

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
Факультет електронних технологій, транспорту та машинобудування

## **Методичні рекомендації**

до практичних занять з вищої математики

# **«АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ І В ПРОСТОРІ»**

для здобувачів освітнього ступеня “бакалавр”  
з технічних спеціальностей

*Затверджено вченою радою ФЕТАМ,  
протокол № 9 від 28.06.2023 р.  
згідно з рішенням кафедри  
фундаментальних дисциплін та  
прикладного матеріалознавства,  
протокол № 5 від 05.03.2023 р.*

Упорядники:

Ващенко В.А., д.т.н., професор  
Бутенко Т.І., к.т.н., доцент  
Колінько С.О., к.ф.-м.н., доцент

Рецензент:

Яценко І.В., д.т.н., професор

Методичні рекомендації до практичних занять з вищої математики «Аналітична геометрія на площині і в просторі» для здобувачів освітнього ступеня “бакалавр” з технічних спеціальностей. [Електронний ресурс] / [упоряд. : В.А.Ващенко, Т.І.Бутенко, С.О.Колінько; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси : ЧДТУ, 2023. – 48 с.

Методичні рекомендації до практичних занять з вищої математики «Аналітична геометрія на площині і в просторі» складено у відповідності до програм курсу для здобувачів освітнього ступеня “бакалавр” з технічних спеціальностей, містять задачі та приклади, необхідний теоретичний і довідковий матеріал для практичних занять та самостійної роботи студентів. Наведено допоміжну інформацію - основні положення векторної алгебри. Для студентів та викладачів вищих технічних навчальних закладів.

Навчальне електронне видання

Методичні рекомендації до практичних занять з вищої математики  
**«Аналітична геометрія на площині і в просторі»**  
для здобувачів освітнього ступеня “бакалавр”  
з технічних спеціальностей

Упорядники:

Бутенко Тетяна Іванівна,  
Колінько Сергій Олександрович,  
Ващенко Вячеслав Андрійович

*В авторській редакції.*

© Т. І. Бутенко, С. О. Колінько, В.А. Ващенко, упорядкування, 2023

## Зміст

|           |                                                                               |    |
|-----------|-------------------------------------------------------------------------------|----|
|           | <b>Передмова</b>                                                              | 5  |
| <b>1.</b> | <b>Вектори і дії над ними</b>                                                 | 5  |
| 1.1       | Скалярні та векторні величини                                                 | 5  |
| 1.2       | Лінійні операції над векторами                                                | 7  |
| 1.3       | Базис. Афінна система координат. Розкладення вектора по базису                | 8  |
| 1.4       | Добуток векторів у звичайному просторі                                        | 10 |
|           | 1.4.1 Складова вектора вздовж осі та проекція вектора на вісь                 | 10 |
|           | 1.4.2 Декартова прямокутна система координат                                  | 11 |
|           | 1.4.3 Скалярний добуток векторів                                              | 13 |
|           | 1.4.4 Векторний добуток векторів                                              | 14 |
|           | 1.4.5 Мішаний добуток векторів                                                | 15 |
|           | Розрахункове завдання 1                                                       | 18 |
| <b>2.</b> | <b>Пряма на площині</b>                                                       | 19 |
| 2.1       | Рівняння прямої, заданої точкою і нормальним вектором                         | 19 |
| 2.2       | Загальне рівняння прямої                                                      | 20 |
| 2.3       | Рівняння прямої, яка проходить через задану точку паралельно заданому вектору | 21 |
| 2.4       | Параметричні рівняння прямої                                                  | 22 |
| 2.5       | Векторне рівняння прямої                                                      | 22 |
| 2.6       | Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки                            | 23 |
| 2.7       | Рівняння прямої у відрізках по осях                                           | 23 |
| 2.8       | Рівняння прямої, що проходить через дану точку, з даним кутовим коефіцієнтом  | 24 |
| 2.9       | Взаємне розташування прямих на площині                                        | 25 |
|           | Розрахункове завдання 2                                                       | 31 |
| <b>3.</b> | <b>Площина у просторі</b>                                                     | 32 |

|           |                                                                                      |           |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.1       | Загальне рівняння площини                                                            | 32        |
| 3.2       | Рівняння площини, що проходить через три точки. Рівняння площини у відрізках по осях | 33        |
| 3.3       | Взаємне розташування площин                                                          | 35        |
| <b>4.</b> | <b>Пряма у просторі</b>                                                              | <b>38</b> |
| 4.1       | Канонічне рівняння прямої у просторі                                                 | 38        |
| 4.2       | Параметричне рівняння прямої                                                         | 39        |
| 4.3       | Рівняння прямої, що проходить через дві точки                                        | 39        |
| 4.4       | Загальне рівняння прямої у просторі                                                  | 39        |
| 4.5       | Взаємне розташування прямих у просторі                                               | 41        |
| 4.6       | Взаємне розташування прямої і площини                                                | 42        |
|           | Розрахункове завдання 3                                                              | 47        |
|           | <b>Список використаних джерел</b>                                                    | <b>48</b> |

## Передмова

**Методичні рекомендації** до практичних занять з вищої математики є виданням, яке відповідає програмі дисципліни "Вища математика" для студентів інженерно-технічних спеціальностей першого семестру денної форми навчання і містить матеріал із розділу «Аналітична геометрія». Метою даного видання є сприяння більш глибокому засвоєнню студентами знань з відповідного розділу і є частиною серії видань по інших розділах курсу дисципліни.

Аналітична геометрія є розділом математики, в якому вивчаються властивості геометричних об'єктів на основі застосування алгебраїчних методів. Основним методом аналітичної геометрії є координатний метод. У даному виданні проведено аналіз та ілюстрація теоретичних питань, наведено розв'язки типових прикладів та задач. З метою сприяння кращому засвоєнню студентами знань з відповідного розділу наведено основні положення векторної алгебри.

Завдання, що розміщені в даному виданні, можуть використовуватися і на практичних заняттях як у процесі засвоєння нового матеріалу, так і під час організації контролю і корекції знань студентів.

## 1. Вектори і дії над ними

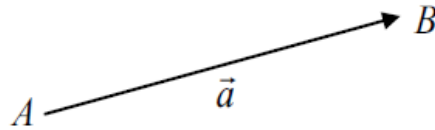
### 1.1 Скалярні та векторні величини

Фізичні величини, які використовуються для кількісної характеристики фізичних явищ і об'єктів, поділяються на скалярні і векторні величини.

*Скалярні величини* визначаються лише числовим значенням (об'єм, густина, температура, тощо). Фізичні величини, які крім числового значення мають ще й напрям (швидкість, прискорення, імпульс, сила, напруженість

електростатичного поля, індукція магнітного поля тощо). Такі величини називають *векторними*.

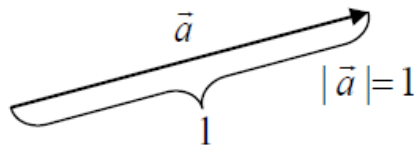
*Вектором* називається напрямлений відрізок  $AB$ , якщо т.  $A$  є початковою, а т.  $B$  – кінцевою і позначається  $\overrightarrow{AB}$  або  $\vec{a}$ :



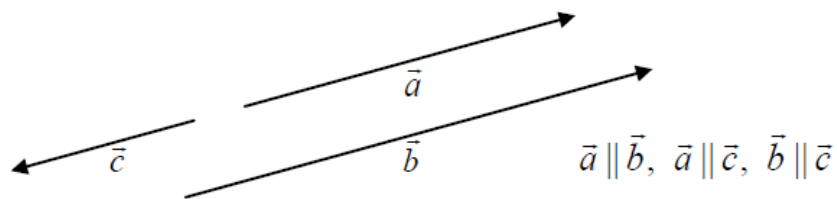
Довжина відрізка  $AB$  називається *модулем* або *довжиною* вектора  $\overrightarrow{AB}$  і позначається  $|\overrightarrow{AB}|$ .

Якщо початок і кінець вектора збігаються, то вектор називається *нульовим* і позначається  $\vec{0}$ .

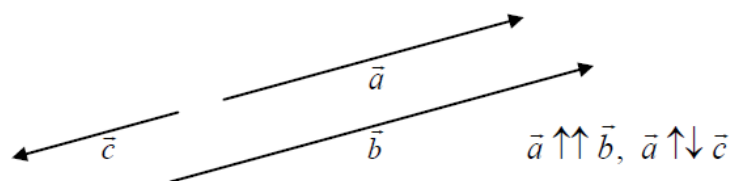
Вектор називається *одиничним*, якщо його довжина дорівнює одиниці.



Вектори називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій, або на паралельних прямих.

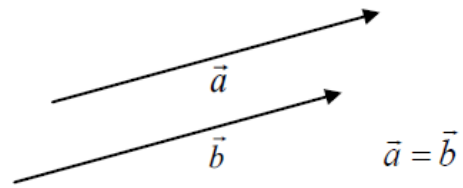


Вектори однакового напрямку називають *співнаправленими*, а протилежного напрямку – *протилежно напрямленими*.

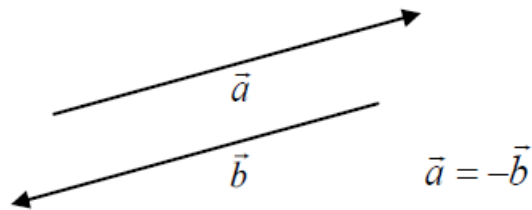


Колінеарні вектори є або співнапрямленими, або протилежно напрямленими.

Співнапрямлені вектори однакової довжини називаються рівними.



Протилежно напрямлені вектори однакової довжини називаються протилежними.

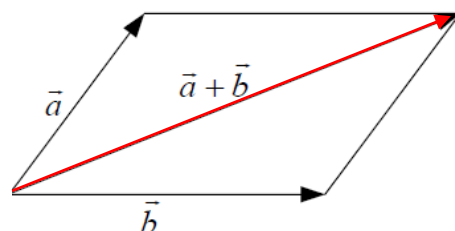
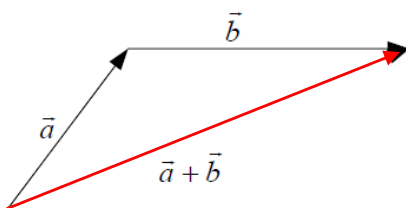


Вектори називаються *компланарними*, якщо вони лежать на одній площині, або на паралельних площинах.

## 1.2 Лінійні операції над векторами

У фізиці доволі часто використовується принцип суперпозиції і виникає потреба знаходити суму векторів. Вектори можна додавати та множити на дійсне число.

*Додавання векторів.* Вектори можна додавати за правилами геометричного (векторного) додавання. При додаванні векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  отримаємо вектор  $\vec{c}$ . Тобто,  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ . Для визначення напрямку і довжини вектора  $\vec{c}$  користуються правилами трикутника чи паралелограма:

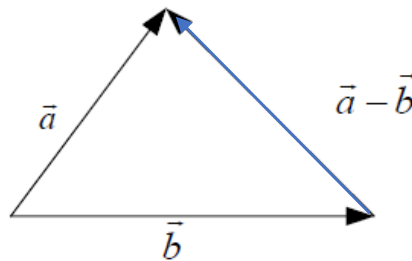


Якщо вектори мають спільний початок, то для їх додавання можна побудувати на цих векторах паралелограм, діагональ якого буде вектором суми векторів. Якщо ці вектори не мають спільного початку, то їх можна за допомогою паралельного перенесення привести до спільного початку.

*Множення вектора на число.* Добутком  $\alpha \vec{a} = \vec{b}$  (або  $\vec{a}\alpha$ ) ненульового вектора  $\vec{a}$  на ненульове дійсне число  $\alpha$  називається вектор  $\vec{b}$ , модуль якого дорівнює добутку модуля вектора  $\vec{a}$  на модуль числа  $\alpha$ , тобто  $|\alpha \vec{a}| = |\vec{a}\alpha| = |\vec{a}||\alpha|$ , і співнапрямлений з  $\vec{a}$ , якщо  $\alpha > 0$ , та протилежно напрямлений з  $\vec{a}$ , якщо  $\alpha < 0$ . Якщо  $\alpha=0$  або  $\vec{a} = 0$ , то  $\alpha \vec{a} = 0$ .

*Віднімання векторів.* Різницею  $\vec{a} - \vec{b}$  двох векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , перший із яких називається зменшуваним, а другий – від’ємником, називається вектор

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



### 1.3 Базис. Афінна система координат. Розкладення вектора по базису

*Базисом* простору називають систему векторів  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n$ , які є лінійно незалежними, за умови, що кожний вектор простору  $\vec{a}$  можна розкласти в лінійну комбінацію векторів даної системи :

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n.$$

Коефіцієнти  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  називають *координатами* вектора  $\vec{a}$  в базисі  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n$ , що записують так:  $\vec{a} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ .

*Лінійною комбінацією векторів  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$*  називають суму добутків цих векторів на довільні дійсні числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ :



$$\alpha_1 \vec{a_1} + \alpha_2 \vec{a_2} + \dots + \alpha_n \vec{a_n}$$

Лінійно незалежними є вектори  $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, \dots, \vec{a_n}$  у випадку, коли їх лінійна комбінація з числами  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  рівна нулю лише за умови, коли всі числа дорівнюють нулю.

Базис на площині утворюють два неколінеарні вектори, базис у просторі утворюють три некомпланарні вектори.

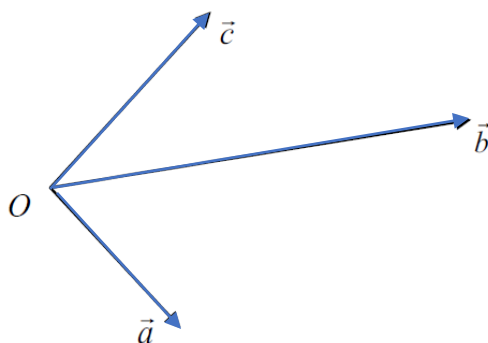
Розглянемо довільний базис у просторі – довільну трійку некомпланарних векторів  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . За визначенням базису для вектора  $\vec{d}$  мають бути такі дійсні числа  $\alpha, \beta, \gamma$ , що виконуватиметься рівність :

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$$

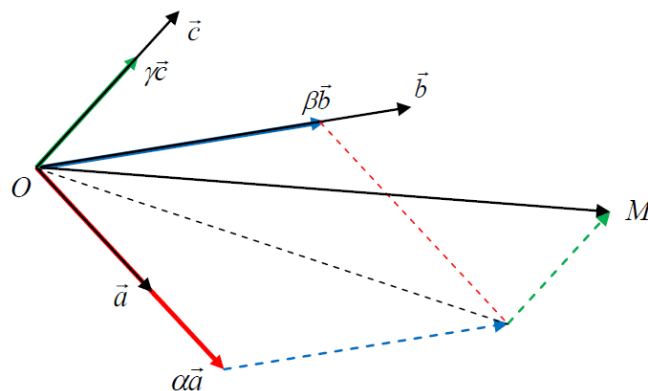
Ця рівність називається розкладом вектора  $\vec{d}$  за базисом  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . Числа  $\alpha, \beta, \gamma$  є координатами вектора:  $\vec{d}(\alpha, \beta, \gamma)$ , які визначаються однозначно відносно даного базису.

При додаванні двох векторів їх координати (відносно базису  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ) додаються. При множенні вектора на будь-яке число  $\alpha$  всі його координати помножуються на це число. У випадку площини мають місце аналогічні твердження.

Афінна система координат в просторі визначається заданням базису  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  і деякої точки  $O$ , яку називають початком координат.



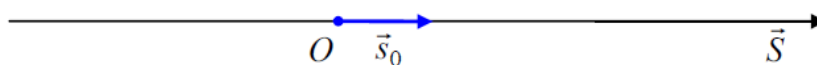
Афінними координатами довільної точки  $M$  називаються координати вектора  $\vec{OM}$  у даному базисі  $M(\alpha, \beta, \gamma)$ . Вектор  $\vec{OM}$  є радіус-вектором точки:



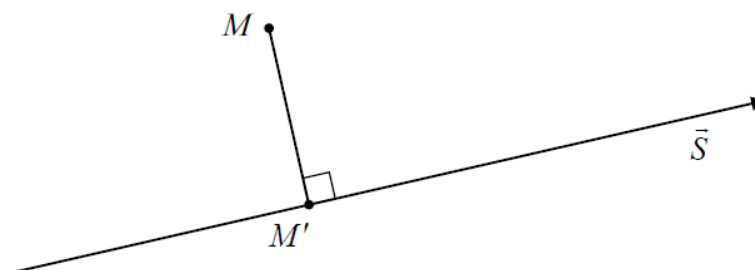
## 1.4 Добуток векторів у звичайному просторі

### 1.4.1 Складова вектора вздовж осі та проекція вектора на вісь

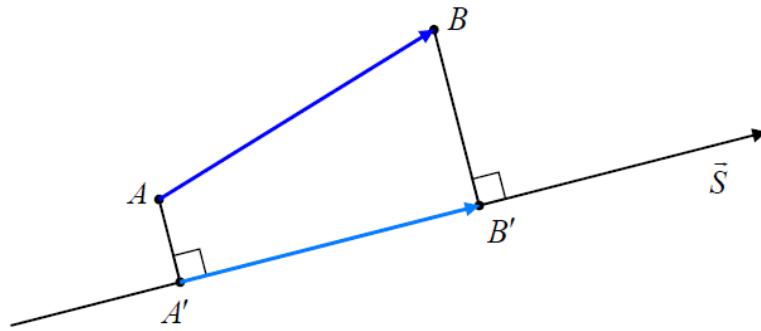
Пряма називається *віссю*  $\vec{S}$ , якщо на ній вибрано додатний напрям і одиницю довжини  $\vec{s}_0$  (орт осі).



Проекцією точки  $M$  на вісь  $\vec{S}$  називають основу перпендикуляра (точку  $M'$ ), опущеного з точки  $M$  на дану вісь.



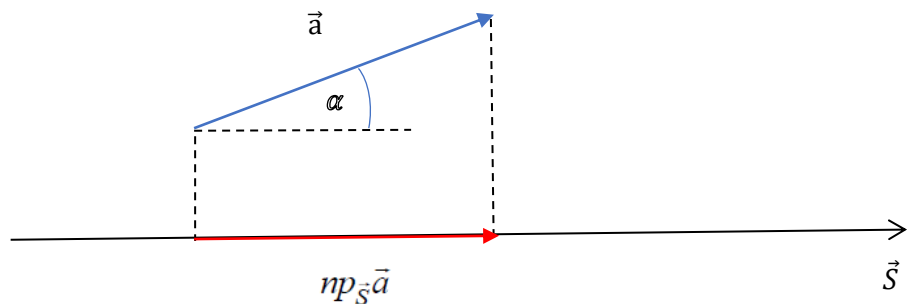
Складовою вектора  $\overrightarrow{AB}$  вздовж даної осі називають вектор  $\overrightarrow{A'B'}$ , який утворений проекціями точок  $A$  і  $B$  на вісь.



Довжина складової вектора  $\overrightarrow{AB}$  вздовж даної осі  $\vec{S}$  називається *проекцією вектора* на цю вісь:

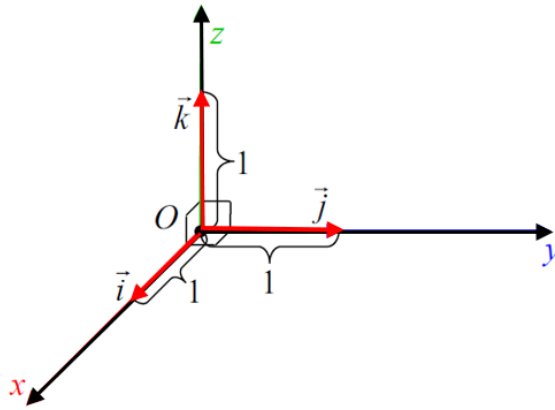
$$np_{\vec{S}} \overrightarrow{AB} = \begin{cases} |\overrightarrow{A'B'}|, & \overrightarrow{A'B'} \uparrow \uparrow \vec{S}, \\ -|\overrightarrow{A'B'}|, & \overrightarrow{A'B'} \uparrow \downarrow \vec{S}. \end{cases}$$

Значення проекції вектора:  $np_{\vec{S}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha$



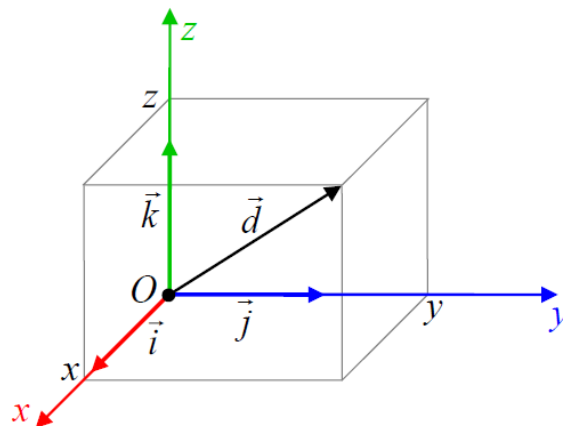
### 1.4.2 Декартова прямокутна система координат

Якщо базисні вектори афінної системи координат є одиничними і взаємно ортогональними, то така система координат називається *декартовою прямокутною системою координат*.



Вектори  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  є базисними векторами декартової прямокутної системи координат, ортами осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ . Відповідно, будь-який вектор  $\vec{d}$  може бути розкладеним за даним базисом:

$$\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z).$$



Проекції вектора  $\vec{d}$  на координатні осі визначають його декартові прямокутні координати  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , а вектори  $x\vec{i}$ ,  $y\vec{j}$ ,  $z\vec{k}$  є складовими вектора  $\vec{d}$  вздовж координатних осей.

Якщо  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – кути нахилу вектора  $\vec{d}$  до осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , можна визначити напрямні косинуси даного вектора:  $\cos\alpha$ ,  $\cos\beta$ ,  $\cos\gamma$ .

Корисні співвідношення.

Проекції вектора  $\vec{d}$  на осі:  $x = |\vec{d}| \cos\alpha$ ,  $y = |\vec{d}| \cos\beta$ ,  $z = |\vec{d}| \cos\gamma$ .

Довжина вектора  $\vec{d}$ :  $|\vec{d}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Напрямні косинуси вектора  $\vec{d}$ :

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Сума квадратів напрямних косинусів будь-якого вектора дорівнює одиниці:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Для векторів  $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$  справджуються залежності:

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2); \\ \vec{a} - \vec{b} &= (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2).\end{aligned}$$

Для вектора  $\vec{a}(x, y, z)$  та довільного числа  $\alpha$ :

$$\alpha \vec{a} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z).$$

Приклад.

Дано координати точок  $A(0; -1; 2)$ ,  $B(-1; 2; 2)$ . Визначити координати, довжину та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{AB}$ .

Розв'язок.

$$\overrightarrow{AB} = (-1 - 0; 2 - (-1); 2 - 2) = (-1; 2; 0);$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1 + 4 + 0} = \sqrt{5} = \sqrt{5};$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0.$$

### 1.4.3 Скалярний добуток векторів

Скалярний добуток векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  є числом і визначається як:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\angle \vec{a}, \vec{b})$$

Можна визначити скалярний добуток векторів як:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot \text{np}_{\vec{a}} \vec{b} \quad \text{або} \quad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{b}| \text{np}_{\vec{b}} \vec{a}.$$

Якщо визначені координати векторів  $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ , то скалярний добуток буде розрахований як:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Корисні співвідношення.

Умова перпендикулярності векторів  $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$  і  $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ :

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

Кут між векторами  $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$  і  $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ :

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Проекція вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$ :

$$\text{np}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

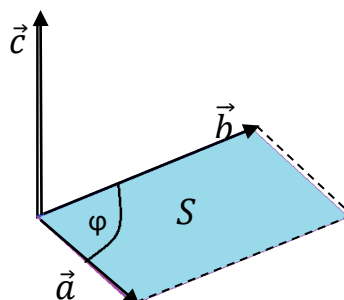
#### 1.4.4 Векторний добуток векторів

Векторний добуток векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  є вектором  $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$  або  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ,

модуль якого визначається як:

$$|\vec{c}| = |[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi.$$

Напрямок вектора  $\vec{c}$  :



Корисні співвідношення.

Необхідною і достатньою умовою колінеарності двох векторів є рівність нулю їх векторного добутку.

Модуль векторного добутку  $[\vec{a}, \vec{b}]$  рівний площі  $S$  паралелограма, який побудованого на векторах  $\vec{a}, \vec{b}$ , що мають спільний початок:

$$S = |\vec{a}, \vec{b}|.$$

Якщо визначені координати векторів  $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ , то векторний добуток буде розрахований як:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Умова колінеарності векторів  $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ :

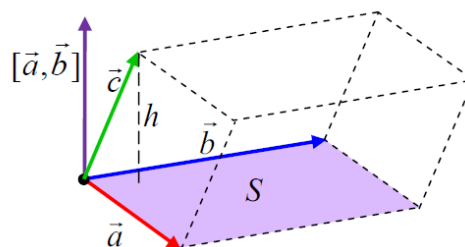
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

### 1.4.5 Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком векторів  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  є число  $\langle [\vec{a}, \vec{b}], \vec{c} \rangle$ , яке одержується внаслідок векторного множення вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$  та скалярного множення утвореного вектора на вектор  $\vec{c}$ .

Корисні співвідношення.

Об'єм паралелепіпеда, що побудований на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , які мають спільний початок, можна визначити як мішаний добуток цих векторів  $\langle [\vec{a}, \vec{b}], \vec{c} \rangle$ .



Справедливою є рівність -  $\langle [\vec{a}, \vec{b}], \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} [\vec{b}, \vec{c}] \rangle$ , тому векторний добуток позначають як  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ .

Якщо визначені координати векторів  $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ ,  $\vec{c}(x_3, y_3, z_3)$ , то векторний добуток буде *розрахований* як:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Необхідною і достатньою умовою *компланарності трьох векторів*  $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ ,  $\vec{c}(x_3, y_3, z_3)$  є рівність нулю визначника, рядками якого є координати цих векторів, тобто рівність:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

*Приклад розрахункового завдання 1.* За координатами точок  $A, B, C, D$ ,  $M$  знайдіть:

- 1) скалярний добуток векторів  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{AC}$ ;
- 2) векторний добуток векторів  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{AC}$ ;
- 3) мішаний добуток векторів  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ ;
- 4) висоту піраміди  $ABCD$ , проведену з вершини  $D$ ;
- 5) проекцію вектора  $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$  на вектор  $\overrightarrow{AD}$ ;
- 6) координати вектора  $\overrightarrow{AM}$  у базисі  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$  (якщо ці вектори утворюють базис).

$A (-1, 2, 4)$

$B (0, 5, 2)$

$C (1, 1, 7)$

$D (-2, 3, 1)$



M (1,2,3)

$$1) \quad \overrightarrow{AB} = (1, 3, -2), \overrightarrow{AC} = (2, -1, 3)$$

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 = 2 + (-3) + (-6) = -7.$$

$$2) \quad [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} +$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = (7, -7, -7).$$

$$3) \quad \overrightarrow{AD} = (-1, 1, -3)$$

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle = \langle (7, -7, -7), (-1, 1, -3) \rangle = 7 \cdot (-1) + (-7) \cdot 1 + (-7) \cdot (-3) \\ = (-7) + (-7) + 21 = 7$$

$$4) \quad |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \sqrt{(7)^2 + (-7)^2 + (-7)^2} = \sqrt{49 + 49 + 49} = 7\sqrt{3};$$

$$h = \frac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})}{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|} = \frac{|7|}{7 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$5) \quad \vec{a} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = (1, 3, -2) + (4, -2, 6) = (5, 1, 4)$$

$$\text{пр}_{\overrightarrow{AD}} \vec{a} = \frac{\langle \vec{a}, \overrightarrow{AD} \rangle}{|\overrightarrow{AD}|} = \frac{\langle (5, 1, 4), (-1, 1, -3) \rangle}{\sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (-3)^2}} = \frac{-5 + 1 + (-12)}{\sqrt{1 + 1 + 9}} = -\frac{16}{\sqrt{11}}$$

6) Оскільки  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \neq 0$ , ці вектори утворюють базис. Для знаходження координат вектора  $\overrightarrow{AM} = (2, 0, -1)$  в даному базисі розв'яжемо систему рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases}$$
$$(A, B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -3 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right).$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -7x_2 + 4x_3 = -6, \\ -x_3 = -3. \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{7}, \\ x_2 = \frac{18}{7}, \\ x_3 = 3. \end{cases} \quad \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{18}{7}\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AD}.$$

*Розрахункове завдання 1:*

За координатами точок  $A, B, C, D, M$  знайдіть:

- 1) скалярний добуток векторів  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{AC}$ ;
- 2) векторний добуток векторів  $\overrightarrow{AB}$  і  $\overrightarrow{AC}$ ;
- 3) мішаний добуток векторів  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ ;
- 4) висоту піраміди  $ABCD$ , проведену з вершини  $D$ ;
- 5) проекцію вектора  $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$  на вектор  $\overrightarrow{AD}$ ;
- 6) координати вектора  $\overrightarrow{AM}$  у базисі  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$  (якщо ці вектори утворюють базис).

|    |             |             |             |             |             |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1  | A(-2; 3; 1) | B(-1; 4; 3) | C(1; 0; 2)  | D(2; 3;-1)  | M(2; 3; 4)  |
| 2  | A(1; 3; 4)  | B(0; 2; 5)  | C(2; 4; 6)  | D(2; 5;-1)  | M(4; 3; 1)  |
| 3  | A(5;2; 4),  | B(4; 1; 3)  | C(6;-1; 1)  | D(3; 1; 2)  | M(2;-2; 4)  |
| 4  | A(3; 1; 4)  | B(2; 2; 1)  | C(1;-1; 2)  | D(4; 3; 2)  | M(-1; 2; 1) |
| 5  | A(2;-1; 4), | B(3; 2; 1)  | C(1;-3; 5), | D(4;-4; 7)  | M(1; 2; 4)  |
| 6  | A(-1; 2; 4) | B(0; 3; 1)  | C(1; 3; 2)  | D(2; 1; 5)  | M(-1; 2; 2) |
| 7  | A(3; 2;-1), | B(4;-1; 2)  | C(3; 1;-2)  | D(0; 3; 1)  | M(1;-1; 3)  |
| 8  | A(-3; 2; 1) | B(-2;-1; 2) | C(0; 1; 1)  | D(1; 0; 1)  | M(2; 1;-2)  |
| 9  | A(4; 2;-3)  | B(5;-1; 2)  | C(3; 1;-4)  | D(7; 1;-1)  | M(1; 2; 1)  |
| 10 | A(3;-1; 2)  | B(4; 1;-1)  | C(3;-3; 4)  | D(5; 2;-1)  | M(2; 1; 3)  |
| 11 | A(1; 3;-2)  | B(0; 2;-1)  | C(3; 2; 1)  | D(4; 2; 0)  | M(1; 2; 3)  |
| 12 | A(2; 1;-2)  | B(3; 2; 1)  | C(1; 3; 1)  | D(5; 2;-1)  | M(3; 2;-1)  |
| 13 | A(3; 4; 1)  | B(2; 1; 2)  | C(0;-1; 3)  | D(1; 2; 3)  | M(2; 3; 4)  |
| 14 | A(3; 6; 8)  | B(4; 7; 9)  | C(5; 9; 10) | D(0; 4; 6)  | M(-1; 3; 5) |
| 15 | A(3; 3;-3)  | B(2; 4;-4)  | C(5;-1;-5)  | D(6; 5; 0)  | M(4; 5;-2)  |
| 16 | A(1;-1;-3)  | B(2; 0; 2)  | C(4;-4; 1)  | D(-2; 3;-5) | M(4;-4;-2)  |
| 17 | A(3;-2;-2)  | B(4; 1;-1)  | C(5;-5;-3)  | D(-1;-3; 0) | M(1;-1; 0)  |
| 18 | A(9; 6; 3)  | B(10; 5; 4) | C(8; 5; 2), | D(6; 6; 3), | M(7; 4; 1)  |

|    |             |             |             |             |             |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 19 | A(5; 2; 7)  | B(4; 3; 7)  | C(4;-1; 8)  | D(7; 5; 6)  | M(5;-2; 5)  |
| 20 | A(8; 7; 6)  | B(9; 8; 5)  | C(6; 2; 4)  | D(8; 5; 4)  | M(3; 6; 7)  |
| 21 | A(0; 2;-1)  | B(1; 5; 2)  | C(5; 3; 3)  | D(3;-1; 1)  | M(-2; 1; 3) |
| 22 | A(5; 1;-1)  | B(4; 3;- 2) | C(2; 2;-3)  | D(-4; 5; 0) | M(6; 0; 4)  |
| 23 | A(2; 0; 3)  | B(5; 2;-2)  | C(-1; 4;-1) | D(0; 7;-2)  | M(7;-3; 1)  |
| 24 | A(3;-3;-2)  | B(0; 1;-3)  | C(-1;-1; 3) | D(-5; 8;-1) | M(-3; 4; 0) |
| 25 | A(2; 1; 1)  | B(-5; 0; 1) | C(0; 4; 3)  | D(-4; 1;-2) | M(-2; 2;-2) |
| 26 | A(1; 3; 2)  | B(2; 5; 0)  | C(1; 2; 3)  | D(0; 3;-1)  | M(2; 1; 1)  |
| 27 | A(-1; 1; 2) | B(0; 4; 1)  | C(2; 0; 3)  | D(1; 3;1)   | M(4; 1; 3)  |
| 28 | A(2; 1;-3)  | B(3; 5; 2)  | C(1; 0;-2)  | D(4; 2;-1)  | M(2; 3; 1)  |
| 29 | A(1;-1; 2)  | B(2; 3; 3)  | C(4; 1;-1)  | D(0;-1; 3)  | M(1; 2; 3)  |
| 30 | A(-2; 1; 2) | B(-1; 2; 4) | C(1; 4;-1)  | D(2;-1; 3)  | M(2; 5; 1)  |

## 2. Пряма на площині

Пряма на площині може бути задана різними способами. Кожному способу задання в декартовій прямокутній системі координат відповідає певне рівняння прямої.

### 2.1 Рівняння прямої, заданої точкою і нормальним вектором

Розглянемо на площині прямокутну декартову систему координат. Відносно неї положення прямої  $l$  визначатиметься точкою  $M_0(x_0, y_0)$ , через яку ця пряма проходить, і відмінним від нуля вектором  $n=(A,B)$ , перпендикулярним до прямої.

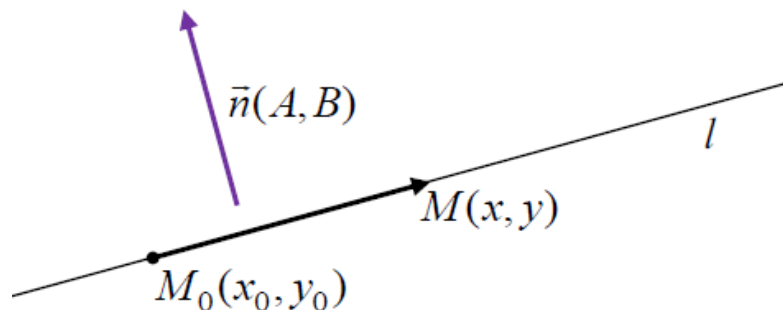
Будь який ненульовий вектор, перпендикулярний даній прямій, називається її *нормальним вектором*. Оскільки всі нормальні вектори прямої є колінеарними, то певний з них отримують шляхом множення іншого на

число, не рівне нулю, тобто відповідні координати векторів пропорційні. Це означає, що вектор  $n$  вибирається неоднозначно.

Якщо вибрати на прямій  $l$  довільну точку  $M(x; y)$ , то можна розглянути вектори  $\overrightarrow{MM_0}$  і  $\vec{n}$ . Ці вектори перпендикулярні, тому їх скалярний добуток ( $\overrightarrow{MM_0}, \vec{n} = 0$ ). З даних міркувань отримуємо векторне рівняння прямої. Оскільки  $\vec{n} = (A, B)$ ,  $\overrightarrow{MM_0} = (x - x_0; y - y_0)$ , то

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Рівняння називається *рівнянням прямої, заданої точкою і нормальним вектором*.



## 2.2 Загальне рівняння прямої

Розглянемо рівняння прямої, заданої точкою і нормальним вектором. При розкритті дужок в цьому рівнянні отримуємо:

$$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0.$$

Позначимо  $-Ax_0 - By_0 = C$ , тоді рівняння набуде вигляду:

$$Ax + By + C = 0.$$

Рівняння називається *загальним рівнянням прямої* на площині з нормальним вектором  $n = (A, B)$  ( $A, B \neq 0$  одночасно).

Окремі випадки розташування прямої на площині:

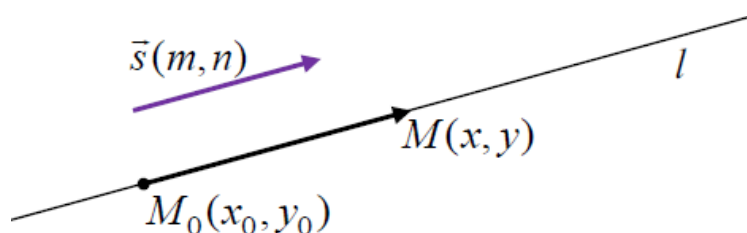
- якщо  $C = 0$ , то рівняння має вигляд  $Ax + By = 0$ . Відповідно, пряма проходить через початок координат, тобто  $O(0, 0) \in l$ ;

- якщо  $B = 0$  ( $A \neq 0$ ), то рівняння має вигляд  $Ax + C = 0 \Rightarrow x = -\frac{C}{A}$  – пряма паралельна вісі  $Oy$ ;
- якщо  $A = 0$  ( $B \neq 0$ ), то рівняння має вигляд  $Bx + C = 0 \Rightarrow x = -\frac{C}{B}$  – пряма паралельна вісі  $Ox$ ;
- якщо  $B = C = 0$  ( $A \neq 0$ )  $\Rightarrow x = 0$  – пряма співпадає з віссю  $Oy$ ;
- якщо  $A = C = 0$  ( $B \neq 0$ )  $\Rightarrow y = 0$  – пряма співпадає з віссю  $Ox$ .

### 2.3 Рівняння прямої, яка проходить через задану точку паралельно заданому вектору

Напишемо рівняння прямої  $l$  на площині відносно вибраної системи координат, якщо відомі точка  $M_0(x_0; y_0) \in l$  і вектор  $\vec{S}(m; n)$ , паралельний цій прямій (рис.2). Будь який ненулевой вектор, який паралельний даній прямій, називається її *напрямним вектором*. Оскільки всі напрямні вектори прямої є колінеарними, то будь-який з них отримують множенням іншого на число, відмінне від нуля, тобто відповідні координати векторів пропорційні. Отже, вектор  $s$  вибирається неоднозначно.

Напишемо рівняння прямої  $l$ .



Нехай точка  $M(x; y)$  є довільною точкою прямої. Тоді вектор  $\overrightarrow{MM_0} = (x - x_0; y - y_0)$ , що належить цій прямій, буде колінеарним вектору  $\vec{S} = (m; n)$ . З колінеарності векторів слідує пропорційність відповідних координат, тобто

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}.$$

Рівність називається *канонічним рівнянням прямої на площині*.

## 2.4. Параметричні рівняння прямої

Із колінеарності векторів  $\vec{S}$  і  $\overrightarrow{MM_0}$  випливає існування параметра  $t \in \mathbb{R}$  ( $t \neq 0$ ), такого, що  $\overrightarrow{MM_0} = t \cdot \vec{S}$  або  $(x - x_0; y - y_0) = t \cdot (m, n)$ . Відповідно, –  
 $x - x_0 = t \cdot m, y - y_0 = t \cdot n$

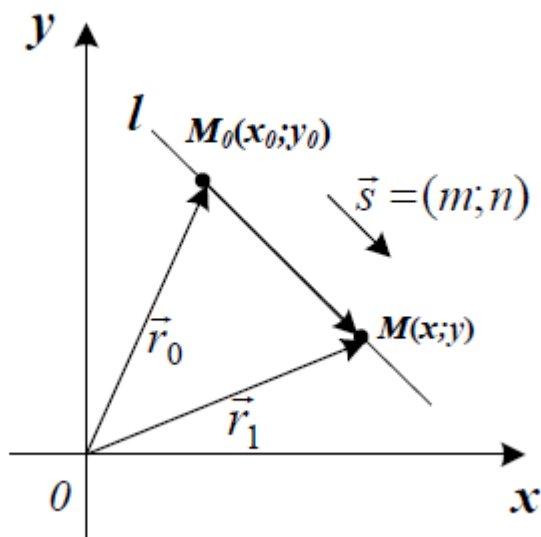
Отже,

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot m \\ y = y_0 + t \cdot n \end{cases}$$

Рівняння називають *параметричними рівняннями прямої*  $l$ , яка проходить через точку  $M_0(x_0, y_0)$  паралельно вектору  $\vec{S} = (m; n)$ .

## 2.5 Векторне рівняння прямої

Нехай задана точка  $M_0(x_0; y_0)$  належить прямій  $l$ , ненульовий вектор  $\vec{S} = (m; n)$  паралельний прямій.



Нехай точка  $M$  належить прямій  $l$ . Тоді вектори  $\overrightarrow{M_0M}$  і  $\vec{S}$  є колінеарними, і для них справедлива рівність:

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{S}$$

де  $t \in \mathbb{R}$  – числовий множник.

Нехай  $\overrightarrow{r_{M_0}} = \overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{OM_0} = (x_0, y_0)$ , а  $\overrightarrow{r_M} = \overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y)$ . З рисунку 3 можна визначити,  $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{r_0} + t\vec{s}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . що

Звідси:  $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + t\vec{s}$ .

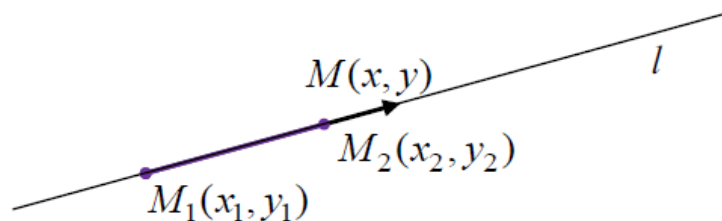
Це є векторне параметричне рівняння прямої.

## 2.6 Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки

Напишемо рівняння прямої, що проходить через дві дані точки  $M_1(x_1, y_1)$  і  $M_2(x_2, y_2)$ . Розглянемо довільну точку  $M(x, y)$  даної прямої (рис. 4). Вектори  $\overrightarrow{M_1M}$  і  $\overrightarrow{M_1M_2}$  колінеарні, а, отже, координати цих векторів пропорційні:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Це є рівняння прямої, що проходить через дві дані точки.



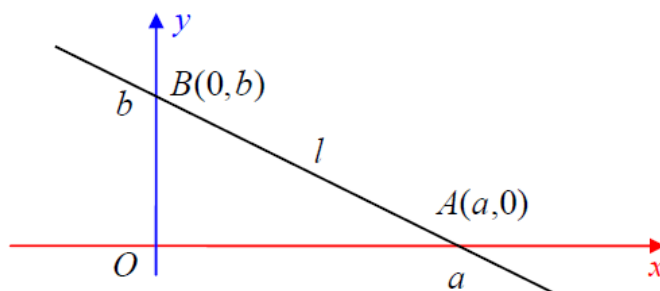
## 2.7 Рівняння прямої у відрізках по осях

Якщо пряма  $l$  на площині не проходить через початок координат і не є паралельною жодній з координатних осей, то коефіцієнти в загальному рівнянні відмінні від нуля.

Рівнянням прямої  $l$ , яка проходить через точки  $A(a; 0)$  і  $B(0; b)$ , є вираз:

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0} \Rightarrow \frac{x-a}{-a} = \frac{y}{b} \Rightarrow \frac{x}{-a} + 1 = \frac{y}{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



## 2.8 Рівняння прямої, що проходить через дану точку, з даним кутовим коефіцієнтом

Канонічне рівняння можна записати у вигляді:  $y - y_0 = \frac{n}{m}(x - x_0)$

Коефіцієнт  $\frac{n}{m} = k = \operatorname{tg} \alpha$  є кутовим коефіцієнтом прямої  $l$ . Тут  $\alpha$  – кут між прямою і додатнім напрямом осі  $Ox$ .

Відповідно, рівняння прямої, що проходить через точку  $M_0(x_0, y_0)$  і має кутовий коефіцієнт  $k$  є вираз:

$$y - y_0 = \frac{n}{m}x - \frac{n}{m}x_0 \Rightarrow y = y_0 + \frac{n}{m}x - \frac{n}{m}x_0 \Rightarrow y = \frac{n}{m}x + \left(y_0 - \frac{n}{m}x_0\right)$$

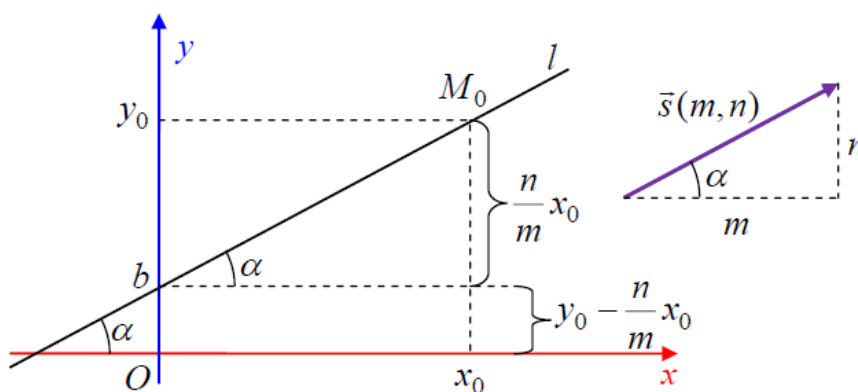
Точку перетину прямої з віссю ординат позначають:

$$y_0 - \frac{n}{m}x_0 = b$$

Рівняння можна записати остаточно як

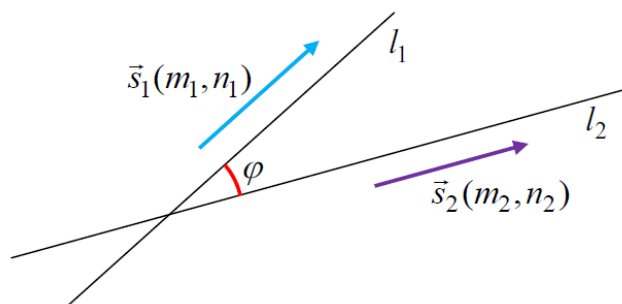
$$y = kx + b.$$





## 2.9 Взаємне розташування прямих на площині

Кут між напрямними векторами двох прямих визначає *кут між прямими*. Проте, якщо вибрати на одній із прямих напрямний вектор, направлений в протилежну сторону, то отримаємо другий кут, який доповнює перший до  $180^\circ$ .



На основі рівнянь визначимо умови *паралельності та перпендикулярності двох прямих*:

1) прямі задано канонічними рівняннями:

$$l_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} \text{ та } l_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2},$$

то

– кут між прямими можна розрахувати за формулою

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{s}_1, \vec{s}_2 \rangle}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}; \quad ,$$

- умова паралельності прямих ( $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$  - колінеарні) :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2};$$

- умова перпендикулярності прямих ( $(M_0(x_0; y_0), \vec{s}_2) = 0$ ):

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

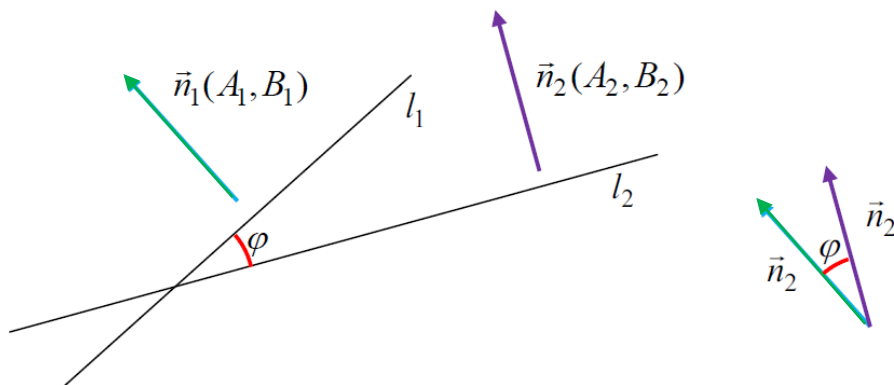
- 2) прямі задано загальними рівняннями:

$$l_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad l_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$

Відповідно, нормальні вектори прямих -  $\vec{n}_1(A_1, B_1)$  та  $\vec{n}_2(A_2, B_2)$

і

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$



- умова паралельності прямих ( $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ ) :

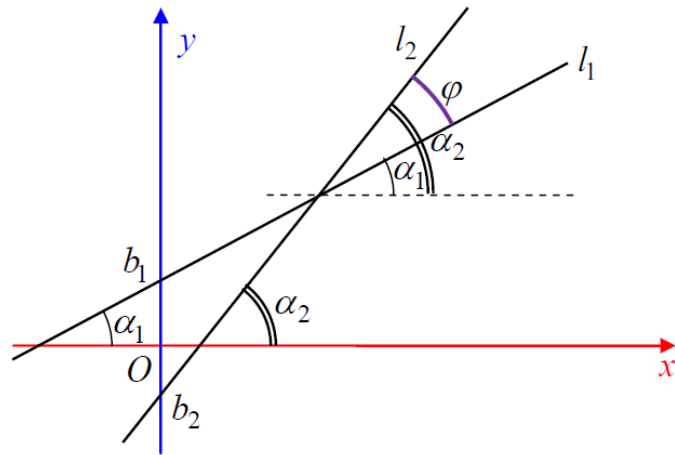
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2};$$

- умова перпендикулярності прямих ( $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$ ):

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

- 3) прямі задано рівняннями з кутовими коефіцієнтами

$$l_1 : y = k_1 x + b_1, \quad l_2 : y = k_2 x + b_2,$$



Тоді

$$- \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

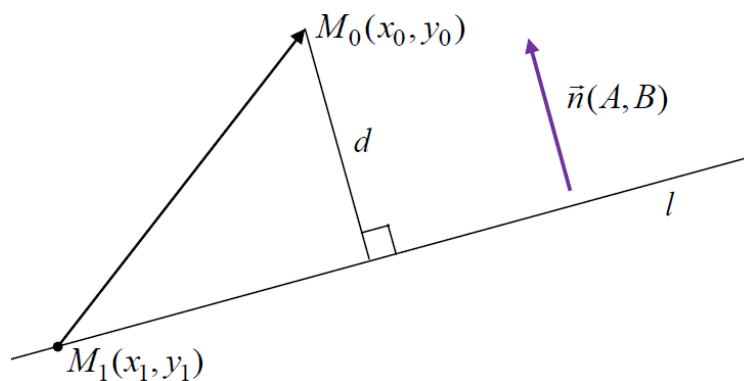
$$- \quad l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \varphi = 0 \Leftrightarrow k_2 = k_1$$

$$- \quad l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

*Відстань від точки до прямої* визначимо наступним чином:

розглянемо пряму  $l$ , рівняння якої  $Ax + By + C = 0$ , і точку  $M_0(x_0; y_0)$ .

Відстань  $d$  від точки  $M_0$  до прямої  $l$  рівна модулю проекції вектора  $\overrightarrow{M_1 M_0}$ , де  $M_1(x_1; y_1)$  є точкою прямої  $l$ , на напрям вектора нормалі  $\vec{n}(A; B)$  до  $l$ .



$$d = \left| np_{\vec{n}} \overline{M_1 M_0} \right| = \frac{\left| \overline{M_1 M_0} \cdot \vec{n} \right|}{|\vec{n}|} = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + (-Ax_1 - By_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_1 + By_1 + C = 0|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

*Приклад розрахункового завдання 2.* За координатами вершин трикутника знайдіть:

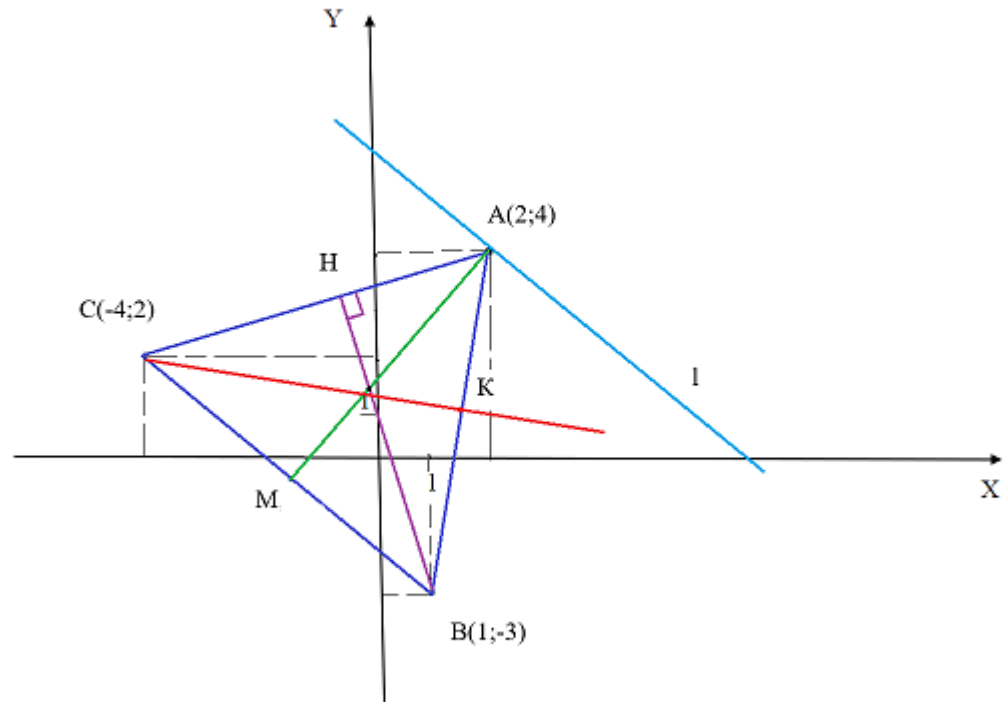
- 1) рівняння прямих, яким належать сторони АВ, ВС, АС;
- 2) рівняння медіани АМ;
- 3) рівняння висоти ВН;
- 4) координати точки перетину АМ і ВН;
- 5) рівняння прямої l, яка проходить через точку А і є паралельною стороні ВС, знайдіть відстань між цими прямими;
- 6) рівняння бісектриси СК.

A(2;4)

B(1;-3)

C(-4;2)

Побудуємо рисунок до задачі:



$$1) (AB): \frac{x-2}{1-2} = \frac{y-4}{-3-4} \rightarrow -7x + y + 10 = 0$$

$$(BC): \frac{x-1}{-4-1} = \frac{y-(-3)}{2-(-3)} \rightarrow x + y + 2 = 0$$

$$(AC): : \frac{x-2}{-4-2} = \frac{y-4}{2-4} \rightarrow -x + 3y - 10 = 0$$

2) для знаходження рівняння медіани AM визначаємо координати середини сторони BC:

$$x_M = \frac{1-4}{2}; y_M = \frac{-3+2}{2} \quad \Longrightarrow \quad M(-1,5;-0,5).$$

$$\text{Рівняння медіани (AM): } \frac{x-2}{-1,5-2} = \frac{y-4}{-0,5-4} \rightarrow -9x + 7y - 10 = 0$$

3) для знаходження рівняння висоти (BH) визначаємо її нормальний вектор, який є напрямним вектором сторони AC:

$$\overrightarrow{n_{BH}} = \overrightarrow{AC} = (-4 - 2; 2 - 4) = (-6; -2);$$

$$\text{Рівняння висоти (BH): } (-6)(x-1) + (-2)(y-(-3)) = 0; -3x - y = 0;$$

4) координати точки перетину медіани (AM) і висоти (BH):

$$\begin{cases} -9x_1 + 7x_2 = 10 \\ -3x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

5) рівняння прямої  $l$ , яка проходить через точку  $A$  і є паралельною стороні  $BC$ , визначимо за напрямним вектором прямої  $(BC)$ :

$$\vec{s}_l = \vec{BC} = (-4 - 1; 2 - (-3)) = (-5; 5) \rightarrow$$

$$l: \frac{x - 2}{-5} = \frac{y - 4}{5} \rightarrow x + y - 6 = 0$$

Відстань між прямими  $l$  і  $(BC)$  знайдемо як відстань від точки  $B$  до прямої  $l$ :

$$d = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + (-6)|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \frac{|1 - 3 - 6|}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

6) Для визначення рівняння бісектриси  $CK$  знайдемо координати точки  $K$  за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

З властивості бісектриси внутрішнього кута трикутника:

$$\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|CA|}{|CB|} = \lambda$$

$$\vec{CA} = (6; 2), |\vec{CA}| = 2\sqrt{10}$$

$$\vec{CB} = (5; -5), |\vec{CB}| = 5\sqrt{2}$$

Отже,

$$\lambda = \frac{2\sqrt{10}}{5\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Знаходимо координати точки  $K$ :

$$x = \frac{2 + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 1}{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{2\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} + 2}$$

$$y = \frac{4 - 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{4\sqrt{5} - 6}{\sqrt{5} + 2}$$

Рівняння прямої (СК):

$$\frac{x - (-4)}{\frac{2\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} + 2} - (-4)} = \frac{y - 2}{\frac{4\sqrt{5} - 6}{\sqrt{5} + 2} - 2} \rightarrow$$

$$\frac{x + 4}{3 + \sqrt{5}} = \frac{y - 2}{1 - \sqrt{5}}$$

*Розрахункове завдання 2:*

За координатами вершин трикутника знайдіть:

- 1) рівняння прямих, яким належать сторони АВ, ВС, АС;
- 2) рівняння медіани АМ;
- 3) рівняння висоти ВН;
- 4) координати точки перетину АМ і ВН;
- 5) рівняння прямої l, яка проходить через точку А і є паралельною стороні ВС, знайдіть відстань між цими прямими;
- 6) рівняння бісектриси СК.

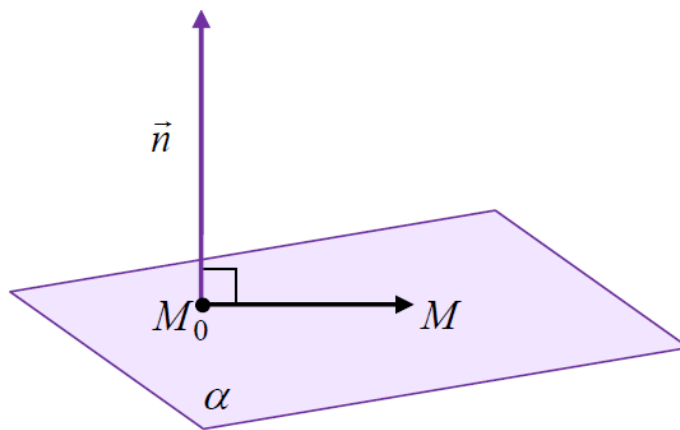
|    |            |            |            |    |            |            |           |
|----|------------|------------|------------|----|------------|------------|-----------|
| 1  | A(7, -1),  | B(0, -2),  | C(-1, 5).  | 16 | A(4, 5),   | B(3, -2),  | C(-5, 2). |
| 2  | A(7, -2),  | B(1, 1),   | C(7, 7).   | 17 | A(3, 5),   | B(2, -3),  | C(-3, 2). |
| 3  | A(-1, -5), | B(3, -2),  | C(-5, 4).  | 18 | A(4, 7),   | B(3, 0),   | C(-2, 5). |
| 4  | A(-4, 4),  | B(2, 0),   | C(5, 4).   | 19 | A(1, 6),   | B(3, -2),  | C(-7, 4). |
| 5  | A(7, -2),  | B(0, -3),  | C(-1, 4).  | 20 | A(4, 3),   | B(1, -1),  | C(-5, 3). |
| 6  | A(5, 3),   | B(4, -4),  | C(-4, 0).  | 21 | A(1, 4),   | B(0, -4),  | C(-5, 1). |
| 7  | A(7, 1),   | B(0, 2),   | C(4, 5).   | 22 | A(3, -2),  | B(-3, 1),  | C(3, 7).  |
| 8  | A(8, -1),  | B(-6, 1),  | C(2, 7).   | 23 | A(3, 3),   | B(5, -5),  | C(-5, 1). |
| 9  | A(0, 6),   | B(4, 3),   | C(-4, -3). | 24 | A(6, 5),   | B(5, -2),  | C(0, 3).  |
| 10 | A(6, 1),   | B(-1, 0),  | C(-2, 7).  | 25 | A(7, -2),  | B(-1, -2), | C(7, 4).  |
| 11 | A(5, 6),   | B(-1, 0),  | C(5, -3).  | 26 | A(6, 1),   | B(-1, 2),  | C(0, 9).  |
| 12 | A(-2, 6),  | B(4, 5),   | C(0, -1).  | 27 | A(-10, 5), | B(0, -1),  | C(-2, 7). |
| 13 | A(8, 7),   | B(3, 2),   | C(-1, 10). | 28 | A(1, 0),   | B(7, 3),   | C(3, -3). |
| 14 | A(7, 1),   | B(3, -5),  | C(-1, 1).  | 29 | A(1, 3),   | B(8, 4),   | C(6, -2). |
| 15 | A(-2, 3),  | B(-5, -1), | C(-1, -4). | 30 | A(2, 2),   | B(8, 1),   | C(6, 7).  |

### 3. Площина у просторі

#### 3.1 Загальне рівняння площини

Положення площини  $\alpha$  у просторі цілком визначається точкою  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  і вектором  $\vec{n}(A; B; C)$ , що перпендикулярний до даної площини. Вектор  $\vec{n}$  називається нормальним вектором площини.

Площина  $\alpha$  задана у декартовій прямокутній системі координат  $Oxyz$ . Довільна точка  $M(x; y; z)$  належатиме даній площині лише за умови, коли вектор  $\overrightarrow{M_0M}$  буде перпендикулярним до вектора  $\vec{n}$ .



$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Rightarrow \langle \overrightarrow{M_0M}, \vec{n} \rangle = 0, \\ \overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \\ \vec{n} = (A, B, C) \end{array} \right\} \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Отримане рівняння є рівнянням площини  $\alpha$ , яка проходить через точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  і перпендикулярна вектору  $\vec{n}(A; B; C)$ .

Дане рівняння можна перетворити у загальне рівняння площини:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Дослідимо загальне рівняння площини:

1. Якщо  $D=0$ , то загальне рівняння площини набуває вигляду  $Ax + By + Cz = 0$ . Така площина проходить через початок координат.



2. Якщо  $A=0$ , то загальне рівняння площини набуває вигляду  $Bu + Cz + D = 0$ . Площина є паралельною до вісі  $Ox$ . Якщо  $B=0$ , то загальне рівняння площини набуває вигляду  $Ax + Cz + D = 0$ . Така площина, отже площина паралельна до осі  $Oy$ . Якщо  $C=0$ , то загальне рівняння площини набуває вигляду  $Ax + Bu + D = 0$ . Координати нормального вектора такої площини  $\vec{n}(A; B; 0)$ , отже площина паралельна до осі  $Oz$ .

3. Якщо  $A=B=0$ , а  $C \neq 0$ ,  $D \neq 0$ , то загальне рівняння площини набуває вигляду  $-Cz + D = 0$  і є рівнянням площини, паралельної до площини  $xOy$ . Якщо  $B=C=0$ , а  $A \neq 0$ ,  $D \neq 0$ , то загальне рівняння площини набуває вигляду  $-Ax + D = 0$  і є рівнянням площини, паралельної до площини  $yOz$ . Якщо  $A=C=0$ , а  $B \neq 0$ ,  $D \neq 0$ , то загальне рівняння площини набуває вигляду  $-Bu + D = 0$  і є рівнянням площини, паралельної до площини  $xOz$ .

*Приклад.* Скласти рівняння площини, що проходить через точку  $M(1;2;3)$  перпендикулярно до вектора  $\vec{n}(-1; -3; 3)$ .

Розв'язок:

рівняння площини, що проходить через дану точку перпендикулярно до вектора  $\vec{n}(A; B; C)$ :

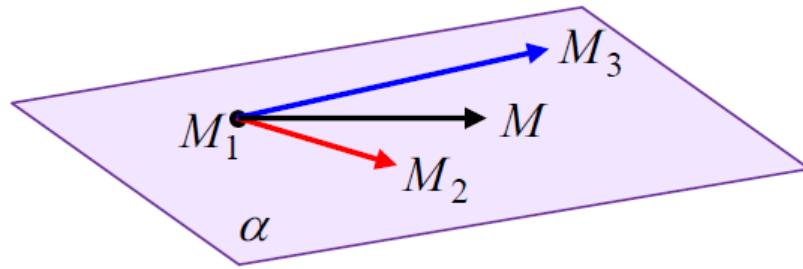
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

За умовою задачі:  $-1(x - 1) - 3(y - 2) + 3(z - 3) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -x + 1 - 3y + 6 + 3z - 9 = 0 \Rightarrow -x - 3y + 3z - 2 = 0 \Rightarrow x + 3y - 3z + 2 = 0.$$

### **3.2 Рівняння площини, що проходить через три точки. Рівняння площини у відрізках по осях**

Площину можна однозначно визначити трьома заданими точками  $M_1(x_1; y_1; z_1)$ ,  $M_2(x_2; y_2; z_2)$ ,  $M_3(x_3; y_3; z_3)$ , що не лежать на одній прямій.

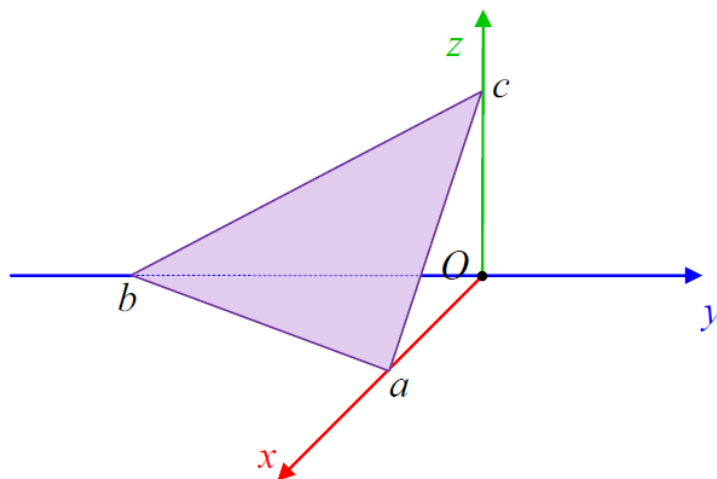


На площині виберемо довільну точку  $M(x; y; z)$ . Побудуємо вектори  $\overrightarrow{M_1M}(x - x_1; y - y_1; z - z_1)$ ,  $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$   $\overrightarrow{M_1M_3}(x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$ . Оскільки вектори є компланарними, їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\overrightarrow{M_1M} \overrightarrow{M_1M_2} \overrightarrow{M_1M_3} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Це є рівняння площини, що проходить через три точки.

Окремим є випадок, коли площина перетинає координатні осі у точках  $(a; 0; 0)$ ,  $(0; b; 0)$ ,  $(0; 0; c)$ .



Рівняння такої площини можна записати у вигляді:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow xbc + yac + zab - abc = 0 \Rightarrow .$$

$$\Rightarrow xbc + yac + zab = abc .$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Це є рівняння площини у відрізках по осях.

*Приклад.* Скласти загальне рівняння площини, що проходить через точки  $M_1(1; 2; 3)$ ,  $M_2(-1; 0; 2)$   $M_3(-2; 1; 0)$ .

Розв'язок:

рівняння площини, що проходить через три точки має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 .$$

За умовою задачі:

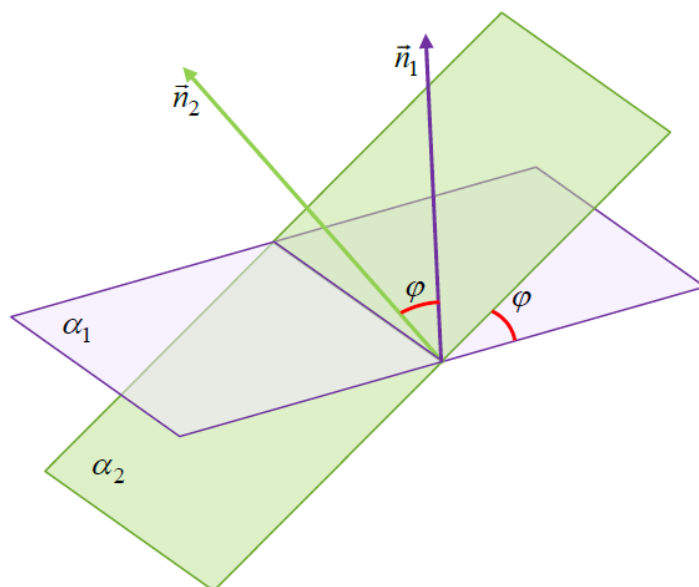
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1-1 & 0-2 & 2-3 \\ -2-1 & 1-2 & 0-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5(x-1) - 3(y-2) - 4(z-3) = 0$$

$$\Rightarrow 5x - 5 - 3y + 6 - 4z + 12 = 0 \Rightarrow 5x - 3y - 4z + 13 = 0 .$$

### 3.3 Взаємне розташування площин

Двогранний кут між двома площинами, заданими рівняннями  $\alpha_1 = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  та  $\alpha_2 = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ , вимірюється лінійним кутом між нормальними векторами цих площин  $\vec{n}_1(A_1; B_1; C_1)$  і  $\vec{n}_2(A_2; B_2; C_2)$ :

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$



*Умови паралельності та перпендикулярності площин:*

Якщо площини  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  перпендикулярні, то  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ . Отже, умова перпендикулярності двох площин -  $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ .

Якщо площини  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  паралельні, то  $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ . Умовою паралельності площин є:  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ .

*Приклад.* Знайти кут між площинами  $x - 2y + 4z - 3 = 0$  і  $2x + 4y - z + 5 = 0$ .

Розв'язок:

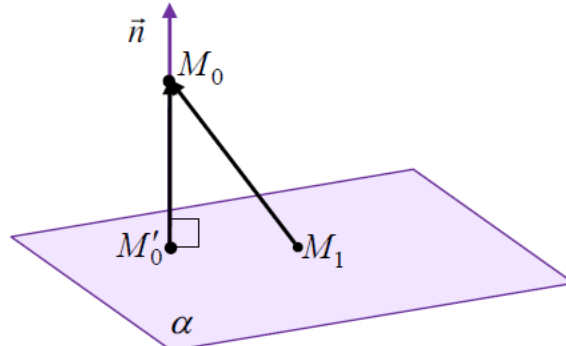
Для заданих площин спершу визначимо координати нормальних векторів:

$$\vec{n}_1 = (1; -2; 4); \vec{n}_2 = (2; 4; -1),$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 + 4 \cdot (-1)}{\sqrt{1+4+16} \cdot \sqrt{4+16+1}} = \frac{-10}{21}, \quad \varphi = \arccos\left(-\frac{10}{21}\right).$$

*Відстань від точки до площини*, якій ця точка не належить, визначають за рівнянням площини і координатами даної точки.

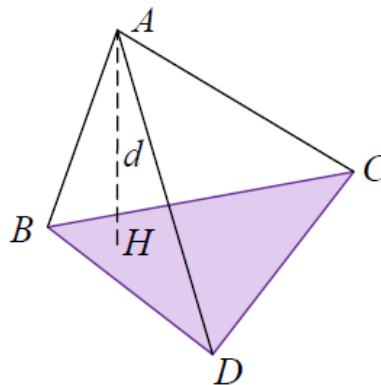
Якщо відоме рівняння площини  $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$  і координати точки  $M_0(x_0; y_0; z_0)$ , що не лежить в цій площині, то відстань  $d$  між ними можна визначити так:



$$\begin{aligned}
 d &= \left| \text{np}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1 M_0} \right| = \frac{|\overrightarrow{M_1 M_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \\
 &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + (-Ax_1 - By_1 - Cz_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \\
 &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \Rightarrow \\
 d &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.
 \end{aligned}$$

*Приклад.* Знайти висоту  $AH$  піраміди, яка задана точками з  $A(-1; 2; -1)$ ,  $B(1; 0; 2)$ ,  $C(0; 1; -1)$ ,  $D(2; 0; -1)$ . координатами:

Розв'язок:



Запишемо рівняння площини, що проходить через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-3)(-3) - 6y + (z-2)(-1) = 0 \Rightarrow -3x - 6y - z + 5 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3x + 6y + z - 5 = 0.$$

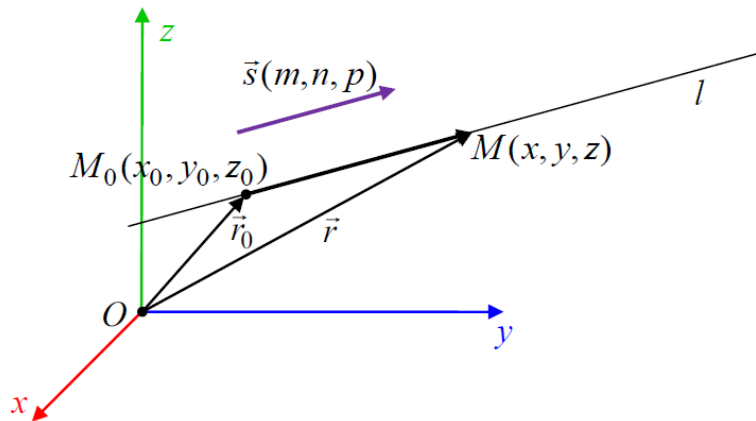
Висота піраміди  $AH$  рівна відстані від точки  $A$  до площини  $BCD$ :

$$AH = d = \frac{3 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) - 5}{\sqrt{9 + 36 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{46}}.$$

## 4. Пряма у просторі

### 4.1 Канонічне рівняння прямої у просторі

Положення прямої у просторі буде визначене, якщо відомі координати точки  $M_0(x_0; y_0; z_0)$ , через яку вона проходить і ненульовий вектор  $\vec{s}(m; n; p)$ , що паралельний даній прямій. Вектор  $\vec{s}$  називається напрямним вектором прямої.



Виберемо довільну точку  $M(x; y; z)$  даної прямої і розглянемо вектор  $\overrightarrow{MM_0} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ . Вектори  $\vec{s}$  і  $\overrightarrow{MM_0}$  паралельні, тому координати будь-якої точки прямої, з умови колінеарності векторів, задовольняють співвідношення:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad .$$

Це є канонічне рівняння прямої.

## 4.2 Параметричне рівняння прямої

Довільну точку прямої  $M(x; y; z)$  можна визначити у просторі радіус-вектором  $\vec{r}(x; y; z)$ , а  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  -  $\vec{r}_0(x_0; y_0; z_0)$ . Тоді

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{s},$$

де  $t$  – параметр.

Дане рівняння називається *векторно-параметричним рівнянням прямої*.

У розгорнутому вигляді рівняння має вигляд:

$$\vec{r} = (x_0 + mt; y_0 + nt; z_0 + pt).$$

Порівняння відповідних координат дозволяє записати *параметричне рівняння прямої*:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

## 4.3 Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Рівняння *прямої, що проходить через дві дані точки*  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  і  $M_2(x_2; y_2; z_2)$  можна записати на основі канонічного рівняння прямої, вважаючи вектор  $\overrightarrow{M_1M_2}$  напрямним:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad .$$

## 4.4 Загальне рівняння прямої у просторі

Пряму в просторі можна задати як перетин двох площин. Дві площини, що не є паралельні, перетинаються по прямій. Отже, система із рівнянь двох

площин, нормальні вектори яких не колінеарні, визначає в просторі пряму лінію:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Цю систему називають *загальним рівнянням прямої*.

Для переходу від загального рівняння прямої в просторі до канонічного рівняння необхідно знайти точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , що належить даній прямій і координати напрямного вектора цієї прямої.

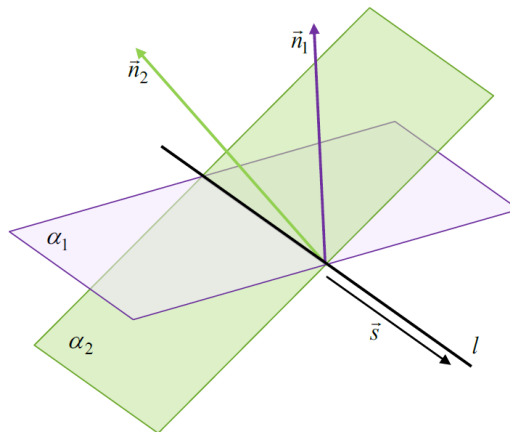
Для знаходження координат точки  $M_0$  одну із координат, наприклад  $x_0$ , вибирають довільно, а інші визначають із системи:

$$\begin{cases} B_1y_0 + C_1z_0 = -D_1 - A_1x_0', \\ B_2y_0 + C_2z_0 = -D_2 - A_1x_0'. \end{cases}$$

Дана система має розв'язок за умови:  $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ .

Якщо ця умова не виконується, то довільного фіксованого значення надають іншій координаті –  $y_0$  чи  $z_0$ .

Щоб знайти координати напрямного вектора  $\vec{s}$ , враховують, що нормальні вектори даних площин ( $\vec{n}_1$  і  $\vec{n}_2$ ) є перпендикулярними до прямої.



Вектор  $\vec{s}$  можна знайти як векторний добуток векторів  $\vec{n}_1$  і  $\vec{n}_2$ :



$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

*Приклад.* Записати рівняння прямої, заданої як перетин двох площин,

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ 2x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$$

у канонічному вигляді.

Розв'язок.

Прийmemo  $x_0 = 0$ . Відповідно, отримаємо:

$$\begin{cases} y - z - 1 = 0, \\ -y + 3z + 5 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = z + 1, \\ -z - 1 + 3z + 5 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = z + 1, \\ 2z = -4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1, \\ z = -2. \end{cases}$$

Координати точки –  $M_0(0; -1; -2)$ .

Наступним кроком є визначення координат напрямного вектора прямої:

$$\vec{s} = (1, 1, -1) \times (2, -1, 3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (3 - 1)\vec{i} - (3 + 2)\vec{j} + (-1 - 2)\vec{k} = (2, -5, -3).$$

Записуємо канонічне рівняння прямої.

$$\frac{x}{2} = \frac{y + 1}{-5} = \frac{z + 2}{-3}.$$

## 4.5 Взаємне розташування прямих у просторі

*Кут між двома прямими.*

Нехай дві прямі  $l_1$  і  $l_2$  задані канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Кут  $\varphi$  між цими прямими можна визначити як кут між напрямними векторами  $\vec{s}_1(m_1; n_1; p_1)$ ,  $\vec{s}_2(m_2; n_2; p_2)$  цих прямих:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{s}_1, \vec{s}_2 \rangle}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}};$$

*Умови паралельності та перпендикулярності прямих.*

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2};$$

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Leftrightarrow \langle \vec{s}_1, \vec{s}_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

*Приклад.*

Визначити кут між прямими

$$l_1 : \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0, \\ 2x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases} \text{ і } l_2 : \begin{cases} x = 2t, \\ y = 2 - t, \\ z = -2 + 3t. \end{cases}$$

Розв'язок.

$$\vec{s}_1 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (3-1)\vec{i} - (6+2)\vec{j} + (-2-2)\vec{k} = (2, -8, -4),$$

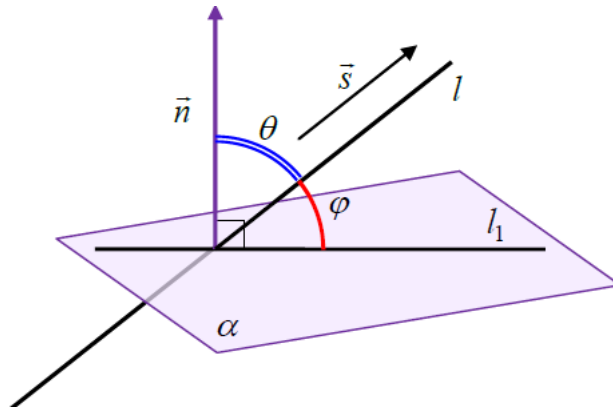
$$\vec{s}_2 = (2, -1, 3).$$

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{s}_1, \vec{s}_2 \rangle}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{2 \cdot 2 + (-8) \cdot (-1) + (-4) \cdot 3}{\sqrt{2^2 + (-8)^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{4 + 8 - 12}{\sqrt{84} \cdot \sqrt{14}} = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

#### 4.6 Взаємне розташування прямої і площини

*Кут між прямою і площиною.*

Кутом між прямою  $l$  і площиною  $\alpha$  називають кут між прямою і її проекцією на дану площину.



Якщо площина  $\alpha$  і пряма  $l$  задані рівняннями:

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0, \quad l: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

То

$$\sin \varphi = \frac{|\langle \vec{n}, \vec{s} \rangle|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини

$$l \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{s} \Leftrightarrow \langle \vec{n}, \vec{s} \rangle = 0 \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0$$

$$l \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{n} \parallel \vec{s} \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

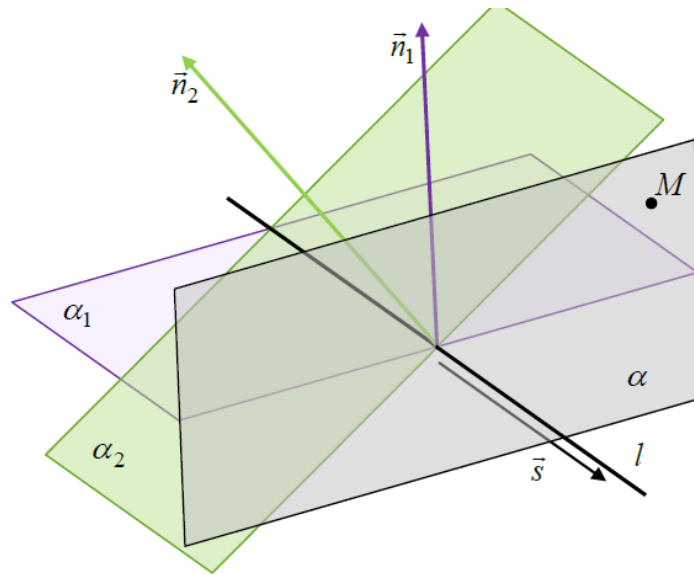
Приклад.

Записати рівняння площини, яка проходить через точку  $M(2; 2; 1)$  і є перпендикулярною до прямої

$$l: \begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0, \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$$

Розв'язок.

Оскільки пряма і площина є взаємно перпендикулярними, то напрямний вектор прямої  $\vec{s}$  буде рівний нормальному вектору площини  $\vec{n}$ :  $\vec{s} = \vec{n}$ .



$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k} = (-1, -1, -3).$$

Отже маємо записати рівняння площини з нормальним вектором  $\vec{n}(-1, -1, -3)$ , що проходить через точку  $M(2, 2, 1)$  :

$$\begin{aligned} A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) &= 0, \\ -1(x - 2) - 1(y - 2) - 3(z - 1) &= 0, \\ -x - y - 3z + 7 &= 0 \text{ або } x + y + 3z - 7 = 0. \end{aligned}$$

*Приклад розрахункового завдання 3.* За даними координатами точок  $A, B, C$  і рівнянням площини  $\alpha$  знайти:

- 1) рівняння прямої  $(AB)$ ;
- 2) рівняння площини  $(ABC)$ ;
- 3) напрямні косинуси нормалі до площини  $(ABC)$ ;
- 4) графічне представлення піраміди, що утворена площиною  $\alpha$  та координатними площинами;
- 5) відстань від точки  $A$  до площини  $\alpha$ ;
- 6) косинус кута між площинами  $(ABC)$  і  $\alpha$ ;
- 7) канонічне рівняння прямої  $l$ , по якій перетинаються площини  $(ABC)$  і  $\alpha$ .

$$A(-5;3;1)$$

$$B(-3;5;-1)$$

$$C(-6;2;3)$$

$$\alpha: 2x + y - 2z + 4 = 0$$


---

$$1) \quad (AB): \frac{x-(-5)}{-3-(-5)} = \frac{y-3}{5-3} = \frac{z-1}{-1-1}; \frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{-2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x+5}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-1};$$

$$2) \quad (ABC): \begin{vmatrix} x-(-5) & y-3 & z-1 \\ -3-(-5) & 5-3 & -1-1 \\ -6-(-5) & 2-3 & 3-1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x-(-5) & y-3 & z-1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} (x-(-5)) - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} (y-3) + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} (z-1) = 0$$

$$2(x-(-5)) + (-2)(y-3) + 0(z-1) = 0;$$

$$2x - 2y + 16 = 0; x - y + 8 = 0.$$

$$3) \quad |\vec{n}_{ABC}| = |(1; -1; 0)| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (0)^2} = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2};$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos \beta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \cos \alpha\gamma = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0.$$

- 4) рівняння площини  $\alpha$  перепишемо у вигляді:

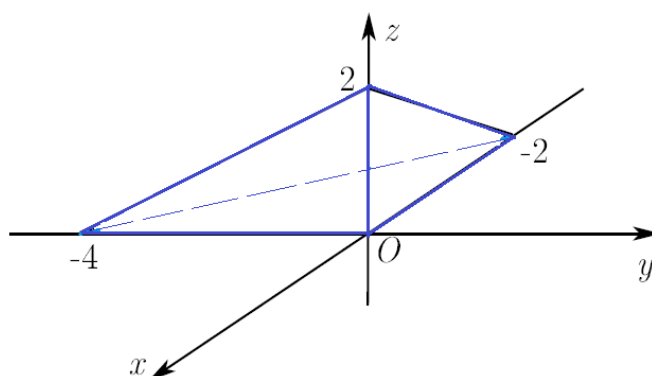
$$2x + y - 2z + 4 = 0$$

$$2x + y - 2z = -4$$

$$\frac{2x}{-4} + \frac{y}{-4} + \frac{-2z}{-4} = 1$$

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{2} = 1.$$

Отриманий вираз дозволяє визначити відрізки, які відтинає площина  $\alpha$  на координатних осях  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  відповідно: -2;-4;2.



$$5) d(A, \alpha) = \frac{|2 \cdot (-5) + 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 4|}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{3};$$

$$6) \cos \varphi = \frac{\langle (1, -1, 0), (2, 1, -2) \rangle}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (0)^2} \cdot \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{6} \sqrt{2};$$

$$7) \vec{a}_l = [\vec{n}_{ABC}, \vec{n}_\alpha] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = (2, 2, 3).$$

На перетині площин  $ABC$  і  $\alpha$  визначимо деяку точку. Припишемо  $z=0$ . Відповідно, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - y = -8 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$$

Використаємо для розв'язання метод Гаусса:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -8 \\ 2 & 1 & -4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -8 \\ 0 & 3 & 12 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\begin{cases} x - y = -8 \\ 3y = 12 \end{cases} \begin{cases} x = -4 \\ y = 4 \end{cases}$$

Канонічне рівняння прямої  $l$ :

$$l: \frac{x - (-4)}{2} = \frac{y - 4}{2} = \frac{z - 0}{3}; \frac{x + 4}{2} = \frac{y - 4}{2} = \frac{z}{3}$$

*Розрахункове завдання 3:*

За даними координатами точок  $A, B, C$  і рівнянням площини  $\alpha$  знайти:

- 1) рівняння прямої  $(AB)$ ;
- 2) рівняння площини  $(ABC)$ ;
- 3) напрямні косинуси нормалі до площини  $(ABC)$ ;
- 4) графічне представлення піраміди, що утворена площиною  $\alpha$  та координатними площинами;
- 5) відстань від точки  $A$  до площини  $\alpha$ ;
- 6) косинус кута між площинами  $(ABC)$  і  $\alpha$ ;
- 7) канонічне рівняння прямої  $l$ , по якій перетинаються площини  $(ABC)$  і  $\alpha$ .

|    |             |             |              |                                 |
|----|-------------|-------------|--------------|---------------------------------|
| 1  | A(2,2,-6)   | B(6,5,-4)   | C(8,5,-10)   | $\alpha: 3x - 5y + 6z + 12 = 0$ |
| 2  | A(-5,4,7)   | B(-6,6,8)   | C(-3,3,-1)   | $\alpha: 7x + 5y - 2z + 3 = 0$  |
| 3  | A(12,5,10)  | B(14,7,11)  | C(9,8,12)    | $\alpha: x - 2y + 5z - 7 = 0$   |
| 4  | A(-3,6,-4)  | B(-5,8,-3)  | C(-4,7,-2)   | $\alpha: 4x - 2y - 3z + 2 = 0$  |
| 5  | A(12,5,9)   | B(4,9,7)    | C(3,7,5)     | $\alpha: 5x + 4y + 8z - 6 = 0$  |
| 6  | A(12,5,10)  | B(14,7,11)  | C(9,8,12)    | $\alpha: x - 2y + 5z - 7 = 0$   |
| 7  | A(5,-3,-7)  | B(7,-5,-6)  | C(9,-4,-7)   | $\alpha: 3x - 3y + 6z - 3 = 0$  |
| 8  | A(10,9,12)  | B(13,12,11) | C(9,8,10)    | $\alpha: 12x + 4y + 8z - 4 = 0$ |
| 9  | A(-11,9,13) | B(-8,11,9)  | C(-10,10,12) | $\alpha: 4x - 4y + 5z + 3 = 0$  |
| 10 | A(9,9,7)    | B(8,8,4)    | C(11,11,6)   | $\alpha: 2x - 5y + 10z + 5 = 0$ |
| 11 | A(-4,8,4)   | B(-5,10,6)  | C(-7,11,9)   | $\alpha: 3x + 2y + 4z + 8 = 0$  |
| 12 | A(5,-7,7)   | B(8,-5,8)   | C(6,-8,8)    | $\alpha: 4x + 2y - 4z + 2 = 0$  |
| 13 | A(5,8,8)    | B(8,9,10)   | C(4,7,10)    | $\alpha: 3x - 5y - 3z + 6 = 0$  |
| 14 | A(14,9,-3)  | B(10,8,-5)  | C(12,10,-4)  | $\alpha: 8x - 2y - 4z - 4 = 0$  |
| 15 | A(-7,9,4)   | B(-5,8,5)   | C(-8,10,-4)  | $\alpha: 6x - 2y + 3z - 2 = 0$  |

|    |            |            |             |                                |
|----|------------|------------|-------------|--------------------------------|
| 16 | A(-6,8,-6) | B(-7,9,-4) | C(-6,10,-7) | $\alpha: x + 2y - 2z - 2 = 0$  |
| 17 | A(1,2,3)   | B(3,4,2)   | C(2,1,3)    | $\alpha: 2x - 3y + z + 5 = 0$  |
| 18 | A(-2,1,3)  | B(3,2,2)   | C(1,1,2)    | $\alpha: 2x - 2y + z + 4 = 0$  |
| 19 | A(2,1,4)   | B(0,-2,3)  | C(1,2,4)    | $\alpha: x - 2y + 2z + 8 = 0$  |
| 20 | A(2,1,5)   | B(1,2,3)   | C(4,-1,3)   | $\alpha: 3x + 2y + 4z + 1 = 0$ |
| 21 | A(-1,3,2)  | B(2,2,3)   | C(-3,1,4)   | $\alpha: x + 2y + 2z - 4 = 0$  |
| 22 | A(2,0,-1)  | B(3,1,1)   | C(2,1,2)    | $\alpha: x + y + 5z - 5 = 0$   |
| 23 | A(4,1,-1)  | B(3,1,1)   | C(5,2,0)    | $\alpha: 2x + y + 4z - 4 = 0$  |
| 24 | A(3,2,-2)  | B(1,0,4)   | C(2,3,-1)   | $\alpha: 3x - 2y + z + 6 = 0$  |
| 25 | A(-1,0,4)  | B(3,-3,-2) | C(1,-3,-3)  | $\alpha: 2x + 4y - 3z - 3 = 0$ |
| 26 | A(-2,-1,3) | B(-2,-1,0) | C(2,2,-4)   | $\alpha: x + 5y - 3z + 4 = 0$  |
| 27 | A(1,1,8)   | B(4,0,2)   | C(1,2,5)    | $\alpha: 2x - y + 3z + 5 = 0$  |
| 28 | A(7,2,6)   | B(4,1,2)   | C(5,1,4)    | $\alpha: 3x + 2y - 2z + 4 = 0$ |
| 29 | A(-4,5,-1) | B(4,3,0)   | C(-3,4,-2)  | $\alpha: 4x - 5y + 6z + 5 = 0$ |
| 30 | A(6,-1,7)  | B(5,-3,8)  | C(3,-5,9)   | $\alpha: 3x + y + 6z + 4 = 0$  |

### Список використаних джерел

1. Діскант В.І. / В.І. Діскант, Л.Р. Береза, О.П. Грижук, Л.М. Захаренко. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії – К.: Вища шк., 2001. – 303 с.
2. Навчально-методичний посібник до виконання контрольних робіт з вищої математики для студентів технічних спеціальностей заочної форми навчання / Укл.: Р.М. Дідковський, В.С. Ковтуненко, Н.В. Олексієнко, І.В. Синько; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси: ЧДТУ, 2014. – 174 с.
3. Клепко В.Ю., Голець В.Л. Вища математика в прикладах і задачах: Навчальний посібник. 2-ге видання. - К.: Центр учбової літератури, 2009. - 594 с.



4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навч. посіб – К.: А.С.К., 2001. – 648 с.
5. Конспект лекцій з вищої математики. Лінійна алгебра та аналітична геометрія /Укл.: Олексієнко Н.В., Дідковський Р.М., Кондратьєва О.М.; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси: ЧДТУ, 2016. –94с.