те, що в нулі початкові функції збігаються, можна остаточно записати:

$$\left(\frac{\partial\omega^*}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}=\frac{1}{b\cdot\sqrt{2\cdot\pi\cdot\tau}}\times$$

$$\times\int_0^\infty\left[\frac{d\omega_0^*(\alpha)}{d\alpha}-\frac{d\omega_0^*(-\alpha)}{d\alpha}\right]\cdot\left[e^{-\frac{\alpha^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}}-e^{-\frac{(\alpha+2)^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}}\right]d\alpha.$$

Враховуючи обчислені значення, умова (13) у розгорнутому вигляді набуває вигляду

$$\frac{1}{b\cdot\sqrt{2\cdot\pi\cdot\tau}}\times$$

$$\times\int_0^\infty\left[\frac{d\omega_0^*(\alpha)}{d\alpha}-\frac{d\omega_0^*(-\alpha)}{d\alpha}+\frac{a}{b^2}\cdot\omega_0^*(\alpha)+\right.$$

$$\left.+\frac{a}{b^2}\cdot\omega_0^*(-\alpha)\right]\cdot\left[e^{-\frac{\alpha^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}}-e^{-\frac{(\alpha+2)^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}}\right]d\alpha=0.$$

Останній інтеграл для всіх значень τ обертається в нуль за умови:

$$\frac{d\omega_0^*(\alpha)}{d\alpha}-\frac{d\omega_0^*(-\alpha)}{d\alpha}+$$

$$+\frac{a}{b^2}\cdot\omega_0^*(\alpha)+\frac{a}{b^2}\cdot\omega_0^*(-\alpha)=0.$$

Знайдемо вираз для продовження початкової функції у від'ємну область, вирішуючи останнє рівняння:

$$\frac{d\omega_0^*(-\alpha)}{d\alpha}-\frac{a}{b^2}\cdot\omega_0^*(-\alpha)=\frac{d\omega_0^*(\alpha)}{d\alpha}+\frac{a}{b^2}\cdot\omega_0^*(\alpha).$$

В результаті інтегрування цього диференціального рівняння маємо:

$$\omega_0^*(-\alpha)=\omega_0^*(\alpha)+\frac{2\cdot\alpha\cdot e^{-\frac{a}{b^2}\cdot\alpha}}{b^2}\cdot\int_0^\infty\omega_0^*(\alpha)\cdot e^{-\frac{a}{b^2}}d\alpha.$$

Підставляючи знайдене значення $\omega_0^*(-\alpha)$, отримаємо рішення рівняння (11), що задовольняє умовам (12), (13), (14) у наступному вигляді:

$$\omega^*(0,\ 0;\ \xi,\ \tau)=\frac{1}{b\cdot\sqrt{2\cdot\pi\cdot\tau}}\cdot\int_0^\infty\left\{\omega_0^*(\alpha)\times\right.$$

$$\left[e^{-\frac{(\alpha-\xi)^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}}-e^{-\frac{(\alpha-\xi+2)^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}}\right]+\omega_0^*(\alpha)\cdot\left[e^{-\frac{(\alpha+\xi)^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}}-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{(\alpha+\xi+2)^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}}\right]+\frac{2\cdot a\cdot e^{-\frac{a}{b^2}\cdot\alpha}}{b^2}\cdot\left[e^{-\frac{(\alpha+\xi)^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}}-\right.$$

$$\left.\left.e^{-\frac{(\alpha+\xi+2)^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}}\right]\cdot\int_0^\alpha\omega_0^*(\alpha)\cdot e^{-\frac{a}{b^2}\cdot\alpha}d\alpha\right\}d\alpha.$$

Конкретизуючи початковий розподіл, вважаємо, наприклад, що процес починається з деякої детермінованої величини $\xi=0$. Тоді ω_0 перетворюється в дельта-функцію. Після деяких перетворень, враховуючи співвідношення (10), отримуємо такий вираз для щільності перехідної імовірності, що відповідає рішенню (3) і крайовим умовам (7), (8), (9):

$$\omega(0,\ 0;\ \xi,\ \tau)=\frac{2}{b\cdot\sqrt{2\cdot\pi\cdot\tau}}\cdot\left[e^{-\frac{(\xi-\alpha\cdot\tau)^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}}-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{(\xi-2-\alpha\cdot\tau)^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}+\frac{2\cdot a}{b^2}}\right]+\frac{2\cdot a}{b^2}\cdot\Phi\left(\frac{a\cdot\tau-\xi}{b\cdot\sqrt{\tau}}\right)-\qquad(16)$$

$$-\frac{2\cdot a}{b^2}\cdot e^{\frac{2\cdot a}{b^2}\cdot(\xi-1)}\cdot\Phi\left(\frac{2\cdot\tau+\xi-2}{b\cdot\sqrt{\tau}}\right).$$

Тут $\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{z}e^{-\frac{u^2}{2}}du.$

Якщо прийняті початкові нульові умови і нормований визначальний параметр, то вираз для щільності розподілу імовірностей напрацювання на відмову, враховуючи (4) і (5), можна переписати в такому вигляді:

DOI: 10.24025/2306-4412.4.2022.269282

$$f(T)=\left(-\int_{-\infty}^{1}\frac{\omega(0,\ 0;\ \xi,\ \tau)}{\partial\tau}d\xi\right)_{\tau=T}. \quad (17)$$

Обчислимо підінтегральний вираз (17).

Диференціюючи (16), маємо:

$$\frac{\partial\omega}{\partial\tau}=\frac{\xi^2-\alpha^2\cdot\tau^2-b^2\cdot\tau}{b^3\cdot\tau^2\cdot\sqrt{2\cdot\pi\cdot\tau}}\cdot e^{-\frac{(\xi-\alpha\cdot\tau)^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}}-$$
$$-\frac{(\xi-2)^2-\alpha^2\cdot\tau^2-b^2\cdot\tau}{b^3\cdot\tau^2\cdot\sqrt{2\cdot\pi\cdot\tau}}\cdot e^{-\frac{(\xi-\alpha\cdot\tau-2)^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}+\frac{2\cdot a}{b^2}}+$$
$$+\frac{\alpha\cdot(a\cdot\tau+\xi)}{b^3\cdot\tau\cdot\sqrt{2\cdot\pi\cdot\tau}}\cdot e^{-\frac{(\alpha\cdot\tau-\xi)^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}}-$$
$$-\frac{\alpha\cdot(a\cdot\tau-\xi+2)}{b^3\cdot\tau\cdot\sqrt{2\cdot\pi\cdot\tau}}\cdot e^{-\frac{(\xi-\alpha\cdot\tau-2)^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}+\frac{2\cdot a}{b^2}}.$$

Зробивши деякі перетворення, можна записати останній вираз коротше:

$$\frac{\partial\omega}{\partial\tau}=\frac{\xi^2+\alpha\cdot\tau\cdot\xi-b^2\cdot\tau}{b^3\cdot\tau^2\cdot\sqrt{2\cdot\pi\cdot\tau}}\cdot e^{-\frac{(\xi-\alpha\cdot\tau)^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}}-$$
$$-\frac{(\xi-2)^2-(\xi+2)\cdot\alpha\cdot\tau-b^2\cdot\tau}{b^3\cdot\tau^2\cdot\sqrt{2\cdot\pi\cdot\tau}}\cdot e^{-\frac{(\xi-\alpha\cdot\tau-2)^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}+\frac{2\cdot a}{b^2}}.$$

Тепер проінтегруємо (17), підставивши отриманий вираз:

$$f(\tau)=\int_{-\infty}^{1}\left[\frac{(\xi-2)^2-(\xi-2)\cdot\alpha\cdot\tau-b^2\cdot\tau}{b^3\cdot\tau^2\cdot\sqrt{2\cdot\pi\cdot\tau}}\times\right.$$
$$\left.\times e^{-\frac{(\xi-2-\alpha\cdot\tau)^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}+\frac{2\cdot a}{b^2}}-\frac{\xi^2+\xi\cdot\alpha\cdot\tau-b^2\cdot\tau}{b^3\cdot\tau^2\cdot\sqrt{2\cdot\pi\cdot\tau}}\cdot e^{-\frac{(\xi-\alpha\cdot\tau)^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}}\right]d\xi.$$

Зробимо заміни змінних:

$$z=\frac{(\xi-2-\alpha\cdot\tau)}{b\cdot\sqrt{2\cdot\pi}},\ \ u=\frac{(\xi-\alpha\cdot\tau)}{b^2\cdot\tau}.$$

Після деяких перетворень маємо:

$$f(\tau)=\frac{1}{b^2\cdot\tau^2\cdot\sqrt{\pi}}\times$$
$$\times\left\{\int_{-\infty}^{-\frac{1+\alpha\cdot\tau}{b\cdot\sqrt{2\cdot\tau}}}\left(2\cdot b^2\cdot z^2+a\cdot b\cdot\sqrt{2\cdot\tau}\cdot z\right)\cdot\tau\cdot e^{-z^2}dz-\right.$$
$$-\int_{-\infty}^{\frac{1-\alpha\cdot\tau}{b\cdot\sqrt{2\cdot\tau}}}\left(2\cdot b^2\cdot\tau\cdot u^2+3\cdot a\cdot b\cdot\tau\cdot\sqrt{2\cdot\tau}\cdot u+\right.$$
$$\left.\left.+2\cdot a^2\cdot\tau^2-b^2\cdot\tau\right)\cdot e^{-u^2}du\right\}.$$

В результаті інтегрування отримуємо:

$$f(\tau)=\frac{1}{b^2\cdot\tau^2\cdot\sqrt{\pi}}\cdot\left\{\left[-b^2\cdot\tau\cdot\left(z\cdot e^{-z^2}\right)\right]\Bigg|_{-\infty}^{-\frac{1+\alpha\cdot\tau}{b\cdot\sqrt{2\cdot\tau}}}+\right.$$
$$+b^2\cdot\tau\cdot\int_{-\infty}^{-\frac{1+\alpha\cdot\tau}{b\cdot\sqrt{2\cdot\tau}}}e^{-z^2}dz-\frac{a\cdot b\cdot\tau\cdot\sqrt{2\cdot\tau}}{2}\cdot e^{-z^2}-$$
$$-b^2\cdot\tau\cdot\int_{-\infty}^{-\frac{1+\alpha\cdot\tau}{b\cdot\sqrt{2\cdot\tau}}}e^{-z^2}dz-\left[b^2\cdot\tau\cdot\left(-u\cdot e^{-u^2}\right)\right]\Bigg|_{-\infty}^{-\frac{1-\alpha\cdot\tau}{b\cdot\sqrt{2\cdot\tau}}}-$$
$$-b^2\cdot\tau\cdot\int_{-\infty}^{\frac{1-\alpha\cdot\tau}{b\cdot\sqrt{2\cdot\tau}}}e^{-u^2}du+\frac{3\cdot a\cdot b\cdot\tau\cdot\sqrt{2\cdot\tau}}{2}\cdot e^{-u^2}+$$
$$\left.+\left(2\cdot a^2\cdot\tau^2-b^2\cdot\tau\right)\cdot\int_{-\infty}^{\frac{1-\alpha\cdot\tau}{b\cdot\sqrt{2\cdot\tau}}}e^{-u^2}du\right\}.$$

Провівши зворотну заміну, після деяких перетворень отримуємо вираз шуканої функції:

$$f(\tau)=\frac{2\cdot(1+\alpha\cdot\tau)}{b\cdot\tau\cdot\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\frac{(1-\alpha\cdot\tau)^2}{2\cdot b^2\cdot\tau}}-$$
$$-\frac{2\cdot a^2}{b^2}\cdot\Phi\left(\frac{1-\alpha\cdot\tau}{b\cdot\sqrt{\tau}}\right).$$

Оскільки шукана функція являє собою щільність розподілу імовірностей, вона повинна задовольняти відомому нормуванню $\int_0^{+\infty}f(\tau)d\tau=1.$

Здійснюючи відповідне нормування і перейшовши до параметра випробувань N (кількість циклів напрацювання), отримаємо вираз для щільності імовірності напрацювання на відмову остаточно в такому вигляді:

$$f(N)=\frac{1+a\cdot N}{2\cdot b\cdot N\cdot\sqrt{2\cdot\pi\cdot N}}\cdot e^{-\frac{(1-a\cdot N)^2}{2\cdot b^2\cdot N}}-$$
$$-\frac{a^2}{2\cdot b^2}\cdot\Phi\left(\frac{1-a\cdot N}{b\cdot\sqrt{N}}\right). \quad (18)$$

Обговорення результатів. Отриманий математичний вираз для щільності розподілу часу до першої відмови є так званим дифузійним розподілом двопараметричної функції з конкретною фізичною інтерпретацією своїх параметрів, один з яких являє собою нормовану середню швидкість зміни визначального параметра, який характеризує якість контактування, а другий – середньоквадратичне відхилення.

DOI: 10.24025/2306-4412.4.2022.269282

Дифузійний розподіл має досить прості аналітичні вирази для оцінок своїх параметрів, а також для всіх основних показників надійності.

Дифузійний розподіл стійкий до операції згортки. Тому він може бути використаний для опису відмов при нелінійній зміні середнього значення визначального параметра. При цьому неоднорідний процес квантується на однорідні ділянки і час виходу за граничний рівень виходить в результаті згортки проміжків часу напрацювання на лінеаризованих ділянках, що містять стислий опис отриманих найважливіших наукових і практичних результатів.

Висновки. В результаті дослідження отримано математичну модель на основі стохастичного рівняння Фоккера-Планка-Колмогорова та встановлено зв'язок ймовірності відмови і фізичного параметра ($R_{кд}$), що викликає відмову, внаслідок чого параметри імовірнісного розподілу відмов мають певний фізичний сенс і конкретну фізичну інтерпретацію. Таким чином, отримано імовірнісно-фізичну модель, що має перевагу перед строго імовірнісними моделями надійності в тому, що її параметри можуть бути оцінені на підставі як статистики відмов, так і аналізу фізичних процесів деградації. Отримана математична модель може бути застосована для оцінки надійності як комп'ютерної техніки, так і інших електронних та електромеханічних пристроїв, які характеризуються наявністю контактного опору.

Наукова новизна проведеного дослідження полягає в отриманні математичної моделі здатної ефективно вирішувати необхідні для інженерної практики завдання оцінки надійності, зокрема розрахунок надійності технічних систем, що розширює можливості при вирішенні традиційних конструкторських і технологічних завдань по створенню високоякісних виробів і правильній їх експлуатації.

Практичне значення. Запропонована математична модель дозволяє вирішувати завдання оцінки надійності комп'ютерної техніки.

Перспективи подальших досліджень. Надалі передбачається дослідження впливу запропонованої математичної моделі на точність оцінки надійності комп'ютерної техніки порівняно з традиційними ймовірнісними методами.

Список використаних джерел

[1] А. В. Федухин, "К вопросу о прогнозировании остаточного ресурса изделий электронной техники", *Мат. машини і системи*, № 1, с. 149-156, 2020.

[2] А. В. Федухин, и Н. В. Сеспедес-Гарсия, "К вопросу о статистическом моделировании надежности", *Мат. машини і системи*, № 1, с. 156-163, 2006.

[3] V. Bogachev, N. Krylov, M. Rockner, and S. Shaposhnikov, *Fokker–Planck–Kolmogorov equations: Mathematical surveys and monographs*, vol. 207. USA: American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 2015.

[4] В. П. Стрельников, и А. В. Федухин, *Оценка и прогнозирование надежности электронных элементов и систем*. Киев, Украина: Логос, 2002.

[5] В. П. Стрельников, А. Н. Волощук, и Н. Г. Вороная, "Исследование методов контроля средних показателей безотказности вычислительной техники", *Мат. машини і системи*, № 3, с. 180-185, 2005.

[6] В. П. Стрельников, и К. А. Антипенко, "О методических погрешностях прогнозирования ресурса высоконадежных изделий электронной техники", *Мат. машини і системи*, № 3, с. 164-167, 2004.

[7] В. П. Стрельников, и О. Б. Кравченко, "Планирование испытаний средств вычислительной техники на безотказность при DN-распределении наработки систем", *Мат. машины и системы*, № 1, с. 105-107, 1998.

[8] В. П. Стрельников, "Оценка ресурса изделий электронной техники", *Мат. машини і системи*, № 2, с. 186-195, 2004.

[9] В. П. Стрельников, "Прогнозирование надежности электронных систем при отсутствии отказов с использованием дополнительной априорной информации", *Мат. машини і системи*, № 3-4, с. 226-231, 2003.

[10] В. Ф. Гришко, и С. В. Жульжик, "Оптимизация комплектования компьютерных систем по критериям надежности", *Інформаційні технології і комп'ютерна техніка: наук. праці ВНТУ*, № 2, с. 1-2, 2009.

[11] ДСТУ 2992-95. *Вироби електронної техніки. Методи розрахунку надійності*. Київ: Вид-во Держстандарту України, 1995.

DOI: 10.24025/2306-4412.4.2022.269282

[12] ДСТУ 8647:2016. *Надійність техніки. Оцінювання і прогнозування надійності за результатами випробувань і/або експлуатації в умовах малої кількості відмов*. Київ: Вид-во Держстандарту України, 2017.
[13] D. Sourabh, and A. Raghuvanshi, "Fault tolerance techniques in distributed system computer", *IJEIR*, vol. 1, iss. 2, pp. 24-130, 2012. ISSN: 2277 – 5668.
[14] D. J. Sorin, *Fault Tolerant Computer Architecture*. Morgan & Claypool, 2009.
[15] T. D. Frank, *Nonlinear Fokker–Planck Equations: Fundamentals and Applications*. Berlin, Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, 2005.
[16] Jitendra Kumar, Vikas Shinde, and Mukta Kalra, "Availability and reliability analysis of computer systems", *Int. Journal of Control Theory and Applications*, vol. 10, pp. 267-275, 2017.
[17] M. Abd-El-Barr, *Design and Analysis of Reliable and Fault-Tolerant Computer Systems*. London: Imperial College Press, 2007.
[18] M. Rausand, and A. Hoyland, *System Reliability Theory: Models, Statistical Methods, and Applications*, 2-nd ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2004.
[19] M. Braunovic, V. V. Konchits, and N. K. Myshkin, *Electrical Contacts: Fundamentals, Applications and Technology*. New York: CRC Press, 2007.
[20] Paul G. Slade, *Electrical Contacts: Principles and Applications*, 2-nd ed. CRC Press, 2013, Technology & Engineering.
[21] M. L. Shooman, *Reliability of Computer Systems and Networks: Fault Tolerance, Analysis and Design.* New York: John Wiley and Sons, 2002.
[22] H. Wang, and Y. Wang, "Designing fault tolerance strategy by iterative redundancy for component-based distributed computing systems", Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering, vol. 2014, article ID 197423, 11 p.

References

[1] A. V. Feduhin, " On the issue of predicting the residual life of electronic products", *Matematychni mashyny i systemy*, no. 1, pp. 149-156, 2020 [in Russian].
[2] A. V. Feduhin, and N. V. Sespedes-Garsiya, "On the issue of statistical modeling of reliability", *Matematychni mashyny i systemy*, no. 1, pp. 156–163, 2006 [in Russian].
[3] V. Bogachev, N. Krylov, M. Rockner, and S. Shaposhnikov, *Fokker–Planck–Kolmogorov equations: Mathematical surveys and monographs,* vol. 207. USA: American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 2015.
[4] V. P. Strel'nikov, and A. V. Feduhin, *Assessment and Prediction of the Reliability of Electronic Components and Systems*. Kiev, Ukraine: Logos, 2002 [in Russian].
[5] V. P. Strel'nikov, A. N. Voloshchuk, and N. G. Voronaya, "Study of methods for monitoring the average indicators of non-failure operation of computer equipment", *Matematychni mashyny i systemy*, no. 3, pp. 180-185, 2005 [in Russian].
[6] V. P. Strel'nikov, and K. A. Antipenko, "On methodological errors in predicting the resource of highly reliable electronic products", *Matematychni mashyny i systemy*, no. 3, pp. 164-167, 2004 [in Russian].
[7] V. P. Strel'nikov, and O. B. Kravchenko, "Planning of testing of computer facilities for fail-safety with DN-distribution of operating time of systems", *Matematychni mashyny i systemy*, no. 1, pp. 105-107, 1998 [in Russian].
[8] V. P. Strel'nikov, "Assessment of the resource of electronic products", *Matematychni mashyny i systemy*, no 2, pp. 186-195, 2004 [in Russian].
[9] V. P. Strel'nikov, "Forecasting the reliability of electronic systems in the absence of failures using additional a priori information", *Matematychni mashyny i systemy*, no. 3-4, pp. 226-231, 2003 [in Russian].
[10] V. F. Grishko, and S. V. Zhul'zhik, "Optimization of acquisition of computer systems according to reliability criteria", *Informatsiini tekhnolohii i kompiuterna tekhnika*: sci. papers of VNTU, no. 2, pp. 1-2, 2009 [in Russian].
[11] DSTU 2992-95. *Products of electronic equipment. Reliability calculation methods.*

DOI: 10.24025/2306-4412.4.2022.269282

Kyiv: Vyd-vo Derzhstandartu Ukrainy, 1995 [in Ukrainian].

[12] DSTU 8647:2016. *Reliability of equipment. Evaluation and prediction of reliability based on the results of tests and/or operation in conditions of a small number of failures.* Kyiv: Vyd-vo Derzhstandartu Ukrainy, 2017 [in Ukrainian].

[13] D. Sourabh, and A. Raghuvanshi, "Fault tolerance techniques in distributed system computer", *IJEIR*, vol. 1, iss. 2, pp. 24-130, 2012. ISSN: 2277 – 5668.

[14] D. J. Sorin, *Fault Tolerant Computer Architecture*. Morgan & Claypool, 2009.

[15] T. D. Frank, *Nonlinear Fokker–Planck Equations: Fundamentals and Applications*. Berlin, Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, 2005.

[16] Jitendra Kumar, Vikas Shinde, and Mukta Kalra, "Availability and reliability analysis of computer systems", *Int. Journal of Control Theory and Applications*, vol. 10, pp. 267-275, 2017.

[17] M. Abd-El-Barr, *Design and Analysis of Reliable and Fault-Tolerant Computer Systems.* London: Imperial College Press, 2007.

[18] M. Rausand, and A. Hoyland, *System Reliability Theory: Models, Statistical Methods, and Applications,* 2-nd ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2004.

[19] M. Braunovic, V. V. Konchits, and N. K. Myshkin, *Electrical Contacts: Fundamentals, Applications and Technology*. New York: CRC Press, 2007.

[20] Paul G. Slade, *Electrical Contacts: Principles and Applications,* 2-nd ed. CRC Press, 2013, Technology & Engineering.

[21] M. L. Shooman, *Reliability of Computer Systems and Networks: Fault Tolerance, Analysis and Design.* New York: John Wiley and Sons, 2002.

[22] H. Wang, and Y. Wang, "Designing fault tolerance strategy by iterative redundancy for component-based distributed computing systems", Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering, vol. 2014, article ID 197423, 11 p.

O. O. Sytnyk[1], *Dr. Tech. Sc., Professor,*
V. B. Kyselov[1], *Ph. D., Associate Professor,*
H. O. Kyselova[1], *Senior Lecturer,*
e-mail: annakys.777@gmail.com
V. I. Kostiuchenko[2], *Ph. D., Associate Professor*
e-mail: vitalii.kostiuchenko@nuos.edu.ua
[1]Cherkasy State Technological University
Shevchenko blvd, 460, Cherkasy, 18006, Ukraine
[2]Admiral Makarov National University of Shipbuilding
Heroes of Ukraine ave., 9, Mykolaiv, 54025, Ukraine

MATHEMATICAL MODEL OF COMPUTER EQUIPMENT RELIABILITY

The article is devoted to the construction of a mathematical model of reliability of computer equipment devices. The mathematical model is constructed by using the probability diffusion equation, which corresponds to a stochastic process and is a two-parameter function, whose parameter estimates have fairly simple analytical expressions that meet the requirements of international practice. Computer technology is widely used as various devices (personal computers, computers, laptops, mainframes, clusters, servers, workstations). Their main purpose is to provide the user with stable access to information stored on their media and the possibility of continuous processing of this information, which makes it necessary to constantly maintain such systems in a working state. Thus, computer equipment refers to systems that require a high degree (level) of reliability. Given that the level of reliability of any equipment during its operation is constantly decreasing, which is due to the processes of aging and wear, the determination and prediction of reliability is an urgent scientific and

DOI: 10.24025/2306-4412.4.2022.269282

technical task. One of the most common methods for determining and predicting the state of an object at any given time are probabilistic-physical methods, which are based on the use of probabilistic models for processing statistical information obtained during operation, or testing real physical objects. Regardless of the type of computer equipment, it includes electronic, electrical and electromechanical elements that preserve their functional properties for the entire period of use. According to modern views on the operation of electronic, electrical and electromechanical elements, a complex factor that characterizes the technical condition of the element is the qualitative passage of an electrical signal through contact connections, which is determined by the value of the contact resistance. The obtained mathematical model of the distribution density is a two-parameter function, the parameters of which have a physical interpretation in the form of the rate of change of contact resistance and the root mean square deviation of the velocity.

Keywords: *probabilistic-physical method, two-parameter function, defining parameter, contact resistance, Fokker-Planck-Kolmogorov equation.*

Стаття надійшла 12.11.2022
Прийнято 08.12.2022

DOI: 10.24025/2306-4412.4.2022.269282