

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ЕЛЕКТРОННИХ ТЕХНОЛОГІЙ, АВТОТРАНСПОРТУ ТА
МАШИНОБУДУВАННЯ

ПОХИБКИ ТА НЕВИЗНАЧЕНІСТЬ ВИМІРЮВАНЬ

ПРАКТИКУМ

для здобувачів освітнього ступеня «магістр»
зі спеціальності 175 Інформаційно-вимірювальні технології
усіх форм навчання

Черкаси
2024

УДК 681.2 (076)
П 64

*Затверджено вченою радою ФЕТАМ,
протокол № 1 від 21.02.2024 р.,
згідно з рішенням кафедри
приладобудування, мехатроніки та
комп'ютеризованих технологій,
протокол № 6 від 29.01.2024 р.*

Упорядники: Трембовецька Р.В., д.т.н., доцент,
Гальченко В.Я., д.т.н., професор,
Тичков В.В., к.т.н., доцент,
Матвієнко Д.Г., к.т.н.

Рецензент Тимчик Г.С., д.т.н., професор, декан приладобудівного факультету Національного технічного університету України «КПІ ім. Ігоря Сікорського»

П 64 Похибки та невизначеності вимірювань: практикум для здобувачів освітнього ступеня «магістр» зі спеціальності 175 Інформаційно-вимірювальні технології усіх форм навчання [Електронний ресурс] / [Упоряд.: Р.В. Трембовецька, В.Я. Гальченко, В.В. Тичков, Д.Г. Матвієнко]; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси: ЧДТУ, 2024. – 114 с. – Назва з титульного екрана.

Видання знайомить здобувачів вищої освіти галузі знань 17 Електроніка, автоматизація та електронні комунікації зі спеціальності 175 Інформаційно-вимірювальні технології з алгоритмами оцінювання невизначеності результатів вимірювань. Стисло подані основні теоретичні відомості необхідні для виконання завдань. Запропоновано послідовність та приклади розв'язку завдань з використанням пакету прикладних програм MathCAD та Excel.

УДК 681.2 (076)

Навчальне електронне видання
комбінованого використання

ПОХИБКИ ТА НЕВИЗНАЧЕНІСТЬ ВИМІРЮВАНЬ

ПРАКТИКУМ

для здобувачів освітнього ступеня «магістр»
зі спеціальності 175 Інформаційно-вимірювальні технології
усіх форм навчання

Упорядники:

Трембовецька Руслана Володимирівна, **Гальченко** Володимир Якович,
Тичков Володимир Володимирович, **Матвієнко** Дмитро Георгійович

В авторській редакції

ЗМІСТ

СПИСОК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.....	4
ВСТУП.....	6
Практичне заняття №1	
ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ ПРЯМИХ	
ОДНОРАЗОВИХ ВИМІРЮВАНЬ.....	7
Практичне заняття №2	
ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ ПРЯМИХ	
БАГАТОРАЗОВИХ ВИМІРЮВАНЬ.....	18
Практичне заняття №3	
ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ ДЕКІЛЬКОХ	
ГРУП ПРЯМИХ ВИМІРЮВАНЬ З БАГАТОРАЗОВИМИ	
СПОСТЕРЕЖЕННЯМИ.....	30
Практичне заняття №4	
ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ	
ОПОСЕРЕДКОВАНИХ ВИМІРЮВАНЬ.....	45
Практичне заняття №5	
ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ.....	73
ТЕРМІНИ ТА ВИЗНАЧЕННЯ.....	95
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ, ПЕРІОДИЧНИХ	
ВИДАНЬ, ОФІЦІЙНИХ ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ В МЕРЕЖІ	
INTERNET.....	98
ДОДАТОК А - Зразок оформлення титульної сторінки	101
ДОДАТОК Б - Довідникові таблиці.....	102
<i>Таблиця Б1 - Функція нормального розподілу</i>	
<i>Таблиця Б2 - Розподіл Стюдента $P\left\{ t < t_p = 2 \int_0^{t_p} s(t; k) dt\right\}$ значення t_p</i>	
<i>Таблиця Б3 - Інтегральна функція χ^2 – розподілу Пірсона. Значення $\chi_{k;P}^2$ для різних k та P</i>	
<i>Таблиця Б4 - Значення F- критерію Фішера при рівні значущості ($\alpha = 5\%$; $\alpha = 1\%$)</i>	
<i>Таблиця Б5 - Значення ν_α при різних кількостях вимірювань n</i>	

СПИСОК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

b_{i-} - нижня границя відхилення вимірюваної величини від результату вимірювання

b_{i+} - верхня границя відхилення вимірюваної величини від результату вимірювання

b_i - симетричні границі відхилення вимірюваної величини від результату вимірювання

c_i - коефіцієнт впливу

$F_{\alpha; k_A; k_2}$ - коефіцієнт Фішера для прийнятого рівня значущості $\alpha, \%$ і чисел степенів свободи $k_A = a - 1, k_2 = N - a$

k - коефіцієнт охоплення

p - поправка

$r(x_i, x_j)$ - коефіцієнти кореляції оцінок i -ї і j -ї вхідних величин

S - СКВ випадкової похибки результату вимірювання

$S(x_i)$ - СКВ одиничного вимірювання при багаторазових вимірюваннях i -ї вхідної величини

$S(\bar{x}_i)$ - СКВ середнє арифметичного значення при багаторазових вимірюваннях i -ї вхідної величини

R_V - внутрішній опір вольтметра

S_Σ - СКВ суми випадкових і не виключених систематичних похибок

$t_p(v)$ - квантиль розподілу Стюдента для довірчої ймовірності (рівня довіри) p та числа степенів свободи v

u - стандартна невизначеність

u_A - стандартна невизначеність, оцінена за типом А

u_B - стандартна невизначеність, оцінена за типом В

$u(x_i)$ - стандартна невизначеність оцінки i -ї вхідної величини

u_i - стандартна невизначеність одиничного вимірювання i -ї вхідної величини

u_c - сумарна стандартна невизначеність

U - розширена невизначеність

U_p - розширена невизначеність для рівня довіри p

U_k - кінцеве значення діапазону вимірювання

x_i - оцінка i -ї вхідної величини

x_{il} - l -й результат вимірювання i -ї вхідної величини

$\bar{X}_i$ - середнє арифметичне значення i -ї вхідної величини

y - оцінка вимірюваної величини

z_p - квантиль нормального розподілу для довірчої ймовірності p

α - прийнятий рівень значущості

γ - граничне значення основної відносної похибки приладу

Δ_p - довірчі границі сумарної похибки результату вимірювання для довірчої ймовірності p

θ_i - границі i -ї складової невиключеної систематичної похибки

$\theta(p)$ - довірчі границі систематичної похибки вимірювання для довірчої ймовірності p

V_i - число степенів свободи при розрахунку невизначеності оцінки i -ї вхідної величини

V_{eff} - ефективне число степенів свободи

$\hat{V}_{eff}, f_{\phi}$ - оцінка ефективного числа степенів свободи

V_{α} - коефіцієнт для перевірки результату на наявність грубої помилки

Вступ

Теорія похибок, що сформована на основі теоретичних та експериментальних досліджень, широко використовується у вітчизняній метрологічній практиці. Однак, починаючи з 70-х років в міжнародній спільноті метрологів починається дискусії про доцільність переходу до нового показника оцінки точності вимірювань.

Після постановки експерименту та проведення будь-яких вимірювань виникає питання оцінювання результатів, встановлення достовірності отриманих даних із врахуванням зовнішніх факторів впливу. Сучасні вимоги щодо встановлення достовірності результатів вимірювання ґрунтуються на концепції «оцінювання невизначеності вимірювань», яка є більш точною та дозволяє врахувати майже всі впливи на результат вимірювання, порівняно з концепцією «оцінювання похибки», що застосовувалася до нині [1-3]. Між двома концепціями «невизначеності результату вимірювання» і «похибки результату вимірювання» є суттєві відмінності, які необхідно враховувати, складаючи методики обробки дослідних даних і подаючи кінцевий результат.

Перехід від оцінки похибок вимірювання до оцінки невизначеностей не впроваджується широко не тільки через відсутність чітких державних вимог, але і через необізнаність науковців з цим питанням. Тому, готуючи кадри другого рівня вищої освіти зі спеціальності «Інформаційно-вимірювальні технології», проектна група та розробники освітньо-професійної програми, передбачили здобуття магістром поглиблених теоретичних та практичних знань, вмінь, навичок з оцінювання невизначеності результатів вимірювання в межах вивчення дисципліни «Похибки та невизначеності вимірювань».

В результаті виконання практичних робіт магістр набуває професійної компетентності «Вибрати оптимальні методи та розроблювати програми експериментальних досліджень та випробувань, проводити вимірювання з вибором сучасних технічних засобів та обробкою результатів вимірювання».

Практичне заняття №1

ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ ПРЯМИХ ОДНОРАЗОВИХ ВИМІРЮВАНЬ

Мета роботи: навчитися оцінювати невизначеність результатів прямих вимірювань з одноразовим спостереженням.

1. Підготовка до роботи

Вивчити за рекомендованою літературою наступні питання:

1. Поняття «невизначеність вимірювання».
2. В чому відмінність між невизначеністю типу А та невизначеністю типу В.
3. На основі яких даних можна визначити невизначеність типу В.
4. Визначення поняття «стандартна невизначеність».
5. Поняття комбінованої невизначеності.
6. Поняття розширена невизначеність.

2. Теоретичні відомості

Статичні вимірювання фізичних величин можна розділити на групи залежно від способу оцінювання результату вимірювання:

- Прямі вимірювання з одноразовим спостереженням;
- Прямі вимірювання з багаторазовими спостереженнями;
- Опосередковані вимірювання фізичної величини з перетворенням роду;
- Сукупні вимірювання однорідних фізичних величин;
- Сумісні вимірювання різнорідних фізичних величин.

2.1 Обробка результатів прямих вимірювань з одноразовими спостереженнями

Прямі одноразові вимірювання виконують один раз, і значення фізичної величини визначають за показами засобу вимірювальної техніки (ЗВТ), призначеного для вимірювання цієї величини. Однак в деяких випадках прямі одноразові вимірювання повторюють декілька разів. Надлишкові вимірювання виконують для захисту від збоїв апаратури, аномальних результатів тощо, а кінцевий результат визначають за одним вимірюванням, яке вибирають з ряду проведених вимірювань. Оцінкою значення вимірюваної величини Y є безпосередньо показ ЗВТ.

Алгоритм обробки результатів прямих вимірювань з одноразовим спостереженням

1. Аналіз складових невизначеностей

- 1.1 Скласти специфікацію вимірювання:
- Аналіз умов вимірювання;
 - Аналіз схеми вимірювання;
 - Аналіз технічних характеристик приладу.

2. Вилучити відомі систематичні ефекти

3. Оцінка невилучених залишків систематичних ефектів вимірювання

$$u_i(U) = c_i \cdot u(x_i)$$

4. Підсумовування складових невизначеностей вимірювання

- $u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m u(x_i)^2}$ - комбінована невизначеність;
- $U = k \cdot u_c(y)$ - розширена невизначеність.

5. Записати результат вимірювання

$$X = \bar{x} \pm U, P = \%$$

Отже, для оцінювання результату прямого вимірювання з одноразовим спостереженням використовують способи оцінювання невизначеностей типу В. Підсумовують усі складові невизначеності, що оцінені за типом В та визначають комбіновану невизначеність. У випадках, коли потрібно подати інтервальну оцінку невизначеності, додатково визначають розширену невизначеність.

3. Виконання роботи

Завдання 1

Обробка результатів прямих вимірювань з одноразовим спостереженням

Проведено вимірювання за допомогою вольтметра В2-34, що має верхню границю вимірювання $U_k = 100 \text{ В}$ і клас точності 0,15/0,05. В результаті вимірювання отримано показ вольтметра $U_x = 14,75 \text{ В}$.

Вимірювання здійснено при температурі довкілля $t = 26^\circ \text{C}$ та дії магнітного поля напруженістю $H = 400 \text{ А/м}$. Активний вхідний опір приладу $R_{\text{вх}} = (10 \pm 1) \text{ МОм}$. Відомо, що температурна похибка не перевищує основну на кожні 10°C відхилення температури від нормальних умов, а магнітна похибка

становить половину основної інструментальної похибки ЗВТ при напруженості зовнішнього магнітного поля до $H = 400 \frac{A}{м}$.

Оцінити невизначеність результату вимірювання. Записати результат вимірювання.

варіант	приклад	1	2	3	4	5
U_k, B	100	100	100	10	10	20
клас точності	0,15/0,05	0,2/0,1	0,15/0,1	0,2/0,15	0,1/0,05	0,5/0,1
U_x, B	14,75	25,34	74,13	1,14	3,25	15,58
$t, ^\circ C$	26	27	28	28	29	30
$H, \frac{A}{м}$	400	500	542	550	600	620
$R_{вх}, МОм$	(10 ± 1)					
q	0,01					
P, %	95	90	99	95	90	95

варіант	6	7	8	9	10
U_k, B	20	50	50	50	50
клас точності	0,5/0,2	0,2/0,1	0,5/0,2	1/0,2	1,5/0,5
U_x, B	19,29	35,47	40,01	48,95	18,6
$t, ^\circ C$	31	32	33	34	35
$H, \frac{A}{м}$	510	450	476	525	647
$R_{вх}, МОм$	(10 ± 1)				
q	0,01				
P, %	90	95	99	90	95

1. Складаємо специфікацію вимірювання:

❖ Аналіз умов вимірювання

• Вимірювання проводилися в лабораторних умовах при температурі довкілля $t = 26 ^\circ C$;

❖ Аналіз схеми вимірювання

• Границя вимірювання приладу $U_k = 100 B$;

• Напруга вимірюється на виході джерела з внутрішнім опором $R_{вн} = (100 \pm 10) кОм$;

❖ Аналіз технічних характеристик приладу

• Робочі умови застосування приладу: температура довкілля від $5 до 40 ^\circ C$;

• Крок квантування приладу складає одиницю молодшого розряду $q = 0,01 B$;

- Граничне значення основної відносної похибки приладу при вимірюванні постійної напруги на під діапазоні 10 - 100 В складає:

$$\delta = \pm \left[0,15 + 0,05 \cdot \left(\frac{U_k}{U} - 1 \right) \right] \% ;$$

- Границя додаткової похибки приладу при відхиленні температури довкілля від нормальної $t = 20^\circ \text{C}$ не перевищує в робочих умовах граничного значення основної похибки на 10°C зміни температури;

- Додаткова магнітна похибка становить половину основної інструментальної похибки ЗВТ при напруженості зовнішнього магнітного поля до $H = 400 \text{ A/m}$;

- Активний вхідний опір приладу $R_{\text{вх}} = (10 \pm 1) \text{ МОм}$.

2. Визначаємо виправлений результат вимірювання з урахуванням поправки на систематичну похибку вимірювання зумовлену шунтуванням опору джерела опором вольтметра:

$$U_R = U_x \cdot \frac{R_{\text{вн}} + R_{\text{вх}}}{R_{\text{вх}}} = 14,75 \cdot \frac{100 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^6}{10 \cdot 10^6} = 14,76475 \text{ В}.$$

3. Визначаємо оцінки складових $u_i(U) = c_i \cdot u(x_i)$ сумарної невизначеності вимірювання напруги.

- Складова невизначеності результату, що зумовлена конструктивними особливостями вольтметра оцінюється через основну похибку при допущенні рівномірного закону розподілу можливих її значень в певних границях.

Оскільки $U_k = 100 \text{ В}$, а $U_x = 14,75 \text{ В}$, то відносна похибка отриманого результату буде:

$$\delta = \pm \left[0,15 + 0,05 \cdot \left(\frac{100}{14,75} - 1 \right) \right] = \pm 0,439 \% .$$

Тоді граничні значення, в яких знаходяться можливі абсолютні значення похибки, будуть:

$$\delta = \frac{\Delta}{X_n} \cdot 100\% \Rightarrow \Delta = \frac{\delta \cdot X_n}{100\%},$$

$$\Delta = \frac{\delta \cdot U_x}{100\%} = \frac{0,439\% \cdot 14,75}{100\%} = \pm 0,065 \text{ В}.$$

Отже, невизначеність, яка обумовлена основною похибкою вимірювання, в загальному вигляді визначається:

$$u_B(x_i) = \frac{b_i}{\sqrt{3}},$$

$$\text{тоді } u_B(\delta) = \frac{|\Delta|}{\sqrt{3}} = \frac{0,065}{\sqrt{3}} = 0,037 \text{ В.}$$

- Невизначеність зумовлена відхиленням температури від нормальної. Оскільки вимірювання проводилися при температурі $t = 26^\circ\text{C}$, то додаткова невизначеність буде:

$$u_B(\Delta t) = \frac{t - t_0}{10} \cdot u_B(\delta),$$

$$u_B(\Delta t) = \frac{26 - 20}{10} \cdot u_B(\delta) = 0,022 \text{ В.}$$

- Додаткова невизначеність, що зумовлена впливом напруженості зовнішнього магнітного поля $H = 400 \text{ А/м}$, буде

$$u_B(H) = \frac{1}{2} \cdot u_B(\delta),$$

$$u_B(H) = \frac{1}{2} \cdot u_B(\delta) = \frac{1}{2} \cdot 0,037 = 0,0019 \text{ В.}$$

- Невизначеність, обумовлена квантуванням, тобто подання неперервної шкали значень напруги за допомогою деякого дискретного ряду, різниця між сусідніми значеннями якого складає одиниці молодшого розряду пристрою.

Беремо рівномірний закон розподілу можливих значень напруги між сусідніми відліками вольтметра (які відрізняються на одиницю молодшого розряду) в загальному вигляді визначається:

$$u_B(x_i) = \frac{b_{i+} - b_{i-}}{2\sqrt{3}},$$

$$\text{тоді } u_B(q) = \frac{q}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{0,01}{2 \cdot \sqrt{3}} = 0,00288 \text{ В.}$$

- Невизначеність поправки $u_B(p)$, зумовлена невизначеністю вхідного опору вольтметра $u_B(R_{6x})$ та невизначеністю опору джерела $u_B(R_{6H})$, визначається з виразу для поправки:

$$p = -(U_x - U_R) = U_x \cdot \frac{R_{6H}}{R_{6x}}.$$

Розглядаючи цей вираз як рівняння непрямих вимірювань, з урахуванням відсутності кореляції між похибками визначення вхідного опору вольтметра та опору джерела, в загальному вигляді можна записати:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i), \text{ де } c_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right),$$

$$\text{тоді } u_c(p) = \sqrt{c_{R_{\text{вн}}}^2 \cdot u^2(R_{\text{вн}}) + c_{R_{\text{вх}}}^2 \cdot u^2(R_{\text{вх}})},$$

$$\text{де } c_{R_{\text{вн}}} = \left(\frac{\partial p}{\partial R_{\text{вн}}} \right) = \frac{U_x}{R_{\text{вх}}} = \frac{14,75}{10 \cdot 10^6} = 1,475 \text{ мкВ/Ом};$$

$$c_{R_{\text{вх}}} = \left(\frac{\partial p}{\partial R_{\text{вх}}} \right) = -U_x \cdot \frac{R_{\text{вн}}}{R_{\text{вх}}^2} = 1,475 \text{ нВ/Ом}.$$

Приймаємо всі значення опору всередині границь (min, max) рівномірно розподіленими, тоді можна оцінити за типом В невизначеності обох опорів в загальному вигляді:

$$u_B(x_i) = \frac{b_{i+} - b_{i-}}{2\sqrt{3}},$$

$$\text{тоді } u_B(R_{\text{вн}}) = \frac{R_{\text{вн.max}} - R_{\text{вн.min}}}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{110 \text{ кОм} - 90 \text{ кОм}}{2 \cdot \sqrt{3}} = 5,77 \text{ кОм},$$

$$u_B(R_{\text{вх}}) = \frac{R_{\text{вх.max}} - R_{\text{вх.min}}}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{11 \text{ МОм} - 9 \text{ МОм}}{2 \cdot \sqrt{3}} = 0,577 \text{ МОм}.$$

Тоді комбінована невизначеність поправки визначена за типом В із підставленням числових значень буде:

$$u_c(p) = \sqrt{c_{R_{\text{вн}}}^2 \cdot u^2(R_{\text{вн}}) + c_{R_{\text{вх}}}^2 \cdot u^2(R_{\text{вх}})} = 8,555 \cdot 10^{-3} \text{ В}.$$

4. Комбінована стандартна невизначеність вимірювання напруги в загальному вигляді буде:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m u(x_i)^2}.$$

Тоді із врахування всіх складових, що встановлені в п.3 маємо:

$$u_c(U) = \sqrt{u_B^2(\delta) + u_B^2(\Delta t) + u_B^2(H) + u_B^2(q) + u_B^2(p)} = 0,048 \text{ В}.$$

Аналізуємо складові невизначеності. Як видно, невизначеність квантування значно менша ніж всі інші, тому перевіримо чи можна нею знехтувати. За правилом знехтування необхідно перевірити умову:

$$\begin{aligned} u_B(q) &\leq 0,3 \cdot u_c(p) \\ 0,002887 &\leq 0,3 \cdot 0,008553 \\ 0,002887 &\geq 0,0025659 \end{aligned}$$

Як видно із розрахунку умова не виконується, тому похибкою квантування у порівнянні із похибкою поправки знехтувати неможна.

5. Визначаємо розширену невизначеність.

При рівні довіри $P=0,95$, допускаючи, що можливі результати вимірювання розподілені за нормальним законом, визначаємо розширену невизначеність:

$$U = k \cdot u_c(y),$$

де $k=1,96$ див. тема 1 п. «Розширена невизначеність».

Тоді

$$U = k \cdot u_c(y) = k \cdot u_c(U) = 2 \cdot 0,048 = 0,096 \text{ В}$$

6. Записуємо результат вимірювання:

$$U = (14,764 \pm 0,096) \text{ В}, P = 95 \%$$

Приклад виконання завдання в MathCAD

Практичне заняття №1

Завдання 1	Обробка результатів прямих вимірювань з одноразовим спостереженням	
Дано :		
- вольтметр В2-34 із верхньою межею вимірювання 100 В	$U_k := 100$	
- клас точності вольтметра 0,15/0,05	$c := 0.15$	$d := 0.05$
- результат вимірювання	$U_x := 14.75$	
Вимірювання здійснено при температурі навколишнього середовища $t = 26^\circ \text{C}$ та дії магнітного поля напруженістю $H = 400 \text{ А/м}$. Активний вхідний опір приладу $R_{\text{вх}} = (10 \pm 1) \text{ МОм}$. Відомо, що температурна похибка не перевищує основну на кожні 10°C відхилення температури від нормальних умов, а магнітна похибка становить половину основної інструментальної похибки ЗВТ при напруженості зовнішнього магнітного поля до $H = 400 \text{ А/м}$.		
Оцінити невизначеність результату вимірювання. Записати результат вимірювання.		$t := 26$ $H := 400$ $R_{\text{вх}} := 10 \cdot 10^6$

1. Складаємо специфікацію вимірювання:
 - ❖ Аналіз умов вимірювання
 - Вимірювання проводилися в лабораторних умовах при температурі навколишнього середовища $t = 26^{\circ}C$;
 - ❖ Аналіз схеми вимірювання
 - Границя вимірювання приладу $U_k = 100\text{ В}$;
 - Напруга вимірюється на виході джерела з внутрішнім опором $R_{\text{вн}} = (100 \pm 10)\text{ кОм}$;
 - ❖ Аналіз технічних характеристик приладу
 - Робочі умови застосування приладу: температура навколишнього середовища від 5 до $40^{\circ}C$;
 - Крок квантування приладу складає одиницю молодшого розряду $q = 0,01\text{ В}$;
 - Граничне значення основної відносної похибки приладу при вимірюванні постійної напруги на піддіпазоні $10\text{--}100\text{ В}$ складає:

$$q := 0.01$$

$$\delta = \pm \left[0,15 + 0,05 \cdot \left(\frac{U_k}{U} - 1 \right) \right] \%$$

- Межа додаткової похибки приладу при відхиленні температури навколишнього середовища від нормальної $t = 20^{\circ}C$ не перевищує в робочих умовах граничного значення основної похибки на $10^{\circ}C$ зміни температури;
- Додаткова магнітна похибка становить половину основної інструментальної похибки ЗВТ при напруженості зовнішнього магнітного поля до $H = 400\text{ А/м}$;
- Активний вхідний опір приладу $R_{\text{вх}} = (10 \pm 1)\text{ МОм}$.

$$R_{\text{вн}} := 10 \cdot 10^3$$

2. Визначаємо виправлений результат вимірювання з урахуванням поправки на систематичну похибку вимірювання зумовлену шунтуванням опору джерела опором вольтметра:

$$U_R = U_x \cdot \frac{R_{\text{вн}} + R_{\text{вх}}}{R_{\text{вх}}}$$

$$U_R := U_x \cdot \frac{R_{\text{вн}} + R_{\text{вх}}}{R_{\text{вх}}} \quad U_R = 14.76475$$

3. Визначаємо оцінки складових $u_i(U) = c_i \cdot u(x_i)$ сумарної невизначеності вимірювання напруги

- Складова невизначеності результату, що зумовлена конструктивними особливостями вольтметра оцінюється через основну похибку при допущенні рівномірного закону розподілу можливих її значень в певних границях.

Оскільки $U_k = 100\text{ В}$, а $U_x = 14,75\text{ В}$, то відносна похибка отриманого результату буде:

$$\delta = \pm \left[c + d \cdot \left(\frac{U_k}{U} - 1 \right) \right] \%$$

$$\delta := c + d \cdot \left[\left(\frac{U_k}{U_x} \right) - 1 \right] \quad \delta = 0.439$$

Тоді граничні значення, в яких знаходяться можливі абсолютні значення похибки, будуть:

$$\delta = \frac{\Delta}{X_n} \cdot 100 \% \Rightarrow \Delta = \frac{\delta \cdot X_n}{100 \%}$$

$$\Delta := \frac{\delta \cdot U_x}{100}$$

$$\Delta = 0.065$$

Таким чином невизначеність, яка обумовлена основною похибкою вимірювання, в загальному вигляді дорівнює:

$$u_B(x_i) = \frac{b_i}{\sqrt{3}}$$

$$u\delta := \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$

$$u\delta = 0.037$$

- Невизначеність зумовлена відхиленням температури від нормальної

Оскільки вимірювання проводилися при температурі $t = 26^\circ \text{C}$, то додаткова невизначеність буде:

$$u_B(\Delta t) = \frac{t - t_0}{10} \cdot u_B(\delta)$$

$$t_0 := 20$$

$$u_t := \left[\frac{(t - t_0)}{10} \right] \cdot u\delta$$

$$u_t = 0.022$$

- Додаткова невизначеність, що зумовлена впливом напруженості зовнішнього магнітного поля $H = 400 \text{ A/m}$, буде

$$u_B(H) = \frac{1}{2} \cdot u_B(\delta)$$

$$u_H := \left(\frac{1}{2} \right) \cdot u\delta$$

$$u_H = 0.019$$

- Невизначеність, обумовлена квантуванням, тобто подання неперервної шкали значень напруги за допомогою деякого дискретного ряду, різниця між сусідніми значеннями якого складає одиниці молодшого розряду пристрою.

Беремо рівномірний закон розподілу можливих значень напруги між сусідніми відліками вольтметра (які відрізняються на одиницю молодшого розряду), в загальному вигляді:

$$u_B(x_i) = \frac{b_{i+} - b_{i-}}{2\sqrt{3}}$$

$$u_q := \frac{q}{2\sqrt{3}}$$

$$u_q = 2.887 \times 10^{-3}$$

- Невизначеність поправки $u_B(p)$, зумовлена невизначеністю вхідного опору вольтметра $u_B(R_{ex})$ та невизначеністю опору джерела $u_B(R_{en})$, визначається з виразу для поправки:

$$p = -(U_x - U_R) = U_x \cdot \frac{R_{en}}{R_{ex}}$$

Розглядаючи цей вираз як рівняння непрямих вимірювань, з урахуванням відсутності кореляції між похибками визначення вхідного опору вольтметра та опору джерела, в загальному вигляді можна записати:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i), \text{ де } c_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

Тоді
$$u_c(p) = \sqrt{c_{R_{\text{сн}}}^2 \cdot u^2(R_{\text{сн}}) + c_{R_{\text{сх}}}^2 \cdot u^2(R_{\text{сх}})}$$

$$c_{R_{\text{сн}}} = \left(\frac{\partial p}{\partial R_{\text{сн}}} \right) = \frac{U_x}{R_{\text{сх}}}$$

$$c_{R_{\text{vn}}} := \frac{U_x}{R_{\text{vv}}}$$

$$c_{R_{\text{vn}}} = 1.475 \times 10^{-6}$$

$$c_{R_{\text{сх}}} = \left(\frac{\partial p}{\partial R_{\text{сх}}} \right) = -U_x \cdot \frac{R_{\text{сн}}}{R_{\text{сх}}^2}$$

$$c_{R_{\text{vv}}} := \frac{U_x \cdot R_{\text{vn}}}{R_{\text{vv}}^2}$$

$$c_{R_{\text{vv}}} = 1.475 \times 10^{-9}$$

Приймаємо всі значення опору всередині границь (min, max) рівномірно розподіленими, тоді можна оцінити за типом В невизначеності обох опорів в загальному вигляді:

$$u_B(x_i) = \frac{b_{i+} - b_{i-}}{2\sqrt{3}}$$

$$R_{\text{vnmax}} := 110 \cdot 10^3$$

$$R_{\text{vnmin}} := 90 \cdot 10^3$$

$$u_B(R_{\text{сн}}) = \frac{R_{\text{снmax}} - R_{\text{снmin}}}{2 \cdot \sqrt{3}}$$

$$u_{R_{\text{vn}}} := \frac{R_{\text{vnmax}} - R_{\text{vnmin}}}{2 \cdot \sqrt{3}}$$

$$u_{R_{\text{vn}}} = 5.774 \times 10^3$$

$$R_{\text{vvmax}} := 11 \cdot 10^6$$

$$R_{\text{vvmin}} := 9 \cdot 10^6$$

$$u_B(R_{\text{сх}}) = \frac{R_{\text{схmax}} - R_{\text{схmin}}}{2 \cdot \sqrt{3}}$$

$$u_{R_{\text{vv}}} := \frac{R_{\text{vvmax}} - R_{\text{vvmin}}}{2 \cdot \sqrt{3}}$$

$$u_{R_{\text{vv}}} = 5.774 \times 10^5$$

Тоді комбінована невизначеність поправки визначена за типом В із підстановкою числових значень буде:

$$u_c(p) = \sqrt{c_{R_{\text{сн}}}^2 \cdot u^2(R_{\text{сн}}) + c_{R_{\text{сх}}}^2 \cdot u^2(R_{\text{сх}})} \quad u_{\text{ср}} := \sqrt{c_{R_{\text{vn}}}^2 \cdot u_{R_{\text{vn}}}^2 + c_{R_{\text{vv}}}^2 \cdot u_{R_{\text{vv}}}^2} \quad u_{\text{ср}} = 8.558 \times 10^{-3}$$

4. Комбінована стандартна невизначеність вимірювання напруги в загальному вигляді буде:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m u(x_i)^2}$$

Тоді із врахування всіх складових, що встановлені в п.3 маємо:

$$u_c(U) = \sqrt{u_B^2(\delta) + u_B^2(\Delta t) + u_B^2(H) + u_B^2(q) + u_B^2(p)}$$

$$u_{\text{с}} := \sqrt{u_{\delta}^2 + u_t^2 + u_q^2 + u_H^2 + u_{\text{ср}}^2}$$

$$u_{\text{с}} = 0.048$$

5. Визначаємо розширену невизначеність.

При рівні довіри $P = 0,95$, допускаючи, що можливі результати вимірювання розподілені за нормальним законом, визначаємо розширену невизначеність:

$$U = k \cdot u_c(y)$$

де $k = 1.96$ див. тема 1 п. «Розширена невизначеність».

$$\text{Тоді } k := 1.96 \quad U := k \cdot u_{\text{с}} \quad U = 0.09464$$

6. Записуємо результат вимірювання:

$$U = (14.764 \pm 0.095) B, P = 95 \%$$

Контрольні питання

1. Дайте визначення поняття «невизначеність вимірювання».
2. На які дві категорії розділяють невизначеності за способами їх оцінювання.
3. За допомогою яких методів оцінюється невизначеність типу А.
4. В чому відмінність між невизначеністю типу А та невизначеністю типу В.
5. На основі яких даних можна визначити невизначеність типу В.
6. Яке значення є найкращою оцінкою вимірюваної величини.
7. Дайте визначення поняття «стандартна невизначеність».
8. Що називається комбінованою невизначеністю.
9. Дайте означення «розширена невизначеність».

Практичне заняття 2

ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ ПРЯМИХ БАГАТОРАЗОВИХ ВИМІРЮВАНЬ

Мета роботи: навчитися оцінювати невизначеність результатів прямих вимірювань з багаторазовим спостереженням.

1. Підготовка до роботи

Вивчити за рекомендованою літературою наступні питання:

1. Поняття «невизначеність» вимірювання.
2. В чому відмінність між невизначеністю типу А та невизначеністю типу В.
3. На основі яких даних можна визначити невизначеність типу В.
4. Визначення поняття «стандартна невизначеність».
5. Поняття комбінованої невизначеності.
6. Поняття розширена невизначеність.
7. Вирази для визначення стандартної невизначеності типу А при багаторазових спостереженнях.
8. Вираз для визначення стандартної невизначеності типу В для заданих границь рівномірного закону розподілу.

2. Теоретичні відомості

Статичні вимірювання фізичних величин можна розділити на групи залежно від способу оцінювання результату вимірювання:

- Прямі вимірювання з одноразовим спостереженням;
- Прямі вимірювання з багаторазовими спостереженнями;
- Опосередковані вимірювання фізичної величини з перетворенням роду;
- Сукупні вимірювання однорідних фізичних величин;
- Сумісні вимірювання різнорідних фізичних величин.

2.1 Обробка результатів прямих вимірювань з багаторазовими спостереженнями

Прямі багаторазові вимірювання - це вимірювання внаслідок яких оцінку значення вимірюваної величини отримують на основі ряду результатів прямих вимірювань. В загальному випадку, обробку результатів прямих вимірювань із багаторазовими спостереженнями виконують в наступному порядку:

Алгоритм обробки результатів прямих вимірювань з багаторазовими спостереженнями

1. Аналіз складових невизначеностей вимірювання

2. Обчислити оцінку значення вимірюваної величини:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \quad (2.1)$$

де x_i - результати окремих спостережень.

3. Оцінити стандартну невизначеність результату вимірювання:

$$u_A = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.2)$$

4. Вилучити систематичні ефекти, що призводять до появи стандартних невизначеностей

5. Вилучити промахи з результатів вимірювання

Для цього розраховують співвідношення:

$$v_1 = \frac{\bar{x} - x_{\min}}{u_A}; v_2 = \frac{\bar{x} - x_{\max}}{u_A} \quad (2.3)$$

Задати довірчий рівень α та розрахувати надійність $q = 1 - \alpha$ і, залежно від кількості проведених вимірювань n вибирають допустиме значення v_α табл. додаток Б5.

Якщо розраховані значення v_1 та v_2 менші за допустиме значення v_α , то гіпотезу про наявність аномальних результатів в ряді спостережень відкидають. Якщо ж одне із значень v_1 та v_2 більше за v_α , то це означає, що в результатах вимірювань присутні промахи. Промахи вилучають із результатів вимірювань.

6. Оцінити стандартну невизначеність середнього арифметичного:

$$u_A(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.4)$$

7. Оцінити складові $u_i(y)$ комбінованої невизначеності середнього арифметичного. Розрахувати комбіновану невизначеність типу В:

$$u_{cB}(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i)} \quad (2.5)$$

8. Оцінити комбіновану невизначеність результату вимірювання:

$$u_c(y) = \sqrt{u_A^2(y) + u_{cB}^2(y)} \quad (2.6)$$

9. Оцінити розширену невизначеність результату вимірювання:

$$U = k \cdot u_c(y) \quad (2.7)$$

10. Записати результат вимірювання із зазначенням розширеної невизначеності:

$$X = \bar{x} \pm U, P = \%$$

3. Виконання роботи

Завдання 1

Обробка результатів прямих вимірювань з багаторазовими спостереженнями

Проводились вимірювання напруги вольтметром класу точності 0,2 з кінцевим значенням діапазону вимірювання $U_k = 30 \text{ В}$. Додаткова похибка вольтметра не перевищує його основну похибку.

Внутрішній опір вольтметра $R_V \geq 500 \text{ кОм}$. Опір навантаження $R_H \geq 1 \text{ кОм}$ опір кола $R_K \geq 100 \text{ кОм}$. Проведено $n = 15$ вимірювань напруги.

Оцінити невизначеність та записати результат вимірювання.

варіант	приклад	1	2	3	4
$U_k, \text{В}$	30	25	20	30	20
клас точності	0,2	0,25	0,4	0,5	0,1
P, %	95	90	95	99	90

U_x, B	$X_j :=$	X1 =	0	X2 =	0	X3 =	0	X4 =	0
	15.806		0 19.776		0 18.502		0 23.875		0 19.547
	15.732		1 19.654		1 18.44		1 24.046		1 19.217
	15.863		2 19.759		2 18.467		2 24.644		2 19.008
	15.784		3 19.515		3 18.343		3 23.64		3 18.457
	15.742		4 19.14		4 17.467		4 24.001		4 18.71
	15.735		5 20.022		5 18.035		5 24.565		5 18.522
	15.754		6 19.938		6 17.615		6 24.455		6 18.906
	15.85		7 20.284		7 18.355		7 22.521		7 19.723
	15.778		8 21.118		8 17.907		8 22.9		8 19.128
	15.808		9 20.412		9 17.671		9 24.105		9 19.364
	15.914				10 17.631		10 23.686		10 19.525
	15.737				11 17.737		11 23.389		11 18.988
	15.8				12 18.285		12 24.051		
	15.9								
	15.88								

варіант	5		6		7		8					
U_k, B	40		45		50		100					
клас точності	1,5		2		2,5		2.5					
P, %	95		99		90		95					
U_x, B	X5 =		0	X6 =		0	X7 =		0	X8 =		0
		0	40.198		0	45.152		0	35.934		0	76.351
		1	40.115		1	45.074		1	35.964		1	76.385
		2	40.304		2	44.788		2	36.059		2	77.194
		3	39.663		3	44.499		3	36.024		3	76.718
		4	39.506		4	45.438		4	36.045		4	77.911
		5	42.164		5	45.301		5	35.873		5	76.035
		6	39.797		6	44.642		6	35.878		6	77.266
		7	39.091		7	45.045		7	35.879		7	77.306
		8	40.539		8	45.526		8	35.955		8	78.232
		9	39.721		9	44.901		9	35.856		9	76.547
		10	39.145		10	44.37		10	35.688		10	77.386
		11	39.264		11	44.563		11	36.14		11	78.083
		12	39.986		12	44.589		12	36.087		12	75.725
		13	40.023		13	44.84		13	36.016		13	77.916
14	40.188	14	45.019	14	35.889	14	76.266					

варіант	9	10
U_k, B	40	35
клас точності	1	2
P, %	99	90

U_x, B	XX9=		0	XX10=		0
		0	35.321		0	13.137
		1	34.263		1	13.364
		2	34.13		2	13.576
		3	35.297		3	13.652
		4	33.658		4	13.628
		5	34.913		5	13.182
		6	35.289		6	12.515
		7	36.026		7	13.326
		8	34.14		8	12.894
		9	34.731		9	12.396
		10	35.333		10	14.48
		11	35.13		11	12.135

1. Складаємо специфікацію вимірювання:

❖ Аналіз умов вимірювання

• Вимірювання проводилися в лабораторних умовах при температурі довкілля, що не перевищує нормальних значень.

❖ Аналіз схеми вимірювання

• Границя вимірювання приладу $U_k = 30 B$;

• Напруга вимірюється на навантаженні $R_n \geq 1 k\Omega$, дільником напруги із опором кола $R_k \geq 100 k\Omega$.

❖ Аналіз технічних характеристик приладу

• Робочі умови застосування приладу: температура довкілля від $5 до 40^\circ C$;

• Граничне значення основної відносної похибки приладу при вимірюванні постійної напруги складає:

$$\gamma = \pm \frac{\Delta_0}{X_N} \cdot 100\% . \quad (2.8)$$

• Активний вхідний опір приладу $R_V \geq 500 k\Omega$.

2. Обчислити оцінку значення вимірюваної величини за формулою (2.1):

$$\bar{U} = \frac{\sum_{i=1}^n U_i}{n} = 15,806 B .$$

3. Оцінити стандартну невизначеність результату вимірювання за формулою (2.2):

$$u_A = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2} = 0,06242 B .$$

4. Визначити поправку яку необхідно врахувати в результат вимірювання, оскільки існує похибка взаємодії вольтметра з об'єктом.

Відносна похибка взаємодії вольтметра з об'єктом визначається за формулою:

$$\delta_V = \frac{U' - U}{U} \cdot 100\%, \quad (2.9)$$

де U' - падіння напруги на навантаженні після підключення вольтметра;

U - падіння напруги на навантаженні без підключення вольтметра.

$$U' = E \cdot \frac{R_H \cdot R_V}{R_H \cdot R_K + R_K \cdot R_V + R_H \cdot R_V}; \quad U = E \cdot \frac{R_H}{R_H + R_K}.$$

З урахуванням цих виразів за формулою (2.9) отримаємо відносну похибку:

$$\delta_V = -\frac{R_H \cdot R_K}{R_H \cdot R_K + R_K \cdot R_V + R_H \cdot R_V} \cdot 100\% = -0,198\%.$$

Тоді абсолютна похибка від підключення вольтметра складає:

$$\Delta_V = \frac{\delta_V \cdot \bar{U}}{100\%} = \frac{-0,198\% \cdot 15,806 \text{ В}}{100\%} = -0,0312 \text{ В}.$$

Цю систематичну похибку можна вилучити за допомогою поправки:

$$p = -\Delta_V = 0,0312 \text{ В}.$$

Тоді виправлений результат буде:

$$\bar{U}_{\text{випр}} = \bar{U} + p = 15,806 + 0,0312 = 15,8372 \text{ В}.$$

5. Перевіряємо мінімальний та максимальний результат на наявність грубої похибки. Для цього розраховують співвідношення за формулою (2.3):

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\bar{x} - x_{\min}}{u_A}; \quad v_2 = \frac{\bar{x} - x_{\max}}{u_A} \\ v_1 &= \frac{\bar{U} - U_{\min}}{u_A} = \frac{15,806 - 15,732}{0,06242} = 1,178 \\ v_2 &= \frac{\bar{U} - U_{\max}}{u_A} = \frac{15,806 - 15,914}{0,06242} = 1,738 \end{aligned}$$

Задаємо довірчий рівень $\alpha = 95\%$ та розраховуємо надійність $q = 1 - \alpha = 1 - 0,95 = 0,05$ і, залежно від кількості проведених вимірювань n вибираємо допустиме значення $\nu_{0,05;15} = 2,493$ табл. додаток Б5.

Оскільки розраховані значення ν_1 та ν_2 менші за допустиме значення $\nu_{0,05;15} = 2,493$, гіпотезу про наявність аномальних результатів в ряді спостережень відкидаємо, тобто результати не містять грубу похибку.

6. Оцінюємо стандартну невизначеність середнього арифметичного за формулою (2.4):

$$u_A(\bar{U}) = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2} = 0,01612 \text{ В}.$$

7. Визначаємо оцінки складових $u_i(U) = c_i \cdot u(x_i)$ сумарної невизначеності вимірювання напруги.

- Складова невизначеності результату, що зумовлена конструктивними особливостями вольтметра оцінюється через основну похибку при допущенні рівномірного закону розподілу можливих її значень в певних границях.

Оскільки $U_k = 30 \text{ В}$, то приведена похибка отриманого результату буде:

$$\gamma = \pm \frac{\Delta_0}{X_N} \cdot 100\% \Rightarrow \Delta_0 = \frac{\gamma \cdot X_N}{100\%} = \pm 0,06 \text{ В}.$$

Отже, невизначеність, яка обумовлена основною похибкою вимірювання, в загальному вигляді дорівнює:

$$u_B(x_i) = \frac{b_i}{\sqrt{3}}, \quad (2.10)$$

тоді $u_B(\gamma) = \frac{|\Delta_0|}{\sqrt{3}} = 0,035 \text{ В}.$

- Додаткова невизначеність за умовою не перевищує основну похибку вольтметра, тоді $u_B(\Delta_{\text{доп}}) = u_B(\gamma) = \pm 0,035 \text{ В}.$

- Складова невизначеності результату, що зумовлена підключенням вольтметра визначена в п.4 визначається:

$$\Delta_V = \frac{\delta_V \cdot \bar{U}}{100\%} = \frac{-0,198\% \cdot 15,806 \text{ В}}{100\%} = 0,0312 \text{ В},$$

тоді $u_B(\delta_V) = \frac{|\Delta_V|}{\sqrt{3}} = 0,018 \text{ В}.$

Розраховуємо комбіновану невизначеність типу В за формулою (2.5):

$$u_{cB}(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i)}.$$

Тоді із врахування всіх складових, що встановлені в п.7 маємо:

$$u_{cB}(\bar{U}) = \sqrt{u^2(\gamma) + u^2(\Delta_{\partial\partial\partial}) + u^2(\delta_V)} = 0,052 \text{ B}.$$

8. Оцінюємо комбіновану невизначеність результату вимірювання за формулою (2.6):

$$u_c(\bar{U}) = \sqrt{u_A^2(\bar{U}) + u_{cB}^2(\bar{U})} = \sqrt{0,01612^2 + 0,052^2} = 0,081 \text{ B}.$$

Записуємо результат із стандартною невизначеністю:

$$X = 15,837 \text{ B}; u_c(\bar{U}) = 0,081 \text{ B}$$

9. Оцінюємо розширену невизначеність результату вимірювання за формулою (2.7):

$$U = k \cdot u_c(y),$$

де $k = 1,96$ див. тема 1 п. «Розширена невизначеність» при $P = 95 \%$.
Тоді

$$U = k \cdot u_c(\bar{U}) = 1,96 \cdot 0,081 = 0,159 \text{ B}.$$

Записуємо результат із розширеною невизначеністю:

$$U = 15,837 \pm 0,159 \text{ B}, P = 95 \%$$

Приклад виконання завдання в MathCAD

Практична робота №2

Завдання 1

Обробка результатів прямих вимірювань з багаторазовими спостереженнями

Дано

- клас точності вольтметра 0,2

$$\gamma := 0.2$$

- кінцеве значення діапазону вимірювання

$$U_k := 30$$

- внутрішній опір вольтметра

$$R_V \geq 500 \text{ кОм}$$

$$R_V := 500 \cdot 10^3$$

- опір навантаження

$$R_N \geq 1 \text{ кОм}$$

$$R_N := 1 \cdot 10^3$$

- опір кола

$$R_X \geq 100 \text{ кОм}$$

$$R_X := 100 \cdot 10^3$$

Проведено $n = 15$ вимірювань напруги.

$$n := 15$$

Оцінити невизначеність результату вимірювання. Записати результат вимірювання.

$$j := 1..n$$

$$U_j :=$$

1. Складаємо специфікацію вимірювання:

❖ Аналіз умов вимірювання

- Вимірювання проводилися в лабораторних умовах при температурі навколишнього середовища, що не перевищує нормальних значень.

❖ Аналіз схеми вимірювання

- Границя вимірювання приладу $U_k = 30 \text{ В}$;
- Напруга вимірюється на навантаженні $R_N \geq 1 \text{ кОм}$, дільником напруги із опором кола $R_X \geq 100 \text{ кОм}$.

❖ Аналіз технічних характеристик приладу

- Робочі умови застосування приладу: температура навколишнього середовища від 5 до 40°C ;
- Граничне значення основної відносної похибки приладу при вимірюванні постійної напруги складає:

$$\gamma = \pm \frac{\Delta_0}{X_N} \cdot 100\%$$

- Активний вхідний опір приладу $R_V \geq 500 \text{ кОм}$.

2. Розраховуємо оцінку значення вимірюваної величини:

15.806
15.732
15.863
15.784
15.742
15.735
15.754
15.85
15.778
15.808
15.914
15.737
15.8
15.9
15.88

$$\bar{U} = \frac{\sum_{i=1}^n U_i}{n}$$

$$U_{sr} := \frac{\sum_{j=1}^n U_j}{n} \quad U_{sr} = 15.806$$

3. Оцінюємо стандартну невизначеність результату вимірювання:

$$u_A = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2} \quad u_A := \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n [(U)_j - U_{sr}]^2}{(n-1)}} \quad u_A = 0.06242$$

4. Визначаємо поправку яку необхідно врахувати в результат вимірювання, оскільки існує похибка взаємодії вольтметра з об'єктом.

Відносна похибка взаємодії вольтметра з об'єктом визначається за формулою:

$$\delta_V = \frac{U' - U}{U} \cdot 100\%$$

де U' - падіння напруги на навантаженні після підключення вольтметра;

U - падіння напруги на навантаженні без підключення вольтметра.

$$U' = E \cdot \frac{R_n \cdot R_V}{R_n \cdot R_k + R_k \cdot R_V + R_n \cdot R_V}; \quad U = E \cdot \frac{R_n}{R_n + R_k}.$$

З урахуванням даних виразів отримаємо відносну похибку:

$$\delta_V = -\frac{R_n \cdot R_k}{R_n \cdot R_k + R_k \cdot R_V + R_n \cdot R_V} \cdot 100\% \quad \delta_V := \left(\frac{R_n \cdot R_k}{R_n \cdot R_k + R_k \cdot R_V + R_n \cdot R_V} \right) \cdot 100 \quad \delta_V = 0.198$$

Тоді абсолютна похибка від підключення вольтметра визначається:

$$\Delta_V = \frac{\delta_V \cdot \bar{U}}{100\%} \quad \Delta_V := \frac{\delta_V \cdot U_{sr}}{100} \quad \Delta_V = 0.031236$$

Цю систематичну похибку можна вилучити за допомогою поправки:

$$p = -\Delta_V = 0.0312 \text{ В.}$$

Тоді виправлений результат буде:

$$\bar{U}_{\text{випр}} = \bar{U} + p = 15.806 + 0.0312 = 15.8372 \text{ В.}$$

5. Перевіряємо мінімальний та максимальний результат на наявність грубої похибки. Для цього розраховують співвідношення:

$$v_1 = \frac{\bar{x} - x_{\min}}{u_A}; \quad v_2 = \frac{\bar{x} - x_{\max}}{u_A}$$

$$v_1 := \frac{(U_{sr} - 15.732)}{u_A} \quad v_1 = 1.178 \quad v_2 := \frac{(U_{sr} - 15.914)}{u_A} \quad v_2 = -1.738$$

Задаємо довірчий рівень $\alpha = 95\%$ та розраховуємо надійність $q = 1 - \alpha = 1 - 0,95 = 0,05$ і, залежно від кількості проведених вимірювань n вибирають допустиме значення $\nu_{0,05;15} = 2,493$ табл.додаток Б5.

Оскільки розраховані значення ν_1 та ν_2 менші за допустиме значення $\nu_{0,05;15} = 2,493$, гіпотезу про наявність аномальних результатів в ряді спостережень відкидаємо, тобто результати не містять грубу похибку.

6. Оцінюємо стандартну невизначеність середнього арифметичного:

$$u_A(\bar{U}) = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2} \quad u_{AA} := \frac{u_A}{\sqrt{15}} \quad u_{AA} = 0.01612$$

7. Визначаємо оцінки складових $u_i(U) = c_i \cdot u(x_i)$ сумарної невизначеності вимірювання напруги.

- Складова невизначеності результату, що зумовлена конструктивними особливостями вольтметра оцінюється через основну похибку при допущенні рівномірного закону розподілу можливих її значень в певних границях.

Оскільки $U_k = 30 \text{ В}$, то приведена похибка отриманого результату буде:

$$\gamma = \pm \frac{\Delta_0}{X_N} \cdot 100\% \Rightarrow \Delta_0 = \frac{\gamma \cdot X_N}{100\%} \quad U_N := U_k \quad \Delta_0 := \frac{\gamma \cdot U_N}{100} \quad \Delta_0 = 0.06$$

Таким чином невизначеність, яка обумовлена основною похибкою вимірювання, в загальному вигляді дорівнює:

$$u_B(\gamma) = \frac{|\Delta_0|}{\sqrt{3}} \quad u_{B\gamma} := \frac{\Delta_0}{\sqrt{3}} \quad u_{B\gamma} = 0.035$$

- Додаткова невизначеність за умовою не перевищує основну похибку вольтметра, тоді $u_B(\Delta_{\partial\partial\partial}) = u_B(\gamma) = \pm 0.035 \text{ В}$.

- Складова невизначеності результату, що зумовлена підключенням вольтметра визначена в п.4 визначається:

$$u_B(\delta_V) = \frac{|\Delta_V|}{\sqrt{3}} = 0.018 \text{ В} \quad u_{B\Delta V} := \frac{\Delta_V}{\sqrt{3}} \quad u_{B\Delta V} = 0.018$$

Розраховуємо комбіновану невизначеність типу В:

$$u_{cB}(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i)}$$

Тоді із врахування всіх складових, що встановлені в п.7 маємо:

$$u_{cB}(\bar{U}) = \sqrt{u^2(\gamma) + u^2(\Delta_{\partial\partial\partial}) + u^2(\delta_V)} \quad u_{cB} := \sqrt{u_{B\gamma}^2 + u_{B\gamma}^2 + u_{B\Delta V}^2} \quad u_{cB} = 0.052$$

8. Оцінюємо комбіновану невизначеність результату вимірювання:

$$u_c(y) = \sqrt{u_A^2(y) + u_{cB}^2(y)}$$

$$u_c(\bar{U}) = \sqrt{u_A^2(\bar{U}) + u_{cB}^2(\bar{U})}$$

$$u_c := \sqrt{u_A^2 + u_{cB}^2}$$

$$u_c = 0.081$$

Записуємо результат із стандартною невизначеністю:

$$X = 15,837 \text{ В}; u_c(\bar{U}) = 0.081 \text{ В}$$

9. Оцінити розширену невизначеність результату вимірювання:

$$U = k \cdot u_c(y)$$

де $k = 1.96$ див. тема 1 п. «Розширена невизначеність» при $P=95\%$.

$$\text{Тоді } k := 1.96 \quad U := k \cdot u_c \quad U = 0.159$$

Записуємо результат із розширеною невизначеністю:

$$U = 15,837 \pm 0,159 \text{ В}, P = 95\%$$

Контрольні питання

1. Дайте визначення поняття «невизначеність вимірювання».
2. На які дві категорії розділяють невизначеності за способами їх оцінювання.
3. За допомогою яких методів оцінюється невизначеність типу А.
4. В чому відмінність між невизначеністю типу А та невизначеністю типу В.
5. На основі яких даних можна визначити невизначеність типу В.
6. Яке значення є найкращою оцінкою вимірюваної величини.
7. Дайте визначення поняття «стандартна невизначеність».
8. Що називається комбінованою невизначеністю.
9. Дайте означення «розширена невизначеність».
10. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності типу А при багаторазових спостереженнях.
11. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності типу В для заданих границь трикутного закону розподілу.
12. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності типу В для заданих границь трапецеїдального закону розподілу.
13. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності типу В для заданих границь експоненціального закону розподілу.
14. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності типу В для заданих границь арксинусного закону розподілу.
15. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності типу В для заданих границь рівномірного закону розподілу.
16. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності типу В при заданому інтервалі нормального закону розподілу.

Практичне заняття 3

ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ ДЕКІЛЬКОХ ГРУП ПРЯМИХ ВИМІРЮВАНЬ З БАГАТОРАЗОВИМИ СПОСТЕРЕЖЕННЯМИ

Мета роботи: перевірити нульову гіпотезу за допомогою дисперсійного аналізу однофакторної задачі з нерівномірним числом вимірювань.

1. Підготовка до роботи

Вивчити за рекомендованою літературою наступні питання:

1. Які види невизначеностей існують.
2. Дайте визначення інструментальної невизначеності.
3. Які складові інструментальної невизначеності Ви знаєте.
4. Наведіть приклад визначення інструментальної невизначеності.

2. Теоретичні відомості

Обробка групи прямих вимірювань з багаторазовими спостереженнями

Якщо багаторазові вимірювання тривають довго, то необхідно врахувати той факт, що зміни параметрів ЗВТ і довкілля можуть викликати систематичні або випадкові зміни оцінки результату вимірювання та його середньо квадратичних відхилень СКВ. Для того, щоб зменшити ці зміни, вимірювання проводять у декілька серій, причому в кожній серії знову настроюють вимірювальне обладнання та вживають заходів для стабілізації параметрів довкілля.

За наявності декількох груп багаторазових вимірювань однієї фізичної величини слід упевнитися, що додаткові невизначеності, які викликані наявністю невилучених систематичних ефектів відсутні і оцінки СКВ є близькими.

Якщо в декількох групах вимірювань немає складових невизначеності, що вносяться невилученими залишками систематичних ефектів та відмінність оцінок СКВ допустима, то такі групи називають групами з однаковим розсіюванням. Це означає, що середні арифметичні значення та оцінки дисперсій у всіх групах є оцінками дійсного значення та однієї дисперсії.

Алгоритм розрахунку однофакторної задачі з нерівномірним числом вимірювань

Нульова гіпотеза (в загальному) зводиться до передбачення, що генеральні міжгрупові середні і дисперсії рівні між собою і відмінності, що спостерігаються між вибіркоvim показниками викликані випадковими причинами, а не впливом на ознаку регульованих факторів.

Нульова гіпотеза – відмінність оцінок СКВ допустима тобто середні арифметичні значення та оцінки дисперсій у всіх групах є оцінками дійсного значення та однієї дисперсії. В декількох групах вимірювань немає складових невизначеності, що вносяться невилученими залишками систематичних ефектів.

1. Сформувати дані у вигляді таблиці

Первинні дані, що підлягають дисперсійному аналізу, групують у вигляді комбінаційної таблиці, у якій градації організованого (регульованого) фактору А розташовують по горизонталі, а числові значення ознаки X, розміщують відповідно за градаціями фактору А.

Значення ознаки	Регульований фактор					
	Градації фактору А					
	A ₁	A ₂	...	A _j	...	
X ₁	X ₁₁	X ₁₂		X _{1j}		
X ₂	X ₂₁	X ₂₂		X _{2j}		
....						
X _i	X _{i1}	X _{i2}		X _{ij}		
....						

2. Розрахунок допоміжних величин

- Середнє арифметичне кожного стовпчика $\bar{X}_i$;
- Середнє арифметичне загальне $\bar{X}$.

3. Розрахунок числа степенів свободи

- $k = N - 1$ - для загального числа варіювання;
- $k_A = a - 1$ - для факторіального варіювання;
- $k_2 = N - a$ - для випадкового варіювання.

4. Розрахунок факторіального розсіювання та оцінки міжгрупової дисперсії

- Розрахувати факторіальне розсіювання за формулою $D_A = \sum_{j=1}^a n_j \cdot (\bar{X}_i - \bar{X})^2$;
- Попередньо розрахувати $(\bar{X}_i - \bar{X})^2$, $n_j \cdot (\bar{X}_i - \bar{X})^2$ для кожного стовпчика;
- Розрахувати оцінку між групової дисперсії за формулою $S_A^2 = \frac{D_A}{a-1}$.

5. Розрахунок випадкового розсіювання та оцінки внутрішньої групової дисперсії

- Розрахувати випадкове розсіювання за формулою $D_2 = \sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$;
- Попередньо розрахувати $(X_{ij} - \bar{X}_i)^2$ для кожного значення;
- Розрахувати оцінку внутрішньої групової дисперсії за формулою $S_2^2 = \frac{D_2}{N-a}$

6. Розрахунок загального розсіювання та оцінки загальної дисперсії

- Розрахувати загальне розсіювання за формулою $D = \sum_{i=1}^N (X_{ij} - \bar{X})^2$;
- Попередньо розрахувати $(X_{ij} - \bar{X})^2$ для кожного значення;
- Розрахувати оцінку загальної дисперсії за формулою $S^2 = \frac{D}{N-1}$.

7. Розрахунок
дисперсійного відношення

- Розрахувати дисперсійне відношення $F = \frac{S_A^2}{S_2^2}$ при $S_A^2 \geq S_2^2$. Якщо $S_A^2 < S_2^2$ це може свідчити про порушення вимог коректності методики отримання експериментальних даних. Тоді розраховують $F = \frac{S_2^2}{S_A^2}$,

8. Визначення критичного
значення критерію Фішера

- За табл.Б4 визначаємо $F_{\alpha;k_A;k_2}$ для прийнятого рівня значущості $\alpha = 5\%$ і числа степенів свободи k_A, k_2 .
*Примітка. Число степенів свободи для більшої дисперсії знаходять в верхньому рядочку, а для меншої – в першому стовпчику таблиці Б4. Або можна використати функцію =FРАСПОБР()

Якщо $F_{\phi} \geq F_{\alpha;k_A;k_2}$ **нульову гіпотезу відкидають** - існування міжгрупової невизначеності приймається і передбачається, що вона випадкова.

Якщо $F_{\phi} \leq F_{\alpha;k_A;k_2}$ приймають нульову гіпотезу - міжгрупової дисперсії не існує (в **декількох групах вимірювань немає складових невизначеності, що вносяться невилученими залишками систематичних ефектів**)

Для прийнятого рівня значущості $\alpha, \%$ і чисел степенів свободи $k_A = a - 1, k_2 = N - a$ таблиця Б4.

9. Записати результат
вимірювання з
розширеною
невизначеністю

$$U = t_p(\nu) \cdot s(\bar{y})$$

де $s(\bar{y})$ - загальна дисперсія що відображає як внутрішню групову так міжгрупову складові дисперсії (в даному випадку це S^2);

$t_p(\nu)$ - коефіцієнт Стюдента для числа степенів свободи $a \cdot n - 1$ і довірчого рівня Р.

Таблиця 3.1 - Основні розрахункові співвідношення для аналізу однофакторних комплексів

Оцінки дисперсій	Формула	Параметр розсіювання	Ортогональний комплекс	Не ортогональний комплекс
			Формула	Формула
оцінка загальної дисперсії всього комплексу	$S^2 = \frac{D}{N-1} \quad (3.1)$	загальне розсіювання	$D = \sum_{i=1}^N (X_{ij} - \bar{X})^2 \quad \text{або} \quad D = \sum_{i=1}^N X_i^2 - H \quad H = \frac{\sum_{j=1}^a (\sum_{i=1}^n X_{ij})^2}{N} \quad (3.2)$ $N = \sum n$ - загальна кількість спостережень, або об'єм вибірки; n - кількість варіант, в кожній градації дисперсійного комплексу; a - кількість градацій впливового фактору	
оцінка між групової дисперсії (впливовий фактор)	$S_1^2 = \frac{D_1}{a-1} \quad (3.3)$	факторіальне (між групове) розсіювання.	$D_A = \sum_{j=1}^a n \cdot (\bar{X}_j - \bar{X})^2 \quad (3.4)$ $\text{або} \quad D_A = \sum_{j=1}^a \frac{(\sum X_{ij})^2}{n} - H$	$D_A = \sum_{j=1}^a n_j \cdot (\bar{X}_j - \bar{X})^2 \quad (3.5)$ $\text{або} \quad D_A = \sum_{j=1}^a \frac{(\sum X_{ij})^2}{n_j} - H$
оцінка внутрішньої дисперсії групової (випадковий вплив)	$S_2^2 = \frac{D_2}{N-a} \quad (3.6)$	випадкове (внутрішньо групове) розсіювання.	$D_2 = \sum_{i=1}^N (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$ $\text{або} \quad D_2 = \sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 \quad (3.7)$ $D_2 = D - D_A$	$D_2 = \sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 \quad (3.8)$

3. Виконання роботи

Завдання 1

Обробка результатів групи прямих вимірювань з багаторазовими спостереженнями

Проводиться калібрування еталону вольт за допомогою стабілізованого джерела опорної напруги протягом декількох тижнів. У кожний з $n=10$ днів проводиться m незалежних повторних спостережень різниці потенціалів U_s . Необхідно одержати найкращу оцінку результату вимірювань та оцінити її невизначеність.

Варіанти вихідних даних

результати	варіант 1									
	день									
	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й
	10,0002511	10,0000506	10,0000097	10,0001611	10,000197	10,0001297	10,000072	10,0000706	10,0001811	10,000172
	10,0002046	10,0001048	10,0000114	10,0001906	10,000114	10,0001354	10,0000394	10,0001248	10,0002046	10,000254
	10,0001751	10,0001598	10,0000109	10,0001541	10,000219	10,0001209	10,0000692	10,0001598	10,0001751	10,0001
	10,0000976	10,0001361	10,0000194	10,000094	10,000254	10,0001255	10,000109	10,0001389	10,0001176	10,0001155
	10,0001881	10,0001136	10,0000181	10,0001451	10,0002168	10,000118	10,000118	10,0005354	10,000244	10,000288

результати	варіант 2									
	день									
	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й
	10,0001511	10,0000506	10,0000097	10,0001611	10,000297	10,0001297	10,000072	10,0000706	10,0001811	10,000172
	10,0002016	10,0001048	10,0000114	10,0001906	10,000114	10,0001354	10,0000394	10,0001248	10,0002046	10,000254
	10,0001751	10,0001558	10,0000109	10,0001551	10,000229	10,0001209	10,0000692	10,0001598	10,0001751	10,0001
	10,0000976	10,0001361	10,0000194	10,000094	10,000254	10,0001255	10,000109	10,0001389	10,0001176	10,0001155
	10,0001781	10,0001556	10,0000351	10,0001551	10,0002605	10,000108	10,000278	10,0001354	10,000144	10,000188
	10,0001781	10,0001556	10,0000351	10,0001551	10,0002605	10,000108	10,000278	10,0001354	10,000144	10,000188

результати	варіант 3									
	день									
	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й
	10,0001511	10,0000506	10,0000097	10,0001611	10,000297	10,0001297	10,000072	10,0000706	10,0001811	10,000172
	10,0002016	10,0001048	10,0000114	10,0001906	10,000114	10,0001354	10,0000394	10,0001248	10,0002046	10,000254
	10,0001751	10,0001558	10,0000109	10,0001551	10,000229	10,0001209	10,0000692	10,0001598	10,0001751	10,0001
	10,0000976	10,0001361	10,0000194	10,000094	10,000254	10,0001255	10,000109	10,0001389	10,0001176	10,0001155
	10,0001781	10,0001556	10,0000351	10,0001551	10,0002605	10,000108	10,000278	10,0001354	10,000144	10,000188
	10,0001781	10,0001556	10,0000351	10,0001551	10,0002605	10,000108	10,000278	10,0001354	10,000144	10,000188
	10,0001781	10,0001556	10,0000351	10,0001551	10,0002605	10,000108	10,000278	10,0001354	10,000144	10,000188

результати	варіант 4									
	день									
	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й
	10,0001511	10,0000506	10,0000097	10,0001611	10,000297	10,0001297	10,000072	10,0000706	10,0001811	10,000172
	10,0002016	10,0001048	10,0000114	10,0001906	10,000114	10,0001354	10,0000394	10,0001248	10,0002046	10,000254
	10,0001751	10,0001558	10,0000109	10,0001551	10,000229	10,0001209	10,0000692	10,0001598	10,0001751	10,0001
	10,0000976	10,0001361	10,0000194	10,000094	10,000254	10,0001255	10,000109	10,0001389	10,0001176	10,0001155
	10,0001781	10,0001556	10,0000351	10,0001551	10,0002605	10,000108	10,000278	10,0001354	10,000144	10,000188
	10,0002781	10,0002556	10,0000451	10,0002151	10,0002605	10,000108	10,000278	10,0001354	10,000144	10,000188

результати	варіант 5									
	день									
	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й
	10,0001511	10,0000506	10,0000097	10,0001611	10,000297	10,0001297	10,000072	10,0000706	10,0001011	10,000172
	10,0002016	10,0001048	10,0000114	10,0001906	10,000114	10,0001354	10,0000394	10,0001248	10,0002046	10,000254
	10,0001751	10,0001558	10,0000109	10,0001551	10,000229	10,0001209	10,0000692	10,0001598	10,0001751	10,0001
	10,0000976	10,0001361	10,0000194	10,000094	10,000254	10,0001255	10,000109	10,0001389	10,0001176	10,0001155
	10,0001781	10,0001556	10,0000351	10,0001551	10,0002605	10,000108	10,000278	10,0001354	10,000144	10,000188
	10,0001781	10,0001556	10,0000351	10,0001551	10,0002605	10,000108	10,000278	10,0001354	10,000144	10,000188
	10,0001081	10,0001256	10,0000151	10,0000551	10,0002005	10,000208	10,000178	10,0001154	10,000544	10,000188
	10,0001081	10,0001256	10,0000151	10,0000551	10,0001005	10,000208	10,000178	10,0001054	10,000044	10,000188

результати	варіант 6									
	день									
	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й
	10,0001221	10,0000506	10,0000097	10,0001611	10,000297	10,0001297	10,000072	10,0000702	10,0001011	10,000172
	10,0002016	10,0001048	10,0000114	10,0001906	10,000147	10,0001354	10,0000394	10,0001248	10,0002046	10,000254
	10,0001751	10,0001558	10,0000109	10,0001551	10,000229	10,0001209	10,0000692	10,0001598	10,0001651	10,0001
	10,0000976	10,0001361	10,0000194	10,000094	10,000254	10,0001255	10,000109	10,0001389	10,0001176	10,0001155
	10,0001741	10,0001156	10,0000341	10,0001581	10,0002605	10,000107	10,000248	10,0001324	10,000144	10,000184
	10,0001781	10,0001576	10,0000357	10,0001557	10,0002905	10,000108	10,000258	10,0001154	10,000147	10,00018
	10,0001041	10,0001256	10,0000251	10,0000251	10,0002015	10,000218	10,000198	10,0001054	10,000544	10,000148
	10,0001081	10,0001216	10,0000171	10,0000151	10,0001005	10,000204	10,000174	10,0001314	10,000084	10,000123

результати	варіант 7									
	день									
	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й
	10,0002111	10,0000506	10,0000097	10,0001611	10,000197	10,0001277	10,000072	10,0000706	10,0001051	10,000172
	10,0001046	10,0001048	10,0000114	10,0001706	10,000114	10,0001254	10,0000314	10,0001248	10,0001046	10,000254
	10,0001051	10,0001498	10,0000109	10,0000541	10,000219	10,0001209	10,0000612	10,0001598	10,0001751	10,0001
	10,0000476	10,0001261	10,0000094	10,000094	10,000254	10,0001155	10,000109	10,0001389	10,0001176	10,0001155
	10,0001871	10,0001136	10,0000111	10,0001451	10,0001168	10,000118	10,000108	10,0005354	10,000244	10,000288

результати	варіант 8									
	день									
	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й
	10,0001511	10,0000506	10,0000097	10,0001611	10,000297	10,0001297	10,000072	10,0000706	10,0001811	10,000172
	10,0002116	10,0001048	10,0000114	10,0001906	10,000114	10,0001354	10,0000394	10,0001248	10,0002046	10,000254
	10,0001751	10,0001558	10,0000109	10,0001551	10,000229	10,0001209	10,0000692	10,0001598	10,0001751	10,0001
	10,0000976	10,0001361	10,0000194	10,000094	10,000254	10,0001255	10,000109	10,0001389	10,0001176	10,0001155
	10,0001481	10,0001596	10,0000701	10,0001281	10,0002705	10,000108	10,000418	10,0001412	10,000174	10,000157
	10,0001181	10,0001456	10,0000151	10,0001191	10,0002145	10,000108	10,000178	10,0001354	10,000147	10,000165
	10,0001751	10,0001756	10,0000251	10,0001131	10,0002475	10,000108	10,000328	10,0001148	10,000141	10,000148

результати	варіант 9									
	день									
	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й
	10,0001511	10,0000506	10,0000097	10,0001611	10,000297	10,0001297	10,000072	10,0000706	10,0001811	10,000172
	10,0002016	10,0001048	10,0000114	10,0001706	10,000114	10,0001354	10,0000394	10,0001248	10,0001046	10,000254
	10,0001751	10,0001558	10,0000109	10,0001551	10,000229	10,0001209	10,0000692	10,0001598	10,0001551	10,0001
	10,0000976	10,0001361	10,0000194	10,000094	10,000254	10,0001055	10,000109	10,0001389	10,0001076	10,0001155
	10,0001481	10,0001596	10,0000701	10,0001281	10,0001705	10,000108	10,000418	10,0001412	10,000174	10,000157
	10,0001181	10,0001456	10,0000151	10,0001191	10,0000045	10,000104	10,000178	10,0001354	10,000147	10,000165
	10,0001751	10,0001756	10,0000251	10,0000131	10,0001475	10,000108	10,000328	10,0001148	10,000141	10,000148

результати	варіант 10									
	день									
	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й
	10,0001221	10,0000506	10,0000097	10,0001611	10,000297	10,0001297	10,000072	10,0000702	10,0001011	10,000172
	10,0001516	10,0001048	10,0000114	10,0001806	10,000147	10,0001354	10,0000394	10,0001248	10,0001446	10,000254
	10,0001751	10,0001558	10,0000109	10,0001551	10,000229	10,0001209	10,0000692	10,0001218	10,0001251	10,0001
	10,0000476	10,0001361	10,0000194	10,000094	10,000254	10,0001255	10,000109	10,0001389	10,0001176	10,0001155
	10,0001741	10,0001156	10,0000341	10,0001581	10,0002605	10,000107	10,000248	10,0001324	10,000144	10,000184
	10,0001081	10,0001471	10,0000357	10,0001557	10,0002905	10,000108	10,000258	10,0001154	10,000147	10,00018
	10,0001041	10,0001156	10,0000251	10,0000151	10,0001015	10,000218	10,000198	10,0001054	10,000544	10,000148
	10,0001081	10,0001211	10,0000171	10,0000151	10,0001005	10,000204	10,000174	10,0001314	10,000084	10,000123

Приклад виконання завдання

результати вим.	день									
	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й
	10,0002511	10,0000506	10,0000097	10,0001611	10,000197	10,0001297	10,000072	10,0000706	10,0001811	10,000172
	10,0002046	10,0001048	10,0000114	10,0001906	10,000114	10,0001354	10,0000394	10,0001248	10,0002046	10,000254
	10,0001751	10,0001598	10,0000109	10,0001541	10,000219	10,0001209	10,0000692	10,0001598	10,0001751	10,0001
	10,0000976	10,0001361	10,0000194	10,000094	10,000254	10,0001255	10,000109	10,0001389	10,0001176	10,0001155
	10,0001781	10,0001536	10,0000351	10,0001551	10,0002605	10,000108	10,000278	10,0001354	10,000144	10,000188

1. Розраховуємо допоміжні величини

Середнє арифметичне кожного стовпчика $\bar{X}_i$	=CPЗНАЧ(L4:L8)
Середнє арифметичне загальне $\bar{X}$	=CPЗНАЧ(C4:L8)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Практична робота №3. Завдання 1 Обробка групи прямих багаторазових вимірювань														
2	результати вимірювання		день												
3			1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й			
4			10,0002511	10,0000506	10,0000097	10,0001611	10,000197	10,0001297	10,000072	10,0000706	10,0001811	10,000172			
5			10,0002046	10,0001048	10,0000114	10,0001906	10,000114	10,0001354	10,0000394	10,0001248	10,0002046	10,000254			
6			10,0001751	10,0001598	10,0000109	10,0001541	10,000219	10,0001209	10,0000692	10,0001598	10,0001751	10,0001			
7			10,0000976	10,0001361	10,0000194	10,000094	10,000254	10,0001255	10,000109	10,0001389	10,0001176	10,0001155			
8			10,0001781	10,0001536	10,0000351	10,0001551	10,0002605	10,000108	10,000278	10,0001354	10,000144	10,000188			
9	Проміжк.	n	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5			
10		$\bar{X}_i$	10,0001813	10,00012098	10,0000173	10,00015098	10,0002089	10,0001239	10,00011352	10,0001259	10,0001645	10,0001659			=CP3HA4(L4:L8)
11	Розрах.	$\bar{X}$	10,00013732												=CP3HA4(C4:L8)

2. Розрахунок числа степенів свободи

$k = N - 1 = 50 - 1 = 49$ - для загального числа варіювання; $k_A = a - 1 = 10 - 1 = 9$ - для факторіального варіювання;

$k_2 = N - a = 50 - 10 = 40$ - для випадкового варіювання.

3. Розрахунок факторіального розсіювання та оцінки міжгрупової дисперсії

Попередньо розрахувати для кожного стовпчика: $(\bar{X}_i - \bar{X})^2$ $n_j \cdot (\bar{X}_i - \bar{X})^2$	$=\text{СТЕПЕНЬ}((L10-\$C\$11);2)$ $=L9*L12$
Розрахувати факторіальне розсіювання за формулою $D_A = \sum_{j=1}^a n_j \cdot (\bar{X}_i - \bar{X})^2$	$=\text{СУММ}(C13:L13)$
Розрахувати оцінку міжгрупової дисперсії $S_A^2 = \frac{D_A}{a-1}$	$=C14/(Q5)$

Практична робота №3. Завдання 1 Обробка групи прямих багаторазових вимірювань											
		день									
		1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й
	результати вимірювання	10,0002511	10,0000506	10,0000097	10,0001611	10,000197	10,0001297	10,000072	10,0000706	10,0001811	10,000172
		10,0002046	10,0001048	10,0000114	10,0001906	10,000114	10,0001354	10,0000394	10,0001248	10,0002046	10,000254
		10,0001751	10,0001598	10,0000109	10,0001541	10,000219	10,0001209	10,0000692	10,0001598	10,0001751	10,0001
		10,0000976	10,0001361	10,0000194	10,000094	10,000254	10,0001255	10,000109	10,0001389	10,0001176	10,0001155
		10,0001781	10,0001536	10,0000351	10,0001551	10,0002605	10,000108	10,000278	10,0001354	10,000144	10,000188
Проміжк.	n	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
	$\bar{X}_i$	10,0001813	10,00012098	10,0000173	10,00015098	10,0002089	10,0001239	10,00011352	10,0001259	10,0001645	10,0001659
Розрах.	$\bar{X}$	10,00013732									
Факторіальне розсіювання (оцінка міжгрупової дисперсії)	$(\bar{X}_i - \bar{X})^2$	1,93459E-09	2,66865E-10	1,4404E-08	1,86705E-10	5,1243E-09	1,79989E-10	5,6625E-10	1,30325E-10	7,3788E-10	8,17045E-10
	$n_j \cdot (\bar{X}_i - \bar{X})^2$	9,67296E-09	1,33432E-09	7,2019E-08	9,33524E-10	2,5621E-08	8,99945E-10	2,83125E-09	6,51625E-10	3,6894E-09	4,08523E-09
	$D_A = \sum_{j=1}^a n_j \cdot (\bar{X}_i - \bar{X})^2$	1,21739E-07									
	$S_A^2 = \frac{D_A}{a-1}$	1,35265E-08									

4. Розрахунок випадкового розсіювання та оцінки внутрішньої групової дисперсії

Попередньо розрахувати $(X_{ij} - \bar{X}_i)^2$ для кожного значення	$=\text{СТЕПЕНЬ}((L4-L\$10);2)$
Розрахувати випадкове розсіювання за формулою $D_2 = \sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$	$=\text{СУММ}(C16:L20)$
Розрахувати оцінку внутрішньої групової дисперсії за формулою $S_2^2 = \frac{D_2}{N-a}$	$=C21/Q8$

1	Практична робота №3. Завдання 1 Обробка групи прямих багаторазових вимірювань										
2	результати вимірювання	день									
3		1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й
4		10,0002511	10,0000506	10,0000097	10,0001611	10,000197	10,0001297	10,000072	10,0000706	10,0001811	10,000172
5		10,0002046	10,0001048	10,0000114	10,0001906	10,000114	10,0001354	10,0000394	10,0001248	10,0002046	10,000254
6		10,0001751	10,0001598	10,0000109	10,0001541	10,000219	10,0001209	10,0000692	10,0001598	10,0001751	10,0001
7	Проміжк.	10,0000976	10,0001361	10,0000194	10,000094	10,000254	10,0001255	10,000109	10,0001389	10,0001176	10,0001155
8		10,0001781	10,0001536	10,0000351	10,0001551	10,0002605	10,000108	10,000278	10,0001354	10,000144	10,000188
9	n	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
10	$\bar{X}_i$	10,0001813	10,00012098	10,0000173	10,00015098	10,0002089	10,0001239	10,00011352	10,0001259	10,0001645	10,0001659
11	Розрах.	$\bar{X}$	10,00013732								
12	Факторіальне розсіювання (оцінка міжгрупової дисперсії)	$(\bar{X}_i - \bar{X})^2$	1,93459E-09	2,66865E-10	1,4404E-08	1,86705E-10	5,1243E-09	1,79989E-10	5,6625E-10	1,30325E-10	7,3788E-10
13		$n_j \cdot (\bar{X}_i - \bar{X})^2$	9,67296E-09	1,33432E-09	7,2019E-08	9,33524E-10	2,5621E-08	8,99945E-10	2,83125E-09	6,51625E-10	3,6894E-09
14		$D_A = \sum_{j=1}^a n_j \cdot (\bar{X}_i - \bar{X})^2$	1,21739E-07								
15		$S_A^2 = \frac{D_A}{a-1}$	1,35265E-08								
16	Випадкове розсіювання (оцінка внутрішньогрупової дисперсії)	$(X_{ij} - \bar{X}_i)^2$	4,87204E-09	4,95334E-09	5,776E-11	1,02414E-10	1,4161E-10	3,364E-11	1,72391E-09	3,05809E-09	2,76224E-10
17			5,4289E-10	2,61792E-10	3,481E-11	1,56974E-09	9,00601E-09	1,3225E-10	5,49377E-09	1,21E-12	1,60961E-09
18			3,844E-11	1,50699E-09	4,096E-11	9,7344E-12	1,0201E-10	9E-12	1,96426E-09	1,14921E-09	1,12784E-10
19			7,00569E-09	2,28614E-10	4,41E-12	3,24672E-09	2,03401E-09	2,56E-12	2,04304E-11	1,69E-10	2,19773E-09
20			1,024E-11	1,06406E-09	3,1684E-10	1,69744E-11	2,66256E-09	2,5281E-10	2,70537E-08	9,025E-11	4,1943E-10
21		$D_2 = \sum_{i=1}^N (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$	1,00771E-07								
22		$S_2^2 = \frac{D_2}{N-a}$	2,51927E-09								

число степенів свобод	
$k = N - 1$	49
$k_A = a - 1$	9
$k_2 = N - a$	40

5. Розрахунок загального розсіювання та оцінки загальної дисперсії

Попередньо розрахувати $(X_{ij} - \bar{X})^2$ для кожного значення	=СТЕПЕНЬ(L4-\$C\$11;2)
Розрахувати загальне розсіювання $D = \sum_{i=1}^N (X_{ij} - \bar{X})^2$	=СУММ(C23:L27)
Розрахувати оцінку загальної дисперсії $S^2 = \frac{D}{N-1}$	=C28/Q3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
4			10,0002511	10,0000506	10,0000097	10,0001611	10,000197	10,0001297	10,000072	10,0000706	10,0001811	10,000172							
5		результати	10,0002046	10,0001048	10,0000114	10,0001906	10,000114	10,0001354	10,0000394	10,0001248	10,0002046	10,000254					9	=ЧИСЛОСТОБ(С4:Л4)-1	
6		вимірювання	10,0001751	10,0001598	10,0000109	10,0001541	10,000219	10,0001209	10,0000692	10,0001598	10,0001751	10,0001							
7			10,0000976	10,0001361	10,0000194	10,000094	10,000254	10,0001255	10,000109	10,0001389	10,0001176	10,0001155							
8			10,0001781	10,0001536	10,0000351	10,0001551	10,0002605	10,000108	10,000278	10,0001354	10,000144	10,000188					40		
9	Проміжк.	n	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5							
10		$\bar{X}_i$	10,0001813	10,00012098	10,0000173	10,00015098	10,0002089	10,0001239	10,00011352	10,0001259	10,0001645	10,0001659							
11	Розрах.	$\bar{X}$	10,00013732																
12	Факторіальне розподілення (оцінка внутрішньогрупової дисперсії)	$(\bar{X}_i - \bar{X})^2$	1,93459E-09	2,66865E-10	1,4404E-08	1,86705E-10	5,1243E-09	1,79989E-10	5,6625E-10	1,30325E-10	7,3788E-10	8,17045E-10							
13		$n_j \cdot (\bar{X}_i - \bar{X})^2$	9,67296E-09	1,33432E-09	7,2019E-08	9,33524E-10	2,5621E-08	8,99945E-10	2,83125E-09	6,51625E-10	3,6894E-09	4,08523E-09							
14		$D_A = \sum_{j=1}^a n_j \cdot (\bar{X}_i - \bar{X})^2$	1,21739E-07																
15		$S_A^2 = \frac{D_A}{a-1}$	1,35265E-08																
16	Випадкове розподілення (оцінка внутрішньогрупової дисперсії)	$(X_{ij} - \bar{X}_i)^2$	4,87204E-09	4,95334E-09	5,776E-11	1,02414E-10	1,4161E-10	3,364E-11	1,72391E-09	3,05809E-09	2,76224E-10	3,721E-11							
17			5,4289E-10	2,61792E-10	3,481E-11	1,56974E-09	9,00601E-09	1,3225E-10	5,49377E-09	1,21E-12	1,60961E-09	7,76161E-09							
18			3,844E-11	1,50699E-09	4,096E-11	9,7344E-12	1,0201E-10	9E-12	1,96426E-09	1,14921E-09	1,12784E-10	4,34281E-09							
19			7,00569E-09	2,28614E-10	4,41E-12	3,24672E-09	2,03401E-09	2,56E-12	2,04304E-11	1,69E-10	2,19773E-09	2,54016E-09							
20	Затягнуте розподілення	$(X_{ij} - \bar{X})^2$	1,024E-11	1,06406E-09	3,1684E-10	1,69744E-11	2,66256E-09	2,5281E-10	2,70537E-08	9,025E-11	4,1943E-10	4,8841E-10							
21		$D_2 = \sum_{i=1}^N (X_{ij} - \bar{X})^2$	1,00771E-07																
22		$S_2^2 = \frac{D_2}{N-a}$	2,51927E-09																
23			1,29468E-08	7,51966E-09	1,62858E-08	5,65679E-10	3,56218E-09	5,80035E-11	4,26618E-09	4,45102E-09	1,91704E-09	1,20298E-09							
24			4,52714E-09	1,05729E-09	1,58548E-08	2,83918E-09	5,43636E-10	3,67106E-12	9,58754E-09	1,5665E-10	4,52714E-09	1,36152E-08							
25			1,42763E-09	5,0553E-10	1,5981E-08	2,81703E-10	6,67228E-09	2,69485E-10	4,63979E-09	5,0553E-10	1,42763E-09	1,39248E-09							
26			1,57736E-09	1,47866E-12	1,39042E-08	1,87628E-09	1,36152E-08	1,39618E-10	8,01796E-10	2,50906E-12	3,88721E-10	4,75938E-10							
27			1,66333E-09	2,65169E-10	1,04481E-08	3,16271E-10	1,51743E-08	8,59428E-10	1,9792E-08	3,67106E-12	4,46759E-11	2,56887E-09							
28		$D = \sum_{i=1}^N (X_{ij} - \bar{X})^2$	2,2251E-07																
29		$S^2 = \frac{D}{N-1}$	4,54101E-09																

6. Розрахунок дисперсійного відношення

- розраховуємо дисперсійне відношення $F = \frac{S_A^2}{S_2^2}$ при $S_A^2 \geq S_2^2$.

7. Визначення критичного значення критерію Фішера

- За табл.Б4 додатку визначаємо $F_{\alpha; k_A; k_2}$ для прийнятого рівня значущості $\alpha = 1\%$ і числа степенів свободи k_A, k_2 (або за формулою =ФРАСПОБР(0,01;9;40)).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
10		$\bar{X}_i$	10,0001813	10,00012098	10,0000173	10,00015098	10,0002089	10,0001239	10,00011352	10,0001259	10,0001645	10,0001659				
11	Розрах.	$\bar{X}$	10,00013732											=CPЗНАЧ(C4:L8)		
12	Факторіальне розсіювання (оцінка міжгрупової дисперсії)	$(\bar{X}_i - \bar{X})^2$	1,93459E-09	2,66865E-10	1,4404E-08	1,86705E-10	5,1243E-09	1,79989E-10	5,6625E-10	1,30325E-10	7,3788E-10	8,17045E-10		=СТЕПЕНЬ((L10-\$C\$11);2)		
13		$n_j \cdot (\bar{X}_i - \bar{X})^2$	9,67296E-09	1,33432E-09	7,2019E-08	9,33524E-10	2,5621E-08	8,99945E-10	2,83125E-09	6,51625E-10	3,6894E-09	4,08523E-09		=L9*L12		
14		$D_A = \sum_{j=1}^a n_j \cdot (\bar{X}_i - \bar{X})^2$	1,21739E-07											=СУММ(C13:L13)		
15		$S_A^2 = \frac{D_A}{a-1}$	1,35265E-08											=C14/(Q5)		
16	Випадкове розсіювання (оцінка внутрішньогрупової дисперсії)	$(X_{ij} - \bar{X}_i)^2$	4,87204E-09	4,95334E-09	5,776E-11	1,02414E-10	1,4161E-10	3,364E-11	1,72391E-09	3,05809E-09	2,76224E-10	3,721E-11		=СТЕПЕНЬ((L4-L\$10);2)		
17			5,4289E-10	2,61792E-10	3,481E-11	1,56974E-09	9,00601E-09	1,3225E-10	5,49377E-09	1,21E-12	1,60961E-09	7,76161E-09				
18			3,844E-11	1,50699E-09	4,096E-11	9,7344E-12	1,0201E-10	9E-12	1,96426E-09	1,14921E-09	1,12784E-10	4,34281E-09				
19			7,00569E-09	2,28614E-10	4,41E-12	3,24672E-09	2,03401E-09	2,56E-12	2,04304E-11	1,69E-10	2,19773E-09	2,54016E-09				
20	Загальне розсіювання	$D_2 = \sum_{i=1}^N (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$	1,024E-11	1,06406E-09	3,1684E-10	1,69744E-11	2,66256E-09	2,5281E-10	2,70537E-08	9,025E-11	4,1943E-10	4,8841E-10		=СУММ(C16:L20)		
21			1,00771E-07													
22			$S_2^2 = \frac{D_2}{N-a}$											=C21/Q8		
23			2,51927E-09													
24	Дисперсійне відношення	$(X_{ij} - \bar{X})^2$	1,29468E-08	7,51966E-09	1,62858E-08	5,65679E-10	3,56218E-09	5,80035E-11	4,26618E-09	4,45102E-09	1,91704E-09	1,20298E-09		=СТЕПЕНЬ(L4-\$C\$11;2)		
25			4,52714E-09	1,05729E-09	1,58548E-08	2,83918E-09	5,43636E-10	3,67106E-12	9,58754E-09	1,5665E-10	4,52714E-09	1,36152E-08				
26			1,42763E-09	5,0553E-10	1,5981E-08	2,81703E-10	6,67228E-09	2,69485E-10	4,63979E-09	5,0553E-10	1,42763E-09	1,39248E-09				
27			1,57736E-09	1,47866E-12	1,39042E-08	1,87628E-09	1,36152E-08	1,39618E-10	8,01796E-10	2,50906E-12	3,88721E-10	4,75938E-10				
28	Критерій Фішера	$D = \sum_{i=1}^N (X_{ij} - \bar{X})^2$	1,66333E-09	2,65169E-10	1,04481E-08	3,16271E-10	1,51743E-08	8,59428E-10	1,9792E-08	3,67106E-12	4,46759E-11	2,56887E-09		=СУММ(C23:L27)		
29			2,2251E-07													
30			$S^2 = \frac{D}{N-1}$											=C28/Q3		
31			4,54101E-09													
30	Дисперсійне відношення	$F = \frac{S_A^2}{S_2^2}$	5,369231623											=C15/C22		
31	Критерій Фішера	$F_{\alpha; k_A; k_2}$	2,88756044											=FРАСПОБР(0,01;9;40)		

Оскільки $F_{\Phi} \geq F_{\alpha; k_A; k_2}$ **нульову гіпотезу відкидають** - існування міжгрупової невизначеності приймається і $5.369 > 2.88$ передбачається, що вона випадкова для прийнятого рівня значущості $\alpha, = 1\%$ і числа степенів свободи $k_A = 9; k_2 = 40$

8. Записати результат вимірювання з розширеною невизначеністю:

$$U = t_p(\nu) \cdot s(\bar{U}),$$

де $s(\bar{U})$ - загальна дисперсія що відображає як внутрішню групову так міжгрупову складові дисперсії (в цьому випадку це $S^2 = \frac{D}{N-1}$);

$t_p(\nu)$ - коефіцієнт Стюдента для числа степенів свободи $a \cdot n - 1$ і довірчого рівня p . Приймаємо нормальний закон розподілу з довірчим рівнем $p = 95 \%$, маємо $t_p(\nu) = 1,96$.

Маємо

$$U = t_p(\nu) \cdot s(\bar{U}) = 1,96 \cdot 4,54 \cdot 10^{-9} = 8,89 \cdot 10^{-9} \text{ В}.$$

Результат вимірювання записуємо в наступному вигляді:

$$U = \bar{U} \pm U, P = \% \\ U = (10.00013732 \pm 8,89 \cdot 10^{-9}) \text{ В}, P = 99 \%$$

Контрольні питання

1. Які види невизначеностей Ви знаєте.
2. Дайте визначення інструментальної невизначеності.
3. Які складові інструментальної невизначеності Ви знаєте.
4. Наведіть приклад визначення інструментальної невизначеності.
5. Дайте визначення методичній невизначеності.
6. Перерахуйте характерні причини, що призводять до появи методичних невизначеностей.
7. Дайте означення невизначеності взаємодії.
8. Дайте означення основної інструментальної невизначеності.
9. Дайте означення додаткової інструментальної невизначеності.
10. Наведіть приклад прояв методичної невизначеності.
11. Які Ви знаєте різновиди суб'єктивної невизначеності.
12. Перерахуйте шляхи зменшення або виключення складових суб'єктивних невизначеностей.
13. Що таке невизначеність паралаксу.
14. Яким факторами обумовлені невизначеності оператора.
15. Запишіть рівняння, яким описується критерій нехтовної невизначеності.
16. Як називають невизначеність, обумовлену реакцією ЗВТ на зміну зовнішніх впливових величин та неінформативних параметрів вхідного сигналу.

Практичне заняття №4

ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ ОПОСЕРЕДКОВАНИХ ВИМІРЮВАНЬ

Мета роботи: навчитися виконувати обробку результатів опосередкованих вимірювань з багаторазовими спостереженнями при відсутності та наявності кореляційного зв'язку між вхідними величинами; виконати аналіз двох методів представлення результатів.

1. Підготовка до роботи

Вивчити за рекомендованою літературою наступні питання:

1. Наведіть критерії перевірки наявності кореляції між параметрами результатів вимірювань при вираженні невизначеностей.
2. Запишіть вираз для визначення коефіцієнту кореляції.
3. Дайте означення та запишіть вираз для визначення відносної стандартної невизначеності.
4. Дайте означення та запишіть вираз для визначення відносної комбінованої невизначеності.
5. Дайте означення та запишіть вираз для визначення відносної розширеної невизначеності.
6. Запишіть вираз для визначення розширеної невизначеності.
7. Запишіть вираз для визначення ефективних степенів вільності, який отримується із формули Велча-Саттерсвейта.
8. Запишіть вираз для розрахунку наближених значень коефіцієнту Стюдента

2. Теоретичні відомості

Під опосередкованими вимірюваннями розуміють непрямі вимірювання однієї величини з перетворенням її роду чи обчисленням за результатами прямих одноразових вимірювань інших фізичних величин, з якими вимірювана величина пов'язана явною функціональною залежністю.

Залежність опосередковано вимірюваної величини Y від аргументів $X_1, X_2, \dots, X_N$ є відомою:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N).$$

Результати вимірювання аргументів мають бути узгоджені між собою, тобто значення аргументів, що отримують в результаті прямих вимірювань, мають відповідати тому самому значенню вимірюваної величини.

Невиконання цієї умови є джерелом появи методичної невизначеності.

Обробка результатів опосередкованих вимірювань зумовлена:

- Формою подання результатів вимірювання аргументів;
- Видом залежності рівняння перетворення.

За видом функціональної залежності f вони поділяються на дві основні групи - лінійні та нелінійні.

При нелінійній функціональній залежності або наявності кореляції між оцінками $X_1, X_2, \dots, X_N$ надійне оцінювання вимірюваної величини необхідно проводити за формулою:

$$y = \bar{Y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n X_{1k}, X_{2k}, \dots, X_{Nk}$$

де $X_{1k}, \dots, X_{Nk}$ - k - те спостереження ($k=1, 2, \dots, n$) вхідних величин $X_1, X_2, \dots, X_N$.

Зазвичай на практиці оцінку y вимірюваної величини Y одержують із виразу:

$$y = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_N)$$

де $\bar{X}_i = \sum_{i=1}^m p_{i,k} \cdot X_{i,k}$ - є середнім арифметичним окремих спостережень $X_{i,k}$ отриманих з імовірністю $p_{i,k}$.

В цьому випадку оцінене стандартне відхилення, пов'язане з вихідною оцінкою чи результатом вимірювання y , називається **комбінованою стандартною невизначеністю і позначається** $u_c(y)$, яка складається із оціненого стандартного відхилення, пов'язаного з кожною вхідною оцінкою x_i , що називається стандартною невизначеністю $u_c(x_i)$.

Кожну вхідну оцінку x_i і пов'язану з нею стандартну невизначеність $u_c(x_i)$ отримують із розподілу можливих значень вхідної величини X_i . Цей розподіл ймовірностей, може бути оснований на ряді спостережень $X_{i,k}$ або може бути апіорним розподілом. В першому випадку отримують оцінки складової невизначеності за типом А, в другому випадку – за типом В.

2.1 Оцінювання невизначеності некорельованих вхідних величин

За відсутності кореляційного зв'язку між вхідними величинами методика опрацювання результатів непрямих вимірювань полягає в наступному:

1. Визначають оцінку вимірюваної величини Y за формулою:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

де $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ - оцінки вхідних величин $X_1, X_2, \dots, X_N$, отримані за результатами одноразових чи багаторазових прямих вимірювань. В останньому випадку за оцінки беруть середнє арифметичне:

$$x_i = \bar{X}_i = \sum_{i=1}^N p_{i,n} \cdot X_{i,n} \quad (4.1)$$

2. Визначають стандартні невизначеності $u(x_i)$ оцінок $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ вхідних величин. Вони можуть бути отримані за типом А (тільки у випадку багаторазових вимірювань $X_1, X_2, \dots, X_N$ чи за типом В.

3. Розраховують комбіновану стандартну невизначеність оцінки вимірюваної величини у за формулою:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N u_i^2(y)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i)} \quad (4.2)$$

де $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ - коефіцієнти чутливості, які розраховуються як частинні похідні.

При значній нелінійності f у цей вираз повинні бути внесені члени більш високого порядку розкладання в ряд Тейлора:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2} \right] \cdot u^2(x_i) \cdot u^2(x_j) \quad (4.3)$$

Визначають розширену невизначеність оцінки вимірюваної величини за формулою:

$$U = k \cdot u_c(y),$$

де $k = t_p(v_{eff})$ - квантиль розподілу Стюдента з ефективним числом степенів свободи v_{eff} і довірчою ймовірністю (рівнем довіри) p .

Ефективне число степенів свободи визначається за формулою Велча-Саттерстейта:

$$v_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{v_i}} = \frac{\left[\sum_{i=1}^N u_i^2(y) \right]^2}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{v_i}}, \quad (4.4)$$

$$\text{де } u_i(y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \cdot u(x_i);$$

v_i - число степенів свободи при розрахунку невизначеності оцінки i -ї вхідної величини, при цьому:

$v_i = n - 1$ - для розрахунку невизначеності за типом А;

$v_i = \infty$ - для розрахунку невизначеності за типом В.

4. Записують результат вимірювання у вигляді:

$$Y = (y \pm U), P = \%$$

2.2 Оцінювання невизначеності корельованих вхідних величин

При наявності кореляційного зв'язку між вхідними величинами методика опрацювання результатів непрямих вимірювань є наступною:

1. Визначають оцінку вимірюваної величини за формулою:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

де $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ - оцінки вхідних величин $X_1, X_2, \dots, X_N$, отримані за результатами одноразових чи багаторазових прямих вимірювань. В останньому випадку за оцінки беруть середнє арифметичне:

$$x_i = \bar{X}_i = \sum_{i=1}^N p_{i,n} \cdot X_{i,n}.$$

При цьому, як і випадку незалежних непрямих вимірювань, вважається, що з поміж багаторазових спостережень видалені спостереження з грубими промахами, а також внесені всі поправки на відомі систематичні ефекти.

2. Визначають стандартні невизначеності $u(x_i)$ оцінок $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ вхідних величин. Вони можуть бути отримані за типом А (тільки у випадку багаторазових вимірювань $X_1, X_2, \dots, X_N$ чи за типом В.

3. Розраховують значення коефіцієнтів чутливості:

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ при } X_i = x_i (i = 1, 2, \dots, N).$$

4. Знаходять попарні оцінки кореляційних моментів:

$$u(x_i, x_j) = \frac{\sum_{k=1}^n (x_{i,k} - \bar{x}_i) \cdot (x_{j,k} - \bar{x}_j)}{n-1}. \quad (4.5)$$

5. Розраховують коефіцієнт кореляції:

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i) \cdot u(x_j)}. \quad (4.6)$$

6. Визначають оцінку дисперсії результату вимірювання:

$$u_c^2 = \sum_{i=1}^N c_i^2 \cdot u^2(\bar{x}_i) + 2 \cdot \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=2}^N c_i \cdot c_j \cdot r(x_i, x_j) \cdot u(x_i) \cdot u(x_j). \quad (4.7)$$

7. Визначають розширену невизначеність результату непрямого вимірювання:

$$U = k \cdot u_c(y),$$

$k = t_p(v_{eff})$ - квантиль розподілу Стюдента з ефективним числом степенів свободи v_{eff} і довірчою ймовірністю (рівнем довіри) p .

8. Записують результат вимірювання у вигляді:

$$Y = (y \pm U), P = \%.$$

3. Виконання роботи

Завдання 1

Обробка результатів опосередкованих вимірювань з багаторазовими спостереженнями

Проведено опосередковані вимірювання сили струму за допомогою вольтметра та шунта. Вихідним є рівняння вимірювання:

$$I = f(U, R) = \frac{U}{R}$$

В результаті вимірювання напруги отримано наступні значення:

Вихідні дані	приклад	варіант 1	варіант 2	варіант 3
$U_i, мВ$	100,68; 100,83; 100,79; 100,64; 100,63; 100,94; 100,6; 100,68; 100,76; 100,6	0 100.634	0 100.447	0 10.447
		1 100.598	1 100.418	1 10.418
		2 100.629	2 100.443	2 10.443
		3 100.557	3 100.386	3 10.386
		4 100.447	4 100.298	4 10.298
		5 100.707	5 100.505	5 10.505
		6 100.682	6 100.486	6 10.486
		7 100.783	7 100.567	7 10.567
		8 101.029	8 100.763	8 10.763
		9 100.821	9 100.597	9 10.597
		10 100.848	10 100.618	10 10.618
		11 100.829	11 100.603	11 10.603
			12 100.61	12 10.61
$t, ^\circ C$	(23 ± 0.05)	(24 ± 0.1)	(23 ± 0.1)	(24 ± 0.05)
$R_0, Ом$	0.010088	0.010025	0.011035	0.015

<i>Вихідні дані</i>	<i>варіант 4</i>	<i>варіант 5</i>	<i>варіант 6</i>	<i>варіант 7</i>
$U_i, мВ$	X1 =	X1 =	X1 =	X1 =
$t, ^\circ C$	(25 ± 0.1)	(26 ± 0.05)	(22 ± 0.05)	(23 ± 0.1)
$R_0, Ом$	0.0105	0.01015	0.021561	0.02

<i>Вихідні дані</i>	<i>варіант 8</i>	<i>варіант 9</i>	<i>варіант 10</i>
$U_i, мВ$	X1 =	X1 =	X1 =
$t, ^\circ C$	(22 ± 0.1)	(24 ± 0.15)	(24 ± 0.2)
$R_0, Ом$	0.025	0.054712	0.05714

Виконати аналіз джерел похибок та розрахунок похибки результату вимірювання класичним методом.

Виконати аналіз джерел та розрахунок невизначеності результату опосередкованого вимірювання.

Таблиця 4.1 - Порівняльний алгоритм розрахунку

1. На основі отриманих значень розраховуємо середнє значення напруги за формулою: $\bar{U} = \frac{\sum_{i=1}^n U_i}{n} = 100,72 \text{ мВ}.$ Значення опору шунта встановлено при калібруванні для $I = 10 \text{ А}$ і $t = 23^\circ \text{ С}$ та дорівнює $R_0 = 0,010088 \text{ Ом}.$ 2. Результат вимірювання сили струму отримують за формулою: $I = \frac{\bar{U}}{R_0} = 9,984 \text{ А}.$	
3. Аналіз джерел похибок та розрахунок похибки результату вимірювання 3.1 Середнє квадратичне відхилення, що характеризує випадкову складову похибки при вимірюванні напруги визначаємо за формулою: $S(\bar{U}) = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2} = 33,99 \cdot 10^{-3} \text{ В}.$ Тоді відносно значення середнє квадратичного відхилення середнього буде $\tilde{S}(\bar{U}) = \frac{S(\bar{U})}{\bar{U}} \cdot 100\% = 0,034 \text{ \%}.$	3. Аналіз джерел та розрахунок невизначеності За типом А розраховуємо стандартну невизначеність, обумовлену джерелами невизначеності, які мають випадковий характер. 3.1 Стандартну невизначеність напруги, зумовлену джерелами невизначеності, що мають випадковий характер визначають за формулою: $u_A(\bar{U}) = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2} = 3,399 \cdot 10^{-2} \text{ В}.$
3.2 Границі невиключеної систематичної похибки (мВ) вольтметра визначені при його калібруванні у вигляді виразу: $\theta_{\bar{U}} = (3 \cdot 10^{-4} \cdot \bar{U} + 0,02) = 0,02 \text{ мВ}.$ При $\bar{U} = 100,72 \text{ мВ}$, маємо	За типом В розраховуємо стандартні невизначеності, зумовлені джерелами невизначеності, що мають систематичний характер. Розподіл значень величин всередині границь вважаємо рівномірним.

$\tilde{\theta}(\bar{U}) = \frac{\theta(\bar{U})}{\bar{U}} \cdot 100\% = 0,02\%.$	3.3* Границі систематичного зміщення при вимірюванні напруги, визначені при калібруванні вольтметра $(3 \cdot 10^{-4} \cdot \bar{U} + 0,02) \text{ мВ}$. Тоді відповідну стандартну невизначеність визначають за формулою: $u_B(\bar{U}) = \frac{(3 \cdot 10^{-4} \cdot \bar{U} + 0,02)}{\sqrt{3}} = 0,01156 \text{ мВ},$ $\tilde{u}_B(\bar{U}) = \frac{u_B(\bar{U})}{\bar{U}} \cdot 100\% = 0,0115\%.$
3.3 З паспортних даних маємо, що границі невиключеної систематичної похибки значення опору шунта, які були визначені при калібруванні становлять $\tilde{\theta}_R = 0,07\%$ Тоді із формули $\tilde{\theta}_R = \frac{\theta_R}{R} \cdot 100\% \Rightarrow \theta_R = \frac{\tilde{\theta}_R \cdot R}{100\%} = 7,062 \cdot 10^{-6} \text{ Ом}.$	3.4* Границі, всередині яких лежить значення опору шунта, визначені при калібруванні шунта і дорівнюють $7 \cdot 10^{-4} \cdot R$. Відповідну стандартну невизначеність розраховують за формулою: $u_B(R) = \frac{(7 \cdot 10^{-4} \cdot R)}{\sqrt{3}} = 4,077 \cdot 10^{-6} \text{ Ом},$ $\tilde{u}_B(R) = \frac{u_B(R)}{R} \cdot 100\% = 0,0404\%.$
3.4 Границі невиключеної систематичної складової похибки значення шунта, що обумовлено похибкою вимірювання температури, визначають із формули, що визначає залежність опору від температури:	3.5* Границі зміни значення опору шунта, зумовленого зміною температури, дорівнюють $R_0 \cdot \alpha \cdot (\Delta t)$. Відповідну стандартну невизначеність отримують згідно із формулою:

$R = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot (t - t_0)) = 0,010088 \text{ Ом},$ де $R_0 = 0,010088 \text{ Ом}$ - значення опору шунта при $t = t_0 = 23^\circ \text{C}$; $\alpha = 6 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ - температурний коефіцієнт. Якщо температура змінюється на Δt то границя відповідної складової похибки значення опору визначають: $\theta_{R,t} = R \cdot \alpha \cdot (\Delta t),$ тоді при $\Delta t = 0,05^\circ \text{C}$, маємо $\theta_{R,t} = R \cdot \alpha \cdot (\Delta t) = 3,027 \cdot 10^{-9} \text{ Ом}, \tilde{\theta}_{R,t} = 3,027 \cdot 10^{-5} \%$. Оскільки ця складова похибки достатньо мала у порівнянні з іншими, що надалі її можна не враховувати.	$u_B(t) = \frac{R_0 \cdot \alpha \cdot (\Delta t)}{\sqrt{3}} = 1,747 \cdot 10^{-9} \text{ Ом},$ $\tilde{u}_B(t) = \frac{u_B(t)}{R} \cdot 100\% = 1,731 \cdot 10^{-5} \%.$ Надалі цією складовою невизначеності (з огляду на її мале значення у порівнянні з іншими складовими) можна знехтувати.
3.5 Виходячи з допущення про рівномірний розподіл невиключених систематичних складових похибки результату вимірювання з межами $\theta_{\bar{U}}$ та $\theta_{R,t}$, СКВ сумарної невиключеної систематичної складової похибки результату вимірювання сили струму $S(\theta)$ визначається за формулою: $S(\theta) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial U}\right)^2 \cdot \frac{\theta_{\bar{U}}^2}{3} + \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)^2 \cdot \frac{\theta_R^2}{3}},$ де $\frac{\partial f}{\partial U} = \frac{1}{R}$; $\frac{\partial f}{\partial R} = -\frac{U}{R^2}$ - коефіцієнти впливу. Отже, маємо:	3.6* Сумарну стандартну невизначеність, розраховану за типом В визначаємо за формулою: $u_B(I) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial U}\right)^2 \cdot (u_B(\bar{U}))^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)^2 \cdot (u_B(R))^2} = 4,195 \text{ мА},$ $\tilde{u}_B(I) = \frac{u_B(I)}{I} \cdot 100\% = 0,042 \%$

$S(\theta) = \sqrt{\left(\frac{1}{R_0}\right)^2 \cdot \frac{\theta_U^2}{3} + \left(-\frac{\bar{U}}{R_0^2}\right)^2 \cdot \frac{\theta_R^2}{3}} = 4,194 \text{ мА}$ $\tilde{S}(\theta) = \frac{S(\theta)}{I} \cdot 100\% = 0,042 \%$	
3.6 Довірчі границі сумарної невиключеної систематичної складової похибки результату оцінюються за формулами: $\theta(P) = K(P) \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i \cdot \theta_i)^2} = \frac{K(P_{\text{дов.}}, n)}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m (c_i \cdot \theta_i)^2},$ де $K(P) = \pm \frac{K(P_{\text{дов.}}, n)}{\sqrt{3}}$ - коефіцієнт, що залежить від ймовірності P та кількості складових похибок n $\begin{aligned} K(P_{\text{дов.}}, n) &\approx 1,65 & P_{\text{дов.}} &= 0,9 \\ K(P_{\text{дов.}}, n) &\approx 1,96 & P_{\text{дов.}} &= 0,95 & n &\geq 4 \\ K(P_{\text{дов.}}, n) &\approx 2,58 & P_{\text{дов.}} &= 0,99 & n &> 4 \dots 5 \end{aligned}$ c_i - коефіцієнт впливу. Для P=95 % $\theta(P) = 1,11 \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial U}\right)^2 \cdot \theta_U^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)^2 \cdot \theta_R^2} = 9,43 \text{ мА}$ $\tilde{\theta}(P) = \frac{\theta(P)}{I} \cdot 100\% = 0,09445 \%$	
3.7 СКВ випадкової складової похибки результату вимірювання сили струму S визначається за формулою:	3.2* Стандартну невизначеність сили струму, зумовлену джерелами невизначеності, що мають випадковий характер, визначають за формулою:

$S = \left(\frac{\partial f}{\partial U} \right) \cdot S(\bar{U}) = \left(\frac{1}{R_0} \right) \cdot S(\bar{U}) = 3,37 \text{ мА}$ $\tilde{S} = \frac{S}{I} \cdot 100 \% = 0,0337 \%$	$u_A(I) = \left(\frac{\partial f}{\partial U} \right) \cdot u_A(\bar{U}) = \left(\frac{1}{R_0} \right) \cdot u_A(\bar{U}) = 3,37 \text{ мА}$ $\tilde{u}_A(I) = \frac{u_A(I)}{I} \cdot 100 \% = 0,037 \%$				
3.8 СКВ сумарної похибки результату вимірювання сили струму S_Σ розраховують за формулою: $S_\Sigma = \sqrt{S^2 + S_\theta^2} = 5,380 \text{ мА}$ $\tilde{S}_\Sigma = \frac{S_\Sigma}{I} \cdot 100 \% = 0,054 \%$	3.7* Сумарну стандартну невизначеність u_c розраховують за формулою: $u_c(y) = \sqrt{u_A^2(y) + u_{CB}^2(y)},$ $u_c(I) = \sqrt{u_A^2(I) + u_{CB}^2(I)} = \sqrt{3,37^2 + 4,954^2} = 5,381 \text{ мА}$ $\tilde{u}_c(I) = \frac{u_c(I)}{I} \cdot 100 \% = 0,054 \%$				
3.9 Довірчі границі похибки результату вимірювання сили струму $\Delta_{0,95}$ при $P=95 \%$ і ефективному числі степенів свободи $f_{eff} = n - 1 = 9$ розраховують за формулою: $\Delta_{0,95} = \frac{t_{0,95;9} \cdot S + \theta(0,95)}{S + S_\theta} \cdot S_\Sigma = 11,16 \text{ мА},$ $\tilde{\Delta}_\Sigma = \frac{\Delta_{0,95}}{I} \cdot 100 \% = 0,1117 \%$	3.8* Розширену невизначеність визначаємо $U = k \cdot u_c(y),$ $U = k \cdot u_c(I) = 2 \cdot 5,381 = 10,76 \text{ мА}.$ $U = k \cdot u_c(I) = 2 \cdot 5,381 = 10,76 \text{ мА}$ де загальному випадку коефіцієнт охоплення k вибирається у відповідності із формулою: $k = t_p(v_{eff}) \approx 2$ де $t_p(v_{eff})$ - квантиль розподілу Стюдента з ефективним числом степенів свободи v_{eff} і довірчою ймовірністю (рівнем довіри) p; <table border="1" data-bbox="1182 1289 2000 1378"> <tr> <th>Довірчий рівень p</th><th>коефіцієнт охоплення k</th></tr> <tr> <td>$\sim 0,95$</td><td>2</td></tr> </table>	Довірчий рівень p	коефіцієнт охоплення k	$\sim 0,95$	2
Довірчий рівень p	коефіцієнт охоплення k				
$\sim 0,95$	2				

	$v_{eff} = \frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^m \frac{u^4(x_i)}{v_i} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^4},$ $v_{eff} = \frac{u_c^4}{\left(\left(u_A(I) \cdot \frac{1}{R} \right)^4 \right)_{/n-1} + \left(\left(u_B(\bar{U}) \cdot \frac{1}{R} \right)^4 \right)_{/\infty} + \left(\left(u_B(R) \cdot \frac{U}{R^2} \right)^4 \right)_{/\infty}} = 9.3$ де v_i - число степенів свободи при розрахунку невизначеності оцінки i-ї вхідної величини, при цьому: $v_i = n - 1$ - для розрахунку невизначеності за типом А; $v_i = \infty$ - для розрахунку невизначеності за типом В.
	Примітка. Нумерація пунктів не послідовна, оскільки необхідно показати відповідність і аналогію із розрахунком похибки результату вимірювання класичним методом

Приклад виконання завдання в MathCAD

Практична робота №4

Завдання 1

Обробка результатів опосередкованих вимірювань
з багаторазовими спостереженнями

Дано

- значення опору шунта встановлено при калібруванні для
 $I=10\text{ A}$ та $t=26\text{ C}$

- значення вимірюваної напруги при $t=23\pm 0.05\text{ C}$

$$R_0 := 0.010088$$

$$n := 10$$

$$j := 1..n$$

$$U_j :=$$

$$100.68 \cdot 10^{-3}$$

$$100.83 \cdot 10^{-3}$$

$$100.79 \cdot 10^{-3}$$

$$100.64 \cdot 10^{-3}$$

$$100.63 \cdot 10^{-3}$$

$$100.94 \cdot 10^{-3}$$

$$100.60 \cdot 10^{-3}$$

$$100.68 \cdot 10^{-3}$$

$$100.76 \cdot 10^{-3}$$

$$100.65 \cdot 10^{-3}$$

1. На основі отриманих значень розраховуємо середнє значення напруги за формулою:

$$\bar{U} = \frac{\sum_{i=1}^n U_i}{n}$$

$$U_{sr} := \left(\frac{\sum_{j=1}^n U_j}{n} \right)$$

$$U_{sr} = 0.10072$$

2. Результат вимірювання сили струму отримують за формулою:

$$I = \frac{\bar{U}}{R_0}$$

$$I := \frac{(U_{sr})}{R_0}$$

$$I = 9.984$$

3. Аналіз джерел похибок та розрахунок похибки результату вимірювання

3.1 Середнє квадратичне відхилення, що характеризує випадкову складову похибки при вимірюванні напруги

$$S(\bar{U}) = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2}$$

$$SU_{sr} := \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{10} [(U_j - U_{sr})^2]}{(n-1) \cdot n}} \quad SU_{sr} = 3.39935 \times 10^{-5}$$

$$\tilde{S}(\bar{U}) = \frac{S(\bar{U})}{\bar{U}} \cdot 100\%$$

$$SSU_{sr} := \frac{SU_{sr} \cdot 100}{U_{sr}} \quad SSU_{sr} = 0.034$$

3.2 Границі невиключеної систематичної похибки (мВ) вольтметра визначені при його калібруванні у вигляді виразу:

$$\theta_{\bar{U}} = (3 \cdot 10^{-4} \cdot \bar{U} + 0.02)_{mB}$$

$$\theta U := (3 \cdot 10^{-4} \cdot U_{sr} + 0.02) \cdot 10^{-3} \quad \theta U = 2.003022 \times 10^{-5}$$

$$\tilde{\theta}(\bar{U}) = \frac{\theta(\bar{U})}{\bar{U}} \cdot 100\%$$

$$\theta \theta U := \frac{\theta U \cdot 100}{U_{sr}} \quad \theta \theta U = 0.02$$

3. Аналіз джерел та розрахунок невизначеності

За типом А розраховуємо стандартну невизначеність, обумовлену джерелами невизначеності, які мають випадковий характер.

3.1 Стандартну невизначеність напруги, зумовлену джерелами невизначеності, що мають випадковий характер визначають за формулою:

$$uAU_{sr} := \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{10} [(U_j - U_{sr})^2]}{(n-1) \cdot n}} \quad uAU_{sr} = 3.39935 \times 10^{-5}$$

За типом В розраховуємо стандартні невизначеності, зумовлені джерелами невизначеності, що мають систематичний характер. Розподіл значень величин всередині границь вважаємо рівномірним.

3.3 Границі систематичного зміщення при вимірюванні напруги, визначені при калібруванні вольтметра

$$\theta_{\bar{U}} = (3 \cdot 10^{-4} \cdot \bar{U} + 0.02)_{mB}$$

Тоді відповідну стандартну невизначеність визначають за формулою:

$$u_B(\bar{U}) = \frac{(3 \cdot 10^{-4} \cdot \bar{U} + 0.02)}{\sqrt{3}} \quad uBU := \frac{(3 \cdot 10^{-4} \cdot U_{sr} + 0.02) \cdot 10^{-3}}{\sqrt{3}} \quad uBU = 1.1564 \times 10^{-5}$$

$$\tilde{u}_B(\bar{U}) = \frac{u_B(\bar{U})}{\bar{U}} \cdot 100\% \quad uuBU := \frac{uBU \cdot 100}{U_{sr}} \quad uuBU = 0.0115$$

3.3 З паспортних даних маємо, що границі невиключеної систематичної похибки значення опору шунта, які були визначені при калібруванні становлять $\tilde{\theta}_R = 0.07\%$

$$\theta_{\theta R} := 0.07$$

$$\tilde{\theta}_R = \frac{\theta_R}{R} \cdot 100\% \Rightarrow \theta_R = \frac{\tilde{\theta}_R \cdot R}{100\%} = \theta_{\theta R} \cdot \frac{R_0}{100} \quad \theta_R = 7.062 \times 10^{-6}$$

3.4 Границі невиключеної систематичної складової похибки значення шунта, що обумовлено похибкою вимірювання температури, визначають із формули, що визначає залежність опору від температури:

$$R = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot (t - t_0)) \quad \alpha := 6 \cdot 10^{-6} \quad t := 23.05 \quad t_0 := 23$$

$$R := R_0 [1 + \alpha \cdot (t - t_0)] \quad R = 0.010088003$$

Якщо температура змінюється на Δt то границя відповідної складової похибки значення опору визначають:

$$\theta_{R,t} = R \cdot \alpha \cdot (\Delta t) \quad \Delta t := 0.05 \quad \theta_{Rt} := R \cdot \Delta t \cdot \alpha \quad \theta_{Rt} = 3.026 \times 10^{-9}$$

Оскільки ця складова похибки достатньо мала у порівнянні із іншими, що в подальшому її можна не враховувати.

3.4 Границі, всередині яких лежить значення опору шунта, визначені при калібруванні шунта і дорівнюють $7 \cdot 10^{-4} \cdot R$.

Відповідну стандартну невизначеність розраховують за формулою:

$$u_B(R) = \frac{(7 \cdot 10^{-4} \cdot R)}{\sqrt{3}} \quad u_{BR} := \frac{7 \cdot 10^{-4} \cdot R_0}{\sqrt{3}} \quad u_{BR} = 4.077 \times 10^{-6}$$

$$\tilde{u}_B(R) = \frac{u_B(R)}{R} \cdot 100\% \quad \tilde{u}_{BR} := \frac{u_{BR} \cdot 100}{R_0} \quad \tilde{u}_{BR} = 0.04$$

3.5 Границі зміни значення опору шунта, зумовленого зміною температури, дорівнюють $R_0 \cdot \alpha \cdot (\Delta t)$. Відповідну стандартну невизначеність отримують у відповідності із формулою:

$$u_B(t) = \frac{R_0 \cdot \alpha \cdot (\Delta t)}{\sqrt{3}} \quad \Delta t := 0.05 \quad u_{Bt} := \frac{R_0 \cdot \Delta t \cdot \alpha}{\sqrt{3}} \quad u_{Bt} = 1.747 \times 10^{-9}$$

$$\tilde{u}_B(t) = \frac{u_B(t)}{R} \cdot 100\% \quad \tilde{u}_{Bt} := \frac{u_{Bt} \cdot 100}{R_0} \quad \tilde{u}_{Bt} = 1.732 \times 10^{-5}$$

3.5 Виходячи з допущення про рівномірний розподіл невиключених систематичних складових похибки результату вимірювання з межами θ_U та θ_R , СКВ сумарної невиключеної систематичної складової похибки результату вимірювання сили струму $S(\theta)$ визначається за формулою:

$$S(\theta) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial U}\right)^2 \cdot \frac{\theta_U^2}{3} + \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)^2 \cdot \frac{\theta_R^2}{3}} \quad \frac{\partial f}{\partial U} = \frac{1}{R} \quad \frac{\partial f}{\partial R} = -\frac{U}{R^2}$$

$$S\theta = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 \cdot \frac{\theta_U^2}{3} + \left(\frac{-U_{sr}}{R^2}\right)^2 \cdot \frac{\theta_R^2}{3}} \quad S\theta = 4.19472 \times 10^{-3}$$

$$\tilde{S}(\theta) = \frac{S(\theta)}{I} \cdot 100\% \quad SS\theta = \frac{S\theta \cdot 100}{I} \quad SS\theta = 0.04201$$

3.6 Довірчі границі сумарної невиключеної систематичної складової похибки результату оцінюються за формулами:

$$\theta(P) = K(P) \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i \cdot \theta_i)^2} = \frac{K(P_{дог.}, n)}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m (c_i \cdot \theta_i)^2}$$

$$K(P) = \pm \frac{K(P_{дог.}, n)}{\sqrt{3}} \quad \text{коефіцієнт, що залежить від ймовірності P та кількості складових похибок n}$$

$$K(P_{дог.}, n) \approx 1,65 \quad P_{дог.} = 0,9$$

$$K(P_{дог.}, n) \approx 1,96 \quad P_{дог.} = 0,95 \quad n \geq 4$$

$$K(P_{дог.}, n) \approx 2,58 \quad P_{дог.} = 0,99 \quad n > 4 \dots 5$$

3.6 Сумарну стандартну невизначеність, розраховану за типом В визначаємо за формулою:

$$u_B(I) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial U}\right)^2 \cdot (u_B(U))^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)^2 \cdot (u_B(R))^2}$$

$$u_B := \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 \cdot u_{BU}^2 + \left(\frac{U_{sr}}{R^2}\right)^2 \cdot u_{BR}^2} \quad u_B = 4.195 \times 10^{-3}$$

$$\tilde{u}_B(I) = \frac{u_B(I)}{I} \cdot 100\% \quad u_{BI} := \frac{u_B \cdot 100}{I} \quad u_{BI} = 0.04201$$

Для P=95 %

$$\theta(P) = 1,11 \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial U}\right)^2 \cdot \theta_U^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)^2 \cdot \theta_R^2} \quad \Theta := \left[\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 \cdot \theta_U^2 + \left(\frac{U_{sr}}{R^2}\right)^2 \cdot \theta_R^2} \right] \cdot 1,11$$

$$\tilde{\theta}(P) = \frac{\theta(P)}{I} \cdot 100\%$$

$$SSP := \Theta \cdot \frac{100}{I}$$

$$\Theta = 8.065 \times 10^{-3}$$

$$SSP = 0.081$$

3.7 СКВ випадкової складової похибки результату вимірювання сили струму S визначається за формулою:

$$S = \left(\frac{\partial f}{\partial U}\right) \cdot S(\bar{U}) = \left(\frac{1}{R_0}\right) \cdot S(\bar{U})$$

$$S := \frac{S U_{sr}}{R_0}$$

$$S = 3.37 \times 10^{-3}$$

$$\tilde{S} = \frac{S}{I} \cdot 100\%$$

$$SS := \frac{S \cdot 100}{I}$$

$$SS = 0.034$$

3.8 СКВ сумарної похибки результату вимірювання сили струму S_{Σ} розраховують за формулою:

$$S_{\Sigma} = \sqrt{S^2 + S_{\theta}^2}$$

$$S_{sum} := \sqrt{S^2 + S_{\theta}^2}$$

$$S_{sum} = 5.380568 \times 10^{-3}$$

$$\tilde{S}_{\Sigma} = \frac{S_{\Sigma}}{I} \cdot 100\%$$

$$SS_{sum} := \frac{S_{sum} \cdot 100}{I}$$

$$SS_{sum} = 0.054$$

3.9 Довірчі границі похибки результату вимірювання сили струму $\Delta_{0,95}$ при P=95 % і ефективному числі степенів свободи $f_{ef} = n - 1 = 9$ розраховують за

формулою:

$$\Delta_{0,95} = \frac{t_{0,95;9} \cdot S + \theta(0.95)}{S + S_{\theta}} \cdot S_{\Sigma}$$

$$\Delta := \left(\frac{2.262 \cdot S + \Theta}{S + S_{\theta}} \right) \cdot S_{sum}$$

$$\Delta = 0.01116$$

$$\tilde{\Delta}_{\Sigma} = \frac{\Delta_{0,95}}{I} \cdot 100\%$$

$$\Delta_{sum} := \frac{\Delta \cdot 100}{I}$$

$$\Delta_{sum} = 0.11176$$

3.2 Стандартну невизначеність сили струму, зумовлену джерелами невизначеності, що мають випадковий характер, визначають за формулою:

$$u_A(I) = \left(\frac{\partial f}{\partial U}\right) \cdot u_A(\bar{U}) = \left(\frac{1}{R_0}\right) \cdot u_A(\bar{U}) =$$

$$u_{AI} := \left(\frac{1}{R_0}\right) \cdot u_{AU_{sr}}$$

$$u_{AI} = 3.37 \times 10^{-3}$$

$$\tilde{u}_A(I) = \frac{u_A(I)}{I} \cdot 100\%$$

$$u_{uAI} := \frac{u_{AI} \cdot 100}{I}$$

$$u_{uAI} = 0.034$$

3.7 Сумарну стандартну невизначеність u_c розраховують за формулою:

$$u_c(I) = \sqrt{u_A^2(I) + u_B^2(I)}$$

$$u_c := \left(\sqrt{u_{AI}^2 + u_B^2} \right)$$

$$u_c = 5.381 \times 10^{-3}$$

$$\tilde{u}_c(I) = \frac{u_c(I)}{I} \cdot 100\%$$

$$u_{ucI} := \frac{u_c \cdot 100}{I}$$

$$u_{ucI} = 0.054$$

3.8 Розширену невизначеність визначаємо

$$U = k \cdot u_c(I)$$

$$k := 2$$

$$U := k \cdot u_c$$

$$U = 0.010761$$

Завдання 2

Обробка результатів опосередкованих вимірювань з багаторазовими спостереженнями при наявності кореляції між вхідними величинами

Активний R і реактивний X опори елементу кола визначають шляхом вимірювання амплітуди V різниці потенціалів на його виводах, яка змінюється синусоїдально, амплітуди I змінного струму, що проходить через нього, і кута зсуву фаз φ змінної різниці потенціалів відносно змінного струму. Отже, трьома вхідними величинами є V, I, φ , а трьома вихідними (вимірюваними величинами) є три складові імпедансу: R, X, Z . Оскільки $Z^2 = R^2 + X^2$, тобто є тільки дві незалежні величини.

Математична модель та вихідні дані

Вимірювані величини пов'язані з вхідними величинами законом Ома:

$$R = \frac{V}{I} \cdot \cos(\varphi); \quad X = \frac{V}{I} \cdot \sin(\varphi); \quad Z = \frac{V}{I}$$

Передбачається, що п'ять незалежних рядів одночасних спостережень цих трьох величин V, I, φ отримані в однакових умовах.

Вихідні дані

варіант 1			варіант 2		
$V(B)$	$I(mA)$	$\varphi(рад)$	$V(B)$	$I(mA)$	$\varphi(рад)$
$U1 = \begin{pmatrix} 5.043 \\ 5.21 \\ 5.087 \\ 5.305 \\ 5.173 \\ 5.103 \\ 5.092 \end{pmatrix}$	$I1 = \begin{pmatrix} 20.095 \\ 20.106 \\ 20.098 \\ 20.101 \\ 20.113 \\ 20.093 \\ 20.1 \end{pmatrix}$	$\phi1 = \begin{pmatrix} 1.25538 \\ 1.24463 \\ 1.05496 \\ 1.09214 \\ 1.2103 \\ 1.16921 \\ 1.14011 \end{pmatrix}$	$U1 = \begin{pmatrix} 5.291 \\ 5.514 \\ 5.349 \\ 5.639 \\ 5.464 \\ 5.371 \\ 5.355 \\ 5.397 \end{pmatrix}$	$I1 = \begin{pmatrix} 20.511 \\ 20.495 \\ 20.502 \\ 20.525 \\ 20.486 \\ 20.5 \\ 20.522 \\ 20.518 \end{pmatrix}$	$\phi1 = \begin{pmatrix} 1.10496 \\ 1.14214 \\ 1.2603 \\ 1.21921 \\ 1.19011 \\ 1.25495 \\ 1.28854 \\ 1.2653 \end{pmatrix}$

варіант 3			варіант 4		
$V(B)$	$I(mA)$	$\varphi(рад)$	$V(B)$	$I(mA)$	$\varphi(рад)$
$U1 = \begin{pmatrix} 5.096 \\ 5.207 \\ 5.124 \\ 5.27 \\ 5.182 \\ 5.136 \\ 5.128 \end{pmatrix}$	$I1 = \begin{pmatrix} 20.19 \\ 20.211 \\ 20.195 \\ 20.202 \\ 20.225 \\ 20.186 \\ 20.2 \end{pmatrix}$	$\phi1 = \begin{pmatrix} 1.10538 \\ 1.09463 \\ 0.90496 \\ 0.94214 \\ 1.0603 \\ 1.01921 \\ 0.99011 \end{pmatrix}$	$U1 = \begin{pmatrix} 5.196 \\ 5.307 \\ 5.224 \\ 5.37 \\ 5.282 \\ 5.236 \\ 5.228 \\ 5.248 \\ 5.356 \end{pmatrix}$	$I1 = \begin{pmatrix} 20.195 \\ 20.202 \\ 20.225 \\ 20.186 \\ 20.2 \\ 20.222 \\ 20.218 \\ 20.142 \\ 20.157 \end{pmatrix}$	$\phi1 = \begin{pmatrix} 1.0603 \\ 1.01921 \\ 0.99011 \\ 1.05495 \\ 1.08854 \\ 1.0653 \\ 1.05057 \\ 1.01178 \\ 1.02954 \end{pmatrix}$

варіант 5			варіант 6		
$V(B)$	$I(мА)$	$\varphi(рад)$	$V(B)$	$I(мА)$	$\varphi(рад)$
$U1 = \begin{pmatrix} 7.396 \\ 7.507 \\ 7.424 \\ 7.57 \\ 7.482 \\ 7.436 \\ 7.428 \\ 7.448 \\ 7.556 \end{pmatrix}$	$I1 = \begin{pmatrix} 24.995 \\ 25.002 \\ 25.025 \\ 24.986 \\ 25 \\ 25.022 \\ 25.018 \\ 24.942 \\ 24.957 \end{pmatrix}$	$\phi1 = \begin{pmatrix} 1.0403 \\ 0.99921 \\ 0.97011 \\ 1.03495 \\ 1.06854 \\ 1.0453 \\ 1.03057 \\ 0.99178 \\ 1.00954 \end{pmatrix}$	$U1 = \begin{pmatrix} 8.291 \\ 8.514 \\ 8.349 \\ 8.639 \\ 8.464 \\ 8.371 \\ 8.355 \\ 8.397 \end{pmatrix}$	$I1 = \begin{pmatrix} 25.014 \\ 24.994 \\ 25.002 \\ 25.032 \\ 24.982 \\ 25 \\ 25.028 \\ 25.022 \end{pmatrix}$	$\phi1 = \begin{pmatrix} 0.88496 \\ 0.92214 \\ 1.0403 \\ 0.99921 \\ 0.97011 \\ 1.03495 \\ 1.06854 \\ 1.0453 \end{pmatrix}$

варіант 7			варіант 8		
$V(B)$	$I(мА)$	$\varphi(рад)$	$V(B)$	$I(мА)$	$\varphi(рад)$
$U1 = \begin{pmatrix} 0 & 9.739 \\ 1 & 10.017 \\ 2 & 9.811 \\ 3 & 10.174 \\ 4 & 9.955 \\ 5 & 9.839 \\ 6 & 9.819 \\ 7 & 9.871 \\ 8 & 10.139 \\ 9 & 9.939 \end{pmatrix}$	$I1 = \begin{pmatrix} 0 & 27.003 \\ 1 & 27.044 \\ 2 & 26.975 \\ 3 & 27 \\ 4 & 27.039 \\ 5 & 27.031 \\ 6 & 26.898 \\ 7 & 26.925 \\ 8 & 27.007 \\ 9 & 26.978 \end{pmatrix}$	$\phi1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.96413 \\ 1 & 1.03545 \\ 2 & 1.07239 \\ 3 & 1.04682 \\ 4 & 1.03062 \\ 5 & 0.98795 \\ 6 & 1.0075 \\ 7 & 0.99294 \\ 8 & 1.02273 \\ 9 & 1.086 \end{pmatrix}$	$U1 = \begin{pmatrix} 10.343 \\ 10.51 \\ 10.387 \\ 10.605 \\ 10.473 \\ 10.403 \\ 10.392 \\ 10.423 \end{pmatrix}$	$I1 = \begin{pmatrix} 22.02 \\ 21.991 \\ 22.003 \\ 22.044 \\ 21.975 \\ 22 \\ 22.039 \\ 22.031 \end{pmatrix}$	$\phi1 = \begin{pmatrix} 0.89946 \\ 0.93293 \\ 1.03927 \\ 1.00229 \\ 0.9761 \\ 1.03446 \\ 1.06468 \\ 1.04377 \end{pmatrix}$

варіант 9			варіант 10		
$V(B)$	$I(мА)$	$\varphi(рад)$	$V(B)$	$I(мА)$	$\varphi(рад)$
$U1 = \begin{pmatrix} 12.249 \\ 12.517 \\ 12.319 \\ 12.667 \\ 12.456 \\ 12.345 \\ 12.326 \\ 12.376 \end{pmatrix}$	$I1 = \begin{pmatrix} 24.02 \\ 23.991 \\ 24.003 \\ 24.044 \\ 23.975 \\ 24 \\ 24.039 \\ 24.031 \end{pmatrix}$	$\phi1 = \begin{pmatrix} 0.86946 \\ 0.90293 \\ 1.00927 \\ 0.97229 \\ 0.9461 \\ 1.00446 \\ 1.03468 \\ 1.01377 \end{pmatrix}$	$U1 = \begin{pmatrix} 15.396 \\ 15.507 \\ 15.424 \\ 15.57 \\ 15.482 \\ 15.436 \\ 15.428 \\ 15.448 \\ 15.556 \end{pmatrix}$	$I1 = \begin{pmatrix} 24.991 \\ 25.003 \\ 25.044 \\ 24.975 \\ 25 \\ 25.039 \\ 25.031 \\ 24.898 \\ 24.925 \end{pmatrix}$	$\phi1 = \begin{pmatrix} 1.00927 \\ 0.97229 \\ 0.9461 \\ 1.00446 \\ 1.03468 \\ 1.01377 \\ 1.00051 \\ 0.9656 \\ 0.98159 \end{pmatrix}$

Приклад виконання завдання 2

Номер результату k	Вхідні величини		
	V (В)	I (мА)	φ (рад)
1	5,007	19,663	1,0456
2	4,994	19,639	1,0438
3	5,005	19,640	1,0468
4	4,99	19,685	1,0428
5	4,999	19,678	1,0433

- Визначаємо середнє арифметичне кожної величини:

$$\bar{V} = 4,99 \text{ В}, \quad \bar{I} = 0,0196 \text{ А}, \quad \bar{\varphi} = 1,0444 \text{ рад}.$$

- Визначаємо експериментальну стандартну невизначеність за формулою:

$$u_A(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

для кожної фізичної величини:

$$u_A(\bar{V}) = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot (5-1)} \cdot \sum_{i=1}^5 (V_i - \bar{V})^2} = 0,0032 \text{ В},$$

$$u_A(\bar{I}) = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot (5-1)} \cdot \sum_{i=1}^5 (I_i - \bar{I})^2} = 0,00947 \text{ мА},$$

$$u_A(\bar{\varphi}) = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot (5-1)} \cdot \sum_{i=1}^5 (\varphi_i - \bar{\varphi})^2} = 0,0007521 \text{ рад}.$$

Приклад виконання завдання п.1-п.2 в Excel

	A	B	C	D	E
1	Практична робота №4		Завдання 2 Обробка результат		
2					
3			V(В)	I(мА)	φ (рад)
4		k			
5		1	5,007	0,019663	1,0456
6		2	4,994	0,019639	1,0438
7		3	5,005	0,01964	1,0468
8		4	4,99	0,019685	1,0428
9		5	4,999	0,019678	1,0433
10	1. Середнє арифметичне кожної фізичної величини	$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}$	4,999	0,019661	1,04446
11	2. Експериментальна стандартна невизначеність середнього	$u_A(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$	6,4E-05	4E-12	1,2996E-06
12			2,5E-05	4,84E-10	4,356E-07
13			3,6E-05	4,41E-10	5,4756E-06
14			8,1E-05	5,76E-10	2,7556E-06
15			7,88861E-31	2,89E-10	1,3456E-06
16			0,000206	1,794E-09	1,1312E-05
17			0,00321	9,47101E-06	0,00075

• Виходячи з обчислених середніх значень результатів вимірювання кожної фізичної величини визначаємо:

$$\bar{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \cdot \cos(\bar{\varphi}) = 127,73217 \text{ Ом},$$

$$\bar{X} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \cdot \sin(\bar{\varphi}) = 219,84651 \text{ Ом},$$

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}.$$

	A	B	C	D	E	H	K	N
1	Практична робота №4		Завдання 2 Обробка результатів опосередкованих вимірювань з багаторковельні між вхідними величинами					
3		k	$V(B)$	$I(A)$	$\varphi(рад)$	$\bar{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \cdot \cos(\bar{\varphi})$	$\bar{X} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \cdot \sin(\bar{\varphi})$	$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$
5		1	5,007	0,019663	1,0456	127,6724857	220,3216292	254,6406957
6		2	4,994	0,019639	1,0438	127,8924453	219,7882904	254,2899333
7		3	5,005	0,01964	1,0468	127,5062612	220,6447012	254,8370672
8		4	4,99	0,019685	1,0428	127,7104234	218,9714567	253,492507
9		5	4,999	0,019678	1,0433	127,8765367	219,5083955	254,0400447
10	1. Середнє арифметичне кожної фізичної величини	$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}$	4,999	0,019661	1,04446	127,7316305	219,8468946	254,2600496

• Оцінювання сумарної стандартної невизначеності.

Оскільки середні $\bar{V}, \bar{I}, \bar{\varphi}$ отримані з одночасних дослідів, то вони можуть бути корельовані. Потрібно оцінити відповідні коефіцієнти кореляції та, при їх суттєвості, врахувати при обчисленні невизначеності результату.

○ Коефіцієнти кореляції визначаємо за формулою (4.6):

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i) \cdot u(x_j)},$$

$$\text{де } u(x_i, x_j) = \frac{\sum_{k=1}^n (x_{i,k} - \bar{x}_i) \cdot (x_{j,k} - \bar{x}_j)}{n \cdot (n-1)} \quad - \text{ попарні оцінки кореляційних}$$

моментів.

Тоді відповідно:

$$u(\bar{V}, \bar{I}) = \frac{\sum_{k=1}^n (V_k - \bar{V}) \cdot (I_k - \bar{I})}{n \cdot (n-1)} = -1,08 \cdot 10^{-8} \text{ В} \cdot \text{А}; \quad r(\bar{V}, \bar{I}) = \frac{u(\bar{V}, \bar{I})}{u(\bar{V}) \cdot u(\bar{I})} = -0,355,$$

$$u(\bar{V}, \bar{\varphi}) = \frac{\sum_{k=1}^n (V_k - \bar{V}) \cdot (\varphi_k - \bar{\varphi})}{n \cdot (n-1)} = 2,07 \cdot 10^{-6} \text{ В} \cdot \text{рад}; \quad r(\bar{V}, \bar{\varphi}) = \frac{u(\bar{V}, \bar{\varphi})}{u(\bar{V}) \cdot u(\bar{\varphi})} = 0,86,$$

$$u(\bar{I}, \bar{\varphi}) = \frac{\sum_{k=1}^n (I_k - \bar{I}) \cdot (\varphi_k - \bar{\varphi})}{n \cdot (n-1)} = -4,06 \cdot 10^{-9} \text{ А} \cdot \text{рад}; \quad r(\bar{I}, \bar{\varphi}) = \frac{u(\bar{I}, \bar{\varphi})}{u(\bar{I}) \cdot u(\bar{\varphi})} = -0,65.$$

Приклад виконання завдання п.4.1 в Excel

	A	B	C	D	E
1	Практична робота №4		Завдання 2 Обробка результат		
2					
3					
4		k	V(B)	I(мА)	φ(рад)
5		1	5,007	0,019663	1,0456
6		2	4,994	0,019639	1,0438
7		3	5,005	0,01964	1,0468
8		4	4,99	0,019685	1,0428
9		5	4,999	0,019678	1,0433
10	1. Середнє арифметичне кожної фізичної величини	$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}$	4,999	0,019661	1,04446
11	2. Експериментальна стандартна невизначеність середнього	$u_A(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$	6,4E-05	4E-12	1,2996E-06
12			2,5E-05	4,84E-10	4,356E-07
13			3,6E-05	4,41E-10	5,4756E-06
14			8,1E-05	5,76E-10	2,7556E-06
15			7,88861E-31	2,89E-10	1,3456E-06
16			0,000206	1,794E-09	1,1312E-05
17			0,00321	9,47101E-06	0,00075
18	4.1 Коефіцієнти кореляції				
19	попарна оцінка	$u(V, I) = \frac{\sum_{k=1}^n (V_k - \bar{V}) \cdot (I_k - \bar{I})}{n \cdot (n-1)}$	-1,08E-08		
20	кореляційних				
21	моментів (V,I)				
22	коефіцієнт кореляції (V,I)	$r(\bar{V}, \bar{I}) = \frac{u(\bar{V}, \bar{I})}{u(\bar{V}) \cdot u(\bar{I})}$	-0,35531122		
23					
24	попарна оцінка	$u(\bar{I}, \varphi) = \frac{\sum_{k=1}^n (I_k - \bar{I}) \cdot (\varphi_k - \bar{\varphi})}{n \cdot (n-1)}$	-4,595E-09		
25	кореляційних				
26	моментів (I,φ)				
27	коефіцієнт кореляції (I,φ)	$r(\bar{I}, \bar{\varphi}) = \frac{u(\bar{I}, \bar{\varphi})}{u(\bar{I}) \cdot u(\bar{\varphi})}$	-0,645111218		
28					
29	попарна оцінка	$u(V, \varphi) = \frac{\sum_{k=1}^n (V_k - \bar{V}) \cdot (\varphi_k - \bar{\varphi})}{n \cdot (n-1)}$	2,1E-06		
30	кореляційних				
31	моментів (V,φ)				
32	коефіцієнт кореляції (V,φ)	$r(\bar{V}, \bar{\varphi}) = \frac{u(\bar{V}, \bar{\varphi})}{u(\bar{V}) \cdot u(\bar{\varphi})}$	0,85762		
33					
34					
35					
36					

Гradientне поєднання кольорів наочно показує для яких вхідних (вихідних) величин визначався коефіцієнт кореляції

- Вирази для оцінки сумарної невизначеності з урахуванням коефіцієнту кореляції в загальному вигляді за формулою (4.7):

$$\begin{aligned}
u_c^2 &= \sum_{i=1}^N c_i^2 \cdot u^2(\bar{x}_i) + 2 \cdot \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=2}^N c_i \cdot c_j \cdot r(x_i, x_j) \cdot u(x_i) \cdot u(x_j) \Rightarrow \\
u_c &= \sqrt{\sum_{i=1}^N c_i^2 \cdot u^2(\bar{x}_i) + 2 \cdot \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=2}^N c_i \cdot c_j \cdot r(x_i, x_j) \cdot u(x_i) \cdot u(x_j)} , \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Тоді відповідно для кожної вихідної величини отримаємо:

$$u_c(R) = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial V}\right)^2 \cdot u^2(\bar{V}) + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\right)^2 \cdot u^2(\bar{I}) + \left(\frac{\partial R}{\partial \varphi}\right)^2 \cdot u^2(\bar{\varphi}) + 2 \cdot \left[\frac{\partial R}{\partial V} \cdot \frac{\partial R}{\partial I} \cdot u(\bar{V}) \cdot u(\bar{I}) \cdot r(\bar{V}, \bar{I}) + \frac{\partial R}{\partial V} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varphi} \cdot u(\bar{V}) \cdot u(\bar{\varphi}) \cdot r(\bar{V}, \bar{\varphi}) + \frac{\partial R}{\partial I} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varphi} \cdot u(\bar{I}) \cdot u(\bar{\varphi}) \cdot r(\bar{I}, \bar{\varphi}) \right]} = 0.07107 ,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial V} &= \frac{1}{\bar{I}} \cdot \text{Cos}(\bar{\varphi}); & \frac{\partial R}{\partial I} &= -\frac{\bar{V}}{\bar{I}^2} \cdot \text{Cos}(\bar{\varphi}); & \frac{\partial R}{\partial \varphi} &= -\frac{\bar{V}}{\bar{I}} \cdot \text{Sin}(\bar{\varphi}), \\
\frac{\partial X}{\partial V} &= \frac{1}{\bar{I}} \cdot \text{Sin}(\bar{\varphi}); & \frac{\partial X}{\partial I} &= -\frac{\bar{V}}{\bar{I}^2} \cdot \text{Sin}(\bar{\varphi}); & \frac{\partial X}{\partial \varphi} &= -\frac{\bar{V}}{\bar{I}} \cdot \text{Cos}(\bar{\varphi}), & \frac{\partial Z}{\partial V} &= \frac{1}{\bar{I}}; & \frac{\partial Z}{\partial I} &= -\frac{\bar{V}}{\bar{I}^2}
\end{aligned}$$

$$u_c(X) = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial V}\right)^2 \cdot u^2(\bar{V}) + \left(\frac{\partial X}{\partial I}\right)^2 \cdot u^2(\bar{I}) + \left(\frac{\partial X}{\partial \phi}\right)^2 \cdot u^2(\bar{\phi}) + 2 \cdot \left[\frac{\partial X}{\partial V} \cdot \frac{\partial X}{\partial I} \cdot u(\bar{V}) \cdot u(\bar{I}) \cdot r(\bar{V}, \bar{I}) + \frac{\partial X}{\partial V} \cdot \frac{\partial X}{\partial \phi} \cdot u(\bar{V}) \cdot u(\bar{\phi}) \cdot r(\bar{V}, \bar{\phi}) + \frac{\partial X}{\partial I} \cdot \frac{\partial X}{\partial \phi} \cdot u(\bar{I}) \cdot u(\bar{\phi}) \cdot r(\bar{I}, \bar{\phi}) \right]} = 0.12 ,$$

$$u_c(Z) = \sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial V}\right)^2 \cdot u^2(\bar{V}) + \left(\frac{\partial Z}{\partial I}\right)^2 \cdot u^2(\bar{I}) + 2 \cdot \left[\frac{\partial Z}{\partial V} \cdot \frac{\partial Z}{\partial I} \cdot u(\bar{V}) \cdot u(\bar{I}) \cdot r(\bar{V}, \bar{I}) \right]} = 0.236 ,$$

Приклад виконання п.4.2 (продовження) в Excel

$\frac{\partial R}{\partial V} = \frac{1}{I} \cdot \cos(\varphi)$	25,552	$\frac{\partial X}{\partial V} = \frac{1}{I} \cdot \sin(\varphi)$	43,978	$\frac{\partial Z}{\partial V} = \frac{1}{I}$	50,862
$\frac{\partial R}{\partial I} = -\frac{V}{I^2} \cdot \cos(\varphi)$	-6496,7	$\frac{\partial X}{\partial I} = -\frac{V}{I^2} \cdot \sin(\varphi)$	-11182	$\frac{\partial Z}{\partial I} = -\frac{V}{I^2}$	-12932
$\frac{\partial R}{\partial \varphi} = -\frac{V}{I} \cdot \sin(\varphi)$	-219,85	$\frac{\partial X}{\partial \varphi} = -\frac{V}{I} \cdot \cos(\varphi)$	-127,73		
$u_c(R) = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial V}\right)^2 \cdot u^2(V) + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\right)^2 \cdot u^2(I) + \left(\frac{\partial R}{\partial \varphi}\right)^2 \cdot u^2(\varphi) + 2 \cdot \left[\frac{\partial R}{\partial V} \cdot \frac{\partial R}{\partial I} \cdot u(V) \cdot u(I) \cdot r(V, I) + \frac{\partial R}{\partial V} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varphi} \cdot u(V) \cdot u(\varphi) \cdot r(V, \varphi) + \frac{\partial R}{\partial I} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varphi} \cdot u(I) \cdot u(\varphi) \cdot r(I, \varphi) \right]}$		0,071071407		$u(\bar{R}, X) = \frac{\sum_{k=1}^n (R_k - \bar{R}) \cdot (X_k - \bar{X})}{n \cdot (n-1)} =$ $r(\bar{R}, \bar{X}) = \frac{u(\bar{R}, \bar{X})}{u(\bar{R}) \cdot u(\bar{X})}$ $u(\bar{R}, \bar{Z}) = \frac{\sum_{k=1}^n (R_k - \bar{R}) \cdot (Z_k - \bar{Z})}{n \cdot (n-1)}$ $r(\bar{R}, \bar{Z}) = \frac{u(\bar{R}, \bar{Z})}{u(\bar{R}) \cdot u(\bar{Z})}$ $u(\bar{X}, \bar{Z}) = \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}) \cdot (Z_k - \bar{Z})}{n \cdot (n-1)}$ $r(\bar{X}, \bar{Z}) = \frac{u(\bar{X}, \bar{Z})}{u(\bar{X}) \cdot u(\bar{Z})}$	
$u_c(X) = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial V}\right)^2 \cdot u^2(V) + \left(\frac{\partial X}{\partial I}\right)^2 \cdot u^2(I) + \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right)^2 \cdot u^2(\varphi) + 2 \cdot \left[\frac{\partial X}{\partial V} \cdot \frac{\partial X}{\partial I} \cdot u(V) \cdot u(I) \cdot r(V, I) + \frac{\partial X}{\partial V} \cdot \frac{\partial X}{\partial \varphi} \cdot u(V) \cdot u(\varphi) \cdot r(V, \varphi) + \frac{\partial X}{\partial I} \cdot \frac{\partial X}{\partial \varphi} \cdot u(I) \cdot u(\varphi) \cdot r(I, \varphi) \right]}$		0,12084894			
$u_c(Z) = \sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial V}\right)^2 \cdot u^2(V) + \left(\frac{\partial Z}{\partial I}\right)^2 \cdot u^2(I) + 2 \cdot \left[\frac{\partial Z}{\partial V} \cdot \frac{\partial Z}{\partial I} \cdot u(V) \cdot u(I) \cdot r(V, I) \right]}$		0,23633613			

$$u(\bar{R}, \bar{X}) = \frac{\sum_{k=1}^n (R_k - \bar{R}) \cdot (X_k - \bar{X})}{n \cdot (n-1)} = -0,0123, \quad r(\bar{R}, \bar{X}) = \frac{u(\bar{R}, \bar{X})}{u(\bar{R}) \cdot u(\bar{X})} = -0,588,$$

$$u(\bar{R}, \bar{Z}) = \frac{\sum_{k=1}^n (R_k - \bar{R}) \cdot (Z_k - \bar{Z})}{n \cdot (n-1)} = -0,00816, \quad r(\bar{R}, \bar{Z}) = \frac{u(\bar{R}, \bar{Z})}{u(\bar{R}) \cdot u(\bar{Z})} = -0,485,$$

$$u(\bar{X}, \bar{Z}) = \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}) \cdot (Z_k - \bar{Z})}{n \cdot (n-1)} = 0,0692, \quad r(\bar{X}, \bar{Z}) = \frac{u(\bar{X}, \bar{Z})}{u(\bar{X}) \cdot u(\bar{Z})} = 0,992.$$

Q	R	S	T	U	V
4.3 Визначення коефіцієнтів кореляції для розрахункових величин					
	$u(\bar{R}, \bar{X}) = \frac{\sum_{k=1}^n (R_k - \bar{R}) \cdot (X_k - \bar{X})}{n \cdot (n-1)} =$				-0,012389437
	$r(\bar{R}, \bar{X}) = \frac{u(\bar{R}, \bar{X})}{u(\bar{R}) \cdot u(\bar{X})}$				-0,588276856
	$u(\bar{R}, \bar{Z}) = \frac{\sum_{k=1}^n (R_k - \bar{R}) \cdot (Z_k - \bar{Z})}{n \cdot (n-1)}$				-0,008167613
	$r(\bar{R}, \bar{Z}) = \frac{u(\bar{R}, \bar{Z})}{u(\bar{R}) \cdot u(\bar{Z})}$				-0,485064614
	$u(\bar{X}, \bar{Z}) = \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}) \cdot (Z_k - \bar{Z})}{n \cdot (n-1)}$				0,069285521
	$r(\bar{X}, \bar{Z}) = \frac{u(\bar{X}, \bar{Z})}{u(\bar{X}) \cdot u(\bar{Z})}$				0,992507542

$$U = k \cdot u_c(y)$$

$$U(R) = k \cdot u_c(R) = 2 \cdot 0,07107 = 0,14214 \text{ Ом}$$

$$U(X) = k \cdot u_c(X) = 2 \cdot 0,1208 = 0,2416 \text{ Ом}$$

$$U(Z) = k \cdot u_c(Z) = 2 \cdot 0,236 = 0,472 \text{ Ом}$$

$k = t_p(\nu_{eff})$ - квантиль розподілу Стюдента з ефективним числом степенів свободи ν_{eff} і довірчою ймовірністю (рівнем довіри) p .

Приймаємо для загального випадку коефіцієнт охоплення k вибирається у відповідності із формулою: $k = t_p(\nu_{eff}) \approx 2$

- Записуємо результат вимірювання у вигляді:

$$Y = (y \pm U), P = \%$$

$$R = \bar{R} \pm U(R), P = 95\%$$

$$R = (127.731 \pm 0,14214) \text{ Ом}, P = 95\%$$

$$X = \bar{X} \pm U(\bar{X}), P = 95\%$$

$$X = (219,846 \pm 0,2416) \text{ Ом}, P = 95\%$$

$$Z = \bar{Z} \pm U(Z), P = 95\%$$

$$Z = (254.26 \pm 0,472) \text{ Ом}, P = 95\%$$

Приклад виконання завдання 2 в Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	Практична робота №4		Завдання 2 Обробка результатів опосередкованих вимірювань з багаторазовими спостереженнями при наявності кореляції між вхідними величинами																			
2		k	V(B)	I,мА	φ(рад)			R = $\frac{V}{I} \cdot \cos(\varphi)$			X = $\frac{V}{I} \cdot \sin(\varphi)$			Z = $\frac{V}{I}$								
3		1	5,007	0,019663	1,0456			127,8724857			220,5216292			254,6406937								
4		2	4,994	0,019639	1,0438			127,8924453			219,7882904			254,2899333								
5		3	5,005	0,01964	1,0468			127,5062612			220,6447012			254,8370672								
6		4	4,99	0,019685	1,0428			127,7104234			218,9714567			253,492507								
7		5	4,999	0,019678	1,0433			127,8765367			219,5083955			254,0400447								
8	1. Середнє арифметичне кожної фізичної величини	$\bar{X} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}$	4,999	0,019661	1,04446			127,7316305			219,8468946			254,2600496								
9			6,4E-05	4E-12	1,2996E-06			0,003498104			0,223372972			0,144891481								
10	2. Експериментальна стандартна невизначеність середнього	$u_d(\bar{X}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$	2,5E-05	4,84E-10	4,356E-07			0,025961416			0,003434451			0,000893036								
11			3,6E-05	4,41E-10	5,4756E-06			0,050791294			0,636495366			0,332949337								
12			8,1E-05	5,76E-10	2,7556E-06			0,000449739			0,76639155			0,589121645								
13			7,88961E-01	2,89E-10	1,3456E-06			0,020997807			0,114581655			0,048402141								
14			0,000206	1,794E-09	1,1311E-05			0,101598359			1,746275994			1,116257641								
15			0,003209	9,47101E-06	0,00075			0,071273543			0,295489086			0,236247502								
16	4.1 Коefіцієнти кореляції																					
17	попарна оцінка кореляційних моментів (V,I)	$u(V,I) = \frac{\sum_{i=1}^n (V_i - \bar{V}) \cdot (I_i - \bar{I})}{n \cdot (n-1)}$	-1,08E-08					$\frac{\partial R}{\partial V} = \frac{1}{I} \cdot \cos(\varphi)$	25,552		$\frac{\partial X}{\partial V} = \frac{1}{I} \cdot \sin(\varphi)$	43,978		$\frac{\partial Z}{\partial V} = \frac{1}{I}$	50,862							
18	коefіцієнт кореляції (V,I)	$r(V,I) = \frac{u(V,I)}{u(V) \cdot u(I)}$	-0,35531122					$\frac{\partial R}{\partial I} = -\frac{V}{I^2} \cdot \cos(\varphi)$	-6497		$\frac{\partial X}{\partial I} = -\frac{V}{I^2} \cdot \sin(\varphi)$	-11182		$\frac{\partial Z}{\partial I} = -\frac{V}{I^2}$	-12932							
19	попарна оцінка кореляційних моментів (I,φ)	$u(I,φ) = \frac{\sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I}) \cdot (φ_i - \bar{φ})}{n \cdot (n-1)}$	-4,595E-09					$\frac{\partial R}{\partial φ} = -\frac{V}{I} \cdot \sin(φ)$	-219,8		$\frac{\partial X}{\partial φ} = -\frac{V}{I} \cdot \cos(φ)$	-127,7										
20	коefіцієнт кореляції (I,φ)	$r(I,φ) = \frac{u(I,φ)}{u(I) \cdot u(φ)}$	-0,645111218																			
21	попарна оцінка кореляційних моментів (V,φ)	$u(V,φ) = \frac{\sum_{i=1}^n (V_i - \bar{V}) \cdot (φ_i - \bar{φ})}{n \cdot (n-1)}$	2,07E-06																			
22	коefіцієнт кореляції (V,φ)	$r(V,φ) = \frac{u(V,φ)}{u(V) \cdot u(φ)}$	0,857624																			
23																						
24																						
25																						
26																						
27																						
28																						
29																						
30																						
31																						
32																						
33																						
34																						
35																						
36																						
37																						
38																						
39																						
40																						
41																						
42																						
43																						
44																						
45																						
46																						
47																						
48																						
49																						
50																						
51																						
52																						
53																						
54																						
55																						
56																						
57																						
58	градієнтне поєднання кольорів наочно показує для яких вхідних (вихідних) величин визначався коefіцієнт кореляції																					

Контрольні питання

1. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності типу А при багаторазових спостереженнях.
2. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності типу В для заданих границь трикутного закону розподілу.
3. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності типу В для заданих границь трапецеїдального закону розподілу.
4. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності типу В для заданих границь експоненціального закону розподілу.
5. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності типу В для заданих границь акрсинусосного закону розподілу.
6. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності типу В для заданих границь рівномірного закону розподілу.
7. Запишіть вираз для визначення стандартної невизначеності типу В при заданому інтервалі нормального закону розподілу.
8. Запишіть вираз для визначення комбінованої невизначеності при корельованих вхідних величинах
9. Запишіть вираз для визначення комбінованої невизначеності при некорельованих вхідних величинах
10. Наведіть критерії перевірки наявності кореляції між параметрами результатів вимірювань при вираженні невизначеностей.
11. Запишіть вираз для визначення коефіцієнту кореляції.
12. Дайте означення та запишіть вираз для визначення відносної стандартної невизначеності.

Практичне заняття №5

ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ СУМІСНИХ ТА СУКУПНИХ ВИМІРЮВАНЬ

Мета роботи:

1. Освоїти методику обробки експериментальних даних при сукупних та сумісних вимірюваннях.
2. Навчитися записувати результат сукупних та сумісних вимірювань з урахуванням стандартної та розширеної невизначеності.

1. Підготовка до роботи

Вивчити за рекомендованою літературою наступні питання:

1. Які вимірювання називаються опосередкованими та чим вони відрізняються від прямих вимірювань.
2. Наведіть методику опрацювання результатів опосередкованих вимірювань за відсутності кореляційного зв'язку.
3. Наведіть методику опрацювання результатів опосередкованих вимірювань за наявності кореляційного зв'язку.

2. Теоретичні відомості

2.1 Обробка результатів сумісних та сукупних вимірювань

Сумісне вимірювання – непряме вимірювання, в якому значення декількох одночасно вимірюваних різнорідних фізичних величин отримують шляхом розв'язання рівнянь, які пов'язують їх із іншими фізичними величинами, що вимірюються прямо чи опосередковано.

Сумісні вимірювання двох або більше різнорідних величин виконують для того, щоб знайти залежність між ними. Вони засновані на відомих рівняннях, що показують зв'язки між властивостями об'єктів.

При сумісних вимірюваннях невідомі величини, що підлягають безпосередньому вимірюванню, визначаються за результатами вимірювання інших величин, які функціонально пов'язані з ними:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m, \dots, A_1, A_2, \dots, A_m, \dots, Z_1, Z_2, \dots, Z_m). \quad (5.1)$$

На практиці, як правило, визначають залежність Y від одного аргументу, наприклад, вимірюється параметр X : $Y = f(X)$.

Прикладом сумісних вимірювань є знаходження параметрів α та β рівняння, що виражає залежність опору R від температури t :

$$R = R_{20} + \alpha \cdot (t - 20) + \beta \cdot (t - 20)^2, \quad (5.2)$$

де R_{20} - опір терморезистора при 20°C ;

α, β - температурні коефіцієнти опору.

Рівняння (5.2) для вимірюваних величин α та β набуває вигляду системи з двох рівнянь, що відповідають значенням температури t_1, t_2 :

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= R_{20} + \alpha \cdot (t_1 - 20) + \beta \cdot (t_2 - 20)^2 \\ R_2 &= R_{20} + \alpha \cdot (t_2 - 20) + \beta \cdot (t_1 - 20)^2 \end{aligned} \right\}. \quad (5.3)$$

Опрацювання даних у такому випадку проводять за аналогією з опосередкованим вимірюванням. Для цього знаходять β з першого рівняння системи (5.3):

$$\beta = \frac{\frac{R_1}{R_{20}} - 1 - \alpha \cdot (t_1 - 20)}{(t_1 - 20)^2}. \quad (5.4)$$

Дане рівняння підставляють в друге рівняння системи (5.3) і отримують вираз для визначення коефіцієнту α :

$$\alpha = \frac{\left(\frac{R_2}{R_{20}} - 1\right) \cdot (t_1 - 20)^2 - \left(\frac{R_1}{R_{20}} - 1\right) \cdot (t_2 - 20)^2}{(t_1 - 20) \cdot (t_2 - 20) \cdot (t_1 - t_2)}. \quad (5.5)$$

За результатами вимірювань величин t_1, t_2, R_1, R_2 .

Якщо результати вимірювань величин t_1, t_2, R_1, R_2 подано із розширеною невизначеністю $t_1 \pm U(t_1); t_2 \pm U(t_2); R_1 \pm U(R_1); R_2 \pm U(R_2)$ і відносні розширені невизначеності $\frac{U(x_i)}{x_i}$ малі, тоді можна використати правила інтервального аналізу з лінеаризацією і отримати розширену невизначеність:

$$U(\alpha) = \left| \frac{\partial \alpha}{\partial R_1} \right| \cdot U(R_1) + \left| \frac{\partial \alpha}{\partial R_2} \right| \cdot U(R_2) + \left| \frac{\partial \alpha}{\partial t_1} \right| \cdot U(t_1) + \left| \frac{\partial \alpha}{\partial t_2} \right| \cdot U(t_2). \quad (5.6)$$

Якщо результат потрібно подати у вигляді комбінованої невизначеності $u_c(\alpha)$, то її можна розрахувати за умови приписування рівномірного закону розподілу за формулою:

$$u_c(\alpha) = \sqrt{\frac{\left[\left| \frac{\partial \alpha}{\partial R_1} \right| \cdot U(R_1) \right]^2 + \left[\left| \frac{\partial \alpha}{\partial R_2} \right| \cdot U(R_2) \right]^2 + \left[\left| \frac{\partial \alpha}{\partial t_1} \right| \cdot U(t_1) \right]^2 + \left[\left| \frac{\partial \alpha}{\partial t_2} \right| \cdot U(t_2) \right]^2}{3}}. \quad (5.7)$$

Розширену невизначеність $U(\beta)$ і комбіновану невизначеність $u_c(\beta)$ можна розрахувати за рівнянням похибки вимірювання величини β :

$$\Delta(\beta) = \frac{\partial \beta}{\partial R_1} \cdot \Delta(R_1) + \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \cdot \Delta(\alpha) + \frac{\partial \beta}{\partial t_1} \cdot \Delta(t_1), \quad (5.8)$$

$$\text{де } \Delta(\alpha) = \frac{\partial \alpha}{\partial R_1} \cdot \Delta(R_1) + \frac{\partial \alpha}{\partial R_2} \cdot \Delta(R_2) + \frac{\partial \alpha}{\partial t_1} \cdot \Delta(t_1) + \frac{\partial \alpha}{\partial t_2} \cdot \Delta(t_2).$$

$$\text{Похідна } \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} = \frac{1}{t_1 - 20}.$$

Підставляючи $\Delta(\alpha)$ та $\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}$ в рівняння (5.8) отримаємо рівняння похибки величини β :

$$\begin{aligned} \Delta(\beta) = & \left(\frac{\partial \beta}{\partial R_1} - \frac{1}{t_1 - 20} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial R_1} \right) \cdot \Delta(R_1) - \frac{1}{t_1 - 20} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial R_2} \cdot \Delta(R_2) + \\ & + \left(\frac{\partial \beta}{\partial t_1} - \frac{1}{t_1 - 20} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t_1} \right) \cdot \Delta(t_1) - \frac{1}{t_1 - 20} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t_2} \cdot \Delta(t_2) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Розширену невизначеність величини β розраховують за допомогою рівняння (5.9) з урахуванням правил інтервального аналізу:

$$\begin{aligned} U(\beta) = & \left| \frac{\partial \beta}{\partial R_1} - \frac{1}{t_1 - 20} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial R_1} \right| \cdot U(R_1) - \left| \frac{1}{t_1 - 20} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial R_2} \right| \cdot U(R_2) + \\ & + \left| \left(\frac{\partial \beta}{\partial t_1} - \frac{1}{t_1 - 20} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t_1} \right) \right| \cdot U(t_1) - \left| \frac{1}{t_1 - 20} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t_2} \right| \cdot U(t_2) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Комбіновану невизначеність величини β визначають із рівняння (5.9) за умови приписування рівномірного закону розподілу невизначеностям аргументів:

$$u_c(\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\left(\left(\frac{\partial \beta}{\partial R_1} - \frac{1}{t_1 - 20} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial R_1} \right) \cdot U(R_1) \right)^2 - \left(\frac{1}{t_1 - 20} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial R_2} \cdot U(R_2) \right)^2 + \left(\left(\frac{\partial \beta}{\partial t_1} - \frac{1}{t_1 - 20} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t_1} \right) \cdot U(t_1) \right)^2 - \left(\frac{1}{t_1 - 20} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t_2} \cdot U(t_2) \right)^2 \right)^{0.5} \quad (5.11)$$

Результати вимірювань величини α і β з поданням комбінованої невизначеності записуються у вигляді:

$$\alpha; u_c(\alpha); \quad \beta; u_c(\beta)$$

При поданні розширеної невизначеності результати вимірювань записуються так:

$$\alpha \pm U(\alpha); \quad \beta \pm U(\beta), P = \% ,$$

Найбільшого розповсюдження при опрацюванні сумісних вимірювань набув метод найменших квадратів (МНК). Суть його полягає в наступному.

При проведенні n вимірювань величини x_k і подальшому підставленні її в залежність (5.1) отримуємо систему рівнянь з n рівняннями:

$$Y_k = f_k(X_1, X_2, \dots, X_m, \dots, A_1, A_2, \dots, A_m) \quad (5.12)$$

В цю систему вимірювані величини входять з похибками. Припустимо, що отримана система лінійних рівнянь:

$$a_k \cdot x_1 + b_k \cdot x_2 + c_k \cdot x_3 - y_k = 0$$

де $k = 1, 2, 3, \dots, n$

x_1, x_2, x_3 - невідомі сумісно вимірювані величини.

Оскільки під час вимірювань завжди існують похибки, то праві частини лінійних рівнянь не будуть дорівнювати нулю. Якщо до правої частини додати деякий доданок δ_k , який називають *нев'язкою* (кінцевою похибкою умовних рівнянь), то отримаємо таку систему лінійних рівнянь:

$$\delta_k = a_k \cdot x_1 + b_k \cdot x_2 + c_k \cdot x_3 - y_k. \quad (5.13)$$

Задача зводиться до визначення таких значень x_1, x_2, x_3 , які б при підставленні їх в систему з n умовних рівнянь:

$$\begin{cases} a_1 \cdot x_1 + b_1 \cdot x_2 + c_1 \cdot x_3 - y_1 = \delta_1; \\ a_2 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + c_2 \cdot x_3 - y_2 = \delta_2; \\ \dots \\ a_n \cdot x_1 + b_n \cdot x_2 + c_n \cdot x_3 - y_n = \delta_n \end{cases} \quad (5.14)$$

забезпечували мінімальне значення суми квадратів відхилень експериментальних значень від розрахункових, тобто:

$$\sum_{k=1}^n (a_k \cdot x_1 + b_k \cdot x_2 + c_k \cdot x_3 - y_k)^2 = \sum_{k=1}^n \delta_k^2 = Q = \min. \quad (5.15)$$

Під час вимірювань з однаковою ймовірністю необхідною умовою мінімуму суми (5.15) є рівність нулю частинних похідних функції:

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \frac{\partial Q}{\partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_3} = \dots = \frac{\partial Q}{\partial x_m} = 0. \quad (5.16)$$

Умови мінімуму відповідно до принципу Лежандра для системи рівнянь мають вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x_1} = 2 \cdot \sum_{k=1}^n (a_k \cdot x_1 + b_k \cdot x_2 + c_k \cdot x_3 - y_k) \cdot a_k = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x_2} = 2 \cdot \sum_{k=1}^n (a_k \cdot x_1 + b_k \cdot x_2 + c_k \cdot x_3 - y_k) \cdot b_k = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x_3} = 2 \cdot \sum_{k=1}^n (a_k \cdot x_1 + b_k \cdot x_2 + c_k \cdot x_3 - y_k) \cdot c_k = 0 \end{cases}$$

В результаті із сукупності рівнянь, отриманих з умови мінімуму, маємо систему з m рівнянь, які називаються **нормальними** і коефіцієнти яких залежать від коефіцієнтів усіх n умовних рівнянь:

$$\begin{cases} [aa] \cdot x_1 + [ab] \cdot x_2 + [ac] \cdot x_3 - [ay] = 0; \\ [ab] \cdot x_1 + [bb] \cdot x_2 + [bc] \cdot x_3 - [by] = 0; \\ [ac] \cdot x_1 + [bc] \cdot x_2 + [cc] \cdot x_3 - [cy] = 0 \end{cases} \quad (5.17)$$

де

$$\begin{cases} [aa] = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 + \dots + a_n \cdot a_n \\ [ab] = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n \\ [ac] = a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2 + \dots + a_n \cdot c_n \end{cases} \quad (5.18)$$

Знаючи значення постійних коефіцієнтів нормальної системи рівнянь, кількість яких дорівнює кількості невідомих m , можна відомими способами розв'язання лінійних рівнянь визначити результати сумісних вимірювань, які будуть максимально наближені до свої дійсних значень.

Для розв'язання системи лінійних нормальних рівнянь, як правило використовують три способи:

- Визначників;
- Послідовного виключення невідомих (спосіб Гауса);
- Матричний.

При кількості нормальних рівнянь менше як чотири середні значення сумісно вимірюваних величин x_1, x_2, x_n , як правило, розраховують за допомогою визначників:

$$\bar{x}_1 = \frac{D_{x_1}}{D}, \bar{x}_2 = \frac{D_{x_2}}{D}, \dots, \bar{x}_m = \frac{D_{x_m}}{D} \quad (5.19)$$

де D - головний визначник при $m=3$

$$D = \begin{bmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ [ba] & [bb] & [bc] \\ [ca] & [cb] & [cc] \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

А визначники $D_{x_1}, D_{x_2}, D_{x_3}$ розраховуються з головного визначника шляхом заміни стовпця з коефіцієнтами при невідомому x_m на стовпець з вільними членами:

$$D_{x_1} = \begin{bmatrix} [ay] & [ab] & [ac] \\ [by] & [bb] & [bc] \\ [cy] & [cb] & [cc] \end{bmatrix}; D_{x_2} = \begin{bmatrix} [aa] & [ay] & [ac] \\ [ba] & [by] & [bc] \\ [ca] & [cy] & [cc] \end{bmatrix}; D_{x_3} = \begin{bmatrix} [aa] & [ab] & [ay] \\ [ba] & [bb] & [by] \\ [ca] & [cb] & [cy] \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Невизначеність величини $\bar{x}_m$, знайдених як результат сумісних вимірювань, виражається наступними формулами:

$$u(\bar{x}_1) = \sqrt{\frac{A_{11}}{D} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n \delta_k^2}{n-m}}; \quad u(\bar{x}_2) = \sqrt{\frac{A_{22}}{D} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n \delta_k^2}{n-m}}; \quad u(\bar{x}_3) = \sqrt{\frac{A_{33}}{D} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n \delta_k^2}{n-m}}, \quad (5.22)$$

де A_{11}, A_{22}, A_{33} - алгебраїчні доповнення (ад'юнкти) елементів діагоналі головного визначника D , які отримуються шляхом викреслення з матриці n -го стовпця і m -го рядка, відповідних вимірювань величині, що оцінюється, з наступним домноженням на $(-1)^{k+1}$.

Тобто, для розрахунку ад'юнкта A_{11} викреслюється перший стовпець та перший рядок і розв'язується такий визначник:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} [bb] & [bc] \\ [cb] & [cc] \end{bmatrix}.$$

Для розрахунку ад'юнкта A_{22} викреслюється другий стовпець та другий рядок і розв'язується такий визначник:

$$A_{22} = \begin{bmatrix} [aa] & [ac] \\ [ca] & [cc] \end{bmatrix}.$$

Для розрахунку ад'юнкта A_{33} викреслюється третій стовпець та третій рядок і розв'язується такий визначник:

$$A_{33} = \begin{bmatrix} [aa] & [ab] \\ [ba] & [bb] \end{bmatrix}.$$

Розширена невизначеність знаходження величини сумісних вимірювань $\bar{x}_m$ розраховується за формулою:

$$U(\bar{x}_m) = k_p \cdot u(\bar{x}_m), \quad (5.23)$$

де k_p - коефіцієнт охоплення, який знаходиться із розподілу Стюдента з числом степенів вільності $n - m$ і заданим довірчим рівнем p .

При обґрунтуванні МНК в математичній статистиці передбачають, що результати вимірювань задовольняють такі умови:

- Значення аргументів відомі точно;
- Результати вимірювань містять лише випадкові похибки, які незалежні, мають нульове середнє значення і однакові дисперсії;
- Похибки вимірюваних величин розподілені за нормальним законом.

Сукупне вимірювання - це непряме вимірювання, в якому значення кількох одночасно вимірюваних однорідних величин отримують шляхом розв'язання системи рівнянь, що пов'язують різні сполучення цих величин, які вимірюються прямо чи опосередковано.

Сукупні вимірювання широко використовуються в метрологічній практиці при калібруванні мір або шкал ЗВТ. Опрацювання результатів вимірювання виконується за МНК. Але його використання саме для опрацювання сукупних вимірювань має деякі особливості. Вони пов'язані перш за все з тим, що рівняння для сукупних однорідних величин $y_1, y_2, \dots, y_m$ має вигляд:

$$x_i = \sum_{j=1}^m C_{ij} \cdot y_j \text{ при } i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.24)$$

де y_j - результат вимірювання початкових величин;

C_{ij} - відомі коефіцієнти;

x_i - результати порівняння різних комбінацій поєднання мір чи поділок шкал;

m - кількість значень величин, що підлягають визначенню;

n - кількість комбінацій (рівнянь).

Крім того, в багатьох випадках з фізичних умов вимірювань вводяться додаткові точні умови, що пов'язують шукані величини, - так звані рівняння зв'язку. За наявності рівнянь зв'язку можна виразити частину невідомих величин.

При калібруванні коефіцієнти C_{ij} набувають таких значень:

- 0 - якщо Y_j не бере участі в i -му вимірюванні;
- 1 - якщо вимірюється сума декількох величин, до якої входить Y_j ;
- -1 - якщо сума декількох величин порівнюється з Y_j .

Якщо число рівнянь дорівнює числу невідомих, то система (5.24) розв'язується однозначно, а дійсні значення вимірюваних величин і їх стандартні

та розширені невизначеності визначаються методами обробки опосередкованих вимірювань. Однак для зменшення невизначеностей калібрування проводиться для більшого числа комбінацій, ніж кількість значень невідомих величин. Тоді оцінювання результатів вимірювання проводиться так, як при сумісних вимірюваннях. Для розв'язання системи умовних рівнянь, як правило застосовують МНК. Цей метод витікає з принципу максимальної правдоподібності і є оптимальним за таких умов:

- Результати вимірювання x містять незалежні випадкові похибки з нульовим математичним очікуванням і однаковими дисперсіями;
- Похибки мають нормальний розподіл.

При виконанні цих умов отримані оцінки будуть незміщеними і ефективними.

Систему рівнянь відносно нев'язок можна записати у вигляді:

$$\delta_i = \sum_{j=1}^m C_{ij} \cdot y_j - x_i. \quad (5.25)$$

Сума квадратів буде дорівнювати:

$$Q = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n (C_{i1} \cdot y_1 + \dots + C_{im} \cdot y_m - x_i)^2. \quad (5.26)$$

Диференціюючи вираз (5.26) за параметрами y_j , отримаємо систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial y_1} &= 2 \sum_{i=1}^n (C_{i1} \cdot y_1 + \dots + C_{im} \cdot y_m - x_i) \cdot C_{i1} \\ \frac{\partial Q}{\partial y_m} &= 2 \sum_{i=1}^n (C_{i1} \cdot y_1 + \dots + C_{im} \cdot y_m - x_i) \cdot C_{im} \end{aligned} \right\}. \quad (5.27)$$

Видозмінюючи яку і застосовуючи позначення Гауса, отримуємо нормальну систему рівнянь відносно y_j :

$$\left. \begin{aligned} [xC_1] &= [C_1^2]y_1 + \dots + [C_1 C_m]y_m \\ [xC_m] &= [C_1 C_m]y_1 + \dots + [C_m^2]y_m \end{aligned} \right\}. \quad (5.28)$$

Розв'язок цієї системи за допомогою визначників має вигляд:

$$y_j = \frac{D_j}{D}, \quad (5.29)$$

де D - головний визначник системи,

$$D = \begin{vmatrix} [C_1^2] & [C_1C_2] & \dots & [C_1C_m] \\ [C_1C_2] & [C_2^2] & \dots & [C_2C_m] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [C_1C_m] & [C_2C_m] & \dots & [C_m^2] \end{vmatrix} \quad (5.30)$$

А визначник D_j отримується з головного шляхом заміни j – го стовпця на стовпець з вільним членами:

$$D_j = \begin{vmatrix} [C_1^2] & [YC_1] & \dots & [C_1C_m] \\ [C_1C_2] & [YC_{21}] & \dots & [C_2C_m] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [C_1C_m] & [YC_m] & \dots & [C_m^2] \end{vmatrix} \quad (5.31)$$

Експериментальні стандартні відхилення y_j визначаються за формулою:

$$u(y_i) = \sqrt{\frac{A_{ij} \sum_{i=1}^n \delta_i^2}{D \cdot (n - m)}}, \quad (5.32)$$

де A_{ij} - алгебраїчне доповнення головного визначника, яке отримується із останнього викреслюванням j - го стовпця та j - рядка.

Нев'язки δ_i визначають за формулою (5.25).

Розширені невизначеності результатів сукупних вимірювань визначають із виразу:

$$U(y_i) = t_p(v) \cdot u(y_j),$$

де $t_p(v)$ - коефіцієнт Стюдента для $v = n - m$ степенів свободи.

Такий спосіб опрацювання експериментальних даних для сукупних вимірювань доцільно застосовувати для лінійних функцій. В інших випадках опрацювання результатів значно ускладняється.

3. Виконання роботи

Завдання 1

Обробка результатів сумісних вимірювань

Термометр калібрується шляхом порівняння $n=11$ показань температури t_k термометра, кожне з яких має незначну невизначеність, із відповідним відомим опорними температурами $t_{R,k}$ для одержання поправок $p_k = t_{R,k} - t_k$ у показник.

Вимірювальні поправки $p_k = t_{R,k} - t_k$ і вимірювані температури t_k є вхідними величинами при оцінюванні.

Лінійна градувальна крива має вигляд:

$$p(t) = a + b \cdot (t - t_0) \quad (5.33)$$

Апроксимуємо вимірювані поправки і температури методом найменших квадратів.

Параметри a, b , що є відповідно перетином і нахилом каліброваної кривої, являють собою дві вимірювані (вихідні) величини, які потрібно визначити.

Після того, як визначені a, b разом із їхніми оціненими дисперсіями і коваріаціями, рівняння (5.33) може бути використане для передбачення поправки та її стандартної невизначеності, що потрібно ввести в показання термометра для будь-якого значення температури t .

*Примітка. Цей приклад ілюструє використання методу найменших квадратів для одержання лінійної градувальної кривої, а також те, як параметри апроксимації – перетин і нахил, їх оцінені дисперсії і коваріації використовуються для одержання кривої значень і стандартної невизначеності передбачуваної поправки [3]

приклад											
номер показання k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
температура термометра t_k	21,521	22,012	22,512	23,003	23,507	23,999	24,513	25,002	25,503	26,01	26,511
відома опорна температура $t_{R,k}$	21,692	22,181	22,678	23,162	23,671	24,164	24,669	25,159	25,662	26,171	26,671
варіант 1											
номер показання k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
температура термометра t_k	21,471	22,041	22,342	23,013	23,517	23,889	24,503	25,018	25,443	26,015	26,519
відома опорна температура $t_{R,k}$	21,682	22,081	22,648	23,102	23,641	24,154	24,659	25,129	25,662	26,171	26,671

<i>варіант 2</i>											
номер показання k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
температура термометра t_k	21,482	22,051	22,342	23,115	23,517	23,889	24,503	25,018	25,243	26,015	26,543
відома опорна температура $t_{R,k}$	21,682	22,181	22,648	23,112	23,641	24,164	24,659	25,129	25,262	26,171	26,471

<i>варіант 3</i>												
номер показання k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
температура термометра t_k	21,241	22,032	22,352	23,023	23,427	23,849	24,403	25,118	25,543	26,115	26,429	25,247
відома опорна температура $t_{R,k}$	21,512	22,054	22,618	23,122	23,711	24,254	24,559	25,229	25,562	26,271	26,671	25,652

<i>варіант 4</i>												
номер показання k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
температура термометра t_k	21,141	22,041	22,152	23,083	23,527	23,749	24,203	25,128	25,443	26,215	26,429	26,547
відома опорна температура $t_{R,k}$	21,192	22,057	22,228	23,172	23,791	24,354	24,519	25,209	25,512	26,271	26,578	26,642

<i>варіант 5</i>													
номер показання k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
температура термометра t_k	21,152	22,071	22,102	23,083	23,527	23,749	24,203	25,128	25,443	26,215	26,429	26,547	27,016
відома опорна температура $t_{R,k}$	21,292	22,097	22,128	23,172	23,791	24,354	24,519	25,209	25,512	26,271	26,578	26,642	27,128

<i>варіант 6</i>													
номер показання k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
температура термометра t_k	21,412	22,091	22,112	23,183	23,597	23,749	24,203	25,228	25,483	26,295	26,429	26,547	27,146
відома опорна температура $t_{R,k}$	21,302	22,074	22,137	23,172	23,791	24,754	24,519	25,218	25,512	26,271	26,578	26,642	27,178

варіант 7														
номер показання k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
температура термометра t_k	21,312	22,071	22,172	23,183	23,597	23,719	24,303	25,228	25,403	26,245	26,419	26,517	27,146	27,419
відома опорна температура $t_{R,k}$	21,372	22,174	22,237	23,142	23,711	24,854	24,529	25,318	25,412	26,271	26,478	26,616	27,178	27,871

варіант 8														
номер показання k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
температура термометра t_k	21,212	22,171	22,202	23,193	23,577	23,709	24,413	25,218	25,403	26,245	26,419	26,557	27,046	27,449
відома опорна температура $t_{R,k}$	21,302	22,178	22,257	23,193	23,771	24,814	24,629	25,328	25,612	26,291	26,578	26,616	27,118	27,571

варіант 9															
номер показання k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
температура термометра t_k	21,312	22,271	22,292	23,153	23,577	23,709	24,613	25,208	25,413	26,245	26,419	26,547	27,146	27,549	28,147
відома опорна тем-ра $t_{R,k}$	21,372	22,318	22,357	23,193	23,677	24,714	24,829	25,338	25,622	26,391	26,578	26,656	27,218	27,671	28,256

варіант 10															
номер показання k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
температура термометра t_k	22,112	23,571	24,192	24,253	24,587	25,509	25,613	26,208	26,413	27,245	27,419	27,547	28,146	28,549	29,147
відома опорна тем-ра $t_{R,k}$	22,272	23,518	24,257	24,293	24,699	25,714	25,829	26,338	26,622	27,391	27,578	27,656	28,218	28,671	22,256

Приклад виконання завдання 1

1. Відповідно до методу найменших квадратів необхідно забезпечити мінімальне значення суми квадратів відхилень експериментальних значень від розрахункових:

$$\sum_{k=1}^n (a_k \cdot x_1 + b_k \cdot x_2 + c_k \cdot x_3 - y_k)^2 = \sum_{k=1}^n \delta_k^2 = Q = \min.$$

В цьому випадку експериментальні значення - це вимірювані поправки $p_k = t_{R,k} - t_k$, а розрахункові - це лінійна градувальна крива $p(t) = a + b \cdot (t - t_0)$ тоді отримаємо:

$$\sum_{k=1}^n (p_k - a - b \cdot (t_k - t_0))^2 = Q = \min.$$

Це дає наступні рівняння для a, b :

$$a = \frac{\sum_{k=1}^n p_k \cdot \left(\sum_{k=1}^n \theta_k^2 \right) - \sum_{k=1}^n \theta_k \cdot \sum_{k=1}^n \theta_k \cdot p_k}{D}; \quad b = \frac{n \cdot \sum_{k=1}^n p_k \cdot \theta_k - \sum_{k=1}^n p_k \cdot \sum_{k=1}^n \theta_k}{D};$$

$$D = n \cdot \sum_{k=1}^n \theta_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n \theta_k \right)^2 = n \cdot \sum_{k=1}^n (t_k - \bar{t})^2,$$

де $\theta_k = t_k - t_0$ - різниця температур, $t_0 = 20^\circ \text{C}$.

2. Як видно для отримання градувальної кривої необхідно виконати попередні розрахунки:

попередні розрахунки	p_k	θ_k	θ_k^2	$\sum_{k=1}^n \theta_k^2$
формула Excel	=L4-L5 і т.д. для всіх значень	=L4-\$P\$2 і т.д. для всіх значень	=СТЕПЕНЬ(B7;2) і т.д. для всіх значень	=СУММ(B9:L9) всіх значень діапазону

попередні розрахунки	$\sum_{k=1}^n \theta_k$	$\left(\sum_{k=1}^n \theta_k \right)^2$	$D = n \cdot \sum_{k=1}^n \theta_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n \theta_k \right)^2$
формула Excel	=СУММ(B7:L7) всіх значень діапазону	=СТЕПЕНЬ(СУММ(B7:L7);2)	=P4*B10-B11

попередні розрахунки	$a = \frac{\sum_{k=1}^n p_k \cdot \left(\sum_{k=1}^n \theta_k^2 \right) - \sum_{k=1}^n \theta_k \cdot \sum_{k=1}^n \theta_k \cdot p_k}{D}$	$b = \frac{n \cdot \sum_{k=1}^n p_k \cdot \theta_k - \sum_{k=1}^n p_k \cdot \sum_{k=1}^n \theta_k}{D}$
формула Excel	=((N6*B10)-(N7*B16))/B12	=((P4*B16)-(N6*N7))/B12

Результати розрахунку представлені на рисунку, що ілюструє приклад виконання в Excel.

3. Тоді розрахункова градувальна крива (передбачувана поправка) має вигляд:

$$p(t_k) = a + b \cdot (t_k - t_0) = -0,1712^\circ \text{C} + 0,00218 \cdot (t_k - t_0).$$

Це рівняння дає передбачене значення поправки $p(t_k)$ при будь-якій температурі t , і, зокрема $t = t_k$.

4. Визначаємо експериментальні дисперсії:

- Загальна дисперсія:

$$s^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (p_k - p(t_k))^2}{n-2} \Rightarrow s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (p_k - p(t_k))^2}{n-2}}.$$

- Експериментальні дисперсії:

$$s^2(a) = \frac{s^2 \cdot \sum_{k=1}^n \theta_k^2}{D} \Rightarrow s(a) = \sqrt{\frac{s^2 \cdot \sum_{k=1}^n \theta_k^2}{D}};$$

$$s^2(b) = \frac{n \cdot s^2}{D} \Rightarrow s(b) = \sqrt{\frac{n \cdot s^2}{D}}.$$

5. Визначаємо коефіцієнт кореляції:

$$r(a,b) = - \frac{\sum_{k=1}^n \theta_k}{\sqrt{n \cdot \sum_{k=1}^n \theta_k^2}}.$$

Вираз для комбінованої стандартної невизначеності передбачуваного значення поправки отримують із рівняння:

$$u_c^2 = \sum_{i=1}^N c_i^2 \cdot u^2(\bar{x}_i) + 2 \cdot \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=2}^N c_i \cdot c_j \cdot r(x_i, x_j) \cdot u(x_i) \cdot u(x_j)$$

В цьому випадку:

$$u_c^2(p(t)) = u^2(a) + (t_1 - t_0)^2 \cdot u^2(b) + 2 \cdot (t_1 - t_0) \cdot r(a, b) \cdot u(a) \cdot u(b).$$

Приймаємо $u(a) = s(a)$; $u(b) = s(b)$.

Оцінена дисперсія $u_c^2(p(t))$ є мінімальною при

$$t_{min} = t_0 - \frac{u(a) \cdot r(a, b)}{u(b)} = 24,0085^\circ C.$$

Для прикладу, припустимо, що потрібна поправка на показання термометра і його невизначеність при $t = 30^\circ C$, яка перебуває за межами температурного діапазону, у якому термометр був дійсно відкалібрований. Підставляємо $t = 30^\circ C$ в рівняння:

$$p(30^\circ C) = a + b \cdot (t_k - t_0) = -0,1712^\circ C + 0,00218 \cdot (30 - 20) = -0,1494^\circ C.$$

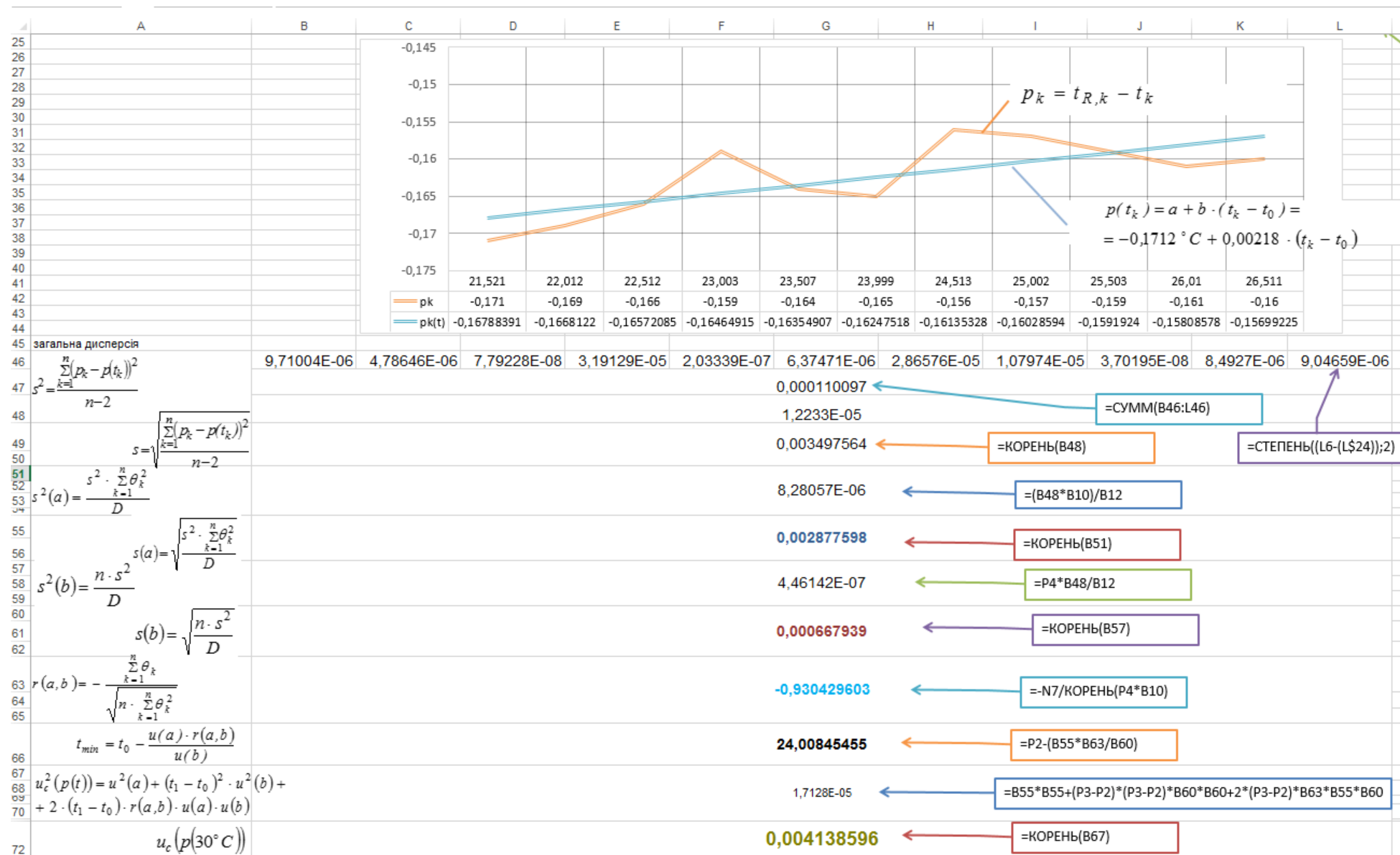
А рівняння невизначеності набуває вигляду:

$$u_c(p(30^\circ C)) = \sqrt{0,00287^2 + (30 - 20)^2 \cdot 0,00667^2 + 2 \cdot (30 - 20) \cdot (-0,93) \cdot 0,00287 \cdot 0,00667} = 0,0041^\circ C.$$

Отже, поправка при $t = 30^\circ C$ дорівнює $p(30^\circ C) = -0,1494^\circ C$ із комбінованою стандартною невизначеністю $u_c(p(30^\circ C)) = 0,0041^\circ C$, та $\nu = n - 2 = 9$ степенями свободи.

Приклад виконання завдання 1 в Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	Практична робота №5	Завдання 1 Обробка результатів сумісних вимірювань																
2															t0	20	градусів	
3	k номер показання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11			t1	30		
4	t _k температура термометра	21,521	22,012	22,512	23,003	23,507	23,999	24,513	25,002	25,503	26,01	26,511			n	11		
5	t _{R,k} відома опорна температура	21,692	22,181	22,678	23,162	23,671	24,164	24,669	25,159	25,662	26,171	26,671						
6	p _k = t _{R,k} - t _k вимірювана поправка	-0,171	-0,169	-0,166	-0,159	-0,164	-0,165	-0,156	-0,157	-0,159	-0,161	-0,16	$\sum_{k=1}^n p_k$	-1,787				
7	θ _k = t _k - t ₀	1,521	2,012	2,512	3,003	3,507	3,999	4,513	5,002	5,503	6,01	6,511	$\sum_{k=1}^n \theta_k$	44,093				
8																		
9	$\sum_{k=1}^n \theta_k^2$	2,313441	4,048144	6,310144	9,018009	12,299049	15,992001	20,367169	25,020004	30,283009	36,1201	42,393121		=L4-L5				
10														=L4-\$P\$2				
11	$\left(\sum_{k=1}^n \theta_k\right)^2$																	
12																		
13	$D = n \cdot \sum_{k=1}^n \theta_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n \theta_k\right)^2 = n \cdot \sum_{k=1}^n (t_k - \bar{t})^2$																	
14																		
15	$\sum_{k=1}^n \theta_k \cdot p_k$	-0,260091	-0,340028	-0,416992	-0,477477	-0,575148	-0,659835	-0,704028	-0,785314	-0,874977	-0,96761	-1,04176						
16																		
17																		
18	$a = \frac{\sum_{k=1}^n p_k \cdot \left(\sum_{k=1}^n \theta_k\right)^2 - \sum_{k=1}^n \theta_k \cdot \sum_{k=1}^n \theta_k \cdot p_k}{D}$																	
19																		
20	$b = \frac{n \cdot \sum_{k=1}^n p_k \cdot \theta_k - \sum_{k=1}^n p_k \cdot \sum_{k=1}^n \theta_k}{D}$																	
21																		
22																		
23	розрахункова поправка																	
24	$p(t_k) = a + b \cdot (t_k - t_0) =$ $= -0,1712^\circ C + 0,00218 \cdot (t_k - t_0)$	-0,16788391	-0,1668122	-0,1657209	-0,1646491	-0,1635491	-0,1624752	-0,1613533	-0,1602859	-0,1591924	-0,1580858	-0,1569922	$p(30^\circ C)$	-0,149377				
25			-0,145															
26																		
27																		



Завдання 2**Обробка результатів сукупних вимірювань**

В результаті зважування було отримано такі комбінації значень маси двох тягарців: m_1 ; m_2 ; $m_1 + m_2$, $m_1 - m_2$.

Необхідно виконати оцінювання мас тягарців M_1 , M_2 та їх невизначеності при рівні довіри p .

Вихідні дані	приклад	вар.1	вар.2	вар.3	вар.4	вар.5
$m_1, \text{кг}$	4,97	4,95	4,94	4,87	4,89	4,91
$m_2, \text{кг}$	1,02	1,01	1,015	1,12	1,13	1,135
$m_1 + m_2, \text{кг}$	6,08	6,04	6,045	6,15	6,105	6,108
$m_1 - m_2, \text{кг}$	4,02	4,005	4,015	4,14	4,104	4,101
p	0,95	0,9	0,99	0,95	0,99	0,9

Вихідні дані	вар.6	вар.7	вар.8	вар.9	вар.10
$m_1, \text{кг}$	4,9	4,95	4,905	4,95	4,95
$m_2, \text{кг}$	1,155	1,118	1,018	1,024	1,024
$m_1 + m_2, \text{кг}$	6,258	6,218	6,018	6,008	6,074
$m_1 - m_2, \text{кг}$	4,125	4,025	4,012	4,002	4,014
p	0,95	0,99	0,9	0,95	0,99

Приклад виконання завдання 2

1. Для оцінювання мас тягарців складемо систему умовних рівнянь на основі вимірних комбінацій значень мас тягарців:

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot m_1 + 0 \cdot m_2 &= 4,97 \\ 0 \cdot m_1 + 1 \cdot m_2 &= 1,02 \\ 1 \cdot m_1 + 1 \cdot m_2 &= 6,08 \\ 1 \cdot m_1 - 0 \cdot m_2 &= 4,02 \end{aligned} \right\}. \quad (5.34)$$

2. Складаємо систему нормальних рівнянь. Для цього алгебраїчно додаємо ліву і праву частини рівняння системи (5.34), спочатку з коефіцієнтами при значеннях маси m_1 , які не нульові (тобто беруть участь в i -му вимірюванні), а потім з коефіцієнтами при значеннях маси m_2 , які також є не нульовими, в результаті отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} 3 \cdot m_1 + 0 \cdot m_2 &= 15,07 \\ 0 \cdot m_1 + 3 \cdot m_2 &= 3,08 \end{aligned} \right\}. \quad (5.35)$$

3. Розв'язавши систему нормальних рівнянь (5.35) отримаємо оцінку мас тягарців при сукупному вимірюванні:

$$M_1 = 5,0233 \text{ кг}; M_2 = 1,02667 \text{ кг}.$$

4. Отримані оцінки мас тягарців підставляємо до системи умовних

рівнянь (5.34), в результаті чого отримаємо нев'язки:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= m_1 - M_1 = 4,97 - 5,02 = -0,053 \text{ кг} \\ \delta_2 &= m_2 - M_2 = 1,02 - 1,02667 = -6,667 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \\ \delta_3 &= m_3 - (M_1 + M_2) = 6,08 - (5,02333 + 1,02667) = 0,03 \text{ кг} \\ \delta_4 &= m_4 - (M_1 - M_2) = 6,08 - (5,02333 - 1,02667) = 0,023 \text{ кг}\end{aligned} \quad (5.36)$$

Числові значення отриманих нев'язок (5.36) характеризують розбіжність (неоднозначність) лівої і правої частини системи умовних рівнянь (5.34).

5. Стандартна невизначеність умовних рівнянь (5.34) розраховується за формулою:

$$u(\delta) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \delta_i^2}{n-q}} = \sqrt{\frac{(-0,053)^2 + (-6,667 \cdot 10^{-3})^2 + (0,03)^2 + (0,023)^2}{4-2}} = 0,047 \text{ кг}$$

де n - кількість комбінацій вимірюваних значень (умовних рівнянь) = 4;

q - кількість значень величин (оцінок), які потрібно визначити = 2.

6. Стандартну невизначеність оцінки маси тягарця M_1 та M_2 розраховуємо за формулами:

$$u(M_1) = u(\delta) \cdot \sqrt{\frac{A_{11}}{D}} = 0,053 \cdot \sqrt{\frac{3}{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}} = 0,053 \cdot \sqrt{\frac{3}{9}} = 0,027 \text{ кг}$$

$$u(M_2) = u(\delta) \cdot \sqrt{\frac{A_{22}}{D}} = 0,053 \cdot \sqrt{\frac{3}{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}} = 0,053 \cdot \sqrt{\frac{3}{9}} = 0,027 \text{ кг}$$

де D - головний визначник;

D_{11} , D_{22} - ад'юнкт.

7. Розширені невизначеності оцінок мас тягарців M_1 , M_2 при довірчому рівні $p = 0,95$ визначаються за формулою:

$$\begin{aligned}U(y_i) &= t_p(\nu) \cdot u(y_j), \\ U(M_1) &= t_p(\nu) \cdot u(M_1) = 4,3 \cdot 0,027 = 0,1161 \text{ кг}, \\ U(M_2) &= t_p(\nu) \cdot u(M_2) = 4,3 \cdot 0,027 = 0,1161 \text{ кг}.\end{aligned}$$

де $t_p(\nu)$ - коефіцієнт Стюдента при $\nu = n - q = 4 - 2$ степенів свободи і $p = 0,95$, $t_p(2; 0,95) = 4,3$ табл.Б2.

8. Тоді результат сукупного вимірювання маси тягарців записується:

$$M_1 = (5,0233 \pm 0,1161) \text{ кг}, p = 0,95; M_2 = (1,02667 \pm 0,1161) \text{ кг}, p = 0,95$$

Приклад виконання завдання 2 в MathCAD

Практична робота №5

Завдання 2 Обробка результатів сукупних вимірювань

Дано: $m_1 := 4.97$ $m_2 := 1.02$ $m_{12} := 6.08$ $mm_{12} := 4.02$

ORIGIN := 1 $i := 1..4$

1. Для оцінювання мас тягарців складемо систему умовних рівнянь на основі вимірних комбінацій значень мас тягарців:

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot m_1 + 0 \cdot m_2 &= 4.97 \\ 0 \cdot m_1 + 1 \cdot m_2 &= 1.02 \\ 1 \cdot m_1 + 1 \cdot m_2 &= 6.08 \\ 1 \cdot m_1 - 1 \cdot m_2 &= 4.02 \end{aligned} \right\}$$

2. Складаємо систему нормальних рівнянь. Для цього алгебраїчно додаємо ліву і праву частини рівняння системи (5.34), спочатку з коефіцієнтами при значеннях маси m_1 , які не нульові (тобто беруть участь в і-му вимірюванні), а потім з коефіцієнтами при значеннях маси m_2 , які також є не нульовими, в результаті отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} 3 \cdot m_1 + 0 \cdot m_2 &= 15.07 \\ 0 \cdot m_1 + 3 \cdot m_2 &= 3.08 \end{aligned} \right\} \quad m := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad a := \begin{pmatrix} 15.07 \\ 3.08 \end{pmatrix}$$

3. Розв'язавши систему нормальних рівнянь (5.35) отримаємо оцінку мас тягарців при сукупному вимірюванні:

$$M := \text{lsolve}(m, a) \quad M = \begin{pmatrix} 5.02333 \\ 1.02667 \end{pmatrix}$$

4. Отримані оцінки мас тягарців підставляємо до системи умовних рівнянь (5.34), в результаті чого отримаємо нев'язки:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= m_1 - M_1 \\ \delta_2 &= m_2 - M_2 \\ \delta_3 &= m_3 - (M_1 + M_2) \\ \delta_4 &= m_4 - (M_1 - M_2) \end{aligned}$$
$$mm := \begin{pmatrix} 4.97 \\ 1.02 \\ 6.08 \\ 4.02 \end{pmatrix} \quad \delta := \begin{pmatrix} mm_1 - M_1 \\ mm_2 - M_2 \\ mm_3 - (M_1 + M_2) \\ mm_4 - (M_1 - M_2) \end{pmatrix} \quad \delta = \begin{pmatrix} -0.053 \\ -6.667 \times 10^{-3} \\ 0.03 \\ 0.023 \end{pmatrix}$$

5. Стандартна невизначеність умовних рівнянь (5.34) розраховується за формулою:

$$u(\delta) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \delta_i^2}{n - q}} \quad \begin{aligned} &\text{де } n - \text{кількість комбінацій вимірюваних значень (умовних} \\ &\text{рівнянь)} = 4; \\ &q - \text{кількість значень величин (оцінок), які потрібно визначити} = 2. \end{aligned}$$

$$q := 2 \quad n := 4$$

$$u\delta := \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\delta_i)^2}{n-q}} \quad u\delta = 0.04655$$

6. Стандартну невизначеність оцінки маси тягарця M_1 та M_2 розраховуємо за формулами:

$$u(M_1) = u(\delta) \cdot \sqrt{\frac{A_{11}}{D}}$$

$$u(M_2) = u(\delta) \cdot \sqrt{\frac{A_{22}}{D}}$$

де D – головний визначник;
 D_{11}, D_{22} – ад'юнкт.

головний визначник матриці m $|m| = 9$

ад'юнкт $m_{1,1} = 3$ $m_{2,2} = 3$

$$uM1 := u\delta \cdot \sqrt{\frac{m_{1,1}}{|m|}} \quad uM1 = 0.02687$$

$$uM2 := u\delta \cdot \sqrt{\frac{m_{2,2}}{|m|}} \quad uM2 = 0.02687$$

7. Розширені невизначеності оцінок мас тягарців M_1, M_2 при довірчому рівні $p=0,95$ визначаються за формулою:

$$U(y_i) = t_p(v) \cdot u(y_j) \quad t_p(2; 0,95) = 4,3$$

$$tp := 4.3 \quad UM1 := tp \cdot uM1 \quad UM1 = 0.116$$

$$UM2 := tp \cdot uM2 \quad UM2 = 0.116$$

8. Тоді результат сукупного вимірювання маси тягарців записується:

$$M_1 = (5,0233 \pm 0,1161) \text{ кг}, p = 0,95; M_2 = (1,02667 \pm 0,1161) \text{ кг}, p = 0,95$$

Контрольні питання

1. Які вимірювання називають прямими.
2. Які вимірювання називаються опосередкованими та чим вони відрізняються від прямих вимірювань.
3. Наведіть методику опрацювання результатів опосередкованих вимірювань за відсутності кореляційного зв'язку.
4. Наведіть методику опрацювання результатів опосередкованих вимірювань за наявності кореляційного зв'язку.
5. Запишіть вираз для розрахунку внутрішньої групової дисперсії при опрацюванні груп прямих вимірювань.
6. Які вимірювання називають опосередкованими.

7. Дайте означення сумісного вимірювання.
8. Як розраховується коефіцієнт кореляції.
9. Наведіть вираз для розрахунку міжгрупової дисперсії при опрацюванні груп прямих вимірювань.
10. З якою метою виконують надлишкові вимірювання при опрацюванні прямих вимірювань з одноразовим спостереженням.
11. Наведіть форму подання результатів багаторазових вимірювань.
12. Наведіть вираз для розрахунку комбінованої невизначеності результату опосередкованого вимірювання при значній нелінійності функції перетворення (модельного рівняння).

ТЕРМІНИ ТА ВИЗНАЧЕННЯ

Багатофункціональний калібратор - прилад, який відтворює на своєму виході основні електричні величини такі, як напруга постійного та змінного струму, постійний та змінний струм і активний опір в діапазонах, що забезпечують калібрування як цифрових, так і аналогових мультиметрів, а також інших приладів вимірювання електричних величин більш вузького призначення. Цей прилад, за своїми характеристиками є, практично, невеличкою калібрувальною лабораторією.

Бюджет невизначеності - звіт про невизначеність вимірювань, про складові цієї невизначеності вимірювань, їх розрахунок та об'єднання.

Примітка. Бюджет невизначеності може включати модель вимірювань, оцінки і невизначеності вимірювань, пов'язані з величинами, що входять до моделі вимірювань, коваріації, види застосованих функцій щільності ймовірності, число степенів свободи, тип оцінювання невизначеності вимірювань та коефіцієнт охоплення.

Відносна стандартна невизначеність - відношення стандартної невизначеності до оцінки вимірюваної величини.

Відносна комбінована невизначеність - відношення комбінованої невизначеності до оцінки вихідної величини.

Відносна розширена невизначеність - відношення розширеної невизначеності до оцінки вихідної величини.

Вхідна величина в моделі вимірювань - величина, яка повинна бути виміряна, або величина, значення якої може бути отримано іншим способом, для розрахунку виміряного значення вимірюваної величини.

Вихідна величина в моделі вимірювання - величина, виміряне значення якої розраховують, використовуючи значення вхідних величин в моделі вимірювання.

Впливова величина - величина, яка при прямому вимірюванні не впливає на величину, яка фактично вимірюється, але впливає на співвідношення між показами і результатом вимірювання.

Дефініційна невизначеність - складова невизначеності вимірювань, що є результатом обмеженої деталізації в визначенні вимірюваної величини.

Примітка1. Дефініційна невизначеність є практичний мінімум невизначеності вимірювання при будь-якому вимірюванні даної вимірюваної величини.

Державна повірка засобів вимірювальної техніки - повірка органами державної метрологічної служби або за їх дорученням засобів вимірювальної техніки, які використовуються в сферах, що підлягають державному метрологічному нагляду.

Інтервал охоплення - інтервал, який містить сукупність істинних значень вимірюваної величини із заданою ймовірністю, і який заснований на доступній інформації.

Ймовірність охоплення - ймовірність того, що сукупність істинних значень вимірюваної величини знаходиться всередині вказаного інтервалу охоплення

Коефіцієнт охоплення - число більше ніж 1, на яке домножують стандартну невизначеність вимірювань для отримання розширеної невизначеності вимірювань.

Калібрування засобу вимірювальної техніки - сукупність операцій, що виконуються з метою визначення метрологічних характеристик та придатності засобу вимірювальної техніки до застосування в певних умовах.

Калібрувальний знак - знак встановленої форми, що наносять на засоби вимірювальної техніки, які визнані придатними для застосування в певних умовах у результаті їх калібрування.

Модель вимірювань - математичний зв'язок між всіма величинами, про які відомо, що вони причетні до вимірювання.

Примітка 1. Загальною формою моделі вимірювання є рівняння $f(Y, X_1, \dots, X_n) = 0$, де Y - вихідна величина в моделі вимірювання – є вимірюваною величиною, значення якої повинно бути отримано на основі інформації про вхідні величини в моделі вимірювання $X_1, \dots, X_n$.

Примітка 2. В більш складних випадках, коли існує дві та більше вихідних величин моделі, ця модель вимірювання буде складатися із декількох рівнянь.

Настроювання - операція, призначена для приведення вимірювального приладу у стан, що дозволяє його використання за призначенням. Настроювання може бути автоматичним, напівавтоматичним або ручним.

Невизначеність вимірювання [2, 3] - невіднятий параметр, який характеризує розсіювання значень величини, які приписуються вимірюваній величині на основі використаної інформації.

Примітка 1. Невизначеність вимірювань включає складові, зумовлені систематичними ефектами, такі як, складові, що пов'язані із поправками та приписаними значеннями величини еталонів, а також диференційну невизначеність. Іноді не вводять поправки на оцінювані систематичні ефекти, а замість цього останні розглядаються як складові невизначеності вимірювань.

Примітка 2. Параметром може бути, наприклад, стандартне відхилення, що називається стандартною невизначеністю вимірювань, або половина ширини інтервалу із встановленою ймовірністю охоплення.

Примітка 3. Невизначеність вимірювань охоплює, в загальному випадку, багато складових. Деякі із цих складових можуть бути оцінені за типом А невизначеності вимірювань на основі статистичного розподілу значень величини із серії вимірювань і можуть характеризуватися стандартними відхиленнями. Інші складові, які можуть бути оцінені за типом В невизначеності вимірювань, можуть також характеризуватися стандартними відхиленнями, які оцінюються із функції щільності ймовірності на основі досвіду або іншої інформації.

Оцінювання невизначеності вимірювань по типу А - оцінювання складової невизначеності вимірювань за допомогою статистичного аналізу вимірюваних значень величини, спостережних при певних умовах вимірювання.

Оцінювання невизначеності вимірювань за типом В - оцінювання складової невизначеності вимірювань, визначеної іншим способом, ніж оцінювання невизначеності вимірювань за типом А.

Примітка. Оцінювання ґрунтується на інформації:

- Пов'язаної із значенням величини, що взяті із надійних публікацій;
- Пов'язаної із значенням величини атестованого стандартного зразка;
- Отриманої із сертифікатів калібрування;
- Про дрейф;
- Пов'язаної із класом точності повіреного засобу вимірювання;
- Отриманого із границь, встановлених із особистого досвіду.

Стандартна невизначеність u - невизначеність (непевність), що виражається як стандартне середньоквадратичне відхилення (СКВ).

Сумарна стандартна невизначеність (комбінована) u_c - невизначеність (непевність), що отримується шляхом підсумовування всіх складових стандартних невизначеностей, пов'язаних з вимірюваною величиною.

Сукупне вимірювання - це непряме вимірювання, в якому значення кількох одночасно вимірюваних однорідних величин отримують шляхом розв'язання системи рівнянь, що пов'язують різні сполучення цих величин, які вимірюються прямо чи опосередковано.

Сумісне вимірювання - непряме вимірювання, в якому значення декількох одночасно вимірюваних різнорідних фізичних величин отримують шляхом розв'язання рівнянь, які пов'язують їх із іншими фізичними величинами, що вимірюються прямо чи опосередковано.

Первинна повірка засобів вимірювальної техніки - повірка, що виконується вперше після виготовлення засобів вимірювальної техніки або після ремонту, а також при імпорті партії.

Періодична повірка засобів вимірювальної техніки - повірка, що виконується протягом експлуатації засобів вимірювальної техніки через встановлений проміжок часу (міжповірочний інтервал).

Розширена невизначеність U - інтервал навколо результату вимірювання, в межах якого ймовірно розташована більшість розподілу значень, які з достатнім обґрунтуванням можуть бути приписані вимірюваній величині.

Роздільна здатність - найменша різниця у показах приладу, яка може сприйматися значущою.

Примітка: Для цифрових приладів ця різниця дорівнює одиниці найменшого розряду індикатора приладу.

Термін "роздільна здатність" у Міжнародному словнику основних термінів метрології у випадку цифрових мультиметрів розуміється наступним чином:

Наприклад, якщо найбільше значення, що може показати прилад є 1999 і якщо найменша зміна показів відповідає одиниці найменшого розряду індикатору, то роздільна здатність дорівнює 1/1999, або 0,05% верхньої границі шкали.

Роздільна здатність цифрового мультиметру часто виражається як ціле число та дріб. У попередньому прикладі роздільна здатність дорівнює $5 \frac{1}{2}$ розрядів, де перша цифра (5) визначає кількість розрядів, де значення може змінюватися від 0 до 9. Дріб визначає першу цифру (найбільший розряд), якій може мати одне (або більше) значення крім нуля. Іншими словами може мати значення 0 та 1 і більше ніяких.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ, ПЕРІОДИЧНИХ ВИДАНЬ, ОФІЦІЙНИХ ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ В МЕРЕЖІ INTERNET

1. Васілевський О.М. Основи теорії невизначеності вимірювань: підручник / О.М.Васілевський, В.Ю.Кучерук, Є.Т.Володарський. – Вінниця: ВНТУ, 2015. – 230 с.
<https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/download/221/405/446-1?inline=1>
2. Guide to expression of uncertainty in measurement: First edition. – ISO. Switzerland, 1993.
3. JCGM 104:2009 Evaluation of measurement data – An introduction to the «Guide to the expression of uncertainty in measurement» and related documents: JCGM 104:2009. – Sevres : JCGM, 2009. – 20 p.
4. JCGM 106:2012. Evaluation of measurement data - The role of measurement uncertainty in conformity assessment. – Sevres : JCGM, 2009. – 57 p.
5. ЕА- 4/02 М:2013 Вираз невизначеності вимірювання при калібруванні
6. Поджаренко В.О. Опрацювання результатів вимірювань на основі концепції невизначеності: навч. посіб. / В.О. Поджаренко, О.М. Васілевський, В.Ю. Кучерук. – Вінниця: ВНТУ, 2008. – 128 с.
7. До проблеми впровадження методики оцінки невизначеностей вимірювань А.Д.Скоробу, Б.М.Силошний /Проблеми безпеки атомних електростанцій і Чорнобиля вип.14 2010.
8. Засади оцінювання невизначеності результатів
<https://sites.google.com/site/yakavoska/articles/zasadi>
9. Salicone, Simona. *Measurement uncertainty: an approach via the mathematical theory of evidence*. Springer science & business media, 2007.
10. Buonaccorsi, John P. *Measurement error: models, methods, and applications*. CRC press, 2010.
11. Uncertainty Analysis for Engineers and Scientists: A Practical Guide 1st Edition by [Faith A. Morrison](#) (Author)
12. "Measurement Uncertainty: A Practical Guide for Engineers and Scientists" by L. S. Blakeley.
13. Eurachem/EUROLAB/CITAC/Nordtest/AMC Guide: Measurement uncertainty arising from sampling: a guide to methods and approaches: M H Ramsey and S L R Ellison (Eds): translation of the first edition, 2007 – Kyiv.: LLC "Yurka Liubchenka", 2015. – 156 p.
14. JCGM 200:2012. International vocabulary of metrology — Basic and general concepts and associated terms (VIM) – (JCGM 200:2008 with minor correction) (Published by the OIML as OIML V 2-200:2012 as www.oiml.org/en/publications/guides/) Also referred to in present Guide as “VIM3»
15. Настанова Eurachem/EUROLAB/CITAC/Nordtest/AMC "Непевність виміру, пов'язана з відбиранням проби. Настанова з методів та підходів": за ред.

М. Ремзі та С. Еллісона: переклад першого видання 2007 р. – К.: ТОВ "Юрка Любченка", 2015. – 156 с.

16. Ellison S L R, Roesslein M, Williams A (eds) (1995) Eurachem Guide: *Quantifying Uncertainty in Analytical Measurement*, Eurachem, 1st edition.

17. ISO/TS 21748:2004 Guidance for the use of repeatability, reproducibility and trueness estimates in measurement uncertainty estimation. ISO, Geneva.

ПЕРЕЛІК НОРМАТИВНОЇ ДОКУМЕНТАЦІЇ

1. ДСТУ OIML G 19:2018 Роль невизначеності вимірювання під час прийняття рішень про оцінку відповідності в законодавчо регульованій метрології (OIML G 19:2017, IDT)

<http://online.budstandart.com/ua/catalog/document.html?iddoc=81671>

2. ДСТУ-Н 7531:2014 Метрологія. Впровадження концепції невизначеності вимірювання під час випробування з урахуванням вимог ДСТУ ISO/IEC 17025 [Текст]. - Чинний від 2015-02-01. - Київ : Мінекономрозвитку України, 2015. - IV, 4 с. - (Настанова).- Бібліогр.: с.4.

http://www.leonorm.com.ua/Default.php?Page=search&TableNumber=2&nodename=lnbod_S3337

<http://csm.kiev.ua/nd/nd.php?b=1&z=%D0%9E%D0%BF%D1%82%D0%B8&l=220>

<http://online.budstandart.com/ua/catalog/document.html?iddoc=67950>

3. ДСТУ ISO/IEC Guide 98-1:2018 Невизначеність вимірювань. Частина I. Вступ до подання невизначеності у вимірюванні (ISO/IEC Guide 98-1:2009, IDT)

<http://online.budstandart.com/ua/catalog/document.html?iddoc=81668>

5. ДСТУ ISO/IEC Guide 98-3:2018 Невизначеність вимірювань. Частина III. http://online.budstandart.com/ua/catalog/doc-page?id_doc=81669

6. ДСТУ ISO/IEC Guide 98-4:2018 Невизначеність вимірювань. Частина IV. http://online.budstandart.com/ua/catalog/doc-page?id_doc=81670

7. ДСТУ ISO/TS 21749:2013 Невизначеність вимірювання в метрологічній практиці. Повторні вимірювання та ієрархічні експерименти (ISO/TS 21749:2005, IDT)

<http://online.budstandart.com/ua/catalog/document.html?iddoc=62233>

8. ДСТУ ГОСТ ИСО 5725-6:2005 Точність (правильність і прецизійність) методів та результатів вимірювання. Частина 6. Використання значення точності на практиці (ГОСТ ИСО 5725-6-2003, IDT)

<http://online.budstandart.com/ua/catalog/document.html?iddoc=84938>

9. ДСТУ ГОСТ ИСО 5725-2:2005 Точність (правильність і прецизійність) методів та результатів вимірювання. Частина 2. Основний метод визначення повторюваності і відтворюваності стандартного методу вимірювання (ГОСТ ИСО 5725-2-2003, IDT)

<http://online.budstandart.com/ua/catalog/document.html?iddoc=84968>

10. ДСТУ ГОСТ ИСО 5725-4:2005 Точність (правильність і прецизійність) методів та результатів вимірювання. Частина 4. Основні методи визначення

правильності стандартного методу вимірювання (ГОСТ ИСО 5725-4-2003, IDT)
<http://online.budstandart.com/ua/catalog/document.html?iddoc=89958>

11. ДСТУ ГОСТ ИСО 5725-1:2005 Точність (правильність і прецизійність) методів та результатів вимірювання. Частина 1. Основні положення та визначення (ГОСТ ИСО 5725-1-2003, IDT)
<http://online.budstandart.com/ua/catalog/document.html?iddoc=72104>

12. ДСТУ ISO 3534-1:2008 Статистика. Словник термінів і позначки. Частина 1. Загальні статистичні терміни та терміни теорії ймовірностей (ISO 3534-1:2006, IDT)
<http://online.budstandart.com/ua/catalog/document.html?iddoc=29186>

Додаток А
Зразок оформлення титульної сторінки до звіту з практичних робіт

Черкаський державний технологічний університет

(повне найменування вищого навчального закладу)

Приладобудування, мехатроніки та комп'ютеризованих технологій

(повна назва кафедри, циклової комісії)

Звіт з практичних робіт

З дисципліни «Похибки та невизначеності вимірювань»

Керівник

(П.І.П)

Виконав

Студент

(П.І.П)

Група

Залікова книжка №

Підпис

Черкаси 2024

Додаток Б
Довідникові таблиці

Додаток Б1 - Функція нормального розподілу (використана функція =НОРМСТРАСП(z))

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
+0,0	0,5000	0,504	0,5080	0,512	0,5160	0,520	0,5239	0,528	0,5319	0,536
+0,1	0,5398	0,544	0,5478	0,552	0,5557	0,560	0,5636	0,567	0,5714	0,575
+0,2	0,5793	0,583	0,5871	0,591	0,5948	0,599	0,6026	0,606	0,6103	0,614
+0,3	0,6179	0,622	0,6255	0,629	0,6331	0,637	0,6406	0,644	0,6480	0,652
+0,4	0,6554	0,659	0,6628	0,666	0,6700	0,674	0,6772	0,681	0,6844	0,688
+0,5	0,6915	0,695	0,6985	0,702	0,7054	0,709	0,7123	0,716	0,7190	0,722
+0,6	0,7257	0,729	0,7324	0,736	0,7389	0,742	0,7454	0,749	0,7517	0,755
+0,7	0,7580	0,761	0,7642	0,767	0,7704	0,773	0,7764	0,779	0,7823	0,785
+0,8	0,7881	0,791	0,7939	0,797	0,7995	0,802	0,8051	0,808	0,8106	0,813
+0,9	0,8159	0,819	0,8212	0,824	0,8264	0,829	0,8315	0,834	0,8365	0,839
+1,0	0,8413	0,844	0,8461	0,848	0,8505	0,853	0,8554	0,858	0,8599	0,862
+1,1	0,8643	0,866	0,8686	0,871	0,8729	0,875	0,8770	0,879	0,8810	0,883
+1,2	0,8849	0,887	0,8888	0,891	0,8925	0,894	0,8962	0,898	0,8997	0,901
+1,3	0,9032	0,905	0,9066	0,908	0,9099	0,911	0,9131	0,915	0,9162	0,918
+1,4	0,9192	0,921	0,9222	0,924	0,9251	0,926	0,9279	0,929	0,9306	0,932
+1,5	0,9332	0,934	0,9357	0,937	0,9382	0,939	0,9406	0,942	0,9429	0,944
+1,6	0,9452	0,946	0,9474	0,948	0,9495	0,951	0,9515	0,953	0,9535	0,954
+1,7	0,9554	0,956	0,9573	0,958	0,9591	0,960	0,9608	0,962	0,9626	0,963
+1,8	0,9641	0,965	0,9656	0,966	0,9671	0,968	0,9686	0,969	0,9699	0,971
+1,9	0,9713	0,972	0,9726	0,973	0,9738	0,974	0,9750	0,976	0,9761	0,977
+2,0	0,9773	0,978	0,9783	0,979	0,9793	0,980	0,9803	0,981	0,9812	0,982
+2,1	0,9821	0,983	0,9830	0,983	0,9838	0,984	0,9846	0,985	0,9854	0,986
+2,2	0,9861	0,986	0,9868	0,987	0,9875	0,988	0,9881	0,988	0,9887	0,989
+2,3	0,9893		0,9898		0,9904		0,9909		0,9913	

+2,4	0,9918		0,9922		0,9927		0,9931		0,9934	
+2,5	0,9938		0,9941		0,9945		0,9948		0,9951	
+2,6	0,9953		0,9956		0,9959		0,9961		0,9963	
+2,7	0,9965		0,9967		0,9969		0,9971		0,9973	
+2,8	0,9974		0,9976		0,9977		0,9979		0,9980	
+2,9	0,9981		0,9983		0,9984		0,9985		0,9986	
+3,0	0,99865		0,99874		0,99882		0,99889		0,99896	
+3,1	0,99903		0,99910		0,99915		0,99921		0,99926	
+3,2	0,99931		0,99936		0,99940		0,99944		0,99948	
+3,3	0,99952		0,99954		0,99958		0,99961		0,99964	
+3,4	0,99966		0,99969		0,99971		0,99973		0,99975	
+3,5	0,99977		0,99978		0,99980		0,99981		0,99983	

Для від'ємних значень r функція нормального розподілу визначається за допомогою співвідношення $\Phi_1(-z) = 1 - \Phi_1(z)$

Додаток Б2 - Розподіл Стюдента $P\left\{|t| < t_p = 2 \int_0^{t_p} s(t; k) dt\right\}$ значення t_p

k	P											
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,986	3,355
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,883	2,262	2,821	3,250
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169

11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,669	2,045	2,462	2,756
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
∞	0,12566	0,25335	0,38532	0,5244	0,67449	0,84162	1,03643	1,28155	1,64485	1,95996	2,32664	2,57582

Додаток Б3 - Інтегральна функція χ^2 – розподілу Пірсона. Значення $\chi^2_{k;p}$ для різних k та P

k	P												
	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
1	0,0001	0,0006	0,00393	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210

3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	4,107	4,765	5,982	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	7,633	8,567	10,117	11,651	12,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	8,260	9,237	10,851	12,444	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	22,710	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

Додаток Б4 - Значення F- критерію Фішера при рівні значущості ($\alpha = 5\%$ - зелений колір; $\alpha = 1\%$ - чорний колір) використана функція =FРАСПОБР(0,05;k₂;k₁)

k_2	k_1 (ступінь свободи для більшої дисперсії)										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	161,45	199,5	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88	242,98
	4052,2	4999,5	5403,4	5624,6	5763,6	5859	5928,4	5981,1	6022,5	6055,8	6083,3
2	18,513	19	19,164	19,247	19,296	19,33	19,353	19,371	19,385	19,396	19,405
	98,503	99	99,166	99,249	99,299	99,333	99,356	99,374	99,388	99,399	99,408
3	10,128	9,55209	9,2766	9,1172	9,0135	8,9406	8,8867	8,8452	8,8123	8,7855	8,7633
	34,116	30,8165	29,457	28,71	28,237	27,911	27,672	27,489	27,345	27,229	27,133
4	7,7086	6,94427	6,5914	6,3882	6,2561	6,1631	6,0942	6,041	5,9988	5,9644	5,9358
	21,198	18	16,694	15,977	15,522	15,207	14,976	14,799	14,659	14,546	14,452
5	6,6079	5,78614	5,4095	5,1922	5,0503	4,9503	4,8759	4,8183	4,7725	4,7351	4,704
	16,258	13,2739	12,06	11,392	10,967	10,672	10,456	10,289	10,158	10,051	9,9626
6	5,9874	5,14325	4,7571	4,5337	4,3874	4,2839	4,2067	4,1468	4,099	4,06	4,0274
	13,745	10,9248	9,7795	9,1483	8,7459	8,4661	8,26	8,1017	7,9761	7,8741	7,7896
7	5,5914	4,73741	4,3468	4,1203	3,9715	3,866	3,787	3,7257	3,6767	3,6365	3,603
	12,246	9,54658	8,4513	7,8466	7,4604	7,1914	6,9928	6,84	6,7188	6,6201	6,5382
8	5,3177	4,45897	4,0662	3,8379	3,6875	3,5806	3,5005	3,4381	3,3881	3,3472	3,313
	11,259	8,64911	7,591	7,0061	6,6318	6,3707	6,1776	6,0289	5,9106	5,8143	5,7343
9	5,1174	4,25649	3,8625	3,6331	3,4817	3,3738	3,2927	3,2296	3,1789	3,1373	3,1025
	10,561	8,02152	6,9919	6,4221	6,0569	5,8018	5,6129	5,4671	5,3511	5,2565	5,1779
10	4,9646	4,10282	3,7083	3,478	3,3258	3,2172	3,1355	3,0717	3,0204	2,9782	2,943
	10,044	7,55943	6,5523	5,9943	5,6363	5,3858	5,2001	5,0567	4,9424	4,8491	4,7715
11	4,8443	3,9823	3,5874	3,3567	3,2039	3,0946	3,0123	2,948	2,8962	2,8536	2,8179
	9,646	7,20571	6,2167	5,6683	5,316	5,0692	4,8861	4,7445	4,6315	4,5393	4,4624
12	4,7472	3,88529	3,4903	3,2592	3,1059	2,9961	2,9134	2,8486	2,7964	2,7534	2,7173
	9,3302	6,92661	5,9525	5,412	5,0643	4,8206	4,6395	4,4994	4,3875	4,2961	4,2198

Продовження таблиці Б4

k_2	k_1 (ступінь свободи для більшої дисперсії)										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
13	4,6672	3,80557	3,4105	3,1791	3,0254	2,9153	2,8321	2,7669	2,7144	2,671	2,6347
	9,0738	6,70096	5,7394	5,2053	4,8616	4,6204	4,441	4,3021	4,1911	4,1003	4,0245
14	4,6001	3,73889	3,3439	3,1122	2,9582	2,8477	2,7642	2,6987	2,6458	2,6022	2,5655
	8,8616	6,51488	5,5639	5,0354	4,695	4,4558	4,2779	4,1399	4,0297	3,9394	3,864
15	4,5431	3,68232	3,2874	3,0556	2,9013	2,7905	2,7066	2,6408	2,5876	2,5437	2,5068
	8,6831	6,35887	5,417	4,8932	4,5556	4,3183	4,1415	4,0045	3,8948	3,8049	3,7299
16	4,494	3,63372	3,2389	3,0069	2,8524	2,7413	2,6572	2,5911	2,5377	2,4935	2,4564
	8,531	6,22624	5,2922	4,7726	4,4374	4,2016	4,0259	3,8896	3,7804	3,6909	3,6162
17	4,4513	3,59153	3,1968	2,9647	2,81	2,6987	2,6143	2,548	2,4943	2,4499	2,4126
	8,3997	6,11211	5,185	4,669	4,3359	4,1015	3,9267	3,791	3,6822	3,5931	3,5185
18	4,4139	3,55456	3,1599	2,9277	2,7729	2,6613	2,5767	2,5102	2,4563	2,4117	2,3742
	8,2854	6,0129	5,0919	4,579	4,2479	4,0146	3,8406	3,7054	3,5971	3,5082	3,4338
19	4,3807	3,52189	3,1274	2,8951	2,7401	2,6283	2,5435	2,4768	2,4227	2,3779	2,3402
	8,1849	5,92588	5,0103	4,5003	4,1708	3,9386	3,7653	3,6305	3,5225	3,4338	3,3596
20	4,3512	3,49283	3,0984	2,8661	2,7109	2,599	2,514	2,4471	2,3928	2,3479	2,31
	8,096	5,84893	4,9382	4,4307	4,1027	3,8714	3,6987	3,5644	3,4567	3,3682	3,2941
21	4,3248	3,4668	3,0725	2,8401	2,6848	2,5727	2,4876	2,4205	2,366	2,321	2,2829
	8,0166	5,78042	4,874	4,3688	4,0421	3,8117	3,6396	3,5056	3,3981	3,3098	3,2359
22	4,3009	3,44336	3,0491	2,8167	2,6613	2,5491	2,4638	2,3965	2,3419	2,2967	2,2585
	7,9454	5,71902	4,8166	4,3134	3,988	3,7583	3,5867	3,453	3,3458	3,2576	3,1837
23	4,2793	3,42213	3,028	2,7955	2,64	2,5277	2,4422	2,3748	2,3201	2,2747	2,2364
	7,8811	5,6637	4,7649	4,2636	3,9392	3,7102	3,539	3,4057	3,2986	3,2106	3,1368
24	4,2597	3,40283	3,0088	2,7763	2,6207	2,5082	2,4226	2,3551	2,3002	2,2547	2,2163
	7,8229	5,61359	4,7181	4,2184	3,8951	3,6667	3,4959	3,3629	3,256	3,1681	3,0944

Продовження таблиці Б4

k_2	k_1 (ступінь свободи для більшої дисперсії)										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
25	4,2417	3,38519	2,9912	2,7587	2,603	2,4904	2,4047	2,3371	2,2821	2,2365	2,1979
	7,7698	5,568	4,6755	4,1774	3,855	3,6272	3,4568	3,3239	3,2172	3,1294	3,0558
26	4,2252	3,36902	2,9752	2,7426	2,5868	2,4741	2,3883	2,3205	2,2655	2,2197	2,1811
	7,7213	5,52633	4,6366	4,14	3,8183	3,5911	3,421	3,2884	3,1818	3,0941	3,0205
27	4,21	3,35413	2,9604	2,7278	2,5719	2,4591	2,3732	2,3053	2,2501	2,2043	2,1655
	7,6767	5,48812	4,6009	4,1056	3,7848	3,558	3,3882	3,2558	3,1494	3,0618	2,9882
28	4,196	3,34039	2,9467	2,7141	2,5581	2,4453	2,3593	2,2913	2,236	2,19	2,1512
	7,6356	5,45294	4,5681	4,074	3,7539	3,5276	3,3581	3,2259	3,1195	3,032	2,9585
29	4,183	3,32765	2,934	2,7014	2,5454	2,4324	2,3463	2,2783	2,2229	2,1768	2,1379
	7,5977	5,42045	4,5378	4,0449	3,7254	3,4995	3,3303	3,1982	3,092	3,0045	2,9311
30	4,1709	3,31583	2,9223	2,6896	2,5336	2,4205	2,3343	2,2662	2,2107	2,1646	2,1256
	7,5625	5,39035	4,5097	4,0179	3,699	3,4735	3,3045	3,1726	3,0665	2,9791	2,9057
32	4,1491	3,29454	2,9011	2,6684	2,5123	2,3991	2,3127	2,2444	2,1888	2,1425	2,1033
	7,4993	5,33634	4,4594	3,9695	3,6517	3,4269	3,2583	3,1267	3,0208	2,9335	2,8602
34	4,13	3,2759	2,8826	2,6499	2,4936	2,3803	2,2938	2,2253	2,1696	2,1231	2,0838
	7,4441	5,28928	4,4156	3,9273	3,6106	3,3863	3,2182	3,0868	2,981	2,8938	2,8205
36	4,1132	3,25945	2,8663	2,6335	2,4772	2,3638	2,2771	2,2085	2,1526	2,1061	2,0666
	7,3956	5,24789	4,3771	3,8903	3,5744	3,3507	3,1829	3,0517	2,9461	2,8589	2,7857
38	4,0982	3,24482	2,8517	2,619	2,4625	2,349	2,2623	2,1936	2,1375	2,0909	2,0513
	7,3525	5,21122	4,343	3,8575	3,5424	3,3191	3,1516	3,0207	2,9151	2,8281	2,7549
40	4,0847	3,23173	2,8387	2,606	2,4495	2,3359	2,249	2,1802	2,124	2,0772	2,0376
	7,3141	5,17851	4,3126	3,8283	3,5138	3,291	3,1238	2,993	2,8876	2,8005	2,7274
42	4,0727	3,21994	2,827	2,5943	2,4377	2,324	2,2371	2,1681	2,1119	2,065	2,0252
	7,2796	5,14914	4,2853	3,8021	3,4882	3,2658	3,0988	2,9681	2,8628	2,7758	2,7027

Продовження таблиці Б4

k_2	k_1 (ступінь свободи для більшої дисперсії)										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
44	4,0617	3,20928	2,8165	2,5837	2,427	2,3133	2,2263	2,1572	2,1009	2,0539	2,014
	7,2484	5,12263	4,2606	3,7784	3,4651	3,243	3,0762	2,9457	2,8405	2,7536	2,6804
46	4,0517	3,19958	2,8068	2,574	2,4174	2,3035	2,2164	2,1473	2,0909	2,0438	2,0039
	7,22	5,09858	4,2383	3,757	3,4442	3,2224	3,0558	2,9254	2,8203	2,7334	2,6602
48	4,0427	3,19073	2,7981	2,5652	2,4085	2,2946	2,2074	2,1382	2,0817	2,0346	1,9946
	7,1942	5,07666	4,218	3,7374	3,4251	3,2036	3,0372	2,9069	2,8018	2,715	2,6418
50	4,0343	3,18261	2,79	2,5572	2,4004	2,2864	2,1992	2,1299	2,0734	2,0261	1,9861
	7,1706	5,05661	4,1993	3,7195	3,4077	3,1864	3,0202	2,89	2,785	2,6981	2,625
60	4,0012	3,15041	2,7581	2,5252	2,3683	2,2541	2,1665	2,097	2,0401	1,9926	1,9522
	7,0771	4,97743	4,1259	3,649	3,3389	3,1187	2,953	2,8233	2,7185	2,6318	2,5587
70	3,9778	3,12768	2,7355	2,5027	2,3456	2,2312	2,1435	2,0737	2,0166	1,9689	1,9283
	7,0114	4,92187	4,0744	3,5996	3,2907	3,0712	2,906	2,7765	2,6719	2,5852	2,5122
80	3,9604	3,11077	2,7188	2,4859	2,3287	2,2142	2,1263	2,0564	1,9991	1,9512	1,9105
	6,9627	4,88074	4,0363	3,5631	3,255	3,0361	2,8713	2,742	2,6374	2,5508	2,4777
100	3,9361	3,0873	2,6955	2,4626	2,3053	2,1906	2,1025	2,0323	1,9748	1,9267	1,8857
	6,8953	4,82391	3,9837	3,5127	3,2059	2,9877	2,8233	2,6943	2,5898	2,5033	2,4302
∞	3,8446	2,99873	2,6079	2,3749	2,2171	2,1016	2,0126	1,9415	1,883	1,8339	1,7918
	6,6433	4,61225	3,7881	3,3254	3,0233	2,808	2,6453	2,5172	2,4132	2,3268	2,2536

Продовження таблиці Б4

k_2	k_1 (ступінь свободи для більшої дисперсії)										
	12	13	14	15	16	17	18	19	20	30	∞
1	243,906	244,69	245,36	245,95	246,46	246,92	247,32	247,69	248,01	250,1	254,3
	6106,32	6125,9	6142,7	6157,3	6170,1	6181,4	6191,5	6200,6	6208,7	6260,6	6365
2	19,4125	19,419	19,424	19,429	19,433	19,437	19,44	19,443	19,446	19,462	19,5
	99,4159	99,422	99,428	99,433	99,437	99,44	99,444	99,447	99,449	99,466	99,5
3	8,74464	8,7287	8,7149	8,7029	8,6923	8,6829	8,6745	8,667	8,6602	8,6166	8,527
	27,0518	26,983	26,924	26,872	26,827	26,787	26,751	26,719	26,69	26,505	26,13
4	5,91173	5,8911	5,8733	5,8578	5,8441	5,832	5,8211	5,8114	5,8025	5,7459	5,629
	14,3736	14,307	14,249	14,198	14,154	14,115	14,08	14,048	14,02	13,838	13,47
5	4,6777	4,6552	4,6358	4,6188	4,6038	4,5904	4,5785	4,5678	4,5581	4,4957	4,366
	9,88828	9,8248	9,77	9,7222	9,6802	9,6429	9,6096	9,5797	9,5526	9,3793	9,024
6	3,99994	3,9764	3,9559	3,9381	3,9223	3,9083	3,8957	3,8844	3,8742	3,8082	3,67
	7,71833	7,6575	7,6049	7,559	7,5186	7,4827	7,4507	7,4219	7,3958	7,2285	6,884
7	3,57468	3,5503	3,5292	3,5107	3,4944	3,4799	3,4669	3,4551	3,4445	3,3758	3,231
	6,46909	6,41	6,359	6,3143	6,275	6,2401	6,2089	6,1808	6,1554	5,992	5,653
8	3,28394	3,259	3,2374	3,2184	3,2016	3,1867	3,1733	3,1613	3,1503	3,0794	2,929
	5,66672	5,6089	5,5589	5,5151	5,4766	5,4423	5,4116	5,384	5,3591	5,1981	4,862
9	3,07295	3,0475	3,0255	3,0061	2,989	2,9737	2,96	2,9477	2,9365	2,8637	2,708
	5,11143	5,0545	5,0052	4,9621	4,924	4,8902	4,8599	4,8327	4,808	4,6486	4,314
10	2,91298	2,8872	2,8647	2,845	2,8276	2,812	2,798	2,7854	2,774	2,6996	2,54
	4,70587	4,6496	4,6008	4,5581	4,5204	4,4869	4,4569	4,4299	4,4054	4,2469	3,913
11	2,78757	2,7614	2,7386	2,7186	2,7009	2,6851	2,6709	2,6581	2,6464	2,5705	2,406
	4,3974	4,3416	4,2932	4,2509	4,2134	4,1801	4,1503	4,1234	4,099	3,9411	3,606
12	2,68664	2,6602	2,6371	2,6169	2,5989	2,5828	2,5684	2,5554	2,5436	2,4663	2,298
	4,15526	4,0999	4,0518	4,0096	3,9724	3,9392	3,9095	3,8827	3,8584	3,7008	3,364

Продовження таблиці Б4

k_2	k_1 (ступінь свободи для більшої дисперсії)										
	12	13	14	15	16	17	18	19	20	30	∞
13	2,60366	2,5769	2,5536	2,5331	2,5149	2,4987	2,4841	2,4709	2,4589	2,3803	2,208
	3,96033	3,9052	3,8573	3,8154	3,7783	3,7452	3,7156	3,6888	3,6646	3,507	3,169
14	2,53424	2,5073	2,4837	2,463	2,4446	2,4282	2,4134	2,4	2,3879	2,3082	2,133
	3,80014	3,7452	3,6975	3,6557	3,6187	3,5857	3,5561	3,5294	3,5052	3,3476	3,008
15	2,47531	2,4481	2,4244	2,4034	2,3849	2,3683	2,3533	2,3398	2,3275	2,2468	2,068
	3,66624	3,6115	3,5639	3,5222	3,4852	3,4523	3,4228	3,3961	3,3719	3,2141	2,872
16	2,42466	2,3973	2,3733	2,3522	2,3335	2,3167	2,3016	2,288	2,2756	2,1938	2,012
	3,55269	3,4981	3,4506	3,4089	3,372	3,3391	3,3096	3,2829	3,2587	3,1007	2,757
17	2,38065	2,3531	2,329	2,3077	2,2888	2,2719	2,2567	2,2429	2,2304	2,1477	1,962
	3,4552	3,4007	3,3533	3,3117	3,2748	3,2419	3,2124	3,1857	3,1615	3,0032	2,657
18	2,34207	2,3143	2,29	2,2686	2,2496	2,2325	2,2172	2,2033	2,1906	2,1071	1,919
	3,37061	3,3162	3,2689	3,2273	3,1904	3,1575	3,128	3,1013	3,0771	2,9185	2,57
19	2,30795	2,28	2,2556	2,2341	2,2149	2,1977	2,1823	2,1683	2,1555	2,0712	1,88
	3,29653	3,2422	3,1949	3,1533	3,1165	3,0836	3,0541	3,0274	3,0031	2,8442	2,493
20	2,27758	2,2495	2,225	2,2033	2,184	2,1667	2,1511	2,137	2,1242	2,0391	1,845
	3,23112	3,1769	3,1296	3,088	3,0512	3,0183	2,9887	2,962	2,9377	2,7785	2,425
21	2,25036	2,2222	2,1975	2,1757	2,1563	2,1389	2,1232	2,109	2,096	2,0102	1,814
	3,17295	3,1187	3,0715	3,03	2,9931	2,9602	2,9306	2,9039	2,8796	2,72	2,364
22	2,22583	2,1975	2,1727	2,1508	2,1313	2,1138	2,098	2,0837	2,0707	1,9842	1,785
	3,12089	3,0667	3,0195	2,9779	2,9411	2,9082	2,8786	2,8518	2,8274	2,6675	2,309
23	2,20361	2,1752	2,1502	2,1282	2,1086	2,091	2,0751	2,0608	2,0476	1,9605	1,759
	3,07402	3,0199	2,9727	2,9311	2,8943	2,8613	2,8317	2,8049	2,7805	2,6202	2,26
24	2,18338	2,1548	2,1298	2,1077	2,088	2,0703	2,0543	2,0399	2,0267	1,939	1,735
	3,03161	2,9775	2,9303	2,8887	2,8519	2,8189	2,7892	2,7624	2,738	2,5773	2,215

Продовження таблиці Б4

k_2	k_1 (ступінь свободи для більшої дисперсії)										
	12	13	14	15	16	17	18	19	20	30	∞
25	2,16489	2,1362	2,1111	2,0889	2,0691	2,0513	2,0353	2,0207	2,0075	1,9192	1,713
	2,99306	2,9389	2,8917	2,8502	2,8133	2,7803	2,7506	2,7238	2,6993	2,5383	2,174
26	2,14793	2,1192	2,0939	2,0716	2,0518	2,0339	2,0178	2,0032	1,9898	1,901	1,693
	2,95785	2,9038	2,8566	2,815	2,7781	2,7451	2,7153	2,6885	2,664	2,5026	2,136
27	2,1323	2,1035	2,0781	2,0558	2,0358	2,0179	2,0017	1,987	1,9736	1,8842	1,674
	2,92557	2,8715	2,8243	2,7827	2,7458	2,7127	2,683	2,6561	2,6316	2,4699	2,101
28	2,11787	2,0889	2,0635	2,0411	2,021	2,003	1,9868	1,972	1,9586	1,8687	1,657
	2,89588	2,8418	2,7946	2,753	2,716	2,683	2,6532	2,6263	2,6017	2,4397	2,068
29	2,10449	2,0755	2,05	2,0275	2,0073	1,9893	1,973	1,9581	1,9446	1,8543	1,64
	2,86847	2,8144	2,7672	2,7256	2,6886	2,6555	2,6257	2,5987	2,5742	2,4118	2,038
30	2,09206	2,063	2,0374	2,0148	1,9946	1,9765	1,9601	1,9452	1,9317	1,8409	1,625
	2,8431	2,789	2,7418	2,7002	2,6632	2,6301	2,6003	2,5732	2,5487	2,386	2,011
32	2,06966	2,0404	2,0147	1,992	1,9717	1,9534	1,9369	1,9219	1,9083	1,8166	1,597
	2,79759	2,7435	2,6963	2,6546	2,6176	2,5844	2,5546	2,5275	2,5029	2,3395	1,96
34	2,05004	2,0207	1,9949	1,972	1,9516	1,9332	1,9166	1,9015	1,8877	1,7953	1,572
	2,75797	2,7039	2,6566	2,615	2,5779	2,5447	2,5147	2,4876	2,4629	2,299	1,916
36	2,0327	2,0032	1,9773	1,9543	1,9338	1,9153	1,8986	1,8834	1,8696	1,7764	1,55
	2,72315	2,6691	2,6218	2,5801	2,543	2,5097	2,4797	2,4526	2,4278	2,2633	1,876
38	2,01728	1,9877	1,9616	1,9386	1,9179	1,8994	1,8826	1,8673	1,8534	1,7596	1,53
	2,69232	2,6382	2,5909	2,5492	2,512	2,4787	2,4487	2,4215	2,3967	2,2317	1,841
40	2,00346	1,9738	1,9476	1,9245	1,9037	1,8851	1,8682	1,8529	1,8389	1,7444	1,512
	2,66483	2,6107	2,5634	2,5216	2,4844	2,4511	2,421	2,3937	2,3689	2,2034	1,809
42	1,99101	1,9612	1,935	1,9118	1,891	1,8722	1,8553	1,8399	1,8258	1,7308	1,495
	2,64016	2,586	2,5387	2,4969	2,4596	2,4263	2,3962	2,3688	2,3439	2,178	1,781

Продовження таблиці Б4

k_2	k_1 (ступінь свободи для більшої дисперсії)										
	12	13	14	15	16	17	18	19	20	30	∞
44	1,97974	1,9499	1,9236	1,9002	1,8794	1,8606	1,8436	1,8281	1,8139	1,7184	1,48
	2,6179	2,5638	2,5164	2,4746	2,4373	2,4039	2,3737	2,3463	2,3214	2,155	1,755
46	1,96949	1,9395	1,9132	1,8898	1,8688	1,85	1,8329	1,8173	1,8031	1,707	1,466
	2,59771	2,5436	2,4962	2,4543	2,417	2,3835	2,3533	2,3259	2,3009	2,1341	1,731
48	1,96012	1,9301	1,9037	1,8802	1,8592	1,8402	1,8231	1,8075	1,7932	1,6967	1,453
	2,57932	2,5252	2,4777	2,4358	2,3985	2,365	2,3348	2,3073	2,2823	2,115	1,709
50	1,95153	1,9214	1,8949	1,8714	1,8503	1,8313	1,8141	1,7985	1,7841	1,6872	1,441
	2,5625	2,5083	2,4609	2,419	2,3816	2,3481	2,3178	2,2903	2,2652	2,0976	1,688
60	1,9174	1,887	1,8602	1,8364	1,8151	1,7959	1,7784	1,7625	1,748	1,6491	1,393
	2,49612	2,4419	2,3943	2,3523	2,3148	2,2811	2,2507	2,223	2,1978	2,0285	1,606
70	1,89325	1,8627	1,8357	1,8117	1,7902	1,7708	1,7531	1,7371	1,7223	1,622	1,357
	2,44957	2,3953	2,3477	2,3055	2,2679	2,2341	2,2036	2,1758	2,1504	1,9797	1,546
80	1,87526	1,8445	1,8174	1,7932	1,7716	1,752	1,7342	1,718	1,7032	1,6017	1,329
	2,41514	2,3608	2,3131	2,2709	2,2332	2,1993	2,1686	2,1408	2,1153	1,9435	1,5
100	1,85026	1,8193	1,7919	1,7675	1,7456	1,7259	1,7079	1,6915	1,6764	1,5733	1,287
	2,36758	2,3132	2,2654	2,223	2,1852	2,1511	2,1203	2,0923	2,0666	1,8933	1,434
∞	1,75539	1,7234	1,6951	1,6697	1,6469	1,6262	1,6073	1,59	1,574	1,4629	1,062
	2,19066	2,1358	2,0875	2,0445	2,006	1,9713	1,9397	1,9109	1,8844	1,7029	1,089

Додаток Б5 - Значення ν_α при різних кількостях вимірювань n

n	$q = 1 - \alpha$			
	0,1	0,05	0,025	0,01
3	1,406	1,412	1,414	1,414
4	1,645	1,689	1,710	1,723
5	1,731	1,869	1,917	1,955
6	1,894	1,996	2,067	2,130
7	1,974	2,093	2,182	2,265
8	2,041	2,172	2,273	2,374
9	2,097	2,237	2,349	2,464
10	2,146	2,294	2,414	2,540
11	2,190	2,383	2,470	2,606
12	2,229	2,387	2,519	2,663
13	2,264	2,426	2,562	2,714

n	$q = 1 - \alpha$			
	0,1	0,05	0,025	0,01
14	2,297	2,461	2,602	2,759
15	2,326	2,493	2,638	2,808
16	2,354	2,523	2,670	2,837
17	2,380	2,551	2,701	2,871
18	2,404	2,557	2,728	2,903
19	2,426	2,600	2,754	2,932
20	2,447	2,623	2,778	2,959
21	2,467	2,644	2,801	2,984
22	2,486	2,664	2,823	3,008
23	2,504	2,683	2,843	3,030
24	2,520	2,701	2,862	3,051
25	2,537	2,717	2,880	3,071