

ISSN 2521-635X

*Volume 2
Number 1*

2018

Journal of Baku Engineering University

**MATHEMATICS AND
COMPUTER SCIENCE**

Journal is published twice a year
Number - 1. June, Number - 2. December

An International Journal

<http://journal.beu.edu.az>

Founder

Havar Mammadov

Editor-in-chief

Niftali Qocayev

Co-Editors

Hamzaga Orucov

Agasi Melikov

Editorial advisory board

Alekber Aliyev (Azerbaijan, Baku State University)

Abzeddin Adamov (Azerbaijan, ADA)

Gorbachuk Valentina Ivanovna (Ukraina, Academy of Science)

Hamdulla Aslanov (Azerbaijan, Akademy of Science)

Khalil Ismailov (Azerbaijan, BANM)

Nadir Agayev (Azerbaijan, Aviasiya University)

Rakib Efendiyev (Azerbaijan, Baku State University)

Sosnin Petr Ivanovich (Russia, Ulyanovsk State Technical University)

Vaqif Quliyev (Azerbaijan, Akademy of Science)

International Advisory board

Abdeljalil Nachaoui (France, Nantes University)

Bariş Erbaş, (Anadolu University, Turkey)

Che Soong Kim (Koreya, Sangji University)

Chakib Abdelkrim, (Morocco, BeniMellal University)

FeodorRofo-Beketov, (Ukraine, Kharkov)

Garib Murshudov (York Academy, UK, London)

Gorbarchuk Vladimir Ivanovich (Poland, Lyubel Polytechnic University)

Golovko Vladimir Adamovich (Belarus, Brest State Universiteti)

Hamed Sari-Sarraf (USA, Texas Technik University)

Hari Srivastava (Canada, Victoria,)

Jauberteau Francois (France, Nantes University)

Krivoson Yuriy Georgievich (Ukraine, Academy of Science)

Ludmila Prikazchikova, (Keele University, England)

Mourad Nachaoui, (France, Nantes University)

Nadir Alisov (Ukraine, Academy of Science)

Rasim Alikuliyev (Azerbaijan, National Academy of Science)

Ramiz Alikuliyev (Azerbaijan, National Academy of Science)

Tarasenko Vladimir Petrovich (National Technical University of Ukraine)

Telman Aliyev (Azerbaijan, National Academy of Science)

Vedat Coşkun (Turkiye, Işık University)

Vladimir B. Vasilyev, (Russia, Lipetsk State Technical University)

Executive Editors

Shafag Alizade

Assistant Editors

Svetlana Denmuhammedovna

Design

Ilham Aliyev

Contact address

Journal of Baku Engineering University

AZ0102, Khirdalan city, Hasan Aliyev str. 120, Absheron, Baku, Azerbaijan

Tel: 00 994 12 - 349 99 95 Fax: 00 994 12 349-99-90/91

e-mail: journal@beu.edu.az

web: <http://journal.qu.edu.az>

facebook: [Journal Of Baku Engineering University](https://www.facebook.com/Journal-Of-Baku-Engineering-University)

Copyright © Baku Engineering University

ISSN 2521-635X

ISSN 2521-635X



Journal of Baku Engineering University

**MATHEMATICS AND
COMPUTER SCIENCE**

Baku - AZERBAIJAN

Journal of Baku Engineering University

MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

2018. Volume 2, Number 1

CONTENTS

**ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО
ТРАНСФОРМАТОРА СТЕРЖНЕВОГО ТИПА**

Олег Петрищев, Константин Базило, Эмиль Фауре _____ 3

**ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО
УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ГУРСА-ДАРБУ**

К.Б. Мансимов, В.А. Сулейманова _____ 19

**ORTHOGONALITY RELATION FOR THE CHARLIER POLYNOMIALS
WITH RESPECT TO THE CONTINUOUS MEASURE**

G.H. Guliyeva, E.I. Jafarov, A.M. Jafarova _____ 31

**THE SYSTEM OF DEGENERATE INTEGRO-DIFFERENTIAL
EQUATIONS WITH PARAMETERS**

Hummet K. Musaev _____ 36

О СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ ИЗ ГРАНД ГРАНД ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА-МОРРИ

Алик М. Наджафов, Саин Т. Алекберли _____ 46

**ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ ДЛЯ
ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

Г.И. Заманов _____ 52

УДК: 621.373.826.032:534.232.082.73

PACS : 77.65.Bn, 62.20.dq

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТРАНСФОРМАТОРА СТЕРЖНЕВОГО ТИПА

Олег ПЕТРИЩЕВ¹, Константин БАЗИЛО², Эмиль ФАУРЕ²

¹Государственное предприятие «Киевский государственный
научно-исследовательский институт гидроприборов»

Киев / УКРАИНА

²Черкасский государственный технологический университет

Черкассы / УКРАИНА

b_constantine@ukr.net

РЕЗЮМЕ

Актуальность применения различных функциональных элементов пьезоэлектроники в силовых и информационных системах объясняется, прежде всего, их высокой надежностью, а также малыми габаритами и весом, что в значительной мере облегчает решение проблемы миниатюризации таких систем. В настоящее время существует потребность в создании целостной методики построения математических моделей пьезоэлектрических трансформаторов, которая могла бы использоваться как теоретическая основа расчета их характеристик и параметров. В работе построена математическая модель пьезоэлектрического трансформатора стержневого типа, показаны основные особенности математического моделирования пьезоэлектрических трансформаторов, рассмотрена простейшая конструкция трансформатора в виде призматического стержня с прямоугольным поперечным сечением, изготовленного из пьезокерамики, определены выражения для расчета коэффициента трансформации и амплитудного значения потенциалов на электродах пьезоэлектрического трансформатора стержневого типа.

Ключевые слова: пьезоэлектрический элемент, стержень, математическая модель.

THE CONSTRUCTION OF MATHEMATICAL MODEL OF ROD TYPE PIEZOELECTRIC TRANSFORMER

ABSTRACT

The relevance of the use of various functional elements of piezoelectronics in power and informational systems is explained, first of all, by their high reliability, as well as small dimensions and weight, which greatly facilitates the solution of the problem of miniaturization of such systems. Currently, there are no reliable and valid methods of constructing of mathematical models of piezoelectric transformers, which could be used as a theoretical basis for characteristics and parameters calculating of this class of functional elements of modern piezoelectronics. The main result of this article can be fixed as follows: mathematical model of rod type piezoelectric transformer is obtained, the simplest construction of rod type piezoelectric transformer with a rectangular cross section is considered, expressions for calculating the transformation ratio and amplitude values of potentials on the electrodes of rod type piezoelectric transformer are defined.

Keywords: piezoelectric element, rod, mathematical model.

1. Введение

Актуальность применения различных функциональных элементов пьезоэлектроники в силовых и информационных системах объясняется, прежде всего, их высокой надежностью [1] – интенсивность отказов составляет 10^{-6} , т. е. сопоставима с показателями надежности интегральных микросхем, а также малыми габаритами и весом, что в значительной мере облегчает решение проблемы миниатюризации таких систем.

Построению и исследованию математических моделей пьезоэлектрических трансформаторов посвящено немало публикаций. Начиная с монографии [2], основы расчета передаточных характеристик пьезоэлектрических трансформаторов рассматривались, например, в работах [3–6]. Однако рассмотренные работы не объединены каким-либо системным подходом, имеют характер разрозненных эпизодов, на основании чего можно утверждать, что в настоящее время существует потребность в создании целостной методики построения математических моделей пьезоэлектрических трансформаторов, которая могла бы использоваться в качестве теоретической основы расчета их характеристик и параметров.

Таким образом, актуальность разработки физически содержательных математических моделей пьезоэлектрических трансформаторов сохраняется и в настоящее время.

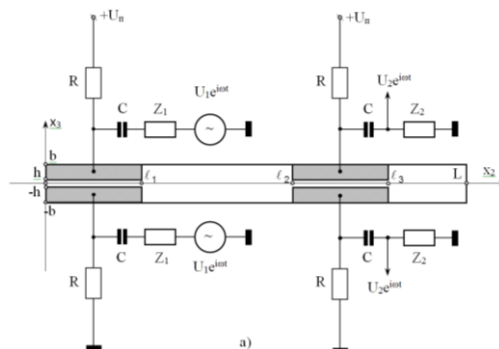
Целью данной работы является построение математической модели пьезоэлектрического трансформатора стержневого типа.

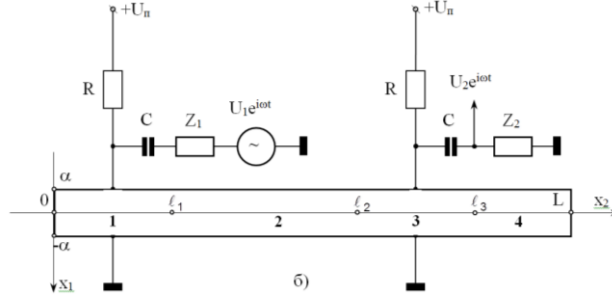
2. Метод исследования и результаты

Рассмотрим конструкцию стержневого пьезоэлектрического трансформатора (рис. 1). На рис. 1,а показан вид на стержневой трансформатор сбоку, с острия координатной оси Ox_1 правосторонней декартовой системы координат (x_1, x_2, x_3) . На рис. 1,б показан вид на стержень с острия оси Ox_3 (вид сверху). Схема подключения электродов (заштрихованные поверхности на рис. 1,а) на участке стержня $0 \leq x_2 \leq \ell_1$ показана на рис. 2,а. На рис. 2,б и рис. 2,в показан (ориентировочно) характер изменения постоянного и переменного электрического поля по высоте поперечного сечения стержня. Призматический стержень изготовлен из сегнетоэлектрика, т. е. из не поляризованной пьезокерамики типа ЦТС.

Четыре электрода, расположенные парами на боковых поверхностях $x_1 = \pm a$ сегнетоэлектрического стержня образуют электродную группу первичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора. На эти электроды подается (рис. 2,а) постоянное, поляризующее сегнетоэлектрик, электрическое напряжение U_n , которое формирует в области $0 \leq x_2 \leq \ell_1$ (область №1 на рис. 1,б) постоянное электрическое поле. Характер изменения напряженности поляризующего сегнетоэлектрик электрического поля показан на рис. 2,б. Для того, чтобы надежно обеспечить равенство нулю компонента E_1^0 вектора напряженности поляризующего электрического поля в промежутке $-h \leq x_3 \leq h$ (рис. 2,а), необходимо в этом промежутке разместить на поверхностях $x_1 = \pm a$ электроды, закороченные на общую шину.

Рис. 1. Схематическое изображение конструкции стержневого пьезоэлектрического трансформатора на изгибных колебаниях





В результате электрической поляризации сегнетоэлектрический стержень на участке №1 приобретает свойства пьезоэлектрика со следующим набором материальных констант:

– матрица модулей упругости $c_{\beta\lambda}^{(\pm)}$ (β, λ – индексы Фойгта)

$$\left| c_{\beta\lambda}^{(\pm)} \right| = \begin{pmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22}^E & c_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44}^E & 0 & 0 \\ & & & & c_{55}^E & 0 \\ & & & & & c_{66}^E \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где знак плюс в верхнем правом индексе соответствует области $x_3 > 0$, а знак минус – области $x_3 < 0$; $c_{11}^E \neq c_{22}^E = c_{33}^E$; $c_{12}^E = c_{13}^E = c_{23}^E$; $c_{44}^E = (c_{22}^E - c_{23}^E)/2$; $c_{55}^E = c_{66}^E$.

– матрица пьезоэлектрических модулей $e_{k\beta}^{(\pm)}$ (β – индекс Фойгта)

$$\left| e_{k\beta}^{(\pm)} \right| = \pm \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{35} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $e_{11} \neq e_{12} = e_{13}$; $e_{26} = e_{35} = (e_{11} - e_{12})/2$.

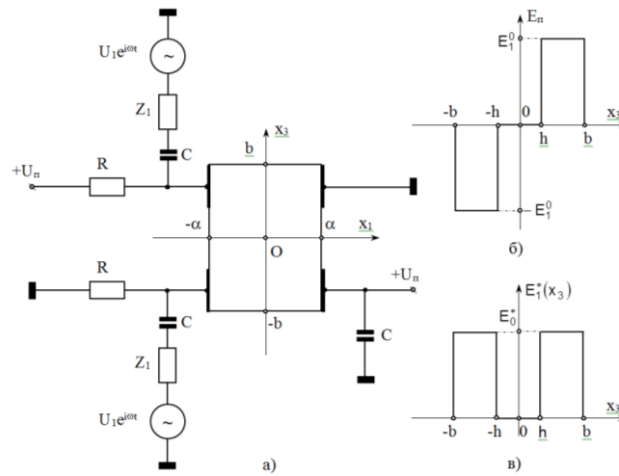
– матрица диэлектрических проницаемостей χ_{ij}^ε

$$\left| \chi_{ij}^\varepsilon \right| = \begin{pmatrix} \chi_{11}^\varepsilon & 0 & 0 \\ & \chi_{22}^\varepsilon & 0 \\ & & \chi_{33}^\varepsilon \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $\chi_{11}^\varepsilon \neq \chi_{22}^\varepsilon = \chi_{33}^\varepsilon$.

На участках №2 и №4 (рис. 1,б), где поверхности сегнетоэлектрического стержня не покрыты электродами, пьезоактивный материал стержня является изотропным по упругим и электрическим свойствам. При этом матрицы модулей упругости и сегнетоэлектрических констант являются матрицами изотропных тензоров четвертого ранга, тензор диэлектрической проницаемости определяется одной константой χ^ε , компоненты тензора пьезоэлектрических констант, естественно, равны нулю. Так как изотропный тензор четвертого ранга в общем случае полностью определяется двумя константами

Рис. 2. Схема подключения источников постоянного и переменного потенциалов к электродам первичной электрической цепи (а) и распределение по высоте поперечного сечения постоянного (б) и амплитудного значения переменного (в) электрических полей



A и B , а произвольный его компонент T_{ijkl} находится по формуле $T_{ijkl} = A\delta_{ij}\delta_{kl} + B(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$, где $\delta_{ij}, \dots, \delta_{jk}$ – символы Кронекера, то матрицы модулей упругости $c_{ijkl} = c_{\beta\lambda}$ и электрострикционных констант $e_{ijk\ell} = e_{\beta\lambda}$ имеют следующий вид

$$|c_{\beta\lambda}| = \begin{vmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ & & & & G & 0 \\ & & & & & G \end{vmatrix}, \quad (4)$$

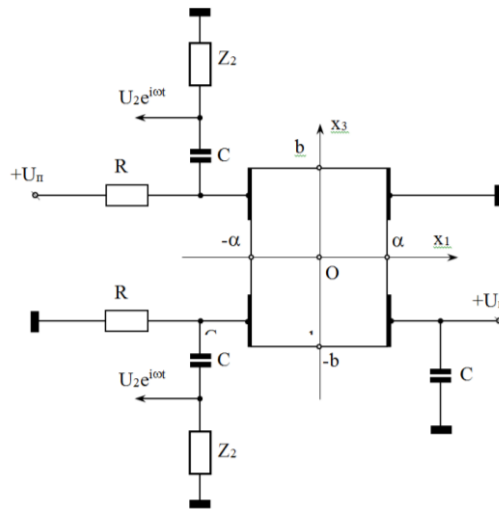
$$|e_{\beta\lambda}| = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_2 & 0 & 0 & 0 \\ & e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & e_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & (e_1 - e_2)/2 & 0 & 0 \\ & & & & (e_1 - e_2)/2 & 0 \\ & & & & & (e_1 - e_2)/2 \end{vmatrix}, \quad (5)$$

где λ – модуль объемной упругости; G – модуль сдвига; e_1 и e_2 – электрострикционные константы. Числовые значения материальных констант λ , G , e_1 и e_2 определяются экспериментально.

На участке №3 электродная группа вторичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора должна обеспечивать эффективную регистрацию того типа упругих колебаний, который формируется электродной группой первичной электрической цепи в области №1. Это возможно в том случае, когда поляризация сегнетоэлектрика постоянным электрическим полем в области №3 совпадает (с точностью до знака) с его поляризацией в области №1. На рис. 3 показано подключение источников постоянного электрического поля и электрических нагрузок Z_2 к электродам вторичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора.

Необходимо подчеркнуть то обстоятельство, что любая другая конфигурация поляризуемого сегнетоэлектрик постоянного электрического поля, т. е. любая другая конструкция электродной группы, не обеспечит эффективной регистрации возбуждаемых на участке №1 упругих колебаний и, как следствие, не обеспечит нормальной работы пьезоэлектрического трансформатора. Говоря иными словами, для обеспечения эффективной работы пьезоэлектрического трансформатора необходимо и достаточно, чтобы конструкции источника и приемника упругих колебаний были подобны и физически эквивалентны друг другу.

Рис. 3. Схема подключения источников постоянного и переменного потенциалов к электродам вторичной электрической цепи на участке №3



Таким образом, физико-механические свойства поляризованного сегнетоэлектрика в области №3 при условии равенства потенциалов U_n источников поляризуемого сегнетоэлектрик постоянного электрического поля, описываются модулями упругости с матрицей (1), пьезоэлектрическими модулями с матрицей (2) и диэлектрической проницаемостью с матрицей (3).

На участках №1 и №3, где поляризованный сегнетоэлектрик проявляет свойства пьезоэлектрика, обобщенный закон Гука

$${}^{(n)}\sigma_{ij}^{(\pm)} = {}^{(n)}c_{ijkl}^{(\pm)} {}^{(n)}\varepsilon_{kl}^{(\pm)} - {}^{(n)}e_{kij}^{(\pm)} {}^{(n)}\tilde{E}_k^{(\pm)},$$

где ${}^{(n)}\sigma_{ij}^{(\pm)}$ – амплитудное значение компонента тензора результирующих механических напряжений в верхней (знак плюс) и нижней (знак минус) частях n -го участка ($n = 1, 3$) сегнетоэлектрического стержня; ${}^{(n)}c_{ijkl}^{(\pm)}$ – компонент тензора модулей упругости n -ой области; ${}^{(n)}\varepsilon_{ij}^{(\pm)}$ – амплитудное значение компонента тензора бесконечно малых деформаций; ${}^{(n)}e_{kij}^{(\pm)}$ – компонент тензора пьезоэлектрических модулей; ${}^{(n)}\tilde{E}_k^{(\pm)}$ – k -ый компонент вектора напряженности электрического поля в деформируемом пьезоэлектрике.

На участках с четными номерами $m = 2, 4$ в пренебрежении электрострикционными эффектами, которые в десятки раз меньше пьезоэлектрических по своему проявлению, можно записать, что ${}^{(m)}\sigma_{ij}^{(\pm)} = {}^{(m)}c_{ijkl}^{(\pm)} {}^{(m)}\varepsilon_{kl}^{(\pm)}$.

Полагая, что сдвиговые напряжения и деформации в стержне не наблюдаются, из приведенных выше определений обобщенного закона Гука можно записать соотношения, которые определяют напряжения сжатия-растяжения вдоль координатных осей Ox_1 , Ox_2 и Ox_3 :

$${}^{(n)}\sigma_{11}^{(\pm)} = c_{11}^E {}^{(n)}\varepsilon_{11}^{(\pm)} + c_{12}^E {}^{(n)}\varepsilon_{22}^{(\pm)} + c_{12}^E {}^{(n)}\varepsilon_{33}^{(\pm)} \mp e_{11} {}^{(n)}\tilde{E}_1^{(\pm)}, \quad (6)$$

$${}^{(n)}\sigma_{22}^{(\pm)} = c_{12}^E {}^{(n)}\varepsilon_{11}^{(\pm)} + c_{22}^E {}^{(n)}\varepsilon_{22}^{(\pm)} + c_{12}^E {}^{(n)}\varepsilon_{33}^{(\pm)} \mp e_{12} {}^{(n)}\tilde{E}_1^{(\pm)}, \quad (7)$$

$${}^{(n)}\sigma_{33}^{(\pm)} = c_{12}^E {}^{(n)}\varepsilon_{11}^{(\pm)} + c_{12}^E {}^{(n)}\varepsilon_{22}^{(\pm)} + c_{22}^E {}^{(n)}\varepsilon_{33}^{(\pm)} \mp e_{12} {}^{(n)}\tilde{E}_1^{(\pm)}. \quad (8)$$

При записи соотношений (6) – (8) одинаковые по величине материальные константы обозначены, как это принято в механике деформируемого твердого тела, одинаковыми символами.

Для областей с четными номерами $m = 2, 4$

$${}^{(m)}\sigma_{11}^{(\pm)} = (\lambda + 2G) {}^{(m)}\varepsilon_{11}^{(\pm)} + \lambda {}^{(m)}\varepsilon_{22}^{(\pm)} + \lambda {}^{(m)}\varepsilon_{33}^{(\pm)}, \quad (9)$$

$${}^{(m)}\sigma_{22}^{(\pm)} = \lambda {}^{(m)}\varepsilon_{11}^{(\pm)} + (\lambda + 2G) {}^{(m)}\varepsilon_{22}^{(\pm)} + \lambda {}^{(m)}\varepsilon_{33}^{(\pm)}, \quad (10)$$

$${}^{(m)}\sigma_{33}^{(\pm)} = \lambda {}^{(m)}\varepsilon_{11}^{(\pm)} + \lambda {}^{(m)}\varepsilon_{22}^{(\pm)} + (\lambda + 2G) {}^{(m)}\varepsilon_{33}^{(\pm)}, \quad (11)$$

где ${}^{(k)}\varepsilon_{11}^{(\pm)}$, ${}^{(k)}\varepsilon_{22}^{(\pm)}$ и ${}^{(k)}\varepsilon_{33}^{(\pm)}$ ($k = n, m$) – деформации сжатия-растяжения вдоль координатных осей Ox_1 , Ox_2 и Ox_3 в верхней ($x_3 > 0$, знак плюс) и нижней ($x_3 < 0$, знак минус) частях k -ой области сегнетоэлектрического стержня.

Предположим, что частота смены знака электрического потенциала в первичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора такова, что длина волны упругих колебаний в сегнетоэлектрическом стержне соизмерима с его длиной L и, по определению, существенно превышает наибольший размер его поперечного сечения. Поскольку длина волны является масштабной единицей при описании пространственного распределения напряженно-деформированного состояния деформируемого твердого тела, постольку можно утверждать, что в данном диапазоне частот числовые значения напряжений сжатия-растяжения не изменяются в плоскости поперечного сечения стержня.

Будем полагать, что поверхности стержня $x_1 = \pm a$ и $x_3 = \pm b$ не контактируют с другими материальными объектами, т. е. отсутствует противодействие со стороны окружающей стержень среды. Из третьего закона Ньютона следует, что на этих поверхностях должны выполняться следующие условия:

$${}^{(k)}\sigma_{11}^{(\pm)} \Big|_{x_1 = \pm a} = 0, \quad {}^{(k)}\sigma_{33}^{(\pm)} \Big|_{x_3 = \pm b} = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (12)$$

Принимая во внимание сказанное выше, можно утверждать, что

$${}^{(k)}\sigma_{11}^{(\pm)} = {}^{(k)}\sigma_{33}^{(\pm)} = 0 \quad \forall x_k \in V, \quad (13)$$

где V – объем призматического стержня.

Приравнивая нулю левые части соотношений (6) и (8), получаем возможность определения деформаций ${}^{(n)}\varepsilon_{11}^{(\pm)}$ и ${}^{(n)}\varepsilon_{33}^{(\pm)}$ через продольную деформацию сжатия-растяжения ${}^{(n)}\varepsilon_{22}^{(\pm)}$. При этом

$$\begin{aligned} {}^{(n)}\varepsilon_{11}^{(\pm)} &= -\frac{c_{12}^E}{\Delta_0} (c_{22}^E - c_{12}^E) {}^{(n)}\varepsilon_{22}^{(\pm)} \pm \frac{1}{\Delta_0} (e_{11}c_{22}^E - e_{12}c_{12}^E) {}^{(n)}\tilde{E}_1^{(\pm)}, \\ {}^{(n)}\varepsilon_{33}^{(\pm)} &= -\frac{c_{12}^E}{\Delta_0} (c_{11}^E - c_{12}^E) {}^{(n)}\varepsilon_{22}^{(\pm)} \mp \frac{1}{\Delta_0} (e_{11}c_{12}^E - e_{12}c_{11}^E) {}^{(n)}\tilde{E}_1^{(\pm)}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{где } \Delta_0 = c_{11}^E c_{22}^E - (c_{12}^E)^2.$$

Подставляя определения (14) в соотношение (7), получаем следующий результат

$${}^{(n)}\sigma_{22}^{(\pm)} = Y_E {}^{(n)}\varepsilon_{22}^{(\pm)} \mp e_{12}^* {}^{(n)}\tilde{E}_1^{(\pm)}, \quad (15)$$

где Y_E и e_{12}^* – модуль упругости и эффективный пьезомодуль для режима одноосного деформирования сегнетоэлектрического стержня на участках с нечетными номерами n . Числовые значения этих материальных констант определяются следующими формулами:

$$Y_E = \frac{1}{\Delta_0} \left\{ -2(c_{12}^E)^2 c_{22}^E + 2(c_{12}^E)^3 + c_{11}^E \left[(c_{22}^E)^2 - (c_{12}^E)^2 \right] \right\}; \quad e_{12}^* = \frac{c_{22}^E - c_{12}^E}{\Delta_0} (e_{12}c_{11}^E - e_{11}c_{12}^E).$$

Для областей стержня с номерами 2 и 4 обобщенный закон Гука (9) – (11) в случае одноосного сжатия-растяжения вдоль оси Ox_2 записывается в следующем виде

$${}^{(m)}\sigma_{22}^{(\pm)} = Y {}^{(m)}\varepsilon_{22}^{(\pm)}, \quad (16)$$

где $Y = 2G(1 + \nu)$; $\nu = \lambda / [2(\lambda + G)]$ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона изотропных по упругим свойствам областей номера $m = 2, 4$.

Электрическое состояние поляризованных постоянным электрическим полем областей №1 и №3 сегнетоэлектрического стержня определяет закон электрической поляризации диэлектрика с пьезоэлектрическими свойствами ${}^{(n)}D_k^{(\pm)} = \pm e_{kij}^{(\pm)} {}^{(n)}\varepsilon_{ij}^{(\pm)} + \chi_{kj}^\varepsilon {}^{(n)}\tilde{E}_j^{(\pm)}$. Общая формулировка, определяющая k -ый компонент вектора электрической индукции в n -ом участке, доставляет следующее соотношение

$${}^{(n)}D_1^{(\pm)} = \pm e_{11} {}^{(n)}\varepsilon_{11}^{(\pm)} \pm e_{12} \left[{}^{(n)}\varepsilon_{22}^{(\pm)} + {}^{(n)}\varepsilon_{33}^{(\pm)} \right] + \chi_{11}^\varepsilon {}^{(n)}\tilde{E}_1^{(\pm)}, \quad (17)$$

где ${}^{(n)}\tilde{E}_1^{(\pm)}$ – амплитудное значение поперечного компонента вектора напряженности результирующего электрического поля в n -ой области стержня. Достаточно просто показать, что на этих участках стержня ${}^{(n)}D_2^{(\pm)} = {}^{(n)}D_3^{(\pm)} = 0$.

Подставляя в соотношение (17) определения деформаций ${}^{(n)}\varepsilon_{11}^{(\pm)}$ и ${}^{(n)}\varepsilon_{33}^{(\pm)}$, получаем

$${}^{(n)}D_1^{(\pm)} = \pm e_{12}^* {}^{(n)}\varepsilon_{22}^{(\pm)} + \chi_{11}^\varepsilon {}^{(n)}\tilde{E}_1^{(\pm)}, \quad (18)$$

где пьезомодуль e_{12}^* указан в комментариях к формуле (15), а χ_{11}^σ – диэлектрическая проницаемость поляризованного сегнетоэлектрика для режима постоянства (равенства нулю) нормальных напряжений $^{(n)}\sigma_{11}^{(\pm)}$ и $^{(n)}\sigma_{33}^{(\pm)}$. Числовые значения диэлектрической проницаемости χ_{11}^σ рассчитываются по следующей формуле

$$\chi_{11}^\sigma = \chi_{11}^\varepsilon + \frac{1}{\Delta_0} \left[e_{11}^2 c_{22}^E + e_{12}^2 c_{11}^E - 2e_{11}e_{12}c_{12}^E \right].$$

Потребуем, чтобы на всех участках сегнетоэлектрического стержня выполнялось условие отсутствия свободных носителей электричества, т. е. условие

$$\operatorname{div} \vec{D}^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (19)$$

На участках №2 и №4 это условие выполняется автоматически, поскольку в пренебрежении сегнетоэлектрическими эффектами можно полагать, что на этих участках $\vec{D}^{(m)} \cong 0$. Условие (19) на участках №1 и №3 будет выполняться лишь в том случае, когда в обязательном порядке выполняется условие

$$\frac{\partial D_1^{(n)}}{\partial x_1} = 0. \quad (20)$$

Так как в области частот до 10 МГц в динамически деформируемом пьезоэлектрике практически отсутствует магнитное поле [8], то справедливо определение $\vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi$, где \vec{E} и Φ – вектор напряженности и скалярный потенциал электрического поля в объеме деформируемого пьезоэлектрика. С учетом этого можно записать выражение (18) в следующем виде

$$^{(n)}D_1^{(\pm)} = \pm e_{12}^* \varepsilon_{22}^{(n)} - \chi_{11}^\sigma \frac{\partial \Phi^{(\pm)}}{\partial x_1}, \quad (21)$$

где $\Phi^{(\pm)}$ – скалярный потенциал электрического поля в n -ой области. Интегрируя левую и правую части соотношения (21) по переменной x_1 , получаем, с учетом условия (20), следующий результат

$$2\alpha \varepsilon_{22}^{(n)} D_1^{(\pm)} = \pm 2\alpha e_{12}^* \varepsilon_{22}^{(n)} - \chi_{11}^\sigma \left[\Phi^{(\pm)}(\alpha) - \Phi^{(\pm)}(-\alpha) \right]. \quad (22)$$

Из показанных на рис. 2 и рис. 3 схем включения источника изменяющейся во времени разности электрических потенциалов $U_1 e^{i\omega t}$ и электрических нагрузок Z_2 следует, что $\Phi^{(\pm)}(\alpha) = 0$, а $\Phi^{(\pm)}(-\alpha) = U^{(\pm)}$. Очевидно, что амплитудные значения потенциалов $U^{(\pm)}$ определяются следующим образом: $U_{(1)}^{(\pm)} = U_0^{(\pm)}$ и $U_{(3)}^{(\pm)} = U_2^{(\pm)}$. При этом

$$U_0^{(\pm)} = \frac{U_1 Z_{(1)}^{(\pm)}}{Z_1 + Z_{(1)}^{(\pm)}}, \quad (23)$$

где Z_1 – выходной электрический импеданс источника переменного электрического напряжения; $Z_{(1)}^{(\pm)}$ – электрический импеданс верхней и нижней части участка №1 сегнетоэлектрического стержня.

С учетом сформулированных определений выражение (22) можно представить в следующем виде

$${}^{(n)}D_1^{(\pm)} = \pm e_{12}^* {}^{(n)}\varepsilon_{22}^{(\pm)} + \chi_{11} \frac{U^{(\pm)}}{2\alpha}. \quad (24)$$

Определения (18) и (24) компонентов вектора электрической индукции физически эквивалентны и поэтому правые части этих соотношений должны быть равны друг другу. Сопоставляя правые части выражений (18) и (24), приходим к выводу, что

$${}^{(n)}\tilde{E}_1^{(\pm)} = \frac{U^{(\pm)}}{2\alpha}. \quad (25)$$

После того, как определены в явном виде величины ${}^{(n)}\tilde{E}_1^{(\pm)}$, соотношение (25) принимает следующий вид

$${}^{(n)}\sigma_{22}^{(\pm)} = Y_E {}^{(n)}\varepsilon_{22}^{(\pm)} \mp e_{12}^* \frac{U^{(\pm)}}{2\alpha}, \quad (26)$$

Определим тип напряженно-деформированного состояния, которое возникает в показанном на рис. 1 стержне.

Предположим, что торец стержня $x_2 = 0$ не имеет механических контактов с другими материальными объектами. Это означает, что ${}^{(1)}\sigma_{22}^{(\pm)} \Big|_{x_2=0} = 0$.

Приравнивая нулю левую часть определения (26), получаем следующий результат

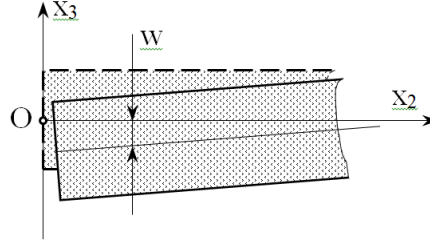
$${}^{(1)}\varepsilon_{22}^{(\pm)}(0) = \pm \frac{e_{12}^* U_0^{(\pm)}}{2\alpha Y_E}. \quad (27)$$

Если обеспечить выполнение условия $U_0^{(\pm)} = U_0$, что, собственно, и заложено в схему включения (см. рис. 2), то из равенства (27) следует, что ${}^{(1)}\varepsilon_{22}^{(\pm)}(0) = \pm \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = e_{12}^* U_0 / (2\alpha Y_E)$. Если вспомнить, что продольная деформация $\varepsilon_{22} = \lim_{\ell \rightarrow 0} (\Delta\ell / \ell)$, где $\Delta\ell$ – изменение длины, а ℓ – первоначальная длина деформируемого объекта, то становится совершенно очевидным, что при показанном на рис. 2 подключении переменной разности электрических потенциалов верхние слои ($x_3 > 0$) сегнетоэлектрического стержня растягиваются, а нижние ($x_3 < 0$) – напротив, сжимаются. При этом прямолинейная ось призматического стержня отклоняется от первоначального (равновесного) положения так, как это показано на рис. 4. Академик Писаренко Г. С. [9] определяет изгиб как деформированное состояние, при котором искривляется ось прямолинейного стержня или изменяется кривизна оси криволинейного стержня. Принимая во внимание сформулированный выше классификационный признак, можно утверждать, что на первом участке сегнетоэлектрического стержня формируется напряженно-деформированное состояние поперечного изгиба, которое через упругие связи распространяется на все без исключения участки показанного на рис. 1 призматического стержня.

Основной кинематической характеристикой поперечного изгиба является так называемый прогиб, который на рис. 4 обозначен символом w . В случае прямолинейного стержня прогиб w численно равен расстоянию между срединной плоскостью изогну-

того и недеформированного стержня. Знак прогиба определяется знаком его проекции на ось Ox_3 (в общем случае – на плоскость x_1Ox_3) неподвижной системы координат x_1, x_2, x_3 . В случае динамического прямого изгиба призматического прямолинейного стержня прогиб удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

Рис. 4. К определению основной кинематической характеристики поперечного изгиба



$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} - \omega^2 \frac{\rho_0 S}{Y J_1} w = 0, \quad (28)$$

где ω – круговая частота смены знака прогиба в сечении $x_2 = const$; ρ_0 и Y – плотность и модуль Юнга материала стержня; S и J_1 – площадь и момент инерции поперечного сечения относительно главной центральной оси Ox_1 – геометрическая характеристика поперечного сечения [9]. В нашем случае $S = 4ab$, $J_1 = 4ab^3/3$. С учетом сказанного выше, уравнение (28) установившихся гармонических колебаний поперечного изгиба можно записать в следующем виде

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} - \lambda^4 w = 0, \quad (29)$$

где $\lambda = \sqrt[4]{3\rho_0\omega^2/(Yb^2)}$ – волновое число гармонических колебаний поперечного изгиба призматического стержня прямоугольного поперечного сечения.

Применительно к рассматриваемому стержню, расчетная схема которого показана на рис. 1, уравнение (29) следует записать в виде

$$\frac{\partial^4 w_k}{\partial x_2^4} - \lambda_k^4 w_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (30)$$

где w_k и $\lambda_k = \sqrt[4]{3\rho_0\omega^2/(Y_k b^2)}$ – прогиб и волновое число на k -ом участке сегнетоэлектрического стержня.

Общее решение уравнения (29) записывается следующим образом

$$w(x_2) = A_1 \sin \lambda x_2 + A_2 \cos \lambda x_2 + A_3 \operatorname{sh} \lambda x_2 + A_4 \operatorname{ch} \lambda x_2, \quad (31)$$

где A_1, \dots, A_4 – подлежащие определению константы.

Выпишем в явном виде общие решения (31) для каждого участка призматического стержня

$$w_1(x_2) = A_1 \sin \lambda_1 x_2 + A_2 \cos \lambda_1 x_2 + A_3 \operatorname{sh} \lambda_1 x_2 + A_4 \operatorname{ch} \lambda_1 x_2,$$

$$w_2(x_2) = A_5 \sin \lambda_2 x_2 + A_6 \cos \lambda_2 x_2 + A_7 \operatorname{sh} \lambda_2 x_2 + A_8 \operatorname{ch} \lambda_2 x_2,$$

$$\begin{aligned} w_3(x_2) &= A_9 \sin \lambda_1 x_2 + A_{10} \cos \lambda_1 x_2 + A_{11} sh \lambda_1 x_2 + A_{12} ch \lambda_1 x_2, \\ w_4(x_2) &= A_{13} \sin \lambda_2 x_2 + A_{14} \cos \lambda_2 x_2 + A_{15} sh \lambda_2 x_2 + A_{16} ch \lambda_2 x_2, \end{aligned} \quad (32)$$

где A_1, \dots, A_{16} - подлежащие определению константы (шестнадцать штук); $\lambda_1 = \sqrt[4]{3\rho_0\omega^2 / (\gamma b^2)}$; $\lambda_2 = \sqrt[4]{3\rho_0\omega^2 / (\gamma b^2)}$.

На условных границах разделов участков стержня, т. е. в сечениях $x_2 = \ell_1; \ell_2; \ell_3$ должны выполняться условия сопряжения напряженно-деформированного состояния, которые в рамках модельных представлений поперечного изгиба формулируются следующим образом:

$$w_j(\ell_j) = w_{j+1}(\ell_j), \quad (33)$$

$$\vartheta_j(\ell_j) = \vartheta_{j+1}(\ell_j), \quad (34)$$

$$M_u^{(j)}(\ell_j) = M_u^{(j+1)}(\ell_j), \quad (35)$$

$$Q^{(j)}(\ell_j) = Q^{(j+1)}(\ell_j), \quad (36)$$

где $\vartheta_j(x_2)$ – угол поворота плоского поперечного сечения на j -ом участке стержня; $M_u^{(j)}(x_2)$ и $Q^{(j)}(x_2)$ – изгибающий момент и поперечная сила на j -ом участке. Интегральные характеристики напряженного состояния при поперечном изгибе, т. е. Величины $M_u^{(j)}(x_2)$ и $Q^{(j)}(x_2)$ определяются следующими выражениями:

$$M_u^{(j)}(x_2) = \int_S \sigma_{22}^{(j)}(x_2) x_3 dS, \quad (37)$$

$$Q^{(j)}(x_2) = \frac{\partial M_u^{(j)}(x_2)}{\partial x_2}, \quad (38)$$

где $\sigma_{22}^{(j)}(x_2)$ – напряжение сжатия-растяжения на j -ом участке сегнетоэлектрического стержня.

Угол поворота $\vartheta_j(x_2)$ поперечного сечения стержня определяется из модельного представления о поперечном изгибе следующим образом

$$\vartheta_j(x_2) = \frac{\partial w_j(x_2)}{\partial x_2}. \quad (39)$$

Возникающие при поперечном изгибе деформации сжатия-растяжения ${}^{(j)}\varepsilon_{22}^{(\pm)}(x_2)$ рассчитываются по формуле

$${}^{(j)}\varepsilon_{22}^{(\pm)}(x_2) = x_3 \frac{\partial^2 w_j(x_2)}{\partial x_2^2}. \quad (40)$$

Определим интегральные характеристики напряженного состояния на различных участках сегнетоэлектрического стержня.

Подставляя определение (40) деформации ${}^{(j)}\varepsilon_{22}^{(\pm)}(x_2)$ в формулу (24), получаем следующий результат

$${}^{(n)}\sigma_{22}^{(\pm)} = Y_E x_3 \frac{\partial^2 w_n}{\partial x_2^2} \mp e_{12}^* \frac{U_{(n)}^{(\pm)}}{2\alpha}. \quad (41)$$

Подставляя формулу (41) в определение изгибающего момента (37), получаем

$$\begin{aligned} M_u^{(n)}(x_2) &= 2\alpha \int_{-b}^b \left[Y_E x_3 \frac{\partial^2 w_n(x_2)}{\partial x_2^2} \mp e_{12}^* \frac{U_{(n)}^{(\pm)}}{2\alpha} \right] x_3 dx_3 = \frac{4\alpha b^3}{3} Y_E \frac{\partial^2 w_n(x_2)}{\partial x_2^2} + \\ &+ e_{12}^* \left[\int_{-b}^{-h} x_3 U_{(n)}^{(-)} dx_3 - \int_h^b x_3 U_{(n)}^{(+)} dx_3 \right] = Y_E J_1 \frac{\partial^2 w_n(x_2)}{\partial x_2^2} - \frac{1}{2} e_{12}^* (b^2 - h^2) [U_{(n)}^{(-)} + U_{(n)}^{(+)}]. \end{aligned} \quad (42)$$

Если, как ранее было принято, положить $U_{(n)}^{(-)} = U_{(n)}^{(+)} = U_{(n)}$, то изгибающие моменты на первом и третьем участках сегнетоэлектрического стержня рассчитываются по формулам

$$M_u^{(n)}(x_2) = Y_E J_1 \frac{\partial^2 w_n(x_2)}{\partial x_2^2} - M_0^{(n)}, \quad (43)$$

где $M_0^{(n)} = e_{12}^* (b^2 - h^2) U_{(n)}$ – обусловленный внешними устройствами изгибающий момент. При этом $U_{(1)} = U_0$ и $U_{(3)} = U_2$.

Изгибающие моменты $M_u^{(m)}(x_2)$ ($m = 2, 4$) на участках с четными номерами определяются следующим образом

$$M_u^{(m)}(x_2) = Y J_1 \frac{\partial^2 w_m(x_2)}{\partial x_2^2}. \quad (44)$$

Принимая во внимание выражения (43) и (44), получаем следующие соотношения для расчета поперечных сил

$$Q^{(k)}(x_2) = Y_{(k)} J_1 \frac{\partial^3 w_k(x_2)}{\partial x_2^3}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (45)$$

Отчетливо видно, что условия сопряжения (33) – (36) на трех границах разделов участков сегнетоэлектрического стержня доставляют двенадцать алгебраических уравнений, в которых содержится шестнадцать подлежащих определению констант A_1, \dots, A_{16} . Недостающие до однозначного (единственного) определения этих констант четыре алгебраических уравнения формируют граничные условия, которые определяются способом закрепления торцов $x_2 = 0$ и $x_2 = L$ сегнетоэлектрического стержня. На практике с достаточной мерой адекватности декларируемому состоянию реализуются три типа закрепления, а именно: свободное и шарнирное опирание торцов стержня, а также жесткая заделка. Формально эти три способа закрепления описываются следующими соотношениями:

– свободное закрепление торцов $x_2 = 0, L$

$$M_u|_{x_2=0,L} = 0, \quad Q|_{x_2=0,L} = 0; \quad (46)$$

– шарнирное опирание торцов $x_2 = 0, L$

$$w|_{x_2=0,L} = 0, M_u|_{x_2=0,L} = 0; \quad (47)$$

– жесткая заделка торцов $x_2 = 0, L$

$$w|_{x_2=0,L} = 0, \vartheta|_{x_2=0,L} = 0. \quad (48)$$

Предположим, что левый торец $x_2 = 0$ стержня свободен, а правый торец $x_2 = L$ – жестко заделан в абсолютно неподвижную опору. В этом случае, последовательно записывая граничные условия (46) в сечении $x_2 = 0$, условия сопряжения (33) – (36) в сечениях $x_2 = \ell_1; \ell_2; \ell_3$ и граничные условия (48) в сечении $x_2 = L$, получаем необходимую для единственного определения шестнадцати констант A_j неоднородную систему из шестнадцати линейных алгебраических уравнений. Эта система уравнений записывается следующим образом

$$m_{ij}A_j = P_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, 16. \quad (49)$$

Решение системы уравнений (49) для константы A_j можно записать в следующем виде

$$A_j = \frac{M_0^{(1)}}{Y_E J_1 \lambda_1^2} \beta_{1j}(\omega, \Pi) + \frac{M_0^{(2)}}{Y J_1 \lambda_2^2} \beta_{2j}(\omega, \Pi), \quad (50)$$

где $\beta_{1j}(\omega, \Pi) = (-1)^{j+1} \frac{\Delta_{j1}}{\Delta_0} - (-1)^{j+5} \frac{\Delta_{j5}}{\Delta_0}$; $\beta_{2j}(\omega, \Pi) = -(-1)^{j+9} \frac{\Delta_{j9}}{\Delta_0} + (-1)^{j+13} \frac{\Delta_{j13}}{\Delta_0}$; Δ_{jk} ($k = 1; 5; 9; 13$)

– определитель матрицы размером 15×15 , который получается из матрицы 16×16 , составленной из коэффициентов при константах A_j в системе уравнений (49) путем вычеркивания j -го столбца и k -ой строки; Δ_0 – главный определитель системы уравнений (49).

Так как $M_0^{(1)} = e_{12}^*(b^2 - h^2)U_0$, а $M_0^{(2)} = e_{12}^*(b^2 - h^2)U_2$, то, для удобства последующих рассуждений соотношение (50) целесообразно записать в следующем виде

$$A_j = U_0 \beta_{1j}^*(\omega, \Pi) + U_2 \beta_{2j}^*(\omega, \Pi), \quad (51)$$

где $\beta_{1j}^*(\omega, \Pi) = [e_{12}^*(b^2 - h^2)/(Y_E J_1 \lambda_1^2)] \beta_{1j}(\omega, \Pi)$; $\beta_{2j}^*(\omega, \Pi) = [e_{12}^*(b^2 - h^2)/(Y J_1 \lambda_2^2)] \beta_{2j}(\omega, \Pi)$.

Записав соотношение (51) вновь приходим к выводу, что напряженно-деформированное состояние сегнетоэлектрического стержня определяется двумя потенциалами U_0 и U_2 , которые связаны между собой линейной зависимостью.

Для определения этой зависимости выполним расчет потенциала U_2 на электроде вторичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора.

Очевидно, что $U_2^{(\pm)} = Z_2 I_2^{(\pm)}$, где $I_2^{(\pm)}$ – амплитудное значение электрического тока в проводнике вторичной электрической цепи. Так как $I_2^{(\pm)} = -i\omega Q_2^{(\pm)}$, где $Q_2^{(\pm)}$ – амплитудное значение электрического заряда на верхнем (знак плюс) и нижнем (знак минус) (рис. 3) электродах электродной группы вторичной электрической цепи. Электрические заряды $Q_2^{(\pm)}$ определяются следующим образом:

$$Q_2^{(+)} = \int_{\ell_2^h}^{\ell_3^b} \int_{\ell_2^h}^{\ell_3^b} {}^{(3)}D_1^{(+)}(x_2, x_3) dx_2 dx_3, \quad Q_2^{(-)} = \int_{\ell_2^{-b}}^{\ell_3^{-h}} \int_{\ell_2^{-b}}^{\ell_3^{-h}} {}^{(3)}D_1^{(-)}(x_2, x_3) dx_2 dx_3, \quad (52)$$

$$\text{где } {}^{(3)}D_1^{(\pm)}(x_2, x_3) = \pm e_{12}^* \frac{\partial^2 w_3(x_2)}{\partial x_2^2} + \chi_{11}^\sigma \frac{U_2^{(\pm)}}{2\alpha}.$$

Подставляя определение электрической индукции ${}^{(3)}D_1^{(\pm)}(x_2, x_3)$ в формулы для расчета электрических зарядов, получаем следующие результаты

$$Q_2^{(+)} = \frac{1}{2} e_{12}^* (b^2 - h^2) \left[\frac{\partial w_3(\ell_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial w_3(\ell_2)}{\partial x_2} \right] + \frac{(b-h)(\ell_3 - \ell_2)}{2\alpha} \chi_{11}^\sigma U_2^{(+)},$$

$$Q_2^{(-)} = \frac{1}{2} e_{12}^* (b^2 - h^2) \left[\frac{\partial w_3(\ell_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial w_3(\ell_2)}{\partial x_2} \right] + \frac{(b-h)(\ell_3 - \ell_2)}{2\alpha} \chi_{11}^\sigma U_2^{(-)}. \quad (53)$$

Из показанной на рис. 3 схемы включения электрических нагрузок следует, что $U_2^{(+)} = U_2^{(-)} = U_2$. При этом, как видно из соотношений (53), $Q_2^{(+)} = Q_2^{(-)} = Q_2$.

Введем для удобства дальнейших записей следующие обозначения:

$$w_3^{(1)}(x_2) = \lambda_1 \left[\beta_{19}^*(\omega, \Pi) \cos \lambda_1 x_2 - \beta_{1,10}^*(\omega, \Pi) \sin \lambda_1 x_2 + \beta_{1,11}^*(\omega, \Pi) ch \lambda_1 x_2 + \beta_{1,12}^*(\omega, \Pi) sh \lambda_1 x_2 \right];$$

$$w_3^{(2)}(x_2) = \lambda_1 \left[\beta_{19}^*(\omega, \Pi) \cos \lambda_1 x_2 - \beta_{1,10}^*(\omega, \Pi) \sin \lambda_1 x_2 + \beta_{1,11}^*(\omega, \Pi) ch \lambda_1 x_2 + \beta_{1,12}^*(\omega, \Pi) sh \lambda_1 x_2 \right].$$

С учетом этих обозначений выражение (53) можно записать в следующем виде

$$Q_2^{(\pm)} \equiv Q_2 = C_3^\sigma \left[U_2 \Xi_3^{(2)}(\omega, \Pi) + U_0 \Xi_3^{(1)}(\omega, \Pi) \right], \quad (54)$$

где $C_3^\sigma = (b-h)(\ell_3 - \ell_2) \chi_{11}^\sigma / (2\alpha)$ – динамическая электрическая емкость поляризованного сегнетоэлектрика под электродом электродной группы вторичной электрической цепи; числовые значения функций $\Xi_3^{(1)}(\omega, \Pi)$ и $\Xi_3^{(2)}(\omega, \Pi)$ (символ Π обозначает набор геометрических и физико-механических параметров объекта) задаются следующими расчетными формулами:

$$\Xi_3^{(1)}(\omega, \Pi) = \frac{\alpha(b+h)e_{12}^*}{(\ell_3 - \ell_2)\chi_{11}^\sigma} \left[w_3^{(1)}(\ell_3) - w_3^{(1)}(\ell_2) \right]; \quad \Xi_3^{(2)}(\omega, \Pi) = 1 + \frac{\alpha(b+h)e_{12}^*}{(\ell_3 - \ell_2)\chi_{11}^\sigma} \left[w_3^{(2)}(\ell_3) - w_3^{(2)}(\ell_2) \right].$$

$$\text{Таким образом, } U_2 = -i\omega Z_2 C_3^\sigma \left[U_2 \Xi_3^{(2)}(\omega, \Pi) + U_0 \Xi_3^{(1)}(\omega, \Pi) \right].$$

Из последней записи следует, что

$$U_2 = - \frac{i\omega Z_2 C_3^\sigma \Xi_3^{(1)}(\omega, \Pi)}{1 + i\omega Z_2 C_3^\sigma \Xi_3^{(2)}(\omega, \Pi)} U_0 = -\Xi_0(\omega, \Pi) U_0, \quad (55)$$

где функция $\Xi_0(\omega, \Pi)$ имеет смысл частотно зависимого коэффициента обратной связи.

Теперь остается определить амплитудное значение потенциала U_0 и эта операция завершает построение математической модели стержневого пьезоэлектрического трансформатора на изгибных колебаниях.

Как следует из формулы (23), электрический потенциал U_0 определяется электрическим импедансом $Z_{(1)}^{(\pm)}$. Очевидно, что при равенстве геометрических параметров электродной группы первичной электрической цепи и при одинаковых значениях потенциалов на электродах, электрические импедансы $Z_{(1)}^{(+)} = Z_{(1)}^{(-)} = Z_{(1)}$. Как и ранее, запишем $Z_{(1)} = U_0/I_1$, где $I_1 = -i\omega Q_1$ – амплитудное значение электрического тока в проводниках первичной электрической цепи трансформатора; Q_1 – амплитудное значение электрического заряда на электроде электродной группы первичной электрической цепи. Проводя те же самые рассуждения, что и при определении заряда Q_2 , можем записать, что

$$Q_1^{(\pm)} \equiv Q_1 = C_1^\sigma \left[U_2 \Xi_1^{(2)}(\omega, \Pi) + U_0 \Xi_1^{(1)}(\omega, \Pi) \right], \quad (56)$$

где $C_1^\sigma = \ell_1(b-h)\chi_{11}^\sigma / (2\alpha)$ – динамическая электрическая емкость поляризованного сегнетоэлектрика;

$$\Xi_1^{(1)}(\omega, \Pi) = 1 + \frac{\alpha(b+h)e_{12}^*}{\ell_1\chi_{11}^\sigma} [w_1^{(1)}(\ell_1) - w_1^{(1)}(0)]; \quad \Xi_1^{(2)}(\omega, \Pi) = \frac{\alpha(b+h)e_{12}^*}{\ell_1\chi_{11}^\sigma} [w_1^{(2)}(\ell_1) - w_1^{(2)}(0)];$$

функции $w_1^{(1)}(x_2)$ и $w_1^{(2)}(x_2)$ определяются по образцу и подобию функций $w_3^{(1)}(x_2)$ и $w_3^{(2)}(x_2)$.

Подставляя в формулу (56) правую часть выражения (55), а полученный результат – в определение электрического импеданса $Z_{(1)}$, приходим к следующему результату

$$Z_{(1)} = \frac{1}{-i\omega C_1^\sigma \Psi_1(\omega, \Pi)},$$

$$\text{где } \Psi_1(\omega, \Pi) = \Xi_1^{(1)}(\omega, \Pi) - \Xi_0(\omega, \Pi)\Xi_1^{(2)}(\omega, \Pi).$$

После определения электрического импеданса поляризованного сегнетоэлектрика под электродами первичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора определяется амплитудное значение потенциала на электроде в первичной электрической цепи

$$U_0 = \frac{U_1}{1 - i\omega Z_1 C_1^\sigma \Psi_1(\omega, \Pi)}.$$

Подставляя последний результат в формулу (55), получаем выражение для расчета коэффициента трансформации

$$K(\omega, \Pi) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\Xi_0(\omega, \Pi)}{1 - i\omega Z_1 C_1^\sigma \Psi_1(\omega, \Pi)}. \quad (57)$$

Выражение (57) является математической моделью показанного на рис. 1 стержневого пьезоэлектрического трансформатора.

3. Заключение

В работе построена математическая модель пьезоэлектрического трансформатора стержневого типа, показаны основные особенности математического моделирования пьезоэлектрических трансформаторов, рассмотрена простейшая конструкция трансформатора в виде призматического стержня с прямоугольным поперечным сечением, из-

готовленного из пьезокерамики, определены выражения для расчета коэффициента трансформации и амплитудного значения потенциалов на электродах пьезоэлектрического трансформатора стержневого типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джагупов Р. Г., Ерофеев А. А. Пьезоэлектронные устройства вычислительной техники, систем контроля и управления. Санкт-Петербург: Политехника, 1994. 608 с.
2. Лавриненко В. В. Пьезоэлектрические трансформаторы. Москва: Энергия, 1975. 112 с.
3. Зубцов В. И. Математическая модель преобразователя статических механических напряжений внутри деформируемых материалов. Инженерная физика. 2004. № 4. С. 31–36.
4. Хуторненко С. В., Васильчук Д. П. Математическая модель пьезоэлектрического резонатора при наличии градиентного поля в плоскости кристаллического элемента. Наукові праці ДонНТУ. Серія: Гірничо-електромеханічна. 2011. Вип. 21 (189). С. 168–172.
5. Шульга М. О., Карлаш В. Л. Эффективность электромеханичного перетворення енергії при резонансних коливаннях елементів конструкцій із п'єзокераміки. Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. 2006. № 3. С. 225–237.
6. Карлаш В. Л. Вынужденные электромеханические колебания прямоугольных пьезокерамических стержней с разделенными электродами. Прикладная механика. 2013. Т. 49. № 3. С. 125–134.
7. Петрищев О. Н. Гармонические колебания пьезокерамических элементов. Часть 1. Гармонические колебания пьезокерамических элементов в вакууме и метод резонанса – антирезонанса. Киев: Аверс, 2012. 300 с.
8. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость. Киев: Наукова думка, 1989. 280 с.
9. Сопrotивление материалов: Учебник для вузов / Под общ. ред. Г.С. Писаренко – Киев: Вища школа, 1979. 696 с.

REFERENCES

1. Dzhagupov, R. G. Erofeev, A. A. (1994) Piezoelectronic devices of computing, control and monitoring systems. St. Petersburg: Politekhnikha, 608 p. [in Russian].
2. Lavrinenko, V. V. (1975) Piezoelectric transformers. Moscow: Energiya, 112 p. [in Russian].
3. Zubczov, V. I. (2004) Mathematical model of static mechanical stresses converter within deformable material. Inzhenernaya fizika, No. 4, pp. 31–36 [in Russian].
4. Khutornenko, S. V., Vojeykov, A. N., Vasylichuk, D. P. (2011) Mathematic model of piezoelectrical resonator at the presence of gradient field in crystallic element platitude. Naukovi pratsi DonNTU. Seriya: Hirnycho-elektromekhanichna, No. 21 (189), pp. 168–172 [in Russian].
5. Shul'ga, M. O., Karlash, V. L. (2006) An efficiency of electromechanical energy transformation at resonant vibrations of piezoceramics constructional elements. Fyzyko-matematychnye modelyuvannya ta informaciyini tekhnologii, No. 3, pp. 225–237 [in Ukrainian].
6. Karlash, V. L. (2013) Forced oscillations of electromechanical rectangular piezoceramic rods with divided electrodes. Prikladnaya mekhanika, Vol. 49, No 3, pp. 125–134 [in Russian].
7. Petrishchev, O. N. (2012) Harmonic oscillations of piezoceramic elements. Part 1. Harmonic vibrations of piezoceramic elements in vacuum and a method of resonance – antiresonance. Kiev: Avers, 300 p. [in Russian].
8. Grinchenko, V. T., Ulitko, A. F., Shulga, N. A. (1989) Mechanics of related fields in structural elements. Vol. 5. Electroelasticity. Kiev: Naukova dumka, 280 p. [in Russian].
9. Resistance of materials: Textbook for universities. (1979) Ed. Pisarenko, G. S. Kiev: Vyshcha shkola, 696 p. [in Russian].