

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ЕЛЕКТРОННИХ ТЕХНОЛОГІЙ, АВТОТРАНСПОРТУ ТА
МАШИНОБУДУВАННЯ

КОМП'ЮТЕРНА НЕЛІНІЙНА ОПТИМІЗАЦІЯ В MathCAD

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

для здобувачів освітніх ступенів «бакалавр» та «магістр»
зі спеціальностей галузі знань 17 Електроніка, автоматизація
та електронні комунікації
усіх форм навчання

Черкаси
2024

УДК 004.942 (075.8)
К 63

*Затверджено вченою радою ФЕТАМ,
протокол № 1 від 21.02.2024 р.,
згідно з рішенням кафедри
приладобудування, мехатроніки та
комп'ютеризованих технологій,
протокол № 6 від 29.01.2024 р.*

Упорядники: Гальченко В.Я., д.т.н., професор,
Трембовецька Р.В., д.т.н., доцент, Тичков В.В., к.т.н., доцент

Рецензент Федоров Є.Є., д.т.н., професор

Комп'ютерна нелінійна оптимізація в MathCAD: навчально-методичний посібник для здобувачів освітніх ступенів «бакалавр» та «магістр» зі спеціальностей галузі знань 17 Електроніка, автоматизація та електронні комунікації усіх форм навчання [Електронний ресурс] / [Упоряд.: В.Я. Гальченко, Р.В. Трембовецька, В.В. Тичков]; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси : ЧДТУ, 2024. – 152 с. – Назва з титульного екрана.

У навчально-методичному посібнику викладено конспективно основні теоретичні положення математичних методів та докладний практичний матеріал щодо використання розв'язання задач нелінійного програмування у середовищі універсального математичного пакета MathCAD. Розглядаються задачі нелінійної оптимізації в однокритеріальній та багатокритеріальній постановках. Істотну увагу приділено комп'ютерній реалізації розглянутих методів, містяться комплекти завдань для самостійної роботи та велика кількість прикладів, що сприяють кращому розумінню та засвоєнню теоретичного матеріалу.

УДК 004.942 (075.8)

Навчальне електронне видання
мережного використання

КОМП'ЮТЕРНА НЕЛІНІЙНА ОПТИМІЗАЦІЯ В MathCAD

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

для здобувачів освітніх ступенів «бакалавр» та «магістр»
зі спеціальностей галузі знань 17 Електроніка, автоматизація
та електронні комунікації
усіх форм навчання

Упорядники:
Гальченко Володимир Якович,
Трембовецька Руслана Володимирівна, Тичков Володимир Володимирович

В авторській редакції

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
1 РОЗВ’ЯЗАННЯ ОДНОМІРНИХ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ.....	7
1.1 Аналітичний метод пошуку оптимуму диференційованої функції однієї змінної.....	7
1.1.1 Графічне дослідження поведінки функції.....	14
Завдання 1.....	16
1.1.2 Алгоритм аналітичного методу дослідження функції на екстремум.....	17
Завдання 2	21
1.2 Чисельне визначення локального екстремуму нелінійної функції однієї змінної вбудованими засобами MathCAD.....	21
1.2.1 Пошук оптимуму функції однієї змінної.....	21
Завдання 3.....	23
1.2.2 Знаходження оптимуму багатоекстремальної функції однієї змінної засобами умовної оптимізації.....	24
Завдання 4.....	25
1.3 Реалізація чисельного пошуку екстремуму одномірних унімодальних задач нелінійної оптимізації програмними засобами MathCAD	26
1.3.1 Евристичний вибір початкового інтервалу невизначеності, що містить локальний оптимум, з використанням алгоритму Свена.....	28
Завдання 5.....	31
1.3.2 Алгоритм нелінійної оптимізації поділом відрізка навпіл (метод дихотомії).....	32
Завдання 6	38
1.3.3 Алгоритм одномірної нелінійної оптимізації методом Фібоначчі..	38
Завдання 7	43
1.3.4 Алгоритм нелінійної оптимізації методом золотого перетину.....	43
Завдання 8	48
1.3.5 Алгоритм нелінійної оптимізації методом послідовної параболічної апроксимації.....	49
Завдання 9	54
1.3.6 Алгоритм градієнтного спуску пошуку екстремуму унімодальної нелінійної функції однієї змінної з використанням першої похідної.....	54

Завдання 10	58
1.3.7 Алгоритм Ньютона-Рафсона пошуку екстремуму нелінійної функції однієї змінної з використанням другої похідної.....	58
Завдання 11	62
1.3.8 Алгоритм випадкового пошуку оптимуму функції однієї змінної.....	63
Завдання 12	65
2 РОЗВ'ЯЗАННЯ БАГАТОМІРНИХ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ.....	66
2.1 Графічне дослідження рельєфу функцій двох змінних.....	66
2.1.1 Візуалізація поведінки функцій двох змінних.....	66
2.1.2 Побудова ліній рівня функцій двох змінних.....	69
Завдання 13.....	71
2.2 Аналітичний метод пошуку оптимуму функцій багатьох змінних.....	72
2.2.1 Дослідження на екстремум функцій багатьох змінних аналітичним методом	72
Завдання 14.....	75
2.2.2 Визначення градієнту функцій багатьох змінних	76
2.2.3 Обчислення градієнту функції у точці.....	78
Завдання 15.....	80
2.2.4 Кінцево-різницеve обчислення градієнту функції у точці.....	81
Завдання 16.....	83
2.2.5 Побудова матриці Гессе.....	84
Завдання 17.....	87
2.2.6 Обчислення матриці Гессе в точці.....	87
2.2.7 Обчислення кутових мінорів матриці Гессе та її власних значень..	89
2.2.8 Застосування критерію Сільвестра для дослідження функцій багатьох змінних на екстремум.....	91
Завдання 18.....	98
2.3 Чисельне визначення екстремуму нелінійної функції багатьох змінних вбудованими засобами MathCAD	99
2.3.1 Визначення екстремуму функції декількох змінних.....	99
Завдання 19.....	101
2.3.2 Використання умовної оптимізації для розв'язання задач при наявності багатоекстремальної ситуації.....	102
Завдання 20.....	104

2.4 Алгоритми чисельного пошуку екстремуму багатомірних задач нелінійної оптимізації програмними засобами MathCAD	106
2.4.1 Алгоритм покоординатного спуску з одновірною оптимізацією методом квадратичної апроксимації.....	106
Завдання 21.....	112
2.4.2 Алгоритм покоординатного спуску з використанням одновірного пошуку методом золотого перетину.....	113
Завдання 22.....	116
2.4.3 Алгоритм покоординатного спуску з використанням одновірного пошуку методом Фібоначчі.....	118
Завдання 23.....	121
2.4.4 Алгоритм деформованого багатогранника (метод Нелдера-Міда).....	124
Завдання 24.....	131
2.4.5 Алгоритм градієнтного спуску з дробленням кроку.....	132
Завдання 25.....	135
2.4.6 Алгоритм градієнтного спуску з дробленням кроку та обчисленням похідних за формулою центральних різниць.....	136
Завдання 26.....	140
2.4.7 Алгоритм найшвидшого спуску.....	140
Завдання 27.....	144
2.4.8 Алгоритм Ньютона.....	145
Завдання 28.....	148
Список літератури.....	150
Терміни та визначення.....	151

ВСТУП

У посібнику основний акцент робиться на практичну реалізацію методів нелінійної оптимізації із застосуванням сучасних комп'ютерних технологій. При цьому короткі теоретичні відомості про методи, що розглядаються, наводяться в скороченому до необхідного мінімуму вигляді, необхідному для розуміння їх суті, що робить необов'язковим додаткове звернення для довідки до ґрунтовніших джерел. Посібник складається з двох розділів.

Перший розділ присвячено розв'язанню одномірних задач безумовної нелінійної оптимізації. В ньому міститься інформація, а також відповідні MathCAD-документи, стосовно графічного методу дослідження функцій однієї змінної, класичного аналітичного методу пошуку екстремуму при розв'язанні одномірних задач. Частина розділу приділяється розв'язанню задач одномірного нелінійного програмування із застосуванням вбудованих функцій MathCAD. Також представлені алгоритми та програми, що їх реалізують, для чисельного розв'язання унімодальних задач у середовищі пакету, розглядаються методи нульового, першого та другого порядків.

У другому розділі наводяться відомості щодо розв'язання багатомірних задач безумовної нелінійної оптимізації. Показано інструментальні можливості пакету графічного дослідження рельєфу функцій двох змінних. Аналіз графіків поверхонь і ліній рівня досліджуваних функцій уможливорює швидке встановлення типу наявних точок екстремуму. Розділ містить інформацію про аналітичний метод пошуку оптимуму функцій багатьох змінних із застосуванням критерію Сільвестра. Розглядаються особливості чисельного розв'язання у пакеті MathCAD багатомірних задач нелінійного програмування з використанням вбудованих функцій, наводяться алгоритми та програмні модулі розв'язання задач пошуку екстремуму як орієнтовані на обчислення похідних, так і засновані лише на обчисленнях значень цільової функції.

1. РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНОМІРНИХ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

1.1 Аналітичний метод пошуку оптимуму диференційованої функції однієї змінної

Нехай маємо функцію $y = f(x)$, задану на відрізку $[a, b]$ (рисунок 1.1), геометричним зображенням функції якої є крива. Зі змогою аргументу x від a до b значення функції $y = f(x)$ в окремих інтервалах зростають (a, c) , (d, e) і спадають (c, d) , (e, b) .

У точках $x = c$, $x = e$ функція змінює зростання на спадання, у точці $x = d$ функція змінює спадання на зростання.

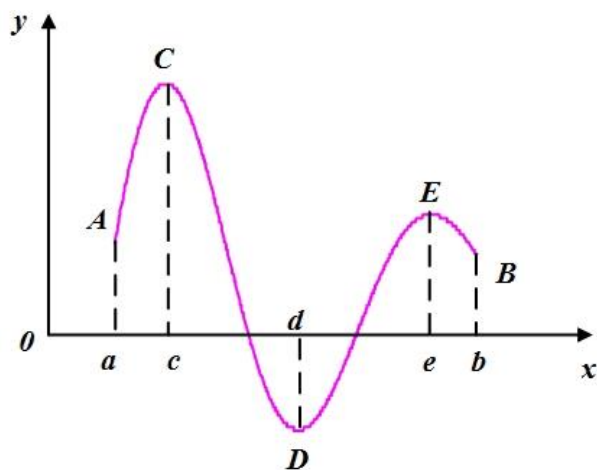


Рисунок 1.1 – Графічне зображення функції

Функція $y = f(x)$ називається **зростаючою** у інтервалі $[a, b]$ якщо для будь-яких двох точок x_1 та x_2 цього інтервалу з нерівності $x_1 < x_2$ слідує нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ (рисунок 1.2).

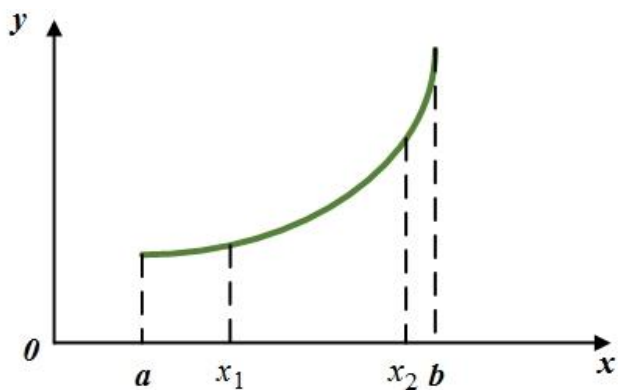


Рисунок 1.2 – Приклад зростаючої функції

З цього визначення випливає, що функція $y = f(x)$ зростає на даному інтервалі, якщо збільшення аргументу Δx та відповідне збільшення функції Δy одного знаку.

Функція $y = f(x)$ називається *спадною* у інтервалі $[a, b]$ якщо для будь-яких двох точок x_1 та x_2 цього інтервалу з нерівності $x_1 < x_2$ слідує нерівність $f(x_1) > f(x_2)$ (рисунок 1.3).

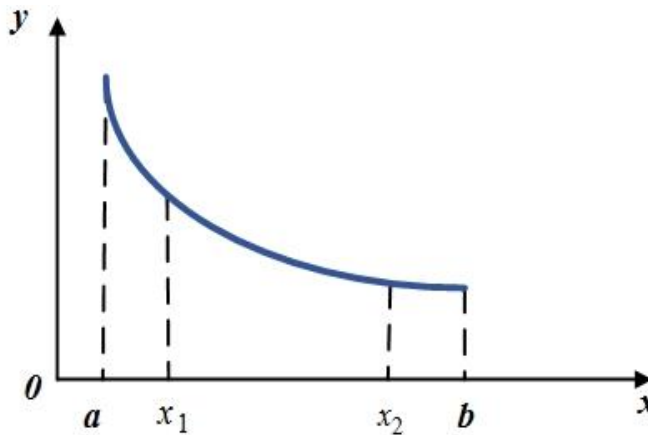


Рисунок 1.3 – Приклад спадної функції

Іншими словами, функція зменшується на цьому інтервалі, якщо на цьому інтервалі збільшення аргументу Δx та відповідне йому збільшення функції Δy різних знаків (при цьому x та $x + \Delta x$ належать розглянутому інтервалу).

Розглянемо умови, по яким можна зробити висновки про зростання чи спадання будь-якої функції, заданої аналітично, які не мають її графіка.

Необхідна і достатня умова зростання та спадання диференційованої функції

Теорема 1.

Якщо функція, що диференціюється $y = f(x)$ зростає на інтервалі $[a, b]$, то в будь-якій точці x цього інтервалу:

$$f'(x) \geq 0.$$

Якщо функція, що диференціюється $y = f(x)$ спадає на інтервалі $[a, b]$, то в будь-якій точці x цього інтервалу:

$$f'(x) \leq 0.$$

Цю теорему називають теоремою про необхідні ознаки зростання і спадання функції, оскільки в ній вказується, якою повинна бути похідна функції, що диференціюється на інтервалі у випадках відповідно зростання і спадання функції.

Розглянута теорема про необхідні умови зростання та спадання функції дозволяє судити про знак похідної на певному інтервалі лише в тому випадку, коли вже відомо, що функція на цьому інтервалі зростає або спадає.

Наприклад, якщо функція зростає, її похідна обов'язково не невід'ємна, тобто позитивна чи дорівнює нулю.

Однак необхідно пам'ятати, що невід'ємність похідної є лише необхідною, але не достатньою умовою для твердження про зростання функції, так само, як не позитивність похідної не є достатньою умовою твердження про її спадання.

Теорема 2. Якщо похідна функції позитивна $f'(x) > 0$ на інтервалі $[a, b]$, то функція зростає у цьому інтервалі.

Якщо похідна функції невід'ємна $f'(x) < 0$ на інтервалі $[a, b]$, то функція спадає на цьому інтервалі.

Цю теорему називають теоремою про достатні ознаки зростання та спадання функції, оскільки в ній вказується, при якому знаку похідної на інтервалі, функція, що диференціюється, зростає і при якому – спадає.

Нехай крива ACDEB (рисунок 1.1) є графіком функції $y = f(x)$. Як видно з рисунку 1.1, при $x = c$, $x = e$ функція переходить від зростання до спадання. При $x = d$ функція переходить від спадання до зростання.

Ордината функції $f(c)$ у точці $x = c$ більше ординати будь-яких точок, досить близьких до точки $x = c$ і що знаходяться від неї як ліворуч, так і праворуч. Ордината функції $f(e)$ у точці $x = e$ має ту ж властивість.

Таке значення аргументу прийнято називати точкою максимуму, а відповідне значення функції – **максимумом функції**.

Ордината функції $f(d)$ у точці $x = d$ менше ординат усіх точок, досить близьких до точки $x = d$ і що знаходяться від неї як ліворуч, так і праворуч.

Таке значення аргументу прийнято називати точкою мінімуму, а значення функції у цьому значенні аргументу – **мінімумом функції**.

Точка $x = x_0$ називається **точкою максимуму функції** $y = f(x)$, якщо існує така область біля точки x_0 , що в околі для всіх x ($x \neq x_0$) виконується нерівність:

$$f(x_0) > f(x).$$

Точка $x = x_0$ називається **точкою мінімуму функції** $y = f(x)$, якщо існує така область біля точки x_0 , що в околі для всіх x ($x \neq x_0$) виконується нерівність:

$$f(x_0) < f(x).$$

Функція в даному інтервалі може мати декілька максимумів та мінімумів. При цьому деякі максимуми функції можуть виявитися меншими за мінімуми (рисунок 1.4).

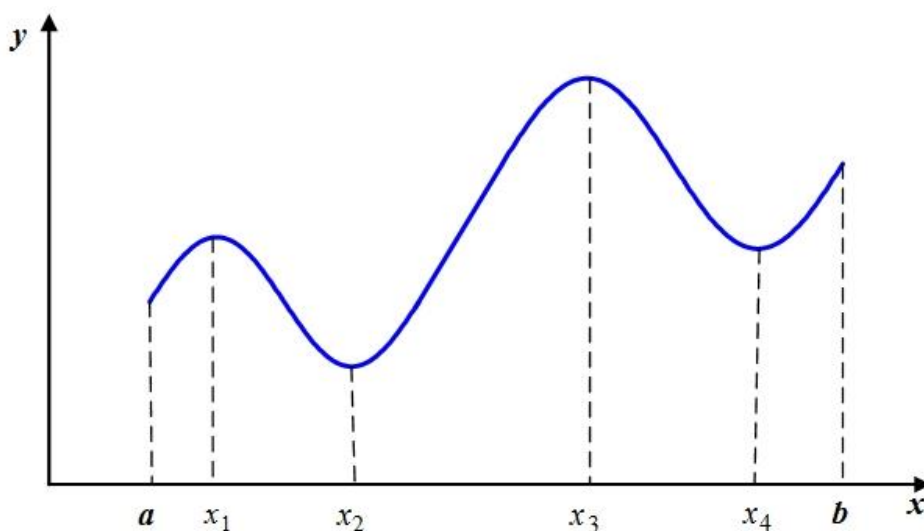


Рисунок 1.4 – Локальні та глобальні екстремуми

Часто такі максимум і мінімум називають **локальним**.

Терміни «максимум» та «мінімум» поєднуються одним терміном «екстремум».

Якщо $f(x)$ має кінцевий глобальний максимум та (або) кінцевий глобальний мінімум, то для їх визначення обчислюються також значення $f(x)$ на множині точок локальних екстремумів. Найменше з набутих значень, тобто значень у точках локальних екстремумів визначає точку глобального мінімуму, найбільше з отриманих значень – точку локального максимуму $f(x)$.

Існування локальних мінімумів функції $f(x)$ майже завжди ускладнює пошук глобального мінімуму. Тому, багато наближених методів мінімізації застосовні тільки тоді, коли будь-який локальний мінімум функції $f(x)$ є водночас і глобальним. Це гарантує збіжності методів. Якщо такі відомості про функції не відомі, то методи застосовувати можна, але не матимуть гарантії збіжності.

Одним із класів функцій, що задовольняють зазначеній умові, є клас унімодальних функцій.

Функція $f(x)$ називається **унімодальною** на відрізку $[a, b]$ якщо вона безперервна на $[a, b]$ та існують такі числа α та β ($a \leq \alpha \leq \beta \leq b$), що:

- на відрізку $[a, \alpha]$ при $a < \alpha$ функція $f(x)$ монотонно спадає;
- на відрізку $[\beta, b]$ при $\beta < b$ функція $f(x)$ монотонно зростає;
- $f(x) = f^* = \min f(x)$ при $x \in [\alpha, \beta]$, тобто ця функція має мінімум.

На рисунку 1.5 наведено приклади унімодальних функцій.

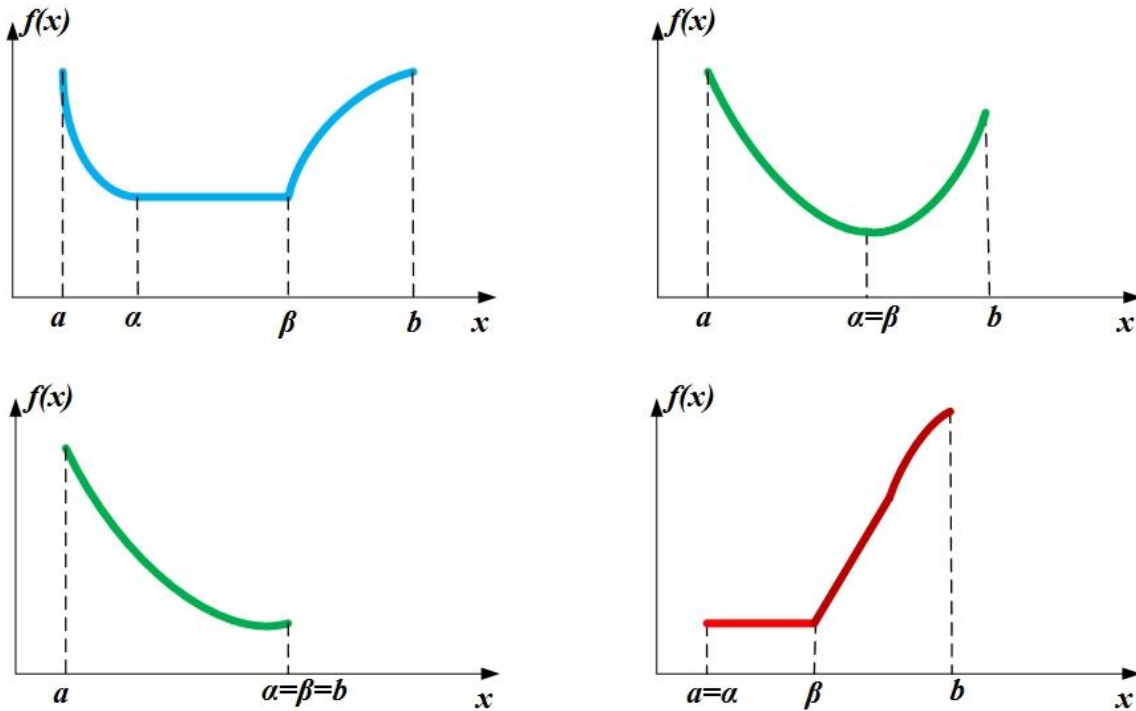


Рисунок 1.5 – Приклади унімодальних функцій

Необхідна умова існування екстремуму функції, що диференціюється

Якщо функція, що диференціюється $y = f(x)$ має в точці $x = x_0$ екстремум, то її похідна $f'(x_0) = 0$ чи не існує. Рівність нулю похідної графічно означає, що дотична до кривої $f(x)$ у цій точці паралельна осі x .

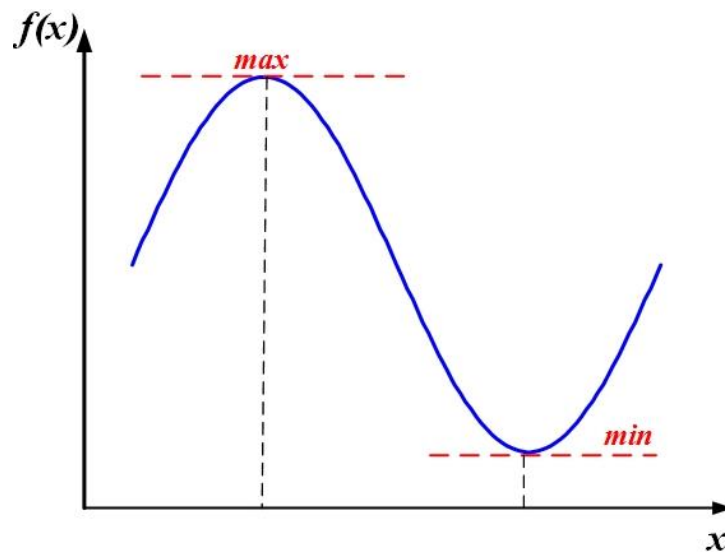


Рисунок 1.6 – Графічне зображення похідної функції

Ті значення аргументу, за яких похідна $f'(x)$ функції $y = f(x)$ звертається в нуль, називаються **стаціонарними точками**. Стаціонарними точками є всі дійсні корені рівняння:

$$f'(x_0) = 0$$

Виконання необхідних умов існування екстремуму не значить його обов'язкову наявність.

Покажемо випадки, коли похідні в точках екстремуму відсутні. На рисунку 1.7 а показаний випадок, коли в точках min та max існує кінцевий розрив похідної $\frac{df}{dx}$. На рисунку 1.7 б наведено випадок, коли в точках екстремуму значення похідної перетворюється на нескінченність. Відбувається нескінченний розрив похідної, у якому її значення зміняться від $+\infty$ до $-\infty$ у точці x_1 та від $-\infty$ до $+\infty$ у точці x_2 .

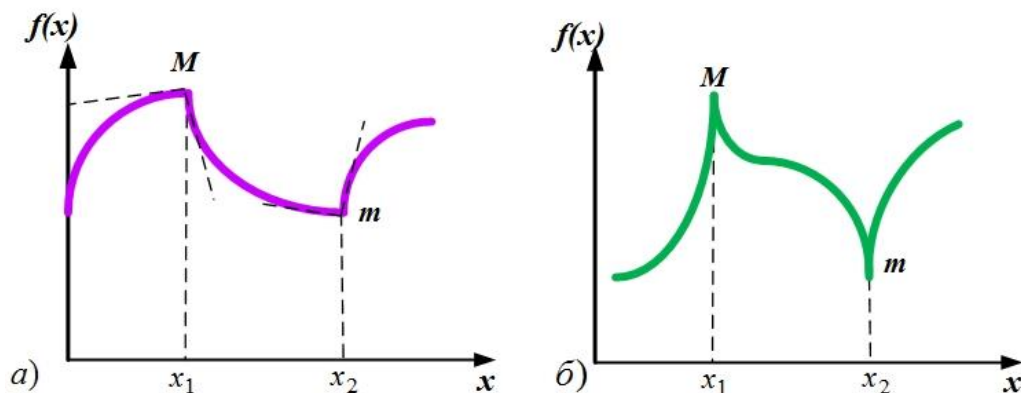


Рисунок 1.7 – Випадки розриву похідної

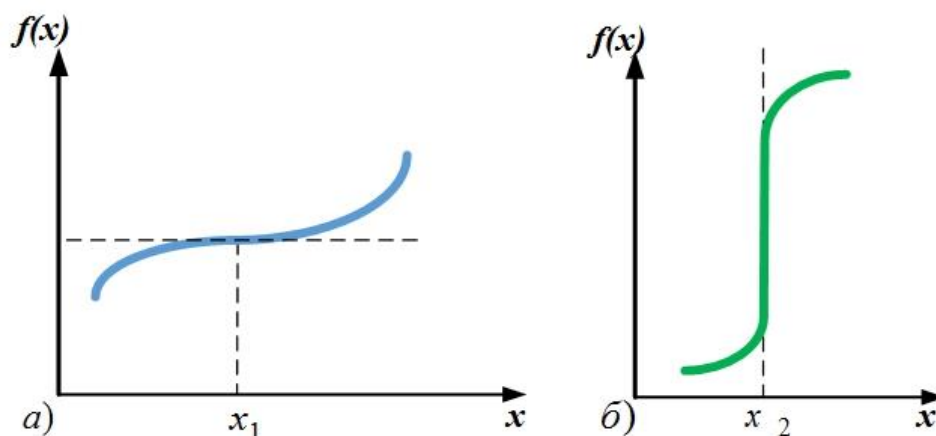


Рисунок 1.8 – Випадки відсутності екстремуму при виконанні необхідної умови його існування

Рисунок 1.8 також демонструє випадки відсутності екстремуму при $f'(x_0) = 0$ (рисунок 1.8 а) та $f'(x_0) = \infty$ (рисунок 1.8 б).

Для того щоб визначити, чи дійсно в точці існує екстремум, необхідно провести наступні додаткові дослідження.

Достатня умова існування екстремуму функції

1. Порівняння знаків похідної

Якщо похідна $f'(x)$ функції $y = f(x)$ за деякого значення аргументу $x = x_0$ дорівнює нулю і при переході аргументу через це значення змінює знак із плюсу на мінус, то при $x = x_0$ функція має максимум; якщо при переході аргументу через це значення похідна змінює знак з мінуса на плюс, то при $x = x_0$ функція має мінімум.

2. Порівняння значень функції

Розраховують значення функції в точці, підозрюваної на екстремум і двох близьких точках зліва і праворуч від неї ($x_0 + \xi$ та $x_0 - \xi$, де ξ - мінімальна позитивна величина). Якщо обидва значення $f(x_0 + \xi)$ та $f(x_0 - \xi)$ менше чи більше $f(x_0)$, то в точці x_0 максимум чи мінімум відповідно. Якщо ж $f(x_0)$ має проміжне значення, то в точці $f(x_0)$ немає екстремуму.

3. Дослідження знаків вищих похідних

Цей спосіб можна застосовувати, якщо у точках x_i (підозрюваних на екстремум) є похідні вищих порядків. Обчислюється похідна $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

Якщо $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} < 0$, то в точці x_i - максимум, якщо $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0$, то – мінімум.

Найчастіше користуються першими способами, оскільки останній досить громіздкий.

1.1.1. Графічне дослідження поведінки функції

Приклад 1. Знайти точки локального екстремуму функції та значення функції у них, застосовуючи засоби графічного аналізу.

Послідовність виконання завдання:

1. Побудувати графік функції за допомогою шаблону XY Plot.

2. Визначити координату екстремуму, використовуючи функцію **trace**. При цьому увімкнути опцію **Track Data Points**, отримаємо курсор у вигляді «хреста» який необхідно навести в область передбачуваного екстремуму. У осередках X-Value, Y-Value, відображаються координати точки, що спостерігається відповідно по X і Y осях. Аналізуючи значення координати Y, переміщуємо курсор та шукаємо екстремум, визначаючи відповідно координату X (рисунок 1.9).

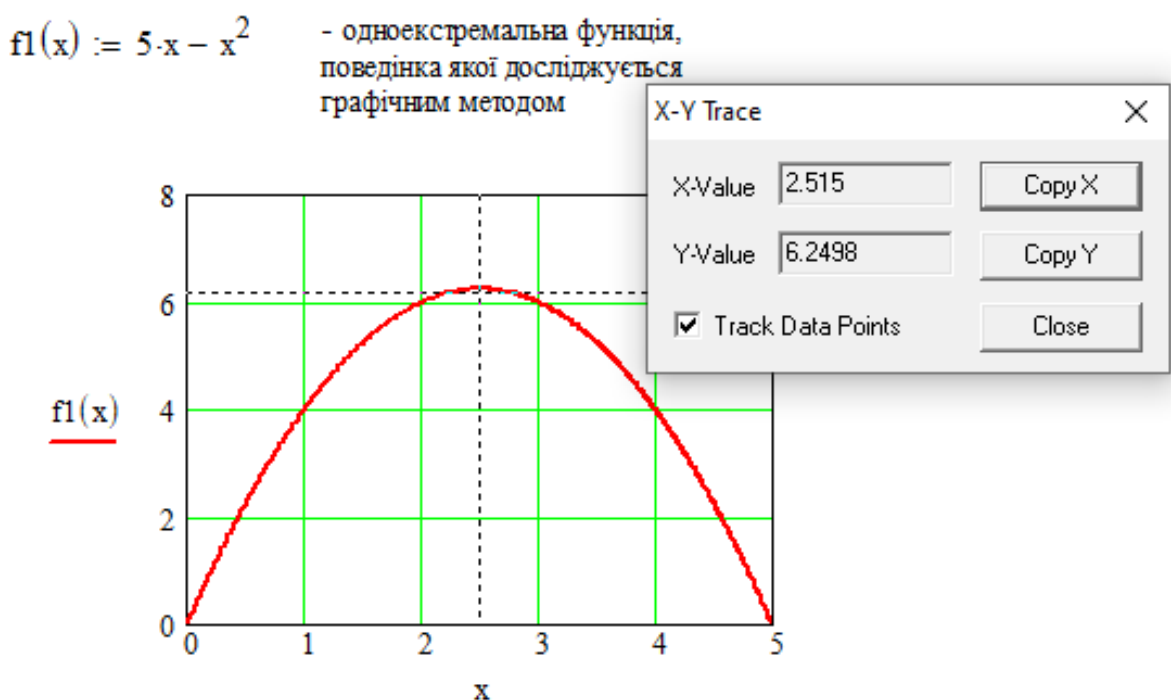


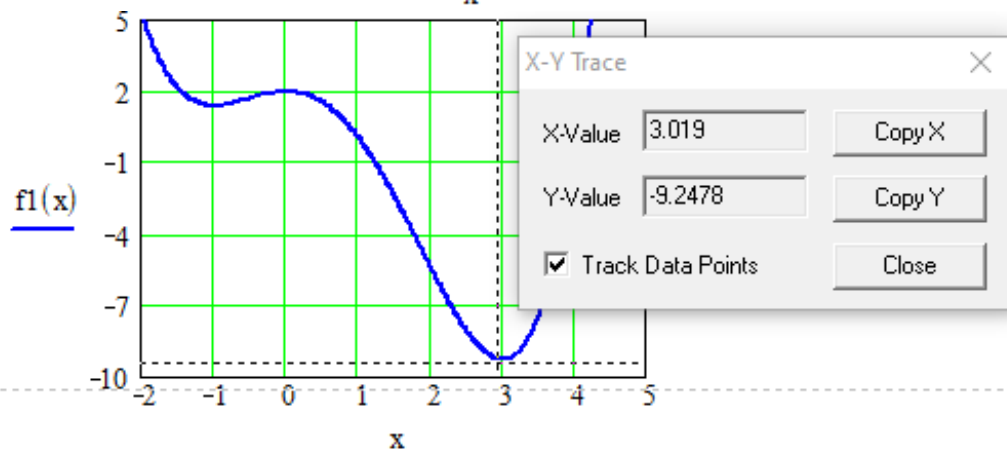
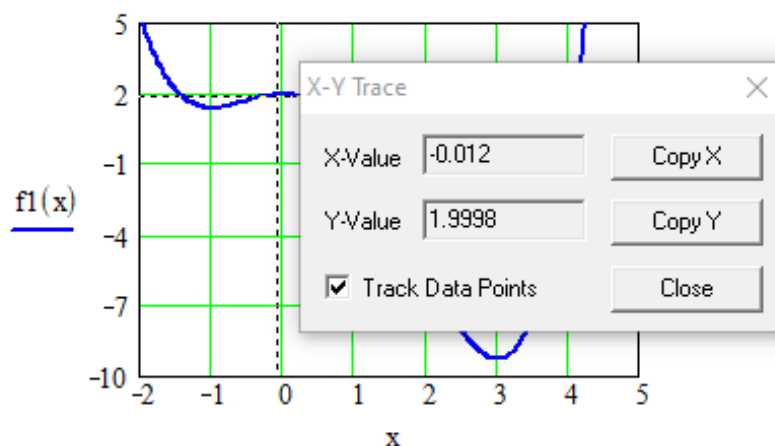
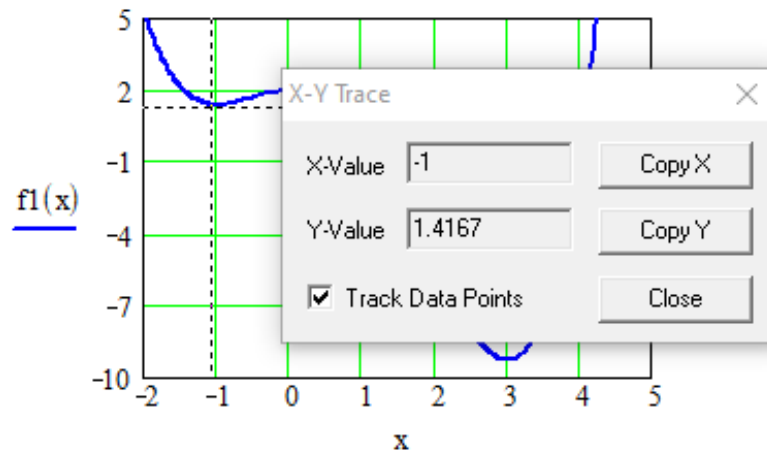
Рисунок 1.9 – Графічне визначення екстремуму функції

Приклад виконання завдання у MathCAD

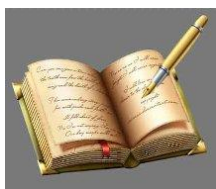
Приклад 1. Знайти точки локального екстремуму функції та значення функції в них на інтервалі $(-2;5)$

$$f_1(x) := \frac{x^4}{4} - \left(\frac{2 \cdot x^3}{3}\right) - \left(\frac{3 \cdot x^2}{2}\right) + 2$$

- багатоекстремальна функція, поведінка якої досліджується графічним методом



Максимум функції $f_1(x)$ на досліджуваному інтервалі знаходиться в точці $x = 0$, а мінімуми в точках $x = -1$ та $x = 3$



ЗАВДАННЯ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. У першій задачі кожного варіанту графічно знайти точки перетину графіку функції з віссю абсцис, у другій – точки локального екстремуму.

варіант 1	варіант 2
$f(x) = -3 \cdot (x-1)^5$	$f(x) = -6 \cdot (x+1)^5$
$f(x) = -10 \cdot x^2 \cdot e^{-10 \cdot x}$	$f(x) = 4 \cdot x^2 \cdot e^{9 \cdot x}$
варіант 3	варіант 4
$f(x) = 3 \cdot (x-1)^5$	$f(x) = -4 \cdot (x+9)^5$
$f(x) = -6 \cdot x^2 \cdot e^{-6 \cdot x}$	$f(x) = -3 \cdot x^2 \cdot e^{2 \cdot x}$
варіант 5	варіант 6
$f(x) = 4 \cdot (x+7)^5$	$f(x) = -8 \cdot (x+8)^5$
$f(x) = 4 \cdot x^2 \cdot e^{-9 \cdot x}$	$f(x) = -10 \cdot x^2 \cdot e^{5 \cdot x}$
варіант 7	варіант 8
$f(x) = -8 \cdot (x-10)^5$	$f(x) = -9 \cdot (x-2)^5$
$f(x) = -7 \cdot x^2 \cdot e^{2 \cdot x}$	$f(x) = 2 \cdot x^2 \cdot e^{8 \cdot x}$
варіант 9	варіант 10
$f(x) = 6 \cdot (x-10)^5$	$f(x) = 9 \cdot (x-9)^5$
$f(x) = 5 \cdot x^2 \cdot e^{-6 \cdot x}$	$f(x) = -10 \cdot x^2 \cdot e^{8 \cdot x}$
варіант 11	варіант 12
$f(x) = -9 \cdot (x-4)^5$	$f(x) = -3 \cdot (x+8)^5$
$f(x) = -9 \cdot x^2 \cdot e^{6 \cdot x}$	$f(x) = 3 \cdot x^2 \cdot e^x$
варіант 13	варіант 14
$f(x) = 5 \cdot (x+3)^5$	$f(x) = 5 \cdot (x-8)^5$
$f(x) = 3 \cdot x^2 \cdot e^{-x}$	$f(x) = -8 \cdot x^2 \cdot e^{7 \cdot x}$
варіант 15	варіант 16
$f(x) = -8 \cdot (x+7)^5$	$f(x) = -7 \cdot (x+9)^5$
$f(x) = 2 \cdot x^2 \cdot e^{4 \cdot x}$	$f(x) = -5 \cdot x^2 \cdot e^{-10 \cdot x}$
варіант 17	варіант 18
$f(x) = -2 \cdot (x-3)^5$	$f(x) = 5 \cdot (x+2)^5$
$f(x) = 9 \cdot x^2 \cdot e^{-6 \cdot x}$	$f(x) = -4 \cdot x^2 \cdot e^{-10 \cdot x}$

варіант 19	варіант 20
$f(x) = -9 \cdot (x+1)^5$	$f(x) = -6 \cdot (x-5)^5$
$f(x) = 8 \cdot x^2 \cdot e^{2 \cdot x}$	$f(x) = 2 \cdot x^2 \cdot e^{-x}$

1.1.2 Алгоритм аналітичного методу дослідження функції на екстремум

Аналітичні методи є класичними методами пошуку екстремального значення функції (*min* чи *max*). Вони застосовуються, в основному, у випадках, коли відомий аналітичний вид оптимізованої функції f від незалежної змінної.

Отже, маємо наступну послідовність дослідження функції на максимум і мінімум за допомогою першої похідної.

1. Знайти похідну $f'(x)$ даної функції $y = f(x)$.
2. Знайти стаціонарні точки. Для цього потрібно прирівняти похідну нулю і знайти дійсні корні отриманого рівняння:

$$f'(x) = 0$$

У разі, коли корні рівняння уявні, функція екстремуму не має.

3. Розташувати стаціонарні точки у порядку зростання. Визначити знаки похідної для значень аргументів, розташованих ліворуч і праворуч та близьких до знайдених стаціонарних точок.

Якщо при цьому знак похідної змінюється з плюса на мінус, то значення аргументу є **точкою максимуму** функції.

Якщо знак похідної змінюється з мінуса на плюс, то значення аргументу є **точкою мінімуму** функції.

Якщо ж знак похідної не змінюється, не має ні максимуму, ні мінімуму.

4. Обчислити значення функції у точках максимуму і мінімуму, тобто максимум $y_{\max}$ і мінімум $y_{\min}$ функції.

Схему правил знаходження максимуму та мінімуму функції за допомогою першої похідної можна зобразити в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Правила знаходження максимуму та мінімуму функції за допомогою першої похідної

Стаціонарні точки	Знаки похідної $f'(x)$ при переході через стаціонарну точку $x = x_0$			Характер стаціонарної точки	$f(x_0)$
	$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$		
x_0					
x_1	-	0	+	точка мінімуму	$f(x_1)_{\min}$
x_2	+	0	-	точка максимуму	$f(x_2)_{\max}$
x_3	-	0	-	ні мінімуму ні максимуму	-
...	...	...	...	...	...
x_n	+	0	+	ні мінімуму ні максимуму	-

Приклад 2. Дослідити на екстремум функцію $f(x) = e^x - x$.

Порядок виконання завдання:

1. Знаходимо першу похідну $f'(x) = e^x - 1$. Прирівнюючи її до нуля, отримуємо $e^x - 1 = 0$, звідки: $x = 0$.

2. Тому що для $x < 0$ $e^x - 1 < 0$, а для $x > 0$ $e^x - 1 > 0$, то в точці $x = 0$ ця функція має мінімум, причому $f(0) = 1$.

Приклад 3. Дослідити на екстремум функцію $f(x) = x^3 - 3 \cdot x + 2$.

Порядок виконання завдання:

1. Обчислюємо першу похідну $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 3 = 3 \cdot (x^2 - 1) = 3 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$ і знаходимо корні рівняння $f'(x) = 0$. Маємо: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

2. Згідно з наведеними в таблиці 1.1 правилам послідовно заповнюємо рядки таблиці:

x	$x < -1$	$x_1 = -1$	$-1 < x < 1$	$x_2 = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		максимум $f(x_1) = 4$		мінімум $f(x_2) = 0$	

Приклад 4. Дослідити на екстремум функцію $f(x) = x^3 + 2$.

Порядок виконання завдання:

1. Обчислюємо першу похідну та прирівнюємо її до нуля $f'(x) = 3 \cdot x^2 = 0$, звідки $x = 0$.

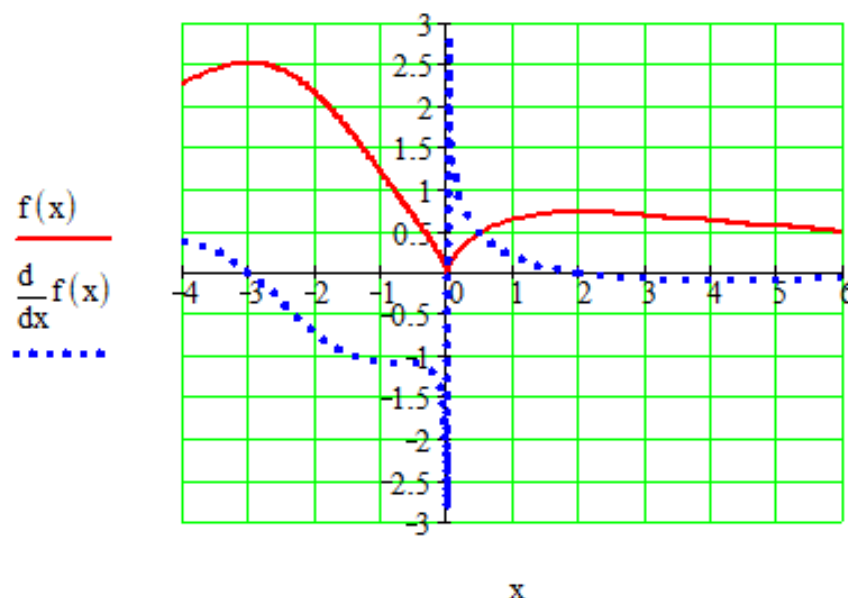
2. При $x < 0$ та $x > 0$ $f'(x) > 0$ тому функція $f(x) = x^3 + 2$ у точці $x = 0$ екстремуму немає.

Приклад 5. Дослідження функції екстремуму аналітичним методом.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 5. Дослідження функції екстремуму аналітичним методом.

$$f(x) := \frac{6 \cdot \sqrt[3]{6 \cdot x^2}}{(x+2)^2 + 8} \quad - \text{функція, яка підлягає дослідженню на екстремум}$$



- графічне дослідження поведінки функції та її першої похідної.
Аналіз графічної інформації дозволяє зробити наступні висновки:
функція має екстремуми в точках $x = -3$ та $x = 2$, де перша похідна дорівнює нулю, а також в точці $x = 0$, де похідна відсутня (має розрив).

$$\frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 4 \cdot \frac{\sqrt[3]{6}}{(x^2)^{\frac{2}{3}} \cdot [(x+2)^2 + 8]} \cdot x - 6 \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \frac{(x^2)^{\frac{1}{3}}}{[(x+2)^2 + 8]^2} \cdot (2 \cdot x + 4)$$

- символічне визначення першої похідної досліджуваної функції

Прирівнюванням знайденого виразу для похідної нулю отримаємо рівняння, розв'язок якого дозволяє визначити стаціонарні точки, ймовірно які є точками екстремуму

$$4 \cdot \frac{\sqrt[3]{6}}{(x^2)^{\frac{2}{3}} \cdot [(x+2)^2 + 8]} \cdot x - 6 \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \frac{(x^2)^{\frac{1}{3}}}{[(x+2)^2 + 8]^2} \cdot (2 \cdot x + 4) = 0$$

$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ - символічне обчислення коренів отриманого рівняння,
за допомогою функції Solve

Переконаємося у виконанні достатніх умов існування екстремуму в точках,
підозрюваних на його наявність, шляхом порівняння знаків похідної,
обчисленої в близьких точках, узятих зліва та праворуч від підозрюваної.

$$F(x) := 4 \cdot \frac{\sqrt[3]{6}^2}{(x^2)^{\frac{2}{3}} \cdot [(x+2)^2 + 8]} \cdot x - 6 \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \frac{(x^2)^{\frac{1}{3}}}{[(x+2)^2 + 8]^2} \cdot (2 \cdot x + 4)$$

- функція для обчислення значень похідної в околі підозрюваної на
екстремум точки

$$F(-3.2) = 0.115$$

- перевірка виконання достатніх умов

$$F(-2.8) = -0.133$$

існування екстремуму в точці $x = -3$

У точці $x = -3$ похідна змінює знак з "плюсу" на "мінус" і, отже, ця точка є
точкою екстремуму, а саме точкою максимуму

$$x := -5$$

- перевірка існування екстремуму в точці

$$\text{Maximize}(f, x) = -3$$

$x = -3$ вбудованими засобами MathCAD

$$F(1.8) = 0.023$$

- перевірка виконання достатніх умов

$$F(2.2) = -0.018$$

існування екстремуму в точці $x = 2$

У точці $x = 2$ похідна змінює знак із "плюсу" на "мінус" і, отже,

ця точка є точкою екстремуму, а саме, точкою максимуму.

$$x := 5$$

- перевірка існування екстремуму в точці

$$\text{Maximize}(f, x) = 2$$

$x = 2$ вбудованими засобами MathCAD

$$F(-0.5) = -1.09$$

- перевірка виконання достатніх умов

$$F(0.5) = 0.474$$

існування екстремуму у точці $x = 0$

У точці $x = 0$ похідна змінює знак з "мінусу" на "плюс" і, отже, ця точка є
точкою екстремуму, а саме точкою мінімуму де $f(0) = 0$.

$$x := 1$$

$$\text{Minimize}(f, x) = 8.872 \times 10^{-11}$$

- перевірка існування екстремуму в точці
 $x = 0$ вбудованими засобами MathCAD



ЗАВДАННЯ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 2. Дослідити функцію на екстремум із використанням аналітичного методу.

варіант 1	варіант 2
$f(x) = 3 \cdot \sqrt[3]{(x+4)^2} - 2 \cdot x - 8$	$f(x) = 1 - \sqrt[3]{(x^2 - 2 \cdot x)}$
варіант 3	варіант 4
$f(x) = 12 \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2} - 8 \cdot x - 16$	$f(x) = \frac{12 \cdot \sqrt[3]{6 \cdot (x-2)^2}}{x^2 + 8}$
варіант 5	варіант 6
$f(x) = 8 \cdot x - 16 - 12 \cdot \sqrt[3]{(x+4)^2}$	$f(x) = \frac{12 \cdot \sqrt[3]{6 \cdot (x-1)^2}}{(x+1)^2 + 8}$
варіант 7	варіант 8
$f(x) = 3 \cdot \sqrt[3]{(x-1) \cdot x}$	$f(x) = \frac{6 \cdot \sqrt[3]{6 \cdot x^2}}{(x+2)^2 + 8}$
варіант 9	варіант 10
$f(x) = 2 \cdot x - 2 - 3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}$	$f(x) = 2 + \sqrt[3]{(x+2) \cdot 8 \cdot x}$
варіант 11	варіант 12
$f(x) = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{6 \cdot (x-4)^2}}{x^2 - 4 \cdot x + 12}$	$f(x) = 3 \cdot \sqrt[3]{(x-2)^2} - 2 \cdot x + 4$

1.2. Чисельне визначення локального екстремуму нелінійної функції однієї змінної вбудованими засобами MathCAD

1.2.1. Пошук оптимуму функції однієї змінної

У MathCAD за допомогою вбудованих функцій розв'язується лише задача пошуку локального екстремуму. Щоб знайти глобальний максимум (або мінімум), потрібно або спочатку обчислити всі їх локальні значення і потім вибрати з них найбільший (найменший), або попередньо просканувати з деяким кроком область, що розглядається, щоб виділити з неї підобласть найбільших (найменших) значень функції і здійснити пошук глобального екстремуму, вже перебуваючи на його околі. Останній шлях містить небезпеку піти в зону іншого локального екстремуму, але часто може бути краще з міркувань економії часу.

Для пошуку локальних екстремумів є дві вбудовані функції, які можна застосовувати як у межах обчислювального блоку, так і автономно.

Minimize ($f, x_1, \dots, x_m$) - вектор значень аргументів, при яких функція f досягає мінімуму;

Maximize ($f, x_1, \dots, x_m$) - вектор значень аргументів, при яких функція f досягає максимуму;

де $f(x_1, \dots, x_m, \dots)$ – функція;

$x_1, \dots, x_m$ - аргументи, по яким проводиться мінімізація (максимізація).

Для задач одномірної оптимізації вбудовані функції набувають вигляду **Minimize** (f, x), **Maximize** (f, x).

Всім аргументам функції f попередньо слід надати деякі значення, причому для тих змінних, за якими проводиться мінімізація, вони сприйматимуться як початкові наближення.

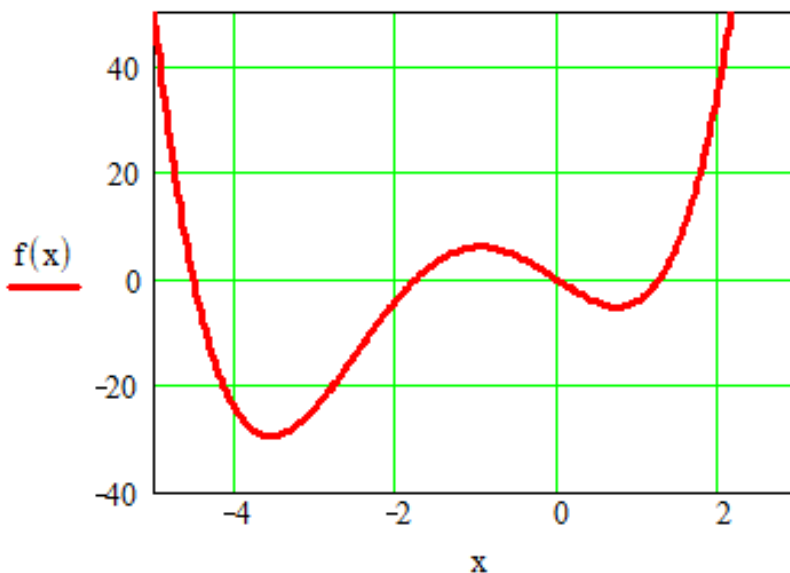
Бажаною є також на попередньому етапі пошуку екстремуму процедура візуалізації поведінки досліджуваної функції.

Приклад 6. Пошук локального екстремуму функції однієї змінної $f(x)$ за допомогою вбудованих функцій.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 6. Пошук локального екстремуму функції однієї змінної $f(x) = x^4 + 5 \cdot x^3 - 10 \cdot x$ за допомогою вбудованих функцій.

$f(x) := x^4 + 5 \cdot x^3 - 10 \cdot x$ - задання функції, яка досліджується на екстремум на інтервалі $(-5, 2)$



- графічне дослідження аналізованої функції

$x := -2$

$xMIN_1 := \text{Minimize}(f, x)$

- пошук першого
локального мінімуму

$xMIN_1 = -3.551831$

$f(xMIN_1) = -29.371444$

- значення цільової функції в
знайденій точці мінімуму

$x := 2$

$xMIN_2 := \text{Minimize}(f, x)$

- пошук другого
локального мінімуму

$xMIN_2 = 0.745711$

$f(xMIN_2) = -5.074486$

- значення цільової функції в
знайденій точці мінімуму

$x := 0$

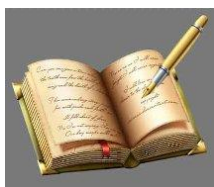
$xMAX_1 := \text{Maximize}(f, x)$

- пошук локального максимуму

$xMAX_1 = -0.94388$

$f(xMAX_1) = 6.027962$

- значення цільової функції в
знайденій точці максимуму



ЗАВДАННЯ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 3. З використанням вбудованих засобів MathCAD знайти локальний екстремум функції однієї змінної

варіант 1	варіант 2
$f(x) = x^2 + e^{-0.35 \cdot x} \rightarrow \min$	$f(x) = x^2 + 3e^{-0.45 \cdot x} \rightarrow \min$
варіант 3	варіант 4
$f(x) = x^4 - 1.5 \cdot \arctg(x) \rightarrow \min$	$f(x) = x^2 - x + e^{-x} \rightarrow \min$
варіант 5	варіант 6
$f(x) = -4 \cdot x + e^{ x-0.2 } \rightarrow \min$	$f(x) = x - \ln(x) \rightarrow \min$
варіант 7	варіант 8
$f(x) = 10 \cdot x \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{2} \rightarrow \min$	$f(x) = e^x + \frac{1}{x} \rightarrow \min$
варіант 9	варіант 10
$f(x) = x^4 - 1.1 \cdot \arctg(1.5 \cdot x) \rightarrow \min$	$f(x) = -2.8 \cdot x + e^{ x-0.6 } \rightarrow \min$
варіант 11	варіант 12
$f(x) = \frac{x^3}{3} - 5 \cdot x + x \cdot \ln(x) \rightarrow \min$	$f(x) = e^x - \frac{x^3}{3} + 2 \cdot x \rightarrow \min$
варіант 13	варіант 14
$f(x) = e^{-x} + x^2 \rightarrow \min$	$f(x) = \sin(x^2) + \sin^2 x \rightarrow \min$

<i>варіант 15</i>	<i>варіант 16</i>
$f(x) = x \cdot \sin(x) + 2 \cdot \cos(x) \rightarrow \min$	$f(x) = -2.2 \cdot x + e^{ x-0.8 } \rightarrow \min$
<i>варіант 17</i>	<i>варіант 18</i>
$f(x) = \sqrt{1+x^2} + e^{-2x} \rightarrow \min$	$f(x) = (x-4)^2 + \ln(x) \rightarrow \min$
<i>варіант 19</i>	<i>варіант 20</i>
$f(x) = x^2 + 2 \cdot e^{-0.65x} \rightarrow \min$	$f(x) = x^4 - 0.9 \cdot \arctg(2.5 \cdot x) \rightarrow \min$

1.2.2. Знаходження оптимуму багатоекстремальної функції однієї змінної засобами умовної оптимізації

Задачі пошуку екстремуму функції за умови накладання обмежень на зміну аргументів цільової функції називають задачами умовної оптимізації.

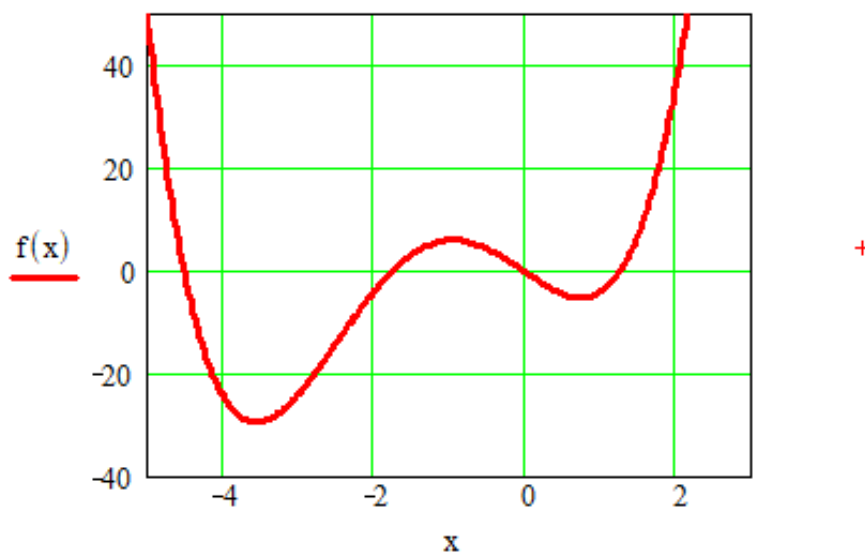
У задачах на умовний екстремум у MathCAD функції мінімізації та максимізації повинні бути включені до обчислювального блоку, тобто їм має передувати ключове слово **Given**. У проміжку між **Given** і функцією пошуку екстремуму за допомогою булевих операторів записуються логічні вирази (нерівності, рівняння), що задають обмеження значення аргументу мінімізованої функції.

Приклад 7. Пошук локального умовного екстремуму функції однієї змінної $f(x)$.
Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 7. Пошук локального умовного екстремуму функції однієї змінної

$$f(x) = x^4 + 5 \cdot x^3 - 10 \cdot x.$$

$f(x) := x^4 + 5 \cdot x^3 - 10 \cdot x$ - задання функції, що досліджується
на екстремум на інтервалі $(-5, 2)$



- графічне дослідження аналізованої функції

$x := 0$

Given

$-5 < x < -2$

$x_{\text{MIN_1}} := \text{Minimize}(f, x)$

$x_{\text{MIN_1}} = -3.551831$

$f(x_{\text{MIN_1}}) = -29.371444$

$x := 0$

Given

$x > 0$

$x_{\text{MIN_2}} := \text{Minimize}(f, x)$

$x_{\text{MIN_2}} = 0.745711$

$f(x_{\text{MIN_2}}) = -5.074486$

$x := 10$

Given

$-3 < x < 1$

$x_{\text{MAX_1}} := \text{Maximize}(f, x)$

$x_{\text{MAX_1}} = -0.94388$

$f(x_{\text{MAX_1}}) = 6.027962$

- обмеження на аргумент функції

- пошук першого умовного локального мінімуму

- значення цільової функції у знайдений точці мінімуму

- обмеження на аргумент функції

- пошук другого умовного локального мінімуму

- значення цільової функції у знайдений точці мінімуму

- обмеження на аргумент функції

- пошук умовного локального максимуму

- значення цільової функції у знайдений точці максимуму



ЗАВДАННЯ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 4. Знайти локальні умовні екстремуми функції однієї змінної

варіант 1	варіант 2
$f(x) = x^3 \cdot \cos(x + 3) \rightarrow \max$	$f(x) = x^3 \cdot \cos(x^2 + 3) \rightarrow \min$
варіант 3	варіант 4
$f(x) = x^3 \cdot \cos(x^2) \rightarrow \max$	$f(x) = x^2 \cdot \cos(x^2) \rightarrow \min$
варіант 5	варіант 6
$f(x) = x^2 \cdot \cos(x^2 - 3) \rightarrow \min$	$f(x) = \ln(x) \cdot \cos(x - 5) \rightarrow \max$
варіант 7	варіант 8
$f(x) = \ln(x) \cdot \cos^2(x - 5) \rightarrow \max$	$f(x) = \ln(x) - 50 \cdot \cos^2(x - 5) \rightarrow \min$

варіант 9	варіант 10
$f(x) = \sin(x) - 5 \cdot \cos^2(x) \rightarrow \max$	$f(x) = \sin(x) - x \cdot \cos(x) \rightarrow \min$
варіант 11	варіант 12
$f(x) = (x - 3) \cdot \sin(x) \rightarrow \max$	$f(x) = x^2 \cdot \sin(x^2 - 3) \rightarrow \min$
варіант 13	варіант 14
$f(x) = x^4 \cdot \sin(x + 5) \rightarrow \max$	$f(x) = (x^2 - 4) \cdot \sin(x) \rightarrow \min$
варіант 15	варіант 16
$f(x) = \sqrt{x + 3} - \cos(x) \rightarrow \max$	$f(x) = x^2 \cdot \cos(x^2 - 5) \rightarrow \max$
варіант 17	варіант 18
$f(x) = x^2 \cdot \sin(x^2 - 3) \rightarrow \max$	$f(x) = e^x \cdot \sin(x) \rightarrow \min$
варіант 19	варіант 20
$f(x) = e^x \cdot \cos(x) \rightarrow \max$	$f(x) = e^x \cdot \cos(x - 5) \rightarrow \max$
варіант 21	варіант 22
$f(x) = \ln(x) \cdot \cos^3(x - 5) \rightarrow \min$	$f(x) = \ln(x) \cdot \cos^2(x - 5) - 23 \rightarrow \max$
варіант 23	варіант 24
$f(x) = \sin(x) - 5 \cdot \cos^2(x - 5) \rightarrow \min$	$f(x) = \sin(x) - 5 \cdot \cos(x) \rightarrow \max$
варіант 25	варіант 26
$f(x) = (x - 7) \cdot \cos(x) \rightarrow \min$	$f(x) = (x - 3)^2 - \sin(x) \rightarrow \min$
варіант 27	варіант 28
$f(x) = x^4 \cdot \sin(x^2 - 3) \rightarrow \min$	$f(x) = x^2 \cdot \sin(x + 5) \rightarrow \min$
варіант 29	варіант 30
$f(x) = (x^2 - 4) \cdot \cos(x) \rightarrow \min$	$f(x) = x \cdot \sqrt{x} \cdot \sin(x) \rightarrow \max$

1.3. Реалізація чисельного пошуку екстремуму одновимірних унімодальних задач нелінійної оптимізації програмними засобами MathCAD

Задача мінімізації функції однієї змінної на множині $X = [a, b]$:

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in [a, b]} \quad (1.1)$$

може бути розв'язана за допомогою використання необхідних та достатніх умов існування мінімуму. Проте, важливим є отримання чисельного розв'язку цієї задачі, так як функція $f(x)$ може бути заданою аналітично або обчислення похідних функції дуже складне.

Усі чисельні методи пошуку екстремуму функцій, у тому числі й однієї змінної, побудовані у припущенні унімодальності досліджуваної цільової функції.

Надалі обмежимося розглядом лише задач мінімізації функцій.

Передбачається, що крім властивості унімодальності функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, про неї більше нічого не відомо. Ми можемо лише обчислювати значення функції для будь-якого $x \in X$, тобто проводити *експеримент* у точці x .

Властивість унімодальності дозволяє за результатами будь-якої пари експериментів вказати новий відрізок, який містить точку екстремуму x^* причому цей відрізок меншої довжини, ніж початковий.

Лема. Нехай функція $f(x)$ унімодальна функція на відрізку $[a, b]$, $x_1, x_2 \in X$ ($x_1 < x_2$). Якщо $f(x_1) \leq f(x_2)$, то $x^* \in [a, x_2]$; якщо ж $f(x_1) \geq f(x_2)$, то $x^* \in [x_1, b]$.

Будемо називати будь-який відрізок $[a', b'] \subset [a, b]$ який містить $x^* \in [a', b']$, *відрізком локалізації*.

З леми випливає, що за допомогою двох точок можна зменшити відрізок локалізації. Позначатимемо такий відрізок, отриманий після k експериментів, і його довжину через L_k . Крім того, задані дві величини: $\varepsilon > 0$ - верхня межа довжини відрізка локалізації, отриманого за допомогою методу мінімізації; $\delta > 0$ - точність обчислення точок на відрізку $[a, b]$ або довжина інтервалу нерозрізненості точок. Число експериментів n або задано, або визначається як найменше ціле, що задовольняє умові: $L_n < \varepsilon$.

Правила, за якими ведеться пошук точки мінімуму, називають *стратегією пошуку*.

Мірою ефективності методу є довжина відрізка локалізації L_n , отриманого після експериментів n . Існують дві стратегії вибору точок для експериментів: пасивні та активні. У методах пасивного пошуку точки для експериментів визначаються заздалегідь і їхнє положення не залежить від результатів обчислень. На відміну від методів пасивного пошуку в методах активного пошуку, вибір чергової точки для експерименту залежить від результатів попередніх обчислень. В результаті буде отримано відрізок локалізації, серед точок якого і вибирають розв'язок задачі x^* .

Серед методів, які використовують для пошуку екстремуму лише обчислення функції в пробних точках, розрізняють методи послідовного пошуку, до яких відносять метод дихотомії, Фібоначчі, золотого перетину, та методи точкового оцінювання, представником яких є метод параболічної апроксимації. У ряді випадків більшу ефективність мають методи, які використовують похідні для визначення екстремуму.

1.3.1. Евристичний вибір початкового інтервалу невизначеності, що містить локальний оптимум, з використанням алгоритму Свена

Для ефективної роботи будь-якого з відомих алгоритмів оптимізації необхідно на попередньому етапі здійснити вибір початкового інтервалу невизначеності. Одним із способів розв'язання цієї задачі є застосування алгоритму Свена, логіка роботи якого полягає в наступному:

1. Визначити довільно такі параметри: деяку точку x_0 , $\Delta > 0$ - величину кроку. Прийняти $k = 0$.
2. Обчислити значення функції у трьох точках $x_0 - \Delta$; x_0 ; $x_0 + \Delta$.
3. Перевірити умови закінчення:
 - якщо $f(x_0 - \Delta) \geq f(x_0) \leq f(x_0 + \Delta)$, то початковий інтервал невизначеності знайдено: $[a_0, b_0] = [x_0 - \Delta; x_0 + \Delta]$;
 - якщо $f(x_0 - \Delta) \leq f(x_0) \geq f(x_0 + \Delta)$, то функція не є унімодальною, а необхідний інтервал невизначеності не може бути знайдений. Обчислення при цьому припиняються (рекомендується задати іншу початкову точку x_0);
 - якщо умова закінчення не виконується, переходимо до кроку 4.
4. Визначити величину Δ :
 - якщо $f(x_0 - \Delta) \geq f(x_0) \geq f(x_0 + \Delta)$, то $\Delta = +\Delta$, $a_0 = x_0$, $x_1 = x_0 + \Delta$, $k = 1$;
 - якщо $f(x_0 - \Delta) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + \Delta)$, то $\Delta = -\Delta$, $b_0 = x_0$, $x_1 = x_0 - \Delta$, $k = 1$.
5. Знайти наступну точку $x_{k+1} = x_k + 2^k \cdot \Delta$, $k = 0, 1, 2, \dots$
6. Перевірити умову зменшення функції:
 - якщо $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ та $\Delta = +\Delta$, то $a_0 = x_k$;
 - якщо $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ та $\Delta = -\Delta$, то $b_0 = x_k$.

В обох випадках прийняти $k = k + 1$ та перейти до кроку 5;

- якщо $f(x^{k+1}) > f(x^k)$, процедура завершується.

При $\Delta = +\Delta$, прийняти $b_0 = x_{k+1}$, а при $\Delta = -\Delta$, прийняти $a_0 = x_{k+1}$. В результаті $[a_0; b_0]$ - пошуковий початковий інтервал невизначеності.

Приклад 8. Розглянемо задачу мінімізації функції $f(x) = (100 - x)^2$ при заданій початковій точці $x_0 = 30$ з кроком $\Delta = 5$.

Порядок виконання завдання:

1. Обчислити значення функції у трьох точках $x_0 - \Delta$; x_0 ; $x_0 + \Delta$

$$f(x_0) = f(30) = 4900;$$

$$f(x_0 + \Delta) = f(35) = 4225;$$

$$f(x_0 - \Delta) = f(25) = 5625.$$

2. Визначаємо знак Δ .

Так як $f(x_0 - \Delta) \geq f(x_0) \geq f(x_0 + \Delta)$ то величина Δ має бути позитивною, а координата точки мінімуму x^* має бути не більше 30. Маємо $x_1 = x_0 + \Delta = 35$.

Далі:

$$x_2 = x_1 + 2 \cdot \Delta = 45$$
$$f(x_2) = f(45) = 3025 < f(x_1).$$

Звідки $x^* > 35$.

Далі:

$$x_3 = x_2 + 2^2 \cdot \Delta = 65$$
$$f(x_3) = f(65) = 1225 < f(x_2).$$

Звідки $x^* > 45$.

Далі:

$$x_4 = x_3 + 2^3 \cdot \Delta = 105$$
$$f(x_4) = f(105) = 25 < f(x_3).$$

Звідки $x^* > 65$.

Далі:

$$x_5 = x_4 + 2^4 \cdot \Delta = 185$$
$$f(x_5) = f(185) = 7225 > f(x_4).$$

Отже $x^* < 185$. Отже, шість кроків обчислень x^* дозволили виявити інтервал невизначеності $65 \leq x^* \leq 185$, в якому розташована точка мінімуму x^* .

Зауважимо, що ефективність пошуку граничних точок безпосередньо залежить від величини кроку Δ . Якщо Δ велике, то отримуємо грубі оцінки координат граничних точок, і побудований інтервал виявляється досить широким. З іншого боку, якщо Δ мале, визначення граничних точок може знадобитися досить великий обсяг обчислень.

Приклад 9. Знайти початковий інтервал невизначеності для пошуку мінімуму цільової функції $F(x)$ з кроком пошуку h .

Порядок виконання завдання:

1. Записати в MathCAD програму пошуку відрізка невизначеності, що містить екстремум.
2. Задати цільову функцію.
3. Знайти відрізок невизначеності (координати початку та кінця відрізка невизначеності), що містить екстремум.

4. Перевірити правильність розв'язання за допомогою функції *Minimize ()*.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 9. Знайти інтервал невизначеності та екстремум цільової функції $F(x) = x - \ln(x)$ із кроком пошуку 0.1.

ПРОГРАМА ЛОКАЛІЗАЦІЇ ЕКСТРЕМУМУ ЦІЛЬОВОЇ
ФУНКЦІЇ В РЕЗУЛЬТАТІ ВИЗНАЧЕННЯ ІНТЕРВАЛУ
НЕВИЗНАЧЕНОСТІ Interval(F ,x0 ,h)

F - назва функції

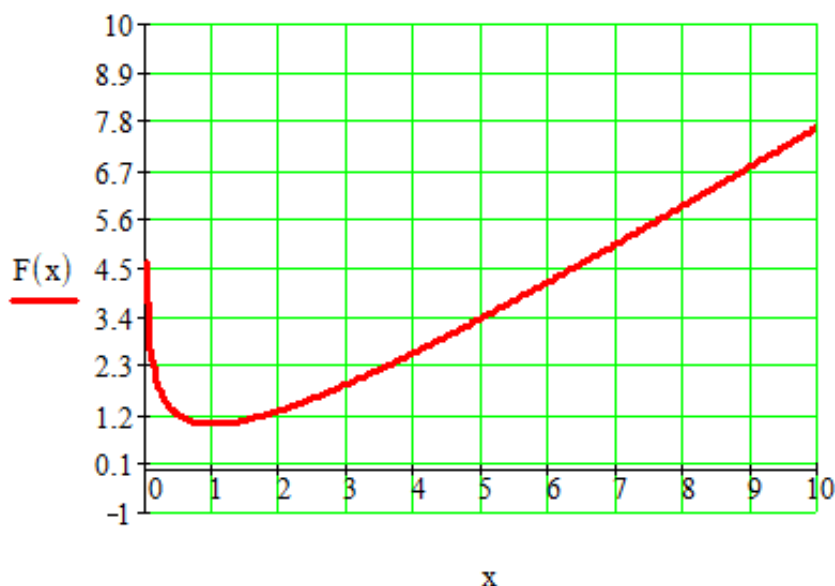
x0 - початкова точка пошуку

h - крок пошуку

```
Interval(F ,x0 ,h) ≡
| a ← x0
| Fa ← F(a)
| h ← -h if F(x0 - h) < Fa
| b ← x0 + h
| Fb ← F(b)
| while Fb < Fa
|   | d ← a
|   | a ← b
|   | Fa ← Fb
|   | b ← b + h
|   | Fb ← F(b)
| if h < 0
|   | c ← b
|   | b ← d
|   | d ← c
| ( d )
| ( b )
```

$F(x) := x - \ln(x)$ - цільова функція

Interval(F ,2 ,0.1) = $\begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.1 \end{pmatrix}$ - результат роботи програми:
координати початку та кінця відрізка
невизначеності



$x := 4$

$\text{Minimize}(F, x) = 1$

- перевірка правильності
знайденого розв'язку



ЗАВДАННЯ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 5. Пошук початкового інтервалу невизначеності цільової функції $f(x) \rightarrow \min_{x \in [a, b]}$ з використанням алгоритму Свена.

<i>№ n/n</i>	<i>$f(x)$</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
1	$-2.9 \cdot \sin^4(x) + 9.8 \cdot e^{x-9.9}$	3.5	5.5
2	$-2.7 \cdot \sin^4(x) + 9.7 \cdot e^{x-9.1}$	7.2	9.1
3	$-2.1 \cdot \cos^4(x) + 8.7 \cdot e^{x-9.6}$	-0.5	1.1
4	$2.1 \cdot \cos^4(x) - 8.7 \cdot e^{x-9.6}$	3.8	6.1
5	$-0.8 \cdot \cos^3(x) + 2.1 \cdot e^{\sin(x)} + 0.5 \cdot x$	-3.9	0.1
6	$\sqrt[3]{8.7 \cdot \sin^2(x) + 1.1} + 4 \cdot e^{x-3.4}$	-5.8	-2.1
7	$-\left(\sqrt[3]{12.4 \cdot \cos^2(x) + 1.05} + 4.68 \cdot e^{x-6.23}\right)$	-4.3	-1.9
8	$1.5 \cdot \sin^3(x + 1.4) + 1.7 \cdot e^{\cos(x)} + 0.3 \cdot x$	-4.1	-2.2
9	$1.5 \cdot \sin^3(x + 1.4) + 1.7 \cdot e^{\cos(x)} + 0.3 \cdot x$	1.6	4.2
10	$3.15 \cdot \sin^4(x + 0.13) - 3.98 \cdot e^{x-9.87} + 1.12$	-1.6	1.3
11	$1.75 \cdot \ln(x + 12) + 4.36 \cdot \cos^5(x) - 5.35$	-3.9	-0.6

<i>Nº n/n</i>	$f(x)$	<i>a</i>	<i>b</i>
12	$-3.5 \cdot \ln(x+12) - 4 \cdot \sin^5(x) + 5.35$	-6.9	-3.9
13	$1.75 \cdot \ln(x+11.34) \cdot \sin^3(x) + 2.45$	-8.6	-6.4
14	$1.5 \cdot \ln(x+9) \cdot \cos^3(x) + 2.3$	2.1	4.5
15	$0.9 \cdot x^2 - 2 \cdot \sin(5 \cdot x)$	1.1	2.2
16	$0.9 \cdot (x^2 + 1) \cdot \sin(2 \cdot x) + 5 \cdot x^2 + 4.9$	-3.9	1.5

1.3.2. Алгоритм нелінійної оптимізації поділом відрізка навпіл (метод дихотомії)

У цьому методі пробні точки x_1 та x_2 розташовуються близько до середини чергового відрізка $[a, b]$, тобто:

$$x_1 = \frac{b+a-\delta}{2}; \quad x_2 = \frac{b+a+\delta}{2} \quad (1.2)$$

де δ - мале число.

При цьому відношення довжин нового та вихідного відрізків $\tau = \frac{b-x_1}{b-a} = \frac{x_2-a}{b-a}$ близько до 1/2, цим пояснюється назва методу.

Зазначимо, що для будь-яких точок x_1 та x_2 величина $\tau > 1/2$ тому вказаний вибір пробних точок пояснюється прагненням забезпечити максимально можливе відносне зменшення відрізка на кожній ітерації пошуку x^* .

Наприкінці обчислень методом дихотомії як наближеного значення x^* беруть середину останнього зі знайдених відрізків $[a, b]$, переконавшись попередньо, що виконано нерівність:

$$\frac{b-a}{2} \leq \varepsilon, \quad (1.3)$$

де ε - задана точність.

Алгоритм оптимізації поділом відрізка навпіл

1. Визначити x_1 та x_2

за формулою (1.2) та обчислити $f(x_1)$ та $f(x_2)$.

2. Порівняти $f(x_1)$ та $f(x_2)$

Якщо $f(x_1) < f(x_2)$, то перейти до відрізка $[a, x_2]$, прийнявши $b = x_2$, інакше – до відрізка $[x_1, b]$, прийнявши $a = x_1$.

3. Знайти досягнуту точність

за формулою $\varepsilon_n = \frac{b-a}{2}$, де n – номер ітерації.

Якщо $\varepsilon_n > \varepsilon$, то перейти до наступної ітерації, повернувшись до кроку 1.
Якщо $\varepsilon_n \leq \varepsilon$, то завершити пошук x^* .

Прийняти $x^* \approx \bar{x} = \frac{a+b}{2}$, $f^* \approx f(\bar{x})$.

Необхідно звернути увагу на таке:

1. Число δ з формули (1.2) вибирається на інтервалі $(0, 2 \cdot \varepsilon)$ з урахуванням таких міркувань:

- Чим менше δ , тим більше відносне зменшення довжини відрізка на кожній ітерації;
- При надмірно малому значенню δ порівняння значень функції $f(x)$ у точках x_1 та x_2 що відрізняються на величину δ , важко, тому необхідно враховувати кількість вірних розрядів функції $f(x)$ за задання аргументу x .

2. Число n ітерацій методу дихотомії, необхідне визначення точки x^* з точністю ε визначається нерівністю:

$$n \geq \log_2 \left(\frac{b-a-\delta}{2 \cdot \varepsilon - \delta} \right) \quad (1.4)$$

Позначимо довжину $[a, b] = \Delta_0$. Тоді довжина відрізка, отриманого після першої ітерації, дорівнює $\Delta_1 = \frac{\Delta_0}{2} + \frac{\delta}{2}$, після другої ітерації:

$$\Delta_2 = \frac{\Delta_1}{2} + \frac{\delta}{2} = \frac{b-a}{4} + \delta \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right), \quad (1.5)$$

після третьої:

$$\Delta_3 = \frac{\Delta_2}{2} + \frac{\delta}{2} = \frac{b-a}{8} + \delta \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) \text{ і т.п.}$$

Після n ітерацій довжина відрізка пошуку точки x^* стане рівна:

$$\Delta_n = \frac{b-a}{2^n} + \delta \cdot \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{2} \right).$$

При цьому буде досягнуто точності визначення точки мінімуму:

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta_n}{2} \quad (1.6)$$

3. Розмір δ не може бути обраний занадто великий. Так як $\varepsilon_n = \frac{b-a-\delta}{2^{n+1}} + \frac{\delta}{2} \geq \frac{\delta}{2}$, але $\varepsilon_n \leq \varepsilon$ необхідно вибирати $\delta < 2 \cdot \varepsilon$.

4. При малому δ величина $\varepsilon_n = \frac{b-a-\delta}{2^{n+1}} + \frac{\delta}{2} \approx \frac{b-a}{2^{n+1}}$. На кожній ітерації методу дихотомії обчислюються два значення $f(x)$. Тому після N обчислень $f(x)$ Виготовляється $n = \frac{N}{2}$ ітерацій та досягається точність визначення x^* :

$$\varepsilon(N) = \varepsilon_{N/2} \approx \frac{b-a}{2^{\left(\frac{N}{2}+1\right)}} \quad (1.7)$$

Приклад 10. Методом поділу відрізка навпіл розв'язати задачу $f(x) = x^4 + e^{-x} \rightarrow \min, x \in [0, 1]$ з точністю $\varepsilon = 0.1$.

Порядок виконання завдання:

1. Вибираємо $\delta = 0.02$, ($\delta < 2 \cdot \varepsilon$).

2. Розглянемо детально дії при ітерації.

Крок 1. $x_1 = 0.49$, $x_2 = 0.51$, $f(x_1) = 0.688$, $f(x_2) = 0.67$.

Крок 2. $f(x_1) > f(x_2)$ тому вважаємо $a = x_1 = 0.49$. Новий відрізок $[0.49, 1]$.

Крок 3. $\frac{b-a}{2} = 0.255 > 0.1$ тому переходимо до наступної ітерації.

Таблиця 1.2 - Результати обчислень на ітераціях 1-4

№ ітерації	a	b	$\frac{b-a}{2}$	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	Порівняння
1	0	1	0.5	0.49	0.51	0.688	0.67	$f(x_1) > f(x_2)$
2	0.49	1	0.26	0.735	0.755	0.771	0.792	$f(x_1) > f(x_2)$
3	0.49	0.755	0.13	0.613	0.633	0.683	0.691	$f(x_1) < f(x_2)$
4	0.49	0.633	0.07	0.07 < 0.1 – точність досягнута				

$$\text{Звідки } x^* = \frac{0.49 + 0.633}{2} = 0.56, f^* \approx f(0.56) = 0.67.$$

Приклад 11. Знайти екстремум функції $f(x)$ однієї змінної методом поділу навпіл з точністю ε .

Порядок виконання завдання:

1. Записати в MathCAD програму пошуку екстремуму методом поділу навпіл.
2. Записати в MathCAD програму пошуку початкового відрізка невизначеності, що містить екстремум.
3. Задати цільову функцію.
4. Знайти відрізок невизначеності, що містить екстремум, з похибкою ε .
5. Отримати результати роботи програми, використовуючи знайдений у п.4 відрізок невизначеності:
 - точку екстремуму;
 - значення цільової функції у цій точці;
 - кількість ітерацій, за яку знайдено екстремум.
6. Перевірити правильність розв'язання за допомогою функції **Minimize()**.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 11. Знайти екстремум функції $f(x) = e^x - \frac{x}{3} + 2 \cdot x$ однієї змінної методом поділу навпіл з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

ПРОГРАМА ПОШУКУ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ
ЗМІННОЇ МЕТОДОМ ПОДІЛУ НАВПІЛ

delenie_popolam(y, a, b, ε)

y - назва функції

a, b - границі відрізка, що містить екстремум

ε - задана точність визначення екстремуму

delenie_popolam(y, a, b, ε) :=

i	← 0
a ₀	← a
b ₀	← b
xc ₀	← $\frac{a_0 + b_0}{2}$

```

while  $|b_i - a_i| > \varepsilon$ 
|  $x1_i \leftarrow a_i + \frac{|b_i - a_i|}{4}$ 
|  $x2_i \leftarrow b_i - \frac{|b_i - a_i|}{4}$ 
| if  $y(x1_i) < y(xc_i)$ 
| |  $b_{i+1} \leftarrow xc_i$ 
| |  $xc_{i+1} \leftarrow x1_i$ 
| |  $a_{i+1} \leftarrow a_i$ 
| if  $y(x1_i) \geq y(xc_i)$ 
| | if  $y(x2_i) < y(xc_i)$ 
| | |  $a_{i+1} \leftarrow xc_i$ 
| | |  $xc_{i+1} \leftarrow x2_i$ 
| | |  $b_{i+1} \leftarrow b_i$ 
| | if  $y(x2_i) \geq y(xc_i)$ 
| | |  $a_{i+1} \leftarrow x1_i$ 
| | |  $b_{i+1} \leftarrow x2_i$ 
| | |  $xc_{i+1} \leftarrow xc_i$ 
|  $i \leftarrow i + 1$ 
res  $\leftarrow \begin{pmatrix} xc_i \\ y(xc_i) \\ i \end{pmatrix}$ 
res

```

```

Interval(F, x0, h)  $\equiv$ 
|  $a \leftarrow x0$ 
|  $Fa \leftarrow F(a)$ 
|  $h \leftarrow -h$  if  $F(x0 - h) < Fa$ 
|  $b \leftarrow x0 + h$ 
|  $Fb \leftarrow F(b)$ 
| while  $Fb < Fa$ 
| |  $d \leftarrow a$ 
| |  $a \leftarrow b$ 
| |  $Fa \leftarrow Fb$ 
| |  $b \leftarrow b + h$ 

```

```

| Fb ← F(b)
if h < 0
| c ← b
| b ← d
| d ← c
| ( d )
| ( b )

```

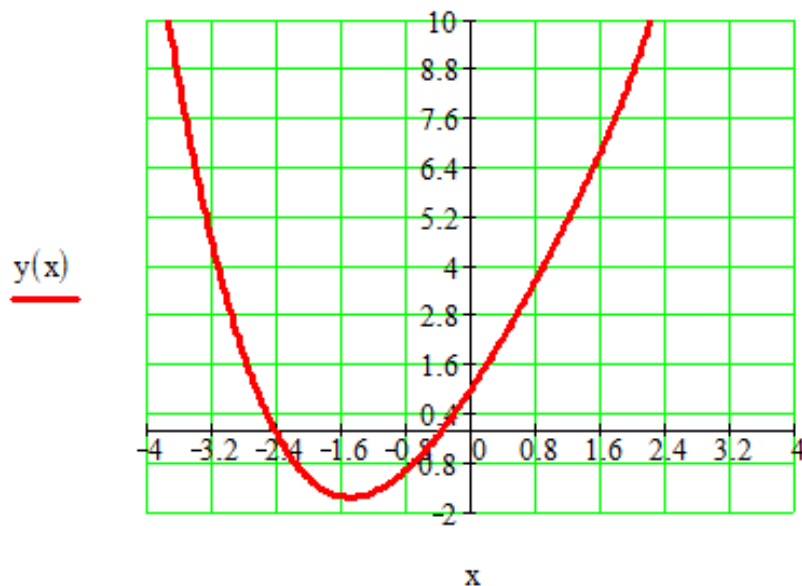
$$y(x) := e^x - \frac{x^3}{3} + 2x \quad - \text{цільова функція}$$

$$\text{Interval}(y, 2, 0.1) = \begin{pmatrix} -1.6 \\ -1.4 \end{pmatrix} \quad - \text{пошук відрізка невизначеності, який містить екстремум}$$

$$\text{delenie_popolam}(y, -1.6, -1.4, 10^{-3}) = \begin{pmatrix} -1.492 \\ -1.652 \\ 8 \end{pmatrix}$$

- результати роботи програми:

точка екстремуму, значення цільової функції в цій точці, кількість ітерацій, за яку знайдено екстремум



$$x := 0$$

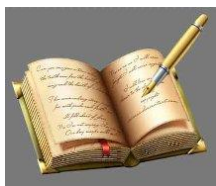
$$z := \text{Minimize}(y, x)$$

$$z = -1.492$$

$$y(z) = -1.65198$$

- перевірка правильності
знайденого розв'язку

- значення цільової функції у знайдений
точці екстремуму



ЗАВДАННЯ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 6. Методом поділу відрізка навпіл розв'язати задачу

$$f(x) \rightarrow \min \text{ з точністю } \varepsilon = 10^{-3}.$$

варіант 1	варіант 2
$f(x) = x^2 + e^{-0.35x} \rightarrow \min$	$f(x) = x^2 + 3e^{-0.45x} \rightarrow \min$
варіант 3	варіант 4
$f(x) = x^4 - 1.5 \arctg x \rightarrow \min$	$f(x) = x^2 - x + e^{-x} \rightarrow \min$
варіант 5	варіант 6
$f(x) = -4x + e^{ x-0.2 } \rightarrow \min$	$f(x) = x - \ln x \rightarrow \min$
варіант 7	варіант 8
$f(x) = 10x \ln x - \frac{x^2}{2} \rightarrow \min$	$f(x) = e^x + \frac{1}{x} \rightarrow \min$
варіант 9	варіант 10
$f(x) = x^4 - 1.1 \cdot \arctg 1.5x \rightarrow \min$	$f(x) = -2.8x + e^{ x-0.6 } \rightarrow \min$
варіант 11	варіант 12
$f(x) = \frac{x^3}{3} - 5x + x \ln x \rightarrow \min$	$f(x) = e^x - \frac{x^3}{3} + 2x \rightarrow \min$
варіант 13	варіант 14
$f(x) = e^{-x} + x^2 \rightarrow \min$	$f(x) = \sin(x^2) + \sin^2 x \rightarrow \min$
варіант 15	варіант 16
$f(x) = x \sin x + 2 \cos x \rightarrow \min$	$f(x) = -2.2x + e^{ x-0.8 } \rightarrow \min$
варіант 17	варіант 18
$f(x) = \sqrt{1+x^2} + e^{-2x} \rightarrow \min$	$f(x) = (x-4)^2 + \ln x \rightarrow \min$
варіант 19	варіант 20
$f(x) = x^2 + 2e^{-0.65x} \rightarrow \min$	$f(x) = x^4 - 0.9 \cdot \arctg 2.5x \rightarrow \min$
варіант 21	варіант 22
$f(x) = x^4 - 1.3 \cdot \arctg 1.5x \rightarrow \min$	$f(x) = 2x^2 + x - \cos^2 x \rightarrow \min$
варіант 23	варіант 24
$f(x) = x^2 + 3x(\ln x - 1) \rightarrow \min$	$f(x) = x^4 + e^{-x} \rightarrow \min$
варіант 25	варіант 26
$f(x) = x^2 - 2x - 2 \cos x \rightarrow \min$	$f(x) = x^2 + 5e^{-0.05x} \rightarrow \min$
варіант 27	варіант 28
$f(x) = -3.4x + e^{ x-0.4 } \rightarrow \min$	$f(x) = x^2 - 2x - e^{-x} \rightarrow \min$

варіант 29	варіант 30
$f(x) = \frac{\cos x}{x^2} \rightarrow \min$	$f(x) = e^x + e^{-2x} + 2x \rightarrow \min$

1.3.3. Алгоритм одномірної нелінійної оптимізації методом Фібоначчі

Метод Фібоначчі ефективніший за метод дихотомії, тому що розбиття відрізка проводиться так, що на кожній ітерації потрібно обчислювати не два значення $f(x_1)$ і $f(x_2)$, а лише одне.

Метод Фібоначчі ґрунтується на використанні **чисел Фібоначчі**, що задаються рекурентним співвідношенням:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2) \quad (1.8)$$

з початковими значеннями $F_0 = 1, F_1 = 1$.

Формула (1.8) разом із початковими значеннями визначає наступний ряд чисел Фібоначчі:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	...

Метод Фібоначчі складається із n кроків.

Покладемо спочатку $a_0 = a, b_0 = b$.

На k -ому кроці, $k = 0, 1, \dots, n-1$, визначимо точки x_1^k і x_2^k з умови:

$$x_1^k = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}} \cdot (b_k - a_k), \quad x_2^k = a_k + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}} \cdot (b_k - a_k) \quad (1.9)$$

Формули (1.9) є основними розрахунковими формулами методу Фібоначчі.

Після цього так само, як і в методі дихотомії, визначають новий, менший відрізок локалізації $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ за тим самим правилом:

- якщо $f(x_1^k) \leq f(x_2^k)$, то $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x_2^k$;
- якщо $f(x_1^k) \geq f(x_2^{k+1})$, то $a_{k+1} = x_1^k, b_{k+1} = b_k$.

Важливо, що одна із пробних точок x_1^k, x_2^k стане пробною точкою на новому відрізку локалізації, тобто, збігається з однією з точок x_1^{k+1}, x_2^{k+1} .

Тому на кожній ітерації достатньо визначити лише одне значення $f(x)$ тому що інше вже знайдено на попередній ітерації.

Наприкінці обчислень можна взяти як наближене значення $x^* = x_1^{n-1}$.

Після виконання n ітерацій похибка задовольняє таку нерівність:

$$\varepsilon_n = \frac{b_n - a_n}{2} < \frac{1}{2} \cdot \frac{b - a}{F_{n+1}} \quad (1.10)$$

Отже, якщо задана необхідна точність ε число ітерацій n визначається за умови $\frac{1}{2} \cdot \frac{b - a}{F_{n+1}} < \varepsilon$ або:

$$F_{n+1} > \frac{b - a}{2\varepsilon} \quad (1.11)$$

Зауважимо, що з (1.11) слідує, що кількість ітерацій, необхідних для досягнення заданої точності ε , залежить тільки від довжини відрізка $b - a$ і точності ε і не залежить від виду функції $f(x)$.

Алгоритм методу Фібоначчі

1. Ввести вихідні дані a, b, ε

Визначити число ітерацій n із умови (1.11). Ввести числа Фібоначчі $F_0, F_1, F_2, \dots, F_{n+1}$.

2. Прийняти $k = 0$ та визначити x_1 і x_2 за формулами (1.9)

3. Обчислити $f(x_1)$ і $f(x_2)$

4. Перевірити критерій завершення обчислень: $(|x_1| - |x_2|) \leq \varepsilon$

Якщо не виконується критерій, переходимо до кроку 5, інакше – до кроку 6.

5. Перейти до нового відрізка локалізації та нових пробних точок

Якщо $f(x_1) \leq f(x_2)$, то прийняти $b = x_2$, $x_2 = x_1$, $f(x_2) = f(x_1)$,
 $x_1 = a + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}} \cdot (b - a)$ та обчислити $f(x_1)$.

Інакше прийняти $a = x_1$, $x_1 = x_2$, $f(x_1) = f(x_2)$, $x_2 = a + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}} \cdot (b - a)$ та обчислити $f(x_2)$. Прийняти $k = k + 1$ та перейти до кроку 4.

6. Прийняти $x^* \approx x_1$. Обчислити $f^* \approx f(x^*)$.

Приклад 12. Пошук екстремуму функції однієї змінної методом Фібоначчі. Знайти мінімум функції $F(x)$ із заданою точністю ε .

Порядок виконання завдання:

1. Записати в MathCAD програму пошуку екстремуму методом Фібоначчі
2. Записати в MathCAD програму обчислення чисел Фібоначчі
3. Задати цільову функцію
4. Отримати результати роботи програми:
 - точку екстремуму;
 - значення цільової функції у цій точці.
5. Перевірити правильність розв'язання, використовуючи **Minimize()**.

Знайти значення цільової функції у знайденій точці екстремуму.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 12. Пошук екстремуму функції однієї змінної методом Фібоначчі. Знайти мінімум функції $F(x) = e^x - \frac{x^3}{3} + 2 \cdot x$ із заданою точністю 0.0001.

ПРОГРАМА ПОШУКУ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ
 ЗМІННОЇ МЕТОДОМ ФІБОНАЧЧІ $\text{Fibonacci}(a, b, f, F, n, \varepsilon)$

a, b - границі відрізка невизначеності

f - назва функції, яка містить вираз для її обчислення

F - назва програми, яка обчислює числа Фібоначчі

n - кількість використовуваних чисел Фібоначчі

ε - задана точність визначення екстремуму

n - кількість використовуваних чисел Фібоначчі

ε - задана точність визначення екстремуму

```
Fibonacci(a, b, f, F, n, ε) := while 0 < 1
    i ← 1
    x1 ← a +  $\frac{F_{n-(i+1)}}{F_n} \cdot (b - a)$ 
    x2 ← a +  $\frac{F_{n-1}}{F_n} \cdot (b - a)$ 
    a ← x1 if f(x1) > f(x2)
    b ← x2 if f(x1) < f(x2)
    if f(x1) = f(x2)
        a ← x1
        b ← x2
    i ← i + 1
    (break) if  $||x1| - |x2|| < \varepsilon$ 
x ←  $\frac{x1 + x2}{2}$ 
```

ПРОГРАМА ОБЧИСЛЕННЯ ЧИСЕЛ ФІБОНАЧЧІ

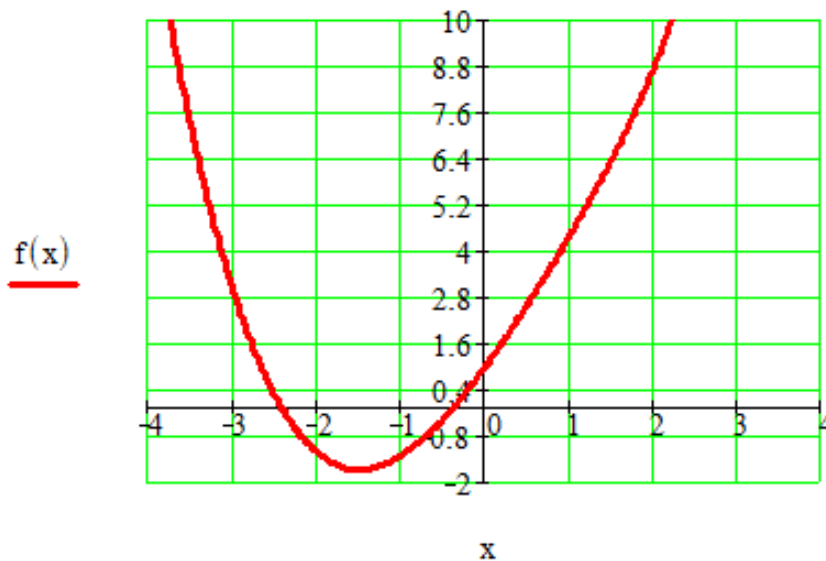
```
F := F0 ← 1
    F1 ← 1
    for n ∈ 2..200
        Fn ← Fn-1 + Fn-2
    F
```

$f(x) := e^x - \frac{x^3}{3} + 2x$ - цільова функція

$z := \text{Fibonacci}(-3, -1, f, F, 5, 0.0001)$

$z = -1.49162$ - результати роботи програми:
точка екстремуму

$f(z) = -1.65198$ - значення цільової функції в точці
екстремуму



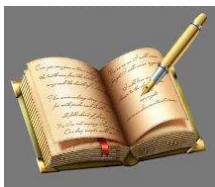
$x := 0$

$\text{Minimize}(f, x) = -1.49164$

- перевірка правильності
знайденого розв'язку

$f(-1.49164) = -1.65198$

- значення цільової функції в знайдений
точці екстремуму



ЗАВДАННЯ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 7. Методом Фібоначчі розв'язати задачу $f(x) \rightarrow \min$ з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

Варіанти задач дивися у завданні 6.

1.3.4. Алгоритм нелінійної оптимізації методом золотого перетину

В основі цього методу лежить поняття «золотого перетину».

Золотим перетином відрізка називається його розбиття на дві нерівні частини, так що відношення довжини всього відрізка до довжини його більшої частини дорівнює відношенню довжини більшої частини до довжини меншої частини (рисунок 1.10, зліва):

$$\frac{b-a}{b-x_1} = \frac{b-x_1}{x_1-a}$$



Рисунок 1.10 – Поділ відрізка відповідно до правил «золотого перетину»

Золотий перетин здійснюється двома точками x_1 і x_2 , розташованими симетрично щодо середини відрізка (рисунок 1.10, праворуч). Неважко перевірити, що:

$$\frac{b-a}{b-x_1} = \frac{b-x_1}{x_1-a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (1.12)$$

$$\frac{b-a}{x_2-a} = \frac{x_2-a}{b-x_2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (1.13)$$

Точка x_1 здійснює золотий перетин не тільки відрізка $[a, b]$, а й відрізка $[a, x_2]$, а точка x_2 здійснює золотий перетин як відрізка $[a, b]$, а й відрізка $[x_1, b]$. Справді,

$$\frac{x_2-a}{x_1-a} = \frac{x_1-a}{x_2-x_1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{b-x_1}{b-x_1} = \frac{b-x_1}{x_2-x_1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

З (1.12) та (1.13) отримуємо:

$$x_1 = a + \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot (b-a), x_2 = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot (b-a) \quad (1.14)$$

Формули (1.14) є основними розрахунковими формулами методу золотого перетину.

З (1.14) як наслідок маємо, що $x_1 + x_2 = a + b$. Якщо позначити $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, то формули (1.14) можна переписати так:

$$x_1 = b - r \cdot (b-a), \quad x_2 = a + r \cdot (b-a) \quad (1.15)$$

Процедура поділу відрізка $[a, b]$ така сама, як і для методу дихотомії. Обчислюються значення функції у вибраних точках: $f(x_1)$ і $f(x_2)$. Визначається новий відрізок локалізації $[a_1, b_1]$ наступним чином:

- якщо $f(x_1) \leq f(x_2)$, $a_1 = a$, $b_1 = x_2$;
- якщо $f(x_1) > f(x_2)$, $a_1 = x_1$, $b_1 = b$.

Далі процедура поділу відрізка $[a_1, b_1]$ повторюється з використанням формул (1.14) або (1.15).

Одна із пробних точок x_1, x_2 стане пробною точкою на новому відрізку локалізації. Тому на кожній ітерації достатньо визначити лише одне значення $f(x)$ тому що інше вже знайдено на попередній ітерації.

В кінці обчислень можна взяти як наближене значення x^* середину останнього з отриманих відрізків.

Після виконання n ітерацій похибка задовольняє таку нерівність:

$$\varepsilon_n = \frac{b_n - a_n}{2} < \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^n \cdot (b - a) \quad (1.16)$$

Умовою закінчення обчислень є виконання нерівності $\varepsilon_n < \varepsilon$.

Алгоритм методу золотого перетину

1. Ввести вихідні дані a, b, ε .

Прийняти $r = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, $\varepsilon_n = \frac{b - a}{2}$.

2. Визначити x_1 і x_2

$$x_1 = b - r \cdot (b - a), \quad x_2 = a + r \cdot (b - a)$$

3. Обчислити $f(x_1)$ і $f(x_2)$.

4. Перевірити критерій завершення обчислень

Якщо $\varepsilon_n < \varepsilon$, перейти до кроку 5, інакше – до кроку 6.

5. Перейти до нового відрізка локалізації та нових пробних точок

Якщо $f(x_1) \leq f(x_2)$, то прийняти $b = x_2$, $x_2 = x_1$, $f(x_2) = f(x_1)$, $x_1 = b - r \cdot (b - a)$ та обчислити $f(x_1)$.

Інакше прийняти $a = x_1$, $x_1 = x_2$, $f(x_1) = f(x_2)$, $x_2 = a + r \cdot (b - a)$ та обчислити $f(x_2)$.

Прийняти $\varepsilon_n = r \cdot \varepsilon_n$, перейти до кроку 4.

$$6. \quad \text{Прийняти } x^* \approx \frac{a+b}{2}. \text{ Обчислити } f^* \approx f(x^*).$$

Приклад 13. Знайти мінімум функції $F(x)$ методом золотого перетину із заданою точністю ε .

Порядок виконання завдання:

1. Записати в MathCAD програму пошуку екстремуму методом золотого перетину.
2. Записати в MathCAD програму пошуку початкового відрізка невизначеності, що містить екстремум.
3. Задати цільову функцію.
4. Знайти відрізок невизначеності, що містить екстремум, з точністю ε .
5. Отримати результати роботи програми, використовуючи знайдений у п.4 відрізок невизначеності:
 - точку екстремуму;
 - значення цільової функції у цій точці.
6. Перевірити правильність розв'язання, використовуючи **Minimize ()**. Знайти значення цільової функції у знайденій точці екстремуму.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 13. Знайти мінімум функції $F(x) = e^x - \frac{x^3}{3} + 2 \cdot x$ методом золотого перетину із заданою точністю $\varepsilon = 0.01$.

ПРОГРАМА ПОШУКУ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ
ЗМІННОЇ МЕТОДОМ ЗОЛОТОГО ПЕРЕТИНУ Min_GS(F, x0, ε)

F - назва функції

x0 - початкова точка пошуку екстремуму

ε - задана точність визначення екстремуму

$$\text{Min_GS}(F, x0, \varepsilon) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow 0.01 \\ \zeta \leftarrow \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \end{array} \right.$$

```

A ← Interval(F, x0, h)
a ← A0
b ← A1
 $\alpha \leftarrow \zeta \cdot a + (1 - \zeta) \cdot b$ 
 $\beta \leftarrow (1 - \zeta) \cdot a + \zeta \cdot b$ 
F $\alpha$  ← F( $\alpha$ )
F $\beta$  ← F( $\beta$ )
while 1
    if F $\alpha$  < F $\beta$ 
        b ←  $\beta$ 
         $\beta \leftarrow \alpha$ 
        F $\beta$  ← F $\alpha$ 
         $\alpha \leftarrow \zeta \cdot a + (1 - \zeta) \cdot b$ 
        F $\alpha$  ← F( $\alpha$ )
    if F $\alpha$  > F $\beta$ 
        a ←  $\alpha$ 
         $\alpha \leftarrow \beta$ 
        F $\alpha$  ← F $\beta$ 
         $\beta \leftarrow (1 - \zeta) \cdot a + \zeta \cdot b$ 
        F $\beta$  ← F( $\beta$ )
    return  $\frac{a + b}{2}$  if  $|b - a| \leq \varepsilon$ 

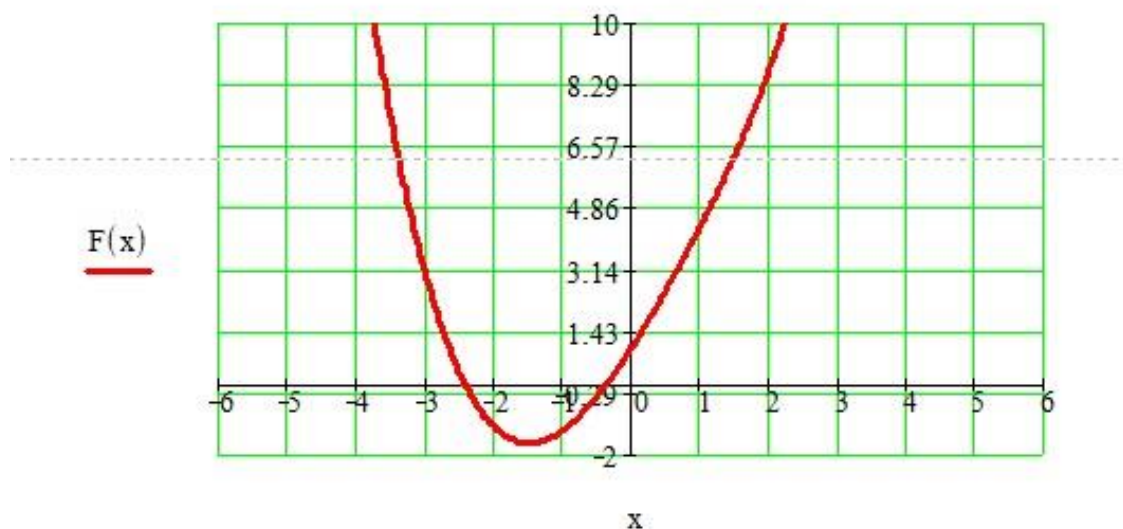
```

```

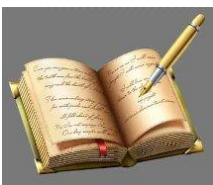
Interval(F, x0, h) ≡
a ← x0
Fa ← F(a)
h ← -h if F(x0 - h) < Fa
b ← x0 + h
Fb ← F(b)
while Fb < Fa
    d ← a
    a ← b
    Fa ← Fb
    b ← b + h

```

$F(x) := e^x - \frac{x^3}{3} + 2x$	- цільова функція
$\text{Interval}(F, 3, 0.1) = \begin{pmatrix} -1.6 \\ -1.4 \end{pmatrix}$	- пошук відрізка невизначеності, який містить екстремум
$x_{\text{MIN}} := \text{Min_GS}(F, -1.4, 0.01)$	- результати роботи програми: точка екстремуму
$x_{\text{MIN}} = -1.49146$	
$F(x_{\text{MIN}}) = -1.65198$	- значення цільової функції в точці екстремуму



$x := 2$	
$z := \text{Minimize}(F, x)$	- перевірка правильності знайденого розв'язку
$z = -1.49164$	
$F(z) = -1.65198$	- значення цільової функції в знайдений точці екстремуму



ЗАВДАННЯ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 8. Знайти мінімум функції $F(x)$ методом золотого перетину із заданою точністю ε . Варіанти задач дивися у завданні 6.

1.3.5. Алгоритм нелінійної оптимізації методом послідовної параболічної апроксимації

Пошук точки мінімуму методами виключення відрізків заснований на порівнянні значень функції $f(x)$ у двох точках, у якому враховується лише знак різниці цих значень.

Врахувати інформацію, що міститься у відносних змінах значень $f(x)$ у пробних точках, дозволяє метод поліноміальної інтерполяції, ідея якого полягає в тому, що для $f(x)$ будується апроксимуючий багаточлен і його точка мінімуму служить наближенням до x^* .

Цей метод можна використовувати за умови, що $f(x)$ є не тільки унімодальною, а й досить гладкою. Метод спирається на теорему Вейєрштрасса, згідно з якою досить гладку на відрізку функцію можна з будь-якою точністю замінити на ньому деяким поліномом.

Для підвищення точності можна, по-перше, збільшити порядок апроксимуючого поліному і по-друге, зменшувати довжину відрізка апроксимації. Другий шлях кращий.

Найпростіший варіант поліноміальної апроксимації – метод парабол, який використовує поліноми другого порядку. На кожній ітерації цього методу будується квадратичний тричлен, графік якого (парабола) проходить через три вибрані точки графіку функції $f(x)$ (рисунок 1.11).

Розглянемо унімодальну на відрізку $[a, b]$ функцію $f(x)$, що досягає мінімуму у внутрішній точці цього відрізка. Виберемо три точки x_1, x_2, x_3 відрізка $[a, b]$, для яких виконуються нерівності:

$$x_1 < x_2 < x_3, \quad f(x_1) \geq f(x_2) \leq f(x_3) \quad (1.17)$$

Для визначення таких точок зазвичай буває досить кілька спроб. Можна також здійснювати ітерації методом золотого перетину, доки для пробних точок чергового відрізка і одного з його кінців не будуть виконуватися нерівності (1.17).

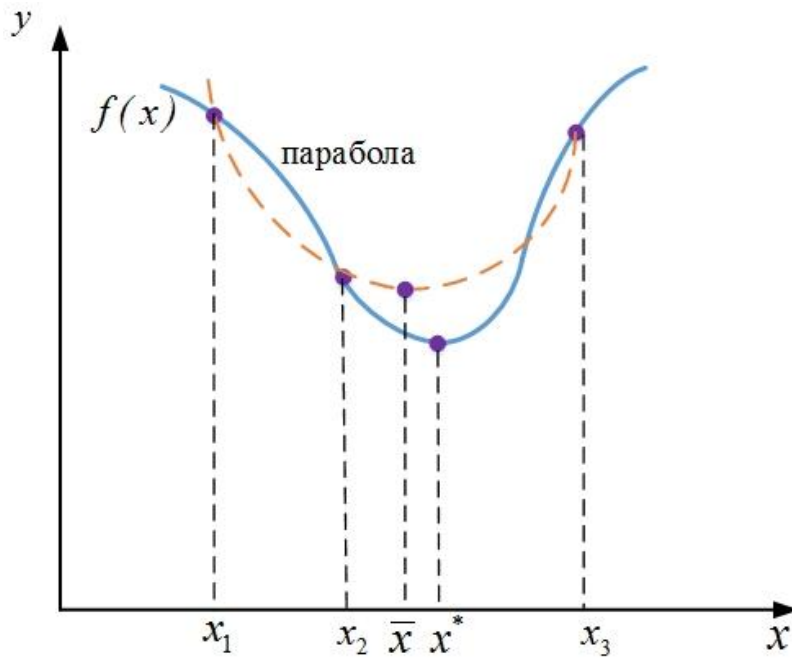


Рисунок 1.11 – Ілюстрація застосування методу парабол

З унімодальності функції $f(x)$ випливає, що $x^* \in [x_1, x_3]$. Складемо квадратний тричлен:

$$q(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_1) + a_2 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \quad (1.18)$$

(поліном у формі Ньютона), графік якого проходить через точки $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$ графіку функції $f(x)$. Будемо вважати, що хоча б одна з нерівностей для $f(x)$ в (1.17) є строгою. Тоді гілки шуканої параболи будуть спрямовані вгору, а точка мінімуму $\bar{x}$ тричлена $q(x)$ належатиме відрітку $[x_1, x_3]$.

Визначаючи коефіцієнти a_0, a_1, a_2 із системи рівнянь:

$$\begin{cases} q(x_1) = f(x_1) = f_1 \\ q(x_2) = f(x_2) = f_2 \\ q(x_3) = f(x_3) = f_3, \end{cases}$$

знаходимо

$$a_0 = f_1, \quad a_1 = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}, \quad a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2} \cdot \left(\frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} \right) \quad (1.19)$$

Точку мінімуму $\bar{x}$ обчислимо, прирівнявши похідну квадратичного тричлена до нуля. В результаті отримаємо:

$$\bar{x} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_1 + x_2 - \frac{a_1}{a_2} \right) \quad (1.20)$$

Число $\bar{x}$ з (1.20) слугує черговим наближенням методу парабол до x^* . Далі описана процедура повторюється для нових точок x_1, x_2, x_3 , які задовольняють нерівностям (1.17).

Для кожної ітерації методу парабол, крім першої, визначається лише одне нове значення $f(x)$. Умовою закінчення пошуку мінімуму є близькість до нуля різниці Δ чисел $\bar{x}$, знайдених у цій і попередньої ітераціях, тобто. Нерівність $|\Delta| \leq \varepsilon$.

Приклад 14. Методом парабол розв'язати задачу $f(x) = x^4 + e^{-x} \rightarrow \min$, $x \in [0, 1]$ з точністю $|\Delta| \leq \varepsilon = 0.025$.

Порядок виконання завдання:

1. Ітерація 1

- *Крок 1.* Виберемо точки $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 0.75$. Функція приймає у цих точках відповідно значення $f_1 = 0.7827$, $f_2 = 0.6690$, $f_3 = 0.7888$, що задовольняють нерівності (1.17).

- *Крок 2.* За формулою (1.19) та (1.20) знаходимо $\bar{x} = 0.4968$. Оскільки на першій ітерації обчислення величини Δ неможливе, переходимо відразу до кроку 4.

- *Крок 4.* Обчислюємо $f(\bar{x}) = 0.6694$. Переходимо до кроку 5.

- *Крок 5.* На цій ітерації маємо: $x_1 \leq \bar{x} \leq x_2 \leq x_3$, $f(\bar{x}) \geq f(x_2)$, отже, $x^* \in [\bar{x}, x_3]$. Тому вважаємо:

$$x_1 = \bar{x} = 0.4968, \quad f(x_1) = f(\bar{x}) = 0.6694.$$

А точки x_2, x_3 та значення $f(x)$ у них не змінюються. Переходимо до наступної ітерації.

2. Ітерація 2

Оскільки точки x_1, x_2, x_3 вже знайдено, то починаємо з кроку 2.

- *Крок 2.* Знаходимо $\bar{x} = 0.5224$. Переходимо до кроку 3.

- *Крок 3.* $\Delta = |0.4968 - 0.5224| = 0.026 > 0.025$ тому переходимо до кроку 4.

- *Крок 4.* Обчислюємо $f(\bar{x}) = 0.6676$. Переходимо до кроку 5.

- *Крок 5.* Оскільки: $x_1 \leq x_2 \leq \bar{x} \leq x_3$, $f(x_2) \geq f(\bar{x})$, отже, $x^* \in [x_2, x_3]$. Тому вважаємо:

$$x_1 = x_2 = 0.5, \quad f(x_1) = f(x_2) = 0.6690$$

$$x_2 = \bar{x} = 0.5224, \quad f(x_2) = f(\bar{x}) = 0.6676$$

а точка x_3 та значення $f(x_3)$ залишаються попередніми. Переходимо до наступної ітерації.

3. Ітерація 3

Оскільки точки x_1, x_2, x_3 вже знайдено, то починаємо з кроку 2.

- *Крок 2.* Знаходимо $\bar{x} = 0.5248$. Переходимо до кроку 3.
- *Крок 3.* $\Delta = |0.5224 - 0.5248| = 0.024 < 0.025$, тобто, необхідну точність досягнуто, тому вважаємо $x^* \approx \bar{x} \approx 0.5248$.

Приклад 15. Знайти мінімум функції $F(x)$ методом параболічної апроксимації із заданою точністю ε .

Порядок виконання завдання:

1. Записати в MathCAD програму пошуку екстремуму методом параболічної апроксимації.
2. Встановити цільову функцію.
3. Задати початкову точку x_0 пошуку екстремуму.
4. Отримати результати роботи програми:
 - точку екстремуму;
 - значення цільової функції у цій точці.
5. Перевірити правильність розв'язання, використовуючи **Minimize()**. Знайти значення цільової функції у знайденій точці екстремуму.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 15. Знайти мінімум функції $F(x) = e^x - \frac{x^3}{3} + 2 \cdot x$ методом параболічної апроксимації із заданою точністю 0.00001.

ПРОГРАМА ПОШУКУ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЇ ОДНОЇ
ЗМІННОЇ МЕТОДОМ ПАРАБОЛІЧНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

NMin_SPI(F, x0, ε)

F - назва функції

x0 - початкова точка пошуку екстремуму

ε - задана точність визначення екстремуму

$NMin_SPI(F, x0, \varepsilon) :=$	$X2 \leftarrow x0$ $X1 \leftarrow x0$ $X0 \leftarrow x0$ while 1 $Z \leftarrow X2$ $X0 \leftarrow X2 + 0.01$ $X1 \leftarrow X2$ $X2 \leftarrow X2 - 0.01$ $f0 \leftarrow F(X0)$ $f1 \leftarrow F(X1)$ while $ X2 - X1 > \varepsilon$ $f2 \leftarrow F(X2)$ $A \leftarrow f2 \cdot [(X1)^2 - (X0)^2]$ $A \leftarrow A - f1 \cdot [(X2)^2 - (X0)^2]$ $A \leftarrow A + f0 \cdot [(X2)^2 - (X1)^2]$ $A \leftarrow \frac{A}{2 \cdot [f2 \cdot (X1 - X0) - f1 \cdot (X2 - X0) + f0 \cdot (X2 - X1)]}$ $f0 \leftarrow f1$ $f1 \leftarrow f2$ $X0 \leftarrow X1$ $X1 \leftarrow X2$ $X2 \leftarrow A$ return $X2$ if $ F(X2) - F(Z) \leq \varepsilon$
------------------------------------	---

$$FR(x) := e^x - \frac{x^3}{3} + 2x$$

- цільова функція

$$x0 := 5$$

- ініціалізація початкової
точки пошуку екстремуму

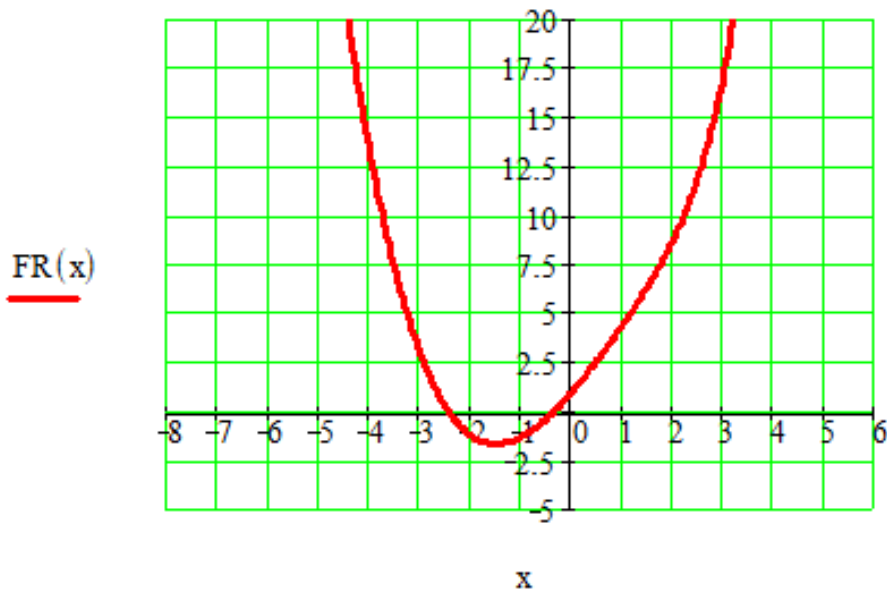
$$X := NMin_SPI(FR, x0, 0.00001)$$

$$X = -1.49164$$

- результати роботи програми:
точка екстремуму

$$FR(X) = -1.65198$$

- значення цільової функції в
точці екстремуму



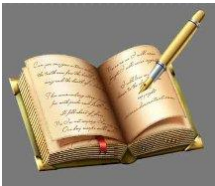
$x1 := \text{Minimize}(\text{FR}, x0)$

$x1 = -1.49164$

- перевірка правильності
знайденого розв'язку

$\text{FR}(x1) = -1.65198$

- значення цільової функції в знайдений
точці екстремуму



ЗАВДАННЯ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 9. Методом параболічної апроксимації розв'язати задачу $f(x) \rightarrow \min$ з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

Варіанти задач дивися у завданні 6.

1.3.6. Алгоритм градієнтного спуску пошуку екстремуму унімодальної нелінійної функції однієї змінної з використанням першої похідної

Для розв'язання задачі безумовного екстремуму функції $f(x)$ часто застосовують наближені методи, основу яких лежить обчислення похідних. Такі методи зазвичай називають градієнтними.

Використовуючи градієнтні методи, можна знайти розв'язок практично будь-якої задачі нелінійного програмування. Однак у випадку застосування цих методів дозволяє знайти точку локального екстремуму. Тому доцільніше використовувати градієнтні методи знаходження розв'язання задач опуклого програмування, у яких всякий локальний екстремум є ще й глобальним.

Чисельні методи розв'язання задачі безумовної оптимізації прийнято поділяти на три групи:

1. Методи нульового порядку, які використовують лише інформацію про значення функції $f(x)$. До них можна віднести метод розподілу інтервалу навпіл (дихотомії), золотого перетину.

2. Методи першого порядку, що використовують інформацію про перші похідні функції $f(x)$. До них можна віднести метод градієнтного спуску.

3. Методи другого порядку, що вимагають для реалізації знання других похідних функції $f(x)$. До них можна зарахувати метод Ньютона-Рафсона.

Градієнтний метод заснований на простій ідеї, яку викладемо спочатку для функції багатьох змінних $f(\vec{X})$. Якщо наперед відомо, що функція $f(\vec{X})$ має у допустимій області єдиний екстремум, у допустимій області необхідно взяти довільну точку $\vec{X}^{(0)}$ і за допомогою градієнту (антиградієнту) визначити напрямок, у якому $f(\vec{X})$ зростає (зменшується) з найбільшою швидкістю. Зробивши невеликий «крок» у знайденому напрямку, перейти до нової точки $\vec{X}^{(1)}$. Потім знову визначити найкращий напрямок для переходу до чергової точки $\vec{X}^{(2)}$ і т.п. Інакше висловлюючись, треба побудувати послідовність точок $\vec{X}^{(0)}, \vec{X}^{(1)}, \vec{X}^{(2)}, \dots$ так, щоб вона сходилася до точки екстремуму $\vec{X}^*$. Величина кроку з точки $\vec{X}^{(k)}$ за напрямом градієнту $\nabla f(\vec{X}^{(k)})$ (антиградієнту $-\nabla f(\vec{X}^{(k)})$) визначається значенням параметру λ у рівнянні прямий:

$$\vec{X}^{(k+1)} = \vec{X}^{(k)} + \nabla f(\vec{X}^{(k)}) \cdot \lambda$$

або

(1.21)

$$\vec{X}^{(k+1)} = \vec{X}^{(k)} + \left(-\nabla f(\vec{X}^{(k)}) \right) \cdot \lambda, \text{ де } k = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

проходить через $\vec{X}^{(k)}$ паралельно градієнту (антиградієнту).

Для функції однієї змінної обчислювальна схема значно спрощується. Так замість градієнту $\nabla f(\vec{X}^{(k)})$ можна обмежитися використанням похідної $\frac{df(x)}{dx}$ від цільової функції, а замість вектору змінних – незалежної змінної, яка є аргументом функції.

При знаходженні розв'язання задач градієнтними методами, ітераційний процес здійснюється доти, доки градієнт функції $f(x)$ у черговій точці не стане рівним 0 або поки $\left| f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)}) \right| < \varepsilon$, де ε - досить мале позитивне число, що характеризує точність отриманого розв'язок.

Приклад 16. Пошук екстремуму функції однієї змінної методом градієнтного спуску.

Знайти мінімум функції $F(x)$ із заданою точністю ε .

Порядок виконання завдання:

1. Записати в MathCAD програму пошуку екстремуму функції однієї змінної методом градієнтного спуску.
2. Записати в MathCAD допоміжну програму для визначення знаку похідної.
3. Задати цільову функцію.
4. Задати вихідні дані:
 - z – початкова точка пошуку екстремуму;
 - h – крок пошуку екстремуму;
 - δ – необхідна точність визначення екстремуму.
5. Пошук розв'язання задачі.
6. Визначити номер останнього наближення розв'язку, використовуючи функцію **last(v)** – визначає індекс останнього елемента у векторі v .
7. Знайти останній елемент вектору наближень, тобто, точку екстремуму.
8. Знайти значення цільової функції у точці екстремуму.
9. Перевірити правильність розв'язку, використовуючи **Minimize()**.
Знайти значення цільової функції у знайденій точці екстремуму.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 16. Пошук екстремуму функції однієї змінної методом градієнтного спуску. Знайти мінімум функції $F(x) = e^x - \frac{x^3}{3} + 2 \cdot x$ із заданою точністю 0.0001.

ПРОГРАМА ПОШУКУ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ
ЗМІННОЇ МЕТОДОМ ГРАДІЄНТНОГО СПУСКУ $w(f, z, h, \delta, G)$

f - назва функції, яка містить вираз для її обчислення

z - початкова точка пошуку екстремуму

h - крок пошуку екстремуму

δ - необхідна точність значення екстремуму

G - назва допоміжної програми для визначення знаку похідної

$$w(f, z, h, \delta, G) := \left| \begin{array}{l} x_0 \leftarrow z \\ x_1 \leftarrow x_0 - h \cdot G(x_0, f) \\ i \leftarrow 1 \\ \text{while } |x_i - x_{i-1}| \geq \delta \\ \quad \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \frac{h}{2} \text{ if } f(x_i) > f(x_{i-1}) \\ i \leftarrow i + 1 \\ x_i \leftarrow x_{i-1} - h \cdot G(x_{i-1}, f) \end{array} \right. \\ \text{return } x \end{array} \right.$$

$$G(x, f1) := \left| \begin{array}{l} k \leftarrow 1 \text{ if } \frac{d}{dx} f1(x) > 0 \\ k \leftarrow -1 \text{ if } \frac{d}{dx} f1(x) \leq 0 \\ \text{return } k \end{array} \right.$$

$$f(x) := e^x - \frac{x^3}{3} + 2x \quad \text{- цільова функція}$$

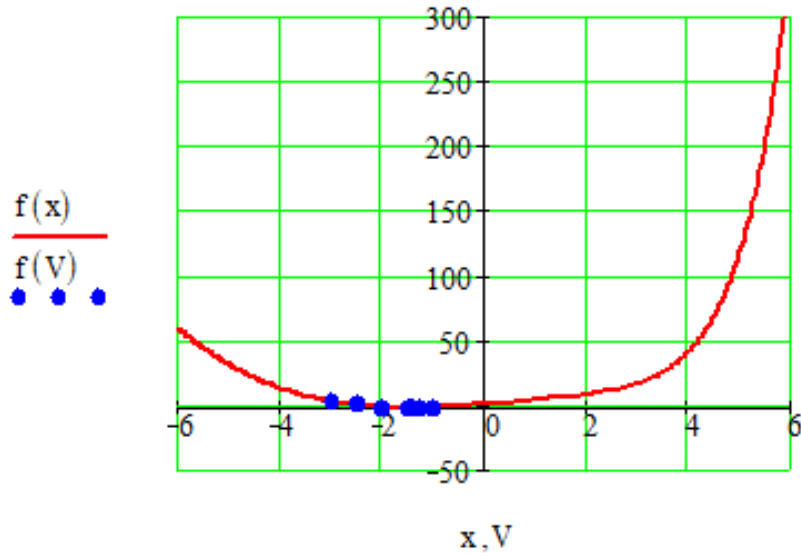
$z := -3 \quad h := 0.5 \quad \delta := 0.0001$ - ініціалізація параметрів
пошуку екстремуму

$V := w(f, z, h, \delta, G)$ - пошук розв'язання задачі:
результат - вектор всіх наближень
до розв'язку

$n := \text{last}(V)$ - визначення номеру останнього
наближення до розв'язку

$V_n = -1.491638$ - останній елемент вектору
наближення, тобто точка екстремуму

$f(V_n) = -1.651982$ - значення цільової функції в точці
екстремуму



$x := 0$

$a := \text{Minimize}(f, x)$

$a = -1.491644$

$f(a) = -1.651982$

- перевірка правильності
знайденого розв'язку

- значення цільової функції в знайдений
точці екстремуму



ЗАВДАННЯ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 10. Методом градієнтного спуску розв'язати задачу
 $f(x) \rightarrow \min$ з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

Варіанти задач дивися у завданні 6.

1.3.7. Алгоритм Ньютона-Рафсона пошуку екстремуму нелінійної функції однієї змінної з використанням другої похідної

Розглянемо деяку стартову точку α_1 (зазвичай її обирають $\alpha_1 = 0$).
Розкладемо функцію $\phi'(\alpha)$ у ряд Тейлора в околі α_1 :

$$\phi'(\alpha) = \phi'(\alpha_1) + \phi''(\alpha_1) \cdot (\alpha - \alpha_1) + \dots \quad (1.22)$$

Обмежившись першими двома членами розкладання, отримаємо наступне співвідношення для відшукування кореня похідної:

$$\phi'(\alpha_1) + \phi''(\alpha_1) \cdot (\alpha - \alpha_1) = 0$$

Звідки

$$\alpha = \alpha_1 - \frac{\phi'(\alpha_1)}{\phi''(\alpha_1)}$$

Отримана формула дозволяє побудувати ітераційну послідовність наближень до кореня похідної:

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i - \frac{\phi'(\alpha_i)}{\phi''(\alpha_i)} \quad (1.23)$$

Описаний алгоритм отримав назву **методу Ньютона (Ньютона-Рафсона) або методу дотичних**.

Друга назва пов'язана з тим, що чергове наближення α_{i+1} , визначається на графіку $\phi'(\alpha) = 0$ як точка перетину дотичної в точці α_i з віссю абсцис (рисунок 1.12).

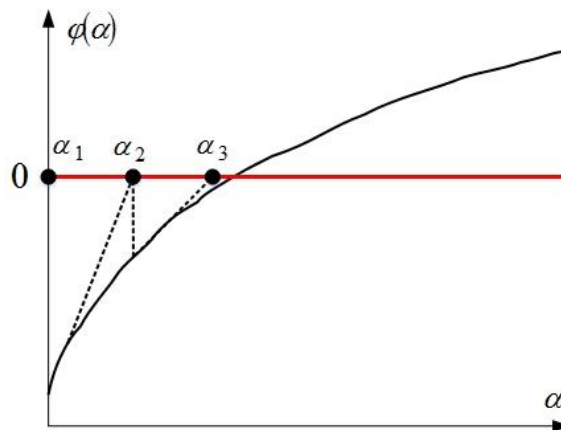


Рисунок 1.12 – Геометрична інтерпретація методу Ньютона-Рафсона

Метод Ньютона досягає квадратичної швидкості збіжності, коли стартова точка досить близька до кореня похідної. Однак на практиці швидкість збіжності істотно залежить від вибору стартової точки. Зокрема, при невдалому виборі вихідної позиції метод може розходитися.

Приклад 17. Розглянемо функцію $f(x) = x + \frac{2}{x}$, оберемо $x_0 = 0.5$ і знайдемо точку мінімуму з похибкою $\varepsilon = 0.5$.

Порядок виконання завдання:

1. Маємо $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$, $f''(x) = \frac{4}{x^3}$. Тоді при $x_0 = 0.5$
 $f'(x_0) = -7$, $|f'(x_0)| > \varepsilon$ тому продовжуємо обчислення $f''(x_0) = 32$,
 $x_1 = 0.5 - \frac{(-7)}{32} = 0.719$.

2. $f'(x_1) = -2.869$, $|f'(x_1)| > \varepsilon$ тому продовжуємо обчислення $f''(x_1) = 10.762$,
 $x_2 = 0.719 - \frac{(-2.869)}{10.762} = 0.986$.
3. $f'(x_2) = -1.057$, $|f'(x_2)| > \varepsilon$ тому продовжуємо обчислення $f''(x_2) = 4.173$,
 $x_3 = 0.986 - \frac{(-1.057)}{4.173} = 1.239$.
4. $f'(x_3) = -0.303$, $|f'(x_3)| < \varepsilon$, тому обчислення завершуємо та приймаємо
 $x_4 = 1.239$.

Приклад 18. Пошук екстремуму функції однієї змінної методом Ньютона-Рафсона. Знайти мінімум функції $F(x)$ із заданою точністю ε .

Порядок виконання завдання:

1. Записати в MathCAD програму пошуку екстремуму методом Ньютона-Рафсона.
2. Задати функції, що обчислюють першу та другу похідні.
3. Задати цільову функцію.
4. Задати вихідні дані:
 - M – максимальна кількість ітерацій;
 - x_0 – початкова точка пошуку екстремуму;
 - δ – необхідна точність визначення екстремуму.
5. Пошук розв'язку задачі. Отримати результат – матрицю всіх наближень до розв'язку.
6. Перевірити правильність розв'язку, використовуючи **Minimize()**. Знайти значення цільової функції у знайденій точці екстремуму.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 18. Пошук екстремуму функції однієї змінної методом Ньютона-Рафсона. Знайти мінімум функції $F(x) = e^x - \frac{x^3}{3} + 2 \cdot x$ із заданою точністю $3 \cdot 10^{-3}$.

ПРОГРАМА ПОШУКУ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ
 ЗМІННОЇ МЕТОДОМ НЬЮТОНА-РАФСОНА

$N_R(f, Df, D2f, x_0, \delta, M)$

f - назва функції, яка містить вираз для її обчислення

Df - назва функції, яка обчислює першу похідну

$D2f$ - назва функції, яка обчислює другу похідну

x_0 - початкова точка пошуку екстремуму
 $d\delta f$ - необхідна точність визначення екстремуму
 M - максимальне число ітерацій

$N_R(f, Df, D2f, x_0, d\delta f, M) :=$

```

  k ← 0
  vx0 ← x0
  vxk ← " stop poisk. Little M "
  Δdf0 ← |Df(f, vx0)|
  while Δdfk - dδf ≥ 0
    vxk+1 ← vxk -  $\frac{Df(f, vx_k)}{D2f(f, vx_k)}$ 
    Δdfk+1 ← |Df(f, vxlast(vx))|
    if k ≥ M
      k ← k + 1
      vxk ← vxk
      return vx
    k ← k + 1
  vxk+1 ← vxk -  $\frac{Df(f, vx_k)}{D2f(f, vx_k)}$ 
  Δdfk+1 ← |Df(f, vxlast(vx))|
   $\xrightarrow{\quad}$ 
  vf ← f(vx)
  vDvx ← augment(vf, Δdf, vx)
  vDvx
  
```

$Df(f, x) := \frac{d}{dx} f(x)$ - функція, яка обчислює першу похідну

$D2f(f, x) := \frac{d^2}{dx^2} f(x)$ - функція, яка обчислює другу похідну

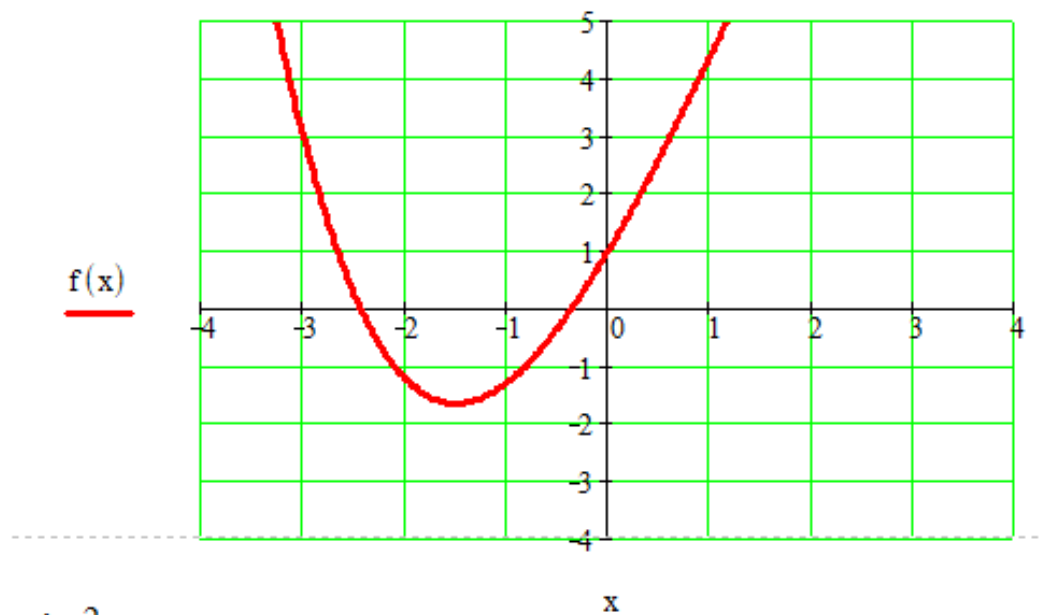
$f(x) := e^x - \frac{x^3}{3} + 2x$ - цільова функція

$d\delta f := 3 \cdot 10^{-3} \quad M := 10 \quad x_0 := 1$ - ініціалізація параметрів пошуку екстремуму

$Point := N_R(f, Df, D2f, x_0, d\delta f, M)$ - пошук розв'язку задачі:
 результат - матриця всіх наближень до розв'язку

$$\text{Point} = \begin{pmatrix} 4.384948 & 3.718282 & 1 \\ 15.948188 & 15.428918 & -4.176634 \\ -0.336344 & 3.34574 & -2.33297 \\ -1.620249 & 0.46276 & -1.630518 \\ -1.651942 & 0.016085 & -1.496651 \\ -1.651982 & 2.21937 \times 10^{-5} & -1.491651 \\ -1.651982 & 0 & -1.491644 \end{pmatrix}$$

- матриця наближень до розв'язку містить в южному рядку: значення цільової функції у поточній точці, значення першої похідної в цій точці, знайдене значення аргумента, відповідно



$x := 2$

x

$a := \text{Minimize}(f, x)$

- перевірка правильності
знайденого розв'язку

$a = -1.491644$

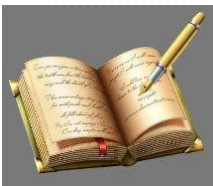
$f(a) = -1.651982$

- значення цільової функції в знайдений
точці екстремуму

ЗАВДАННЯ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 11. Методом Ньютона-Рафсона розв'язати задачу $f(x) \rightarrow \min$ з точністю ε .

Варіанти задач дивися у завданні 6.



1.3.8. Алгоритм випадкового пошуку оптимуму функції однієї змінної

Метод випадкового пошуку (МВП) використовується для знаходження мінімуму (максимуму) довільної функції $f(x)$, яка задана у допустимій області D .

Розглянемо реалізацію цього методу функції однієї змінної. Нехай довільна функція $f(x)$ задана на відрізку $[a, b]$. За допомогою генератора випадкових чисел, рівномірно розподілених на інтервалі $[0, 1]$, будується послідовність чисел $x\{k\}$, $k = 1, \dots, N$, які рівномірно розташовані на відрізку $[a, b]$. Розраховуються та порівнюються між собою значення функції $f(x)$ у точках $x\{k\}$. Мінімальне їх приймається за оцінку мінімуму функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$. Якщо N наближається до нескінченності, отримана оцінка ймовірно прагне глобального мінімуму функції, що розглядається.

При розв'язанні задачі максимізації функції $f(x)$ необхідно замінити її на функцію $-f(x)$.

До особливостей методу слід віднести можливість пошуку із застосуванням глобальних екстремумів.

Приклад 19. Пошук екстремуму функції однієї змінної за допомогою випадкового пошуку.

Знайти мінімум функції $F(x)$.

Порядок виконання завдання:

1. Задати:
 - цільову функцію;
 - кількість пробних точок;
 - межі відрізка локалізації екстремуму
2. Задати функцію генерації пробних точок на відрізку (a, b) , використовуючи функцію **runif** (N, a, b) – рівномірний розподіл, де N – кількість значень, що генеруються;
 a, b – граничні точки інтервалу, причому $a < b, a \leq x \leq b$.
3. Обчислити значення цільової функції у пробних точках.
4. Знайти найменше значення, використовуючи функцію **min** ().
5. Записати в MathCAD програму визначення номеру найменшого значення масиві.
6. Отримати результати роботи програми:
 - Аргумент, що відповідає найменшому значенню в масиві;
 - Значення найменшого елементу у масиві.
7. Уточнити знайдений розв'язок повторним випадковим пошуком:

- Задати поріг δ , що визначає новий інтервал локалізації;
- Згенерувати новий масив пробних точок, використовуючи функцію $\text{runif}(N, a1-\delta, b1+\delta)$;
- Повторно виконати процедуру пошуку розв'язку;
- Знайти значення точки екстремуму;
- Знайти значення цільової функції у знайденій точці екстремуму.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 19. Пошук екстремуму функції однієї змінної за допомогою випадкового пошуку. Знайти мінімум функції

$$F(x) = e^x - \frac{x^3}{3} + 2 \cdot x.$$

ПОШУК ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ
ЗА ДОПОМОГОЮ ВИПАДКОВОГО ПОШУКУ

ORIGIN $\equiv$ 1

$$f(x) := e^x - \frac{x^3}{3} + 2x$$

- цільова функція

num := 50

- число пробних точок

a := -2 b := 0

- границі відрізка
локалізації екстремуму

x := runif(num, a, b)

- генерація пробних точок
на відріжку (a,b)

fx := f(x)

- обчислення значень
цільової функції в пробних точках

minest := min(fx)

- пошук найменшого
значення

Find_Max_Index(fx) :=	index $\leftarrow$ 1 for i $\in$ 2 .. length(fx) index $\leftarrow$ i if $fx_i < fx_{\text{index}}$ index
-----------------------	--

- програма визначення номеру найменшого значення в масиві

index := Find_Max_Index(fx)

x_{index} = -1.468

- аргумент, відповідний
найменшому значенню в масиві

minest = -1.651

- значення найменшого
елементу в масиві

УТОЧНЕННЯ ЗНАЙДЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ПОВТОРНИМ ВИПАДКОВИМ ПОШУКОМ

$\text{delta} := 0.005$	- ініціалізація порогу
$x := \text{runif}(\text{num}, x_{\text{index}} - \text{delta}, x_{\text{index}} + \text{delta})$	
- рівномірне генерування нового масиву пробних точок	
$fx := f(x)$	
$\text{minest} := \min(fx)$	- повторне виконання процедури пошуку розв'язку
$\text{index} := \text{Find_Max_Index}(fx)$	
$x_{\text{index}} = -1.473$	- знайдене значення точки екстремуму
$\text{minest} = -1.6514$	- значення цільової функції в знайдений точці екстремуму



ЗАВДАННЯ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 12. Методом випадкового пошуку розв'язати задачу $f(x) \rightarrow \min$.

Варіанти задач дивися у завданні 6.

2. РОЗВ'ЯЗАННЯ БАГАТОМІРНИХ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

2.1. Графічне дослідження рельєфу функцій двох змінних

2.1.1. Візуалізація поведінки функцій двох змінних

Щоб побудувати в MathCAD графік функції двох змінних, необхідно попередньо обчислити значення функції прямокутної сітці, тобто. побудувати таблицю значень функції. Для цього необхідно:

- Задати функцію двох змінних $f(x, y)$;
- Присвоїти змінній N значення, що дорівнює кількості вузлів прямокутної сітки в площині змінних (x, y) ;
- Визначити діапазон зміни цілих індексів i, j вузлів сітки (x_i, y_j) ;
- Визначити значення (x_i, y_j) у проміжку $[a, b]$ з кроком h ;
- Табличні значення z_{ij} визначаються як табличні значення функції у вузлах сітки $z_{ij} = f(x_i, y_j)$;
- Зобразити результат графічно, використовуючи графік функції **Surface Plot**. Налаштування параметрів зображення.

Також можна скористатися функцією **CreateMesh (Створити сітку)** – яка дозволяє побудувати графік функції двох змінних без обчислення матриці аплікату з попереднім завданням діапазонів змін аргументів та потрібної кількості вузлів. Звернення до функції має вигляд:

CreateMesh (f, xn, xk, yn, yk, Nx, Ny),

де f – назва функції;

x_n, x_k – межі інтервалу зміни аргументу x ;

y_n, y_k – межі інтервалу зміни аргументу y ;

N_x, N_y - кількість вузлів з x та y відповідно.

Результатом роботи є матриця, назва якої вводиться у полі шаблону.

Приклад 20. Дослідити поведінку однокстремальної функції $f(x, y)$.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 20. Дослідити поведінку однокстремальної функції

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$f(x, y) := x^2 + y^2$$

- досліджувана функція двох змінних

$$N := 20$$

- число вузлів сітки в площині xOy

$h_x := 0.2 \quad h_y := 0.2$

- кроки по змінним x та y відповідно

$x_n := -2 \quad y_n := -2$

- початкові значення змінних x та y відповідно при побудові сітки

$i := 0..N \quad j := 0..N$

- визначення діапазону зміни цілих індексів вузлів сітки

$x_i := x_n + h_x \cdot i$

- визначення координат вузлів сітки

$y_j := y_n + h_y \cdot j$

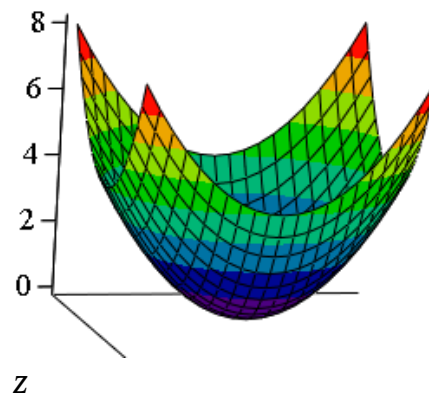
- побудова матриці апплікат у вузлах сітки

$z_{i,j} := f(x_i, y_j)$

$z =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	8	7.24	6.56	5.96	5.44	5	4.64	4.36	4.16	4.04	4	4.04	4.16
1	7.24	6.48	5.8	5.2	4.68	4.24	3.88	3.6	3.4	3.28	3.24	3.28	3.4
2	6.56	5.8	5.12	4.52	4	3.56	3.2	2.92	2.72	2.6	2.56	2.6	2.72
3	5.96	5.2	4.52	3.92	3.4	2.96	2.6	2.32	2.12	2	1.96	2	2.12
4	5.44	4.68	4	3.4	2.88	2.44	2.08	1.8	1.6	1.48	1.44	1.48	1.6
5	5	4.24	3.56	2.96	2.44	2	1.64	1.36	1.16	1.04	1	1.04	1.16
6	4.64	3.88	3.2	2.6	2.08	1.64	1.28	1	0.8	0.68	0.64	0.68	0.8
7	4.36	3.6	2.92	2.32	1.8	1.36	1	0.72	0.52	0.4	0.36	0.4	0.52
8	4.16	3.4	2.72	2.12	1.6	1.16	0.8	0.52	0.32	0.2	0.16	0.2	0.32
9	4.04	3.28	2.6	2	1.48	1.04	0.68	0.4	0.2	0.08	0.04	0.08	0.2
10	4	3.24	2.56	1.96	1.44	1	0.64	0.36	0.16	0.04	0	0.04	0.16
11	4.04	3.28	2.6	2	1.48	1.04	0.68	0.4	0.2	0.08	0.04	0.08	0.2

+



Приклад 21 а. Дослідити поведінку багатоекстремальної функції $f(x, y)$.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 21 а. Дослідити поведінку багатоекстремальної функції $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ БАГАТОЕКСТРЕМАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ

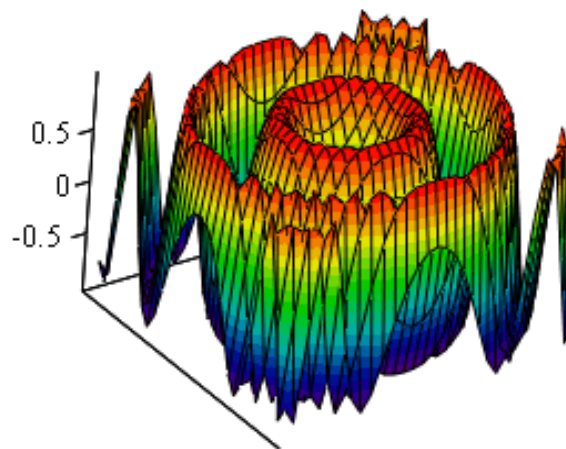
$f(x, y) := \sin(x^2 + y^2)$

- досліджувана функція двох змінних

$N := 30$

- число вузлів сітки в площині xOy

$h_x := 0.2$	$h_y := 0.2$	- кроки по змінним x та y відповідно
$x_n := -3$	$y_n := -3$	- початкові значення змінних x та y відповідно при побудові сітки
$i := 0..N$	$j := 0..N$	- визначення діапазону зміни цілих індексів вузлів сітки
$x_i := x_n + h_x \cdot i$		- визначення координат вузлів сітки
$y_j := y_n + h_y \cdot j$		
$z_{i,j} := f(x_i, y_j)$		- побудова матриці апплікат у вузлах сітки



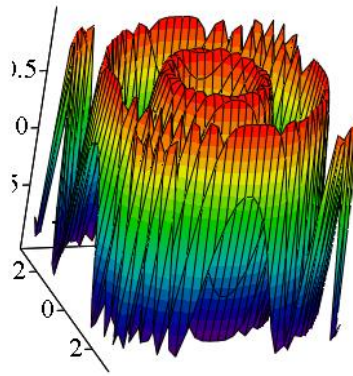
z

Приклад 21 б. Дослідити поведінку багатоекстремальної функції $f(x, y)$ без побудови матриці апплікат.

Приклад виконання завдання у MathCAD

ВАРІАНТ БЕЗ ПОБУДОВИ МАТРИЦІ АППЛІКАТ

$f(x, y) := \sin(x^2 + y^2)$	- досліджувана функція двох змінних
$x_n := -3$	$y_n := -3$
	- початкові значення змінних x та y відповідно при побудові сітки
$x_k := 3$	$y_k := 3$
	- кінцеві значення змінних x та y відповідно при побудові сітки
$N_x := 30$	$N_y := 30$
	- число вузлів сітки в площині xOy відповідно по змінним x та y
$M := \text{CreateMesh}(f, x_n, x_k, y_n, y_k, N_x, N_y)$	



М

Такий спосіб побудови графіка функції є кращим, так як координати на осях у цьому випадку відповідають заданим значенням змінних, що дозволяє візуально за графіком відстежити реальну локалізацію екстремумів.

2.1.2. Побудова ліній рівня функцій двох змінних

Лінією рівня функції двох змінних x та y називається геометричне місце точок у площині xOy , в яких функція приймає одне і те ж значення. Лінії рівня функції $z = f(x, y)$ визначаються рівнянням $f(x, y) = C$, де $C = \text{const}$.

У MathCAD лінії рівня можна побудувати двома способами:

- Використовуючи на панелі графіків, піктограму **Contur Plot**;
- Зміна параметрів налаштування графіків.

Візуальний аналіз графіків поверхонь функції, а також їх ліній рівня дозволяє приблизно визначити екстремуми і виявити сідлові точки, якщо такі мають місце.

Сідлова точка - це точка з області визначення функції, яка є стаціонарною для цієї функції, проте не є її локальним екстремумом. У такій точці, якщо розглядається функція двох змінних, утворена графіком функції поверхня зазвичай нагадує формою сідло. За допомогою ліній рівня сідлова точка може бути виявлена у місці перетину ізоліній.

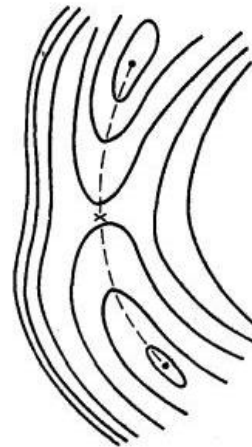


Рисунок 2.1– Графічне зображення сідлової точки

Внаслідок прив'язки до реальної системи координат кращим для візуального аналізу є спосіб побудови графіків без використання аплікату матриці.

Приклад 22. Побудувати лінії рівня багатоекстремальної функції Растрігіна $f(x, y)$.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 22. Побудувати лінії рівня багатоекстремальної функції Растрігіна

$$f(x, y) = (x^2 - 10 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot x) + 10) + (y^2 - 10 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot y) + 10)$$

ПОБУДОВА ЛІНІЙ РІВНЯ БАГАТОЕКСТРЕМАЛЬНОЇ
ФУНКЦІЇ РАСТРИГІНА

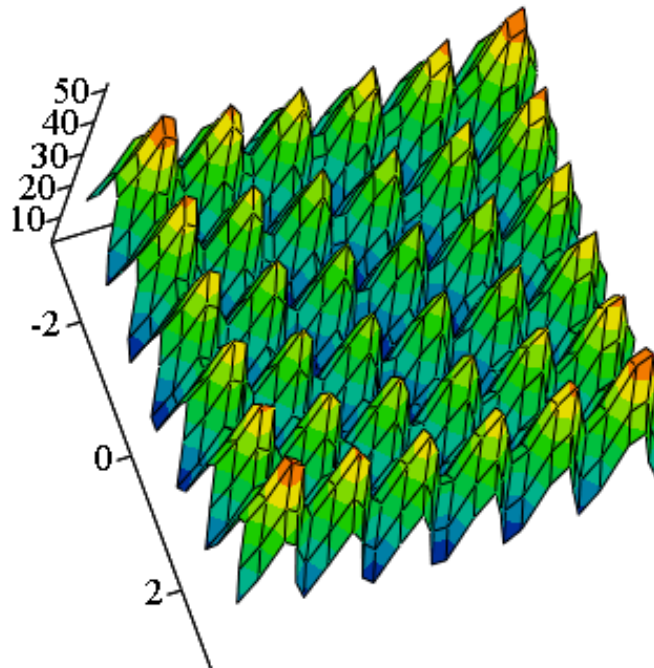
$$f(x, y) := (x^2 - 10 \cos(2\pi x) + 10) + (y^2 - 10 \cos(2\pi y) + 10)$$

$x_n := -3$ $y_n := -3$ - початкові значення змінних x та y
відповідно при побудові сітки

$x_k := 3$ $y_k := 3$ - кінцеві значення змінних x та y
відповідно при побудові сітки

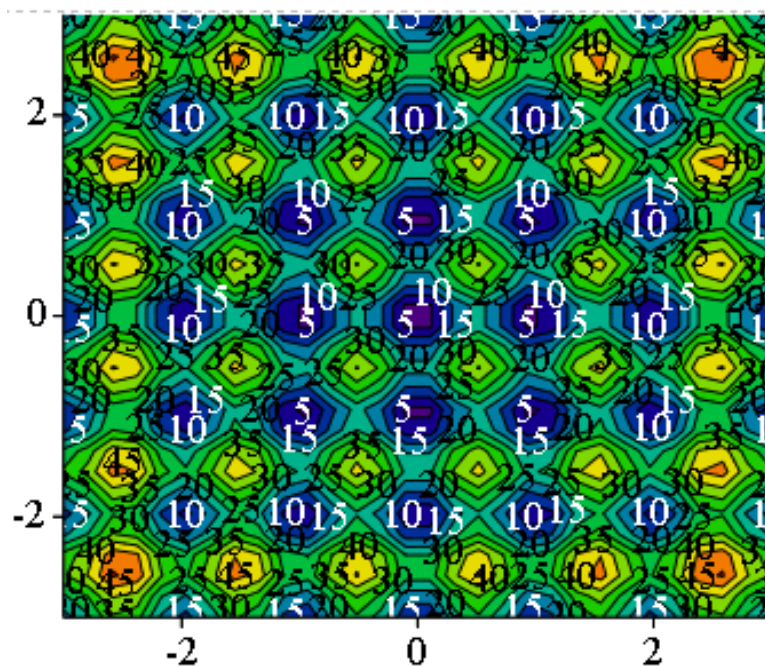
$N_x := 30$ $N_y := 30$ - число вузлів сітки в площині xOy
відповідно по змінним x та y

$$M := \text{CreateMesh}(f, x_n, x_k, y_n, y_k, N_x, N_y)$$

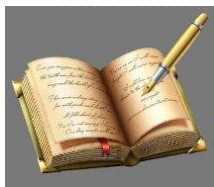


M

- графік поверхні



М
- лінії рівня



Завдання до самостійної роботи

Завдання 13. Побудувати графік та лінії рівня функції $z = f(x, y)$ у вказаній прямокутній області. Описати поведінку функції (вказати приблизно координати екстремумів і сідлових точок, якщо вони є) в заданій області.

Дослідити функцію $z = x^k \cdot y^m \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{A} - \frac{y^2}{B}\right)$ в квадраті $-a < x < a$;

$-a < y < a$.

№	k	m	A	B	a
1	1	1	3	4	4
2	2	1	3	4	4
3	1	2	3	4	4
4	2	2	3	4	4
5	2	2	3	2	4
6	2	2	2	2	2
7	2	2	4	2	4
8	2	1	4	2	4
9	1	2	4	2	4
10	1	1	3	9	3

Дослідити функцію $z = x^k \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{A} - \frac{y^2}{B}\right)$ у прямокутнику $-a < x < a$;

$-b < y < b$.

№	k	A	B	a	b
11	1	2	4	1	2
12	2	2	4	1	2
13	3	2	4	1	2
14	1	2	2	2	2
15	1	4	2	4	2
16	1	2	4	2	2
17	2	2	4	2	4
18	2	4	4	4	4
19	2	2	4	4	4
20	3	3	4	4	4

2.2. Аналітичний метод пошуку оптимуму функцій багатьох змінних

2.2.1. Дослідження на екстремум функцій двох змінних аналітичним методом

Для того, щоб дослідити на екстремум функцію двох змінних у MathCAD, необхідно:

- Задати цільову функцію;
- Графічно дослідити поведінку багатоекстремальної, у загальному випадку функції $f(x, y)$ без побудови матриці аплікат можна, використовуючи вбудовану функцію MathCAD *CreateMesh (Створити сітку)*;
- Визначити стаціонарні точки, використовуючи необхідні умови для існування екстремуму. Для цього необхідно визначити частинні похідні та прирівняти їх до нуля з наступним розв'язком отриманої системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Частинна похідна $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ функції кількох змінних за змінною x є похідна

функції за цією змінною x отримана з вихідної функції за умови, що інші змінні фіксовані. Аналогічно визначається частинна похідна змінної y ;

Іншими словами, необхідною умовою існування екстремуму функції кількох змінних є рівність нулю її градієнту:

$$\nabla f(x, y) = \text{grad } f(x, y) = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}; \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)^T = 0 \quad (2.2)$$

- Задати початкові наближення для змінних x, y . Знайти розв'язок системи, використовуючи функцію MathCAD **Find** (x, y);
- На основі графічного аналізу визначити типи стаціонарних точок (локальний мінімум, локальний максимум, сідлова точка);
- Перевірити знайдений розв'язок за допомогою вбудованої функції **Minimize** (f, x, y).

Приклад 23. Дослідити на екстремум функцію:

$$z = x \cdot y + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Послідовність виконання завдання:

1. Визначаємо частинні похідні:

$$z'_x = \left(x \cdot y + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \right)'_x = y - \frac{50}{x^2},$$

$$z'_y = \left(x \cdot y + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \right)'_y = x - \frac{20}{y^2}.$$

2. Знаходимо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}, \begin{cases} y - \frac{50}{x^2} = 0 \\ x - \frac{20}{y^2} = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases} - \text{розв'язок системи}$$

Знайдено стаціонарну точку $P(5; 2)$.

Приклад 24. Дослідити на екстремум аналітичним методом функцію $f(x, y)$ двох змінних.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 24. Дослідити на екстремум аналітичним методом функцію $f(x, y) = 2 \cdot (x - 5.07)^2 + (y - 10.03)^2 - 0.2 \cdot (x - 5.07)^3$ двох змінних.

ДОСЛІДЖЕННЯ НА ЕКСТРЕМУМ АНАЛІТИЧНИМ МЕТОДОМ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

$$f(x, y) := 2 \cdot (x - 5.07)^2 + (y - 10.03)^2 - 0.2 \cdot (x - 5.07)^3$$

- цільова функція

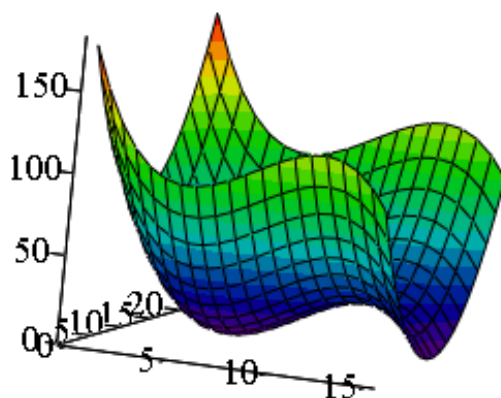
$$F := \text{CreateMesh}(f, 0, 15, 0, 20, 20, 20)$$

$$\frac{d}{dx} f(x, y) \rightarrow 4 \cdot x - 20.28 - .6 \cdot (x - 5.07)^2$$

- обчислення частинної похідної за змінною x

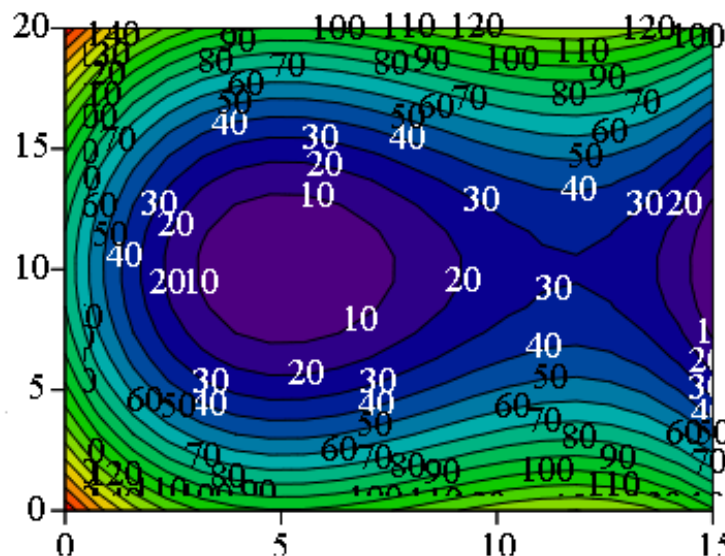
$$\frac{d}{dy} f(x, y) \rightarrow 2 \cdot y - 20.06$$

- обчислення частинної похідної за змінною y



- графік цільової функції

F



F

- лінії рівня цільової функції

$x := 1 \quad y := 1$ - початкові наближення для змінних
 Given
 $4 \cdot x - 20.28 - 0.6 \cdot (x - 5.07)^2 = 0$ - вимоги наявності екстремуму
 $2 \cdot y - 20.06 = 0$
 $\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} := \text{Find}(x, y)$ - пошук розв'язку
 $x1 = 5.07 \quad y1 = 10.03$ - знайдений розв'язок
 $(5.07, 10.03)$ - точка екстремуму цільової функції (тип - точка локального мінімуму)
 $x := 0 \quad y := 3$
 $\text{Minimize}(f, x, y) = \begin{pmatrix} 5.07 \\ 10.03 \end{pmatrix}$ - перевірка знайденого розв'язку за допомогою вбудованої функції



Завдання до самостійної роботи
Завдання 14. Дослідити на екстремум аналітичним методом задану функцію

№п/п	Функція
1	$f(x) = 7 \cdot x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 + 5 \cdot x_2^2 + x_1 - 10 \cdot x_2 \rightarrow \min$
2	$f(x) = 3 \cdot x_1^2 - 3x_1 \cdot x_2 + 4 \cdot x_2^2 - 2 \cdot x_1 + x_2 \rightarrow \min$
3	$f(x) = x_1^2 + 2 \cdot x_2^2 + e^{x_1^2 + x_2^2} - x_1 + x_2 \rightarrow \min$
4	$f(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} + \frac{1}{2} \cdot x_1 - \frac{1}{2} \cdot x_2 \rightarrow \min$
5	$f(x) = 4 \cdot x_1^2 + 4 \cdot x_1 \cdot x_2 + 13 \cdot x_2^2 + 5 \cdot x_2 \rightarrow \min$
6	$f(x) = x_1^4 + 2 \cdot x_2^4 + x_1^2 \cdot x_2^2 + 2 \cdot x_1 + x_2 \rightarrow \min$
7	$f(x) = x_1^2 + 3 \cdot x_2^2 + \cos(x_1 + x_2) \rightarrow \min$
8	$f(x) = \sqrt{1 + 2 \cdot x_1^2 + x_2^2} + e^{x_1^2 + 2x_2^2} - x_1 - x_2 \rightarrow \min$
9	$f(x) = x_1 + 5 \cdot x_2 + e^{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \min$
10	$f(x) = 4 \cdot x_1^2 + 4x_1 \cdot x_2 + 6 \cdot x_2^2 - 17 \cdot x_1 \rightarrow \min$
11	$f(x) = 2 \cdot x_1^2 - 2x_1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_2^2 + x_1 - 3 \cdot x_2 \rightarrow \min$
12	$f(x) = 10 \cdot x_1^2 + 3x_1 \cdot x_2 + x_2^2 + 10 \cdot x_2 \rightarrow \min$

13	$f(x) = x_1^2 - 2x_1 \cdot x_2 + 6 \cdot x_1^2 + x_1 - x_2 \rightarrow \min$
14	$f(x) = x_1^4 + x_2^4 + \sqrt{2 + x_1^2 + x_2^2} - 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \rightarrow \min$
15	$f(x) = 2 \cdot x_1^2 + 3 \cdot x_2^2 - 2 \cdot \sin\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) + x_2 \rightarrow \min$
16	$f(x) = \ln(1 + 3 \cdot x_1^2 + 5 \cdot x_2^2 + \cos(x_1 - x_2)) \rightarrow \min$
17	$f(x) = x_1^2 + e^{x_1^2 + x_2^2} + 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \rightarrow \min$
18	$f(x) = x_1 + 2 \cdot x_2 + 4 \cdot \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \min$
19	$f(x) = 2 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2 + e^{x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2} \rightarrow \min$
20	$f(x) = 3 \cdot x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2 + x_1 \rightarrow \min$
21	$f(x) = 2 \cdot x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2 \cdot x_2^2 \rightarrow \min$
22	$f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - 4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \rightarrow \max$

2.2.2. Визначення градієнту функції багатьох змінних

Градiєнтом функції $z = f(x, y)$ у точці $M(x, y)$ називається вектор, що виходить із точки M і має своїми координатами частинні похідні функції z :

$$\nabla z = \text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \bar{j}. \quad (2.3)$$

Відповідно для функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$:

$$\nabla u = \text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k} \quad (2.4)$$

Приклад 25. Знайти градієнт функції $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_1 + x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3$, де $x = (x_1, x_2, x_3)^T$.

Послідовність виконання завдання:

1. Визначаємо частинні похідні:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = -2 \cdot x_1 - 1 + x_2, \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = -2 \cdot x_2 + x_1, \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} = -2 \cdot x_3 + 2$$

2.
$$\text{grad } f = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \bar{i} + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \bar{j} + \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} \bar{k}.$$

Приклад 26. Визначити градієнт функції f кількох змінних у символьному вигляді.

Послідовність виконання завдання:

1. Задати функцію кількох змінних.
2. Використовуйте функцію для визначення градієнту. Для цього необхідно обчислити частинні похідні за всіма змінними $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.
3. Отримати результат визначення градієнту у символьному вигляді за допомогою символьного оператора **Symbolic Evaluation**.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 26. Визначити градієнт функції декількох змінних у символьному вигляді.

ВИЗНАЧЕННЯ ГРАДІЄНТУ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

$$F(x, y) := (2 \cdot x - 1)^2 + (y + 1)^2 \quad - \text{функція двох змінних}$$

$$\text{grad}(x1, x2) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx1} F(x1, x2) \\ \frac{d}{dx2} F(x1, x2) \end{pmatrix} \quad - \text{обчислення градієнту функції двох змінних}$$

$$\text{grad}(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} 8 \cdot x - 4 \\ 2 \cdot y + 2 \end{pmatrix} \quad - \text{результат символьного визначення градієнту функції двох змінних}$$

ВИЗНАЧЕННЯ ГРАДІЄНТУ ФУНКЦІЇ ТРЬОХ ЗМІННИХ

$$F(x, y, z) := (2 \cdot x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^4 \quad - \text{функція трьох змінних}$$

$$\text{grad}(x1, x2, x3) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx1} F(x1, x2, x3) \\ \frac{d}{dx2} F(x1, x2, x3) \\ \frac{d}{dx3} F(x1, x2, x3) \end{pmatrix} \quad - \text{обчислення градієнту функції трьох змінних}$$

$$\text{grad}(x, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} 8 \cdot x - 4 \\ 2 \cdot y + 2 \\ 4 \cdot z^3 \end{pmatrix} \quad - \text{результат символьного визначення градієнту функції трьох змінних}$$

2.2.3. Обчислення градієнту функції у точці

Градiєнтом функції кількох змінних $u = f(x, y, z)$ у точці $A = (x_0, y_0, z_0)$ називається вектор, координати якого рівні приватним похідним функції у цій точці:

$$\text{grad}(u) = \nabla u(x, y, z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_A, \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_A, \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_A \right)^T \quad (2.5)$$

Приклад 27. Для функції $z = \sqrt{\frac{x}{y}}$ у точці $A = (4; 1)$ знайти: частинні похідні за змінними x, y та градієнт.

Послідовність виконання завдання:

1. Проведемо такі обчислення

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{A(4;1)} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{A(4;1)} = -1$$

2. Обчислюємо градієнт

$$\text{grad } z \Big|_{A(4;1)} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{A(4;1)}, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{A(4;1)} \right) = \left(\frac{1}{4}; -1 \right).$$

Приклад 28. Обчислити градієнт функції кількох змінних $F(x, y), F(x, y, z)$ у точках $(1; 3)$ і $(1; 3; 2)$ відповідно.

Послідовність виконання завдання:

1. Визначити градієнт функції кількох змінних у символьному вигляді.
2. Вказати координати точки. Отримати результат обчислення градієнту в цій точці.
3. Визначити нормоване значення градієнту в точці.
4. Обчислити значення функції у точці.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 28. Обчислити градієнт функції $f(x, y, z)$ декількох змінних в точці.

ОБЧИСЛЕННЯ ГРАДІЄНТУ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ В ТОЧЦІ З КООРДИНАТАМИ (X1,X2)

$$F(x, y) := (2 \cdot x - 1)^2 + (y + 1)^2 \quad - \text{функція двох змінних}$$

$$\text{grad}(x1, x2) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx1} F(x1, x2) \\ \frac{d}{dx2} F(x1, x2) \end{pmatrix} \quad - \text{обчислення градієнту функції двох змінних}$$

$$\text{grad}(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} 8 \cdot x - 4 \\ 2 \cdot y + 2 \end{pmatrix} \quad - \text{результат символічного обчислення градієнту функції двох змінних}$$

$$x1 := 1 \quad x2 := 3 \quad - \text{координати точки}$$

$$\text{grad}(x1, x2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad - \text{обчислене значення градієнту в точці}$$

$$|\text{grad}(x1, x2)| = 8.9442719 \quad - \text{модуль градієнту}$$

$$\text{grad_NORM} := \frac{\text{grad}(x1, x2)}{|\text{grad}(x1, x2)|} \quad - \text{обчислення нормованого значення градієнту в точці}$$

$$\text{grad_NORM} = \begin{pmatrix} 0.4472136 \\ 0.8944272 \end{pmatrix} \quad - \text{нормовані значення координат градієнту}$$

$$F(x1, x2) = 17 \quad - \text{обчислене значення функції в точці}$$

ОБЧИСЛЕННЯ ГРАДІЄНТУ ФУНКЦІЇ ТРЬОХ ЗМІННИХ В ТОЧЦІ З КООРДИНАТАМИ (X1,X2,X3)

$$F(x, y, z) := (2 \cdot x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^4 \quad - \text{функція трьох змінних}$$

$$\text{grad}(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx_1} F(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{d}{dx_2} F(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{d}{dx_3} F(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

- обчислення градієнту функцій трьох змінних

$$\text{grad}(x, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} 8 \cdot x - 4 \\ 2 \cdot y + 2 \\ 4 \cdot z^3 \end{pmatrix}$$

- результат символічного визначення градієнту функцій трьох змінних

$$x_1 := 1 \quad x_2 := 3 \quad x_3 := 2$$

- координати точки

$$\text{grad}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 32 \end{pmatrix}$$

- обчислене значення градієнту в точці

$$|\text{grad}(x_1, x_2, x_3)| = 33.2264955$$

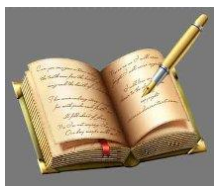
- модуль градієнту

$$\text{grad_NORM} := \frac{\text{grad}(x_1, x_2, x_3)}{|\text{grad}(x_1, x_2, x_3)|}$$

- визначення нормованого значення градієнту в точці

$$\text{grad_NORM} = \begin{pmatrix} 0.1203859 \\ 0.2407717 \\ 0.9630868 \end{pmatrix}$$

- нормовані значення координат градієнту



Завдання до самостійної роботи

Завдання 15. Знайти частинні похідні та градієнт функції $u = f(x, y, z)$. Обчислити в заданій точці градієнт функції.

$N_{\text{дн}}/n$	$f(x, y, z)$	(x_0, y_0, z_0)
1	$x \cdot y \cdot z \cdot \exp(x + 2 \cdot y + 3 \cdot z)$	$(1, 0, 1)$
2	$\sin(x \cdot y \cdot z) \cdot \cos(x + 2 \cdot y + 3 \cdot z)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0, \pi\right)$
3	$(x^2 - y^2 + z) \cdot \sin(x + 2 \cdot y + 3 \cdot z)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0, \pi\right)$

$N_{\text{н}}/n$	$f(x, y, z)$	(x_0, y_0, z_0)
4	$x \cdot y \cdot \exp(x + 2 \cdot z)$	$(1, 1, 0)$
5	$\sqrt{x^2 + 2 \cdot x \cdot y + 3 \cdot x \cdot z}$	$(1, 1, 1)$
6	$x \cdot y^2 \cdot \exp(x^2 + 2 \cdot y + 3 \cdot z)$	$(1, 1, 1)$
7	$\sqrt{(x \cdot y \cdot z)^3} \cdot \sin \frac{x \cdot y}{z}$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0, \pi\right)$
8	$\exp \frac{x \cdot y}{z}$	$(1, 1, 1)$
9	$\cos(x \cdot y \cdot z) \cdot \cos(x + 2 \cdot y + 3 \cdot z)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0, \pi\right)$
10	$\sqrt{x^2 + 2 \cdot x \cdot y \cdot z + 3 \cdot z^3}$	$(1, 1, 1)$
11	$x \cdot y \cdot z^2 \cdot \exp(x + 2 \cdot y^2 + 3 \cdot z)$	$(1, 0, 0)$
12	$(x^2 - y^2 + z) \cdot \cos(x + 2 \cdot y + 3 \cdot z)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0, \pi\right)$
13	$(x^2 + y^3 + z^4) \cdot \exp(2 \cdot x + 3 \cdot y^2 + 4 \cdot z^3)$	$(1, 0, 0)$
14	$3^{x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z}$	$(1, 0, 0)$
15	$\frac{3 \cdot x \cdot y \cdot z + 1}{3 \cdot x + 2 \cdot y - z}$	$(1, 2, 3)$
16	$y \cdot z \cdot \exp(x + 2 \cdot z)$	$(1, 1, 1)$
17	$x \cdot \cos(y) + y \cdot \cos(z) + x \cdot y \cdot z \cdot \cos(x \cdot y \cdot z)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0, \pi\right)$
18	$\ln(x^2 + y^3 + x \cdot y \cdot z)$	$(1, 3, 2)$
19	$(3 \cdot x + 2 \cdot y + z) \cdot \sin(x + 2 \cdot y + 3 \cdot z)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0, \pi\right)$

2.2.4. Кінцево-різницеве обчислення градієнту функції в точці

Нерідко виникає необхідність наближеного обчислення градієнту функції, тобто, апроксимації градієнту. Нехай h – позитивне число. Як відомо, числа:

$$\frac{u(x + h) - u(x)}{h}, \quad \frac{u(x) - u(x - h)}{h} \quad \text{та} \quad \frac{u(x + h) - u(x - h)}{2h}$$

при малих h можуть розглядатися як наближення для $u(x)$. Їх зазвичай називають **правою різницею похідною (або різницею вперед)**, **лівою різницею**

похідною (різницею назад) і центральною різницею похідною (центральною різницею). Для функції кількох змінних $u(x_1, x_2)$ можна записати аналогічні кінцево-різницеві вирази, наприклад:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} &\approx \frac{u(x_1 + h, x_2) - u(x_1, x_2)}{h}, \\ \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} &\approx \frac{u(x_1, x_2) - u(x_1 - h, x_2)}{h} \quad \text{та} \\ \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} &\approx \frac{u(x_1 + h, x_2) - u(x_1 - h, x_2)}{2 \cdot h}\end{aligned}\tag{2.6}$$

Приклад 29. Обчислити градієнт функції у точці кінцево-різницеvim методом.

Послідовність виконання завдання:

1. Задати функцію кількох змінних.
2. Задати підпрограму кінцево-різницевого обчислення нормованого градієнту.
3. Вказати координати точки. Отримати нормовані координати вектору градієнту.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 29. Обчислити градієнт функції $f(x) = (2 \cdot x_0 - 1)^2 + (x_1 + 1)^2$ в точці (1;3) кінцево-різницеvim методом.

КІНЦЕВО-РІЗНИЦЕВЕ ОБЧИСЛЕННЯ ГРАДІЄНТУ ФУНКЦІЇ
В ТОЧЦІ З КООРДИНАТАМИ (X1, X2)

$FR(x) := (2 \cdot x_0 - 1)^2 + (x_1 + 1)^2$ - функція двох змінних

ПІДПРОГРАМА КІНЦЕВО-РІЗНИЦЕВОГО ОБЧИСЛЕННЯ
НОРМОВАНОВОГО ГРАДІЄНТУ $Grad(F, x, \Delta)$

F - назва функції; x - точка обчислення градієнту функції

Δ - крок обчислення градієнту

Out - результат обчислення, який містить нормовані координати вектора градієнту і значення функції в точці x

$$\text{Grad}(F, x, \Delta) := \left| \begin{array}{l} N \leftarrow \text{length}(x) \\ X_r \leftarrow x \\ X_l \leftarrow x \\ \text{for } n \in 0 \dots N - 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} X_{r_n} \leftarrow x_n + \Delta \\ X_{l_n} \leftarrow x_n - \Delta \\ G_n \leftarrow \frac{F(X_r) - F(X_l)}{2 \cdot \Delta} \end{array} \right. \\ \text{for } n \in 0 \dots N - 1 \\ \quad \text{Out}_n \leftarrow \frac{G_n}{|G|} \\ \text{Out}_N \leftarrow F(x) \\ \text{Out} \end{array} \right.$$

$x_{00} := 1 \quad x_{01} := 3$

- координати точки

$zz := \text{Grad}(FR, x_0, 0.01)$

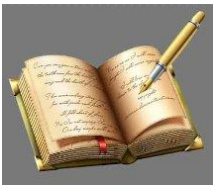
- виклик підпрограми

$zz = \begin{pmatrix} 0.3162278 \\ 0.9486833 \\ 17 \end{pmatrix}$

- результат обчислень

$(0.3162278, 0.9486833)$ - нормовані координати вектору градієнту

$zz = 17$ - значення функції в заданій точці



Завдання до самостійної роботи

Завдання 16. Використовуючи кінцево-різницеву апроксимацію похідних, обчислити градієнт функції у заданій точці. Варіанти завдань наведено у попередньому розділі.

2.2.5. Побудова матриці Гессе

Матриця, складена з других похідних функції, називається матрицею Гессе:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Матриця Гессе є симетричною з розміром $n \times n$.

Приклад 30. Визначити матрицю Гессе для заданої функції

$$z(x, y) = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot y^3 - 6 \cdot x \cdot y - 12 \cdot x.$$

Послідовність виконання завдання:

1. Обчислити похідні по всіх аргументах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= (3 \cdot x^2 + 2 \cdot y^3 - 6 \cdot x \cdot y - 12 \cdot x)'_x = 6 \cdot x - 6 \cdot y - 12, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= (3 \cdot x^2 + 2 \cdot y^3 - 6 \cdot x \cdot y - 12 \cdot x)'_y = 6 \cdot y^2 - 6 \cdot x. \end{aligned}$$

2. З других похідних складаємо матрицю Гессе:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12 \cdot y$ тоді матриця Гессе має вигляд:

$$H = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \cdot y \end{pmatrix}.$$

Приклад 31. Побудувати матрицю Гессе для функції трьох аргументів

Послідовність виконання завдання:

1. Задати функцію трьох змінних.
2. Обчислити частинні перші похідні

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}; \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}; \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}.$$

3. Обчислити окремі похідні

$$\frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y^2}; \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z^2}.$$

4. Обчислити окремі другі змішані похідні

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \right); \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \right); \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \right).$$

5. Задати функцію для обчислення матриці Гессе за формулою (2.7).
Обчислити матрицю Гессе у символьному вигляді.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 31. Побудувати матрицю Гессе для функції трьох

аргументів $f(x, y, z) = x \cdot y + \frac{y^3}{4 \cdot x} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{2}{z \cdot x}$

ПОБУДОВА МАТРИЦІ ГЕССЕ

$$u(x, y, z) := x \cdot y + \frac{y^3}{4x} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{2}{z \cdot x} \quad \text{- задана функція трьох аргументів}$$

ОБЧИСЛЕННЯ ЧАСТИННИХ ПЕРШИХ ПОХІДНИХ

$$\frac{d}{dx} u(x, y, z) \rightarrow y - \frac{1}{4} \cdot \frac{y^3}{x^2} - \frac{2}{z \cdot x^2} \quad \text{- частинна похідна по змінній } x$$

$$\frac{d}{dy} u(x, y, z) \rightarrow x + \frac{3}{4} \cdot \frac{y^2}{x} - 2 \cdot \frac{z^2}{y^3} \quad \text{- частинна похідна по змінній } y$$

$$\frac{d}{dz} u(x, y, z) \rightarrow 2 \cdot \frac{z}{y^2} - \frac{2}{z^2 \cdot x} \quad \text{- частинна похідна по змінній } z$$

ОБЧИСЛЕННЯ ЧАСТИННИХ ДРУГИХ ПОХІДНИХ

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x, y, z) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{x^3} + \frac{4}{z \cdot x^3} \quad - \text{ друга похідна по змінній } x$$

$$\frac{d^2}{dy^2}u(x, y, z) \rightarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{y}{x} + 6 \cdot \frac{z^2}{y^4} \quad - \text{ друга похідна по змінній } y$$

$$\frac{d^2}{dz^2}u(x, y, z) \rightarrow \frac{2}{y^2} + \frac{4}{z^3 \cdot x} \quad - \text{ друга похідна по змінній } z$$

ОБЧИСЛЕННЯ ЧАСТИННИХ ДРУГИХ ЗМІШАНИХ ПОХІДНИХ

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dy} u(x, y, z) \right) \rightarrow 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{y^2}{x^2} \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dz} u(x, y, z) \right) \rightarrow \frac{2}{z^2 \cdot x^2}$$

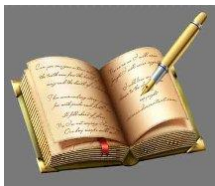
$$\frac{d}{dy} \left(\frac{d}{dz} u(x, y, z) \right) \rightarrow -4 \cdot \frac{z}{y^3}$$

ПОБУДОВА МАТРИЦІ ГЕССЕ

$$r(x, y, z) := \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dx^2}u(x, y, z) & \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dy} u(x, y, z) \right) & \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dz} u(x, y, z) \right) \\ \frac{d}{dy} \left(\frac{d}{dx} u(x, y, z) \right) & \frac{d^2}{dy^2}u(x, y, z) & \frac{d}{dy} \left(\frac{d}{dz} u(x, y, z) \right) \\ \frac{d}{dz} \left(\frac{d}{dx} u(x, y, z) \right) & \frac{d}{dz} \left(\frac{d}{dy} u(x, y, z) \right) & \frac{d^2}{dz^2}u(x, y, z) \end{bmatrix}$$

СИМВОЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ МАТРИЦІ ГЕССЕ

$$r(x, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{x^3} + \frac{4}{z \cdot x^3} & 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{y^2}{x^2} & \frac{2}{z^2 \cdot x^2} \\ 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{y^2}{x^2} & \frac{3}{2} \cdot \frac{y}{x} + 6 \cdot \frac{z^2}{y^4} & -4 \cdot \frac{z}{y^3} \\ \frac{2}{z^2 \cdot x^2} & -4 \cdot \frac{z}{y^3} & \frac{2}{y^2} + \frac{4}{z^3 \cdot x} \end{pmatrix}$$



Завдання до самостійної роботи

Завдання 17. Визначити у символьному вигляді матрицю Гессе для заданої функції.

№n/n	Функція
1	$f(x) = 5 \cdot x_1^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 + 5 \cdot x_2^2 - x_1 - x_3$
2	$f(x) = 2\sqrt{3 + x_1^2 + x_3^2} + 2 \cdot x_2^2 - x_1 - x_3$
3	$f(x) = 4 \cdot x_1^2 + 5 \cdot x_2^2 + 7 \cdot x_3^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 - x_2 + x_3$
4	$f(x) = 3 \cdot x_1^2 + 4 \cdot x_2^2 + 5 \cdot x_3^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_3 - 2 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 + 3 \cdot x_3$
5	$f(x) = x_1^2 + 5 \cdot x_2^2 + 8 \cdot x_3^2 - x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 - x_2 \cdot x_3 + 5 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + x_3$
6	$f(x) = 2 \cdot x_1^2 + 4 \cdot x_2^2 + 8 \cdot x_3^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_3 + 2 \cdot x_2 \cdot x_3 + 6 \cdot x_1 + 7 \cdot x_3$
7	$f(x) = 7 \cdot x_1^2 + 4 \cdot x_2^2 + 6 \cdot x_3^2 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 - x_2 \cdot x_3 + x_1 + x_3 - x_2$
8	$f(x) = 5 \cdot x_1^2 + 3 \cdot x_2^2 + 2 \cdot x_3^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 + 5 \cdot x_1 + x_3$
9	$f(x) = 3 \cdot x_1^2 + 5 \cdot x_2^2 + 4 \cdot x_3^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_3 - x_2 \cdot x_3 + 7 \cdot x_1 + x_3$
10	$f(x) = 4 \cdot x_1^2 + 4 \cdot x_2^2 + x_3^2 - x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 - x_1 - x_3 + x_2$
11	$f(x) = x_1^2 + 2 \cdot x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3 + e^{x_2^2 + x_3^2} - x_2 - x_3$
12	$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 \cdot x_2 + x_1 - 2 \cdot x_3$

2.2.6. Обчислення матриці Гессе у точці

Приклад 32. Для функції $f(x) = x_1^2 + x_2^4$ обчислити градієнт і знайти $x^{(0)} = (0,0)^T$, $x^{(1)} = (1,1)^T$ матрицю Гессе в точках .

Послідовність виконання завдання:

Відповідно до визначення маємо:

$$\nabla f(x) = (2 \cdot x_1, 4 \cdot x_2^3)^T, \quad H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \cdot x_2^2 \end{pmatrix};$$

$$\nabla f(x^{(0)}) = (0,0)^T, \quad H(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\nabla f(x^{(1)}) = (2,4)^T, \quad H(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Приклад 33. Обчислити матрицю Гессе функції трьох аргументів у заданій точці.

Послідовність виконання завдання:

1. Задати функцію кількох змінних.
2. Визначити матрицю Гессе у символьному вигляді.
3. Вказати координати точки. Отримати результат обчислення матриці

Гессе у цій точці.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 33. Побудувати матрицю Гессе для функції
 $f(x, y, z) = x \cdot y + \frac{y^3}{4 \cdot x} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{2}{z \cdot x}$ трьох аргументів в точці (1;2;3).

ОБЧИСЛЕННЯ МАТРИЦІ ГЕССЕ В ТОЧЦІ

$$u(x, y, z) := x \cdot y + \frac{y^3}{4x} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{2}{z \cdot x} \quad \text{- задана функція трьох аргументів}$$

ПОБУДОВА МАТРИЦІ ГЕССЕ

$$r(x, y, z) := \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dx^2} u(x, y, z) & \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dy} u(x, y, z) \right) & \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dz} u(x, y, z) \right) \\ \frac{d}{dy} \left(\frac{d}{dx} u(x, y, z) \right) & \frac{d^2}{dy^2} u(x, y, z) & \frac{d}{dy} \left(\frac{d}{dz} u(x, y, z) \right) \\ \frac{d}{dz} \left(\frac{d}{dx} u(x, y, z) \right) & \frac{d}{dz} \left(\frac{d}{dy} u(x, y, z) \right) & \frac{d^2}{dz^2} u(x, y, z) \end{bmatrix}$$

СИМВОЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ МАТРИЦІ ГЕССЕ

$$r(x, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{x^3} + \frac{4}{z \cdot x^3} & 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{y^2}{x^2} & \frac{2}{z^2 \cdot x^2} \\ 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{y^2}{x^2} & \frac{3}{2} \cdot \frac{y}{x} + 6 \cdot \frac{z^2}{y^4} & -4 \cdot \frac{z}{y^3} \\ \frac{2}{z^2 \cdot x^2} & -4 \cdot \frac{z}{y^3} & \frac{2}{y^2} + \frac{4}{z^3 \cdot x} \end{pmatrix}$$

ФУНКЦІЯ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ МАТРИЦІ ГЕССЕ В ТОЧЦІ

$$r(x, y, z) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{x^3} + \frac{4}{z \cdot x^3} & 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{y^2}{x^2} & \frac{2}{z^2 \cdot x^2} \\ 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{y^2}{x^2} & \frac{3}{2} \cdot \frac{y}{x} + 6 \cdot \frac{z^2}{y^4} & -4 \cdot \frac{z}{y^3} \\ \frac{2}{z^2 \cdot x^2} & -4 \cdot \frac{z}{y^3} & \frac{2}{y^2} + \frac{4}{z^3 \cdot x} \end{pmatrix}$$

X := 1 Y := 2 Z := 3 - координати заданої точки

ОБЧИСЛЕНА МАТРИЦЯ ГЕССЕ В ТОЧЦІ

$$r(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} 5.333 & -2 & 0.222 \\ -2 & 6.375 & -1.5 \\ 0.222 & -1.5 & 0.648 \end{pmatrix}$$

2.2.7. Обчислення кутових мінорів матриці Гессе та її власних значень

Кутовими мінорами k -го порядку матриці розміру $n \times n$, де $k < n$, називаються визначники, складені з елементів вихідної матриці, що стоять в ній на перетині k верхніх рядків і k лівих стовпців. Для виділення кутових мінорів з матриці Гессе зручно використовувати функцію **submatrix** (A, ir, jr, ic, jc), що формує субматрицю, що складається з усіх елементів, що містяться в рядках від ir по jr і стовпців з ic по jc вихідної матриці A .

Приклад 34. Виділити кутові мінори матриці Гессе функції кількох змінних.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 34. Обчислити кутові мінори матриці Гессе функції декількох змінних.

ФОРМУВАННЯ КУТОВИХ МІНОРІВ МАТРИЦІ ГЕССЕ

$$H := \begin{pmatrix} 5.333 & -2 & 0.222 \\ -2 & 6.375 & -1.5 \\ 0.222 & -1.5 & 0.648 \end{pmatrix} \quad - \text{ матриця Гессе}$$

$M_1 := \text{submatrix}(H, 0, 0, 0, 0)$ - виділення першого кутового
мінору матриці Гессе

$M_1 = (5.333)$ - перший кутовий мінор
матриці Гессе

$M_2 := \text{submatrix}(H, 0, 1, 0, 1)$ - виділення другого кутового
мінору матриці Гессе

$M_2 = \begin{pmatrix} 5.333 & -2 \\ -2 & 6.375 \end{pmatrix}$ - другий кутовий мінор
матриці Гессе

$M_3 := \text{submatrix}(H, 0, 2, 0, 2)$ - виділення третього кутового
мінору матриці Гессе

$M_3 = \begin{pmatrix} 5.333 & -2 & 0.222 \\ -2 & 6.375 & -1.5 \\ 0.222 & -1.5 & 0.648 \end{pmatrix}$ - третій кутовий мінор
матриці Гессе

Власні значення $\lambda_i, i=1, \dots, n$ матриці $H(x^*)$ розміру $n \times n$ у точці x^* знаходяться як корені характеристичного рівняння (алгебраїчного рівняння n -го ступеня) $|H(x^*) - \lambda \cdot E| = 0$, де E - поодинокa матриця.

Власні значення дійсно-значної симетричної матриці $H(x^*)$ - дійсні.

Для обчислення власних значень матриці Гессе зручно використовувати спеціальну функцію MathCAD ***eigenvals (M)***, яка визначає вектор власних значень квадратної матриці M .

Приклад 35. Обчислити кутові мінори матриці Гессе функції кількох змінних.

Послідовність виконання завдання:

1. Для заданої функції кількох змінних обчислити матрицю Гессе у заданій точці.
2. Записати оператори для обчислення першого, другого тощо, кутових мінорів матриці Гессе. Отримати результати розрахунку значення кожного мінору.
3. Знайти власні значення матриці Гессе, використовуючи функцію ***eigenvals ()***.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 35. Обчислити кутові мінори матриці Гессе функції декількох змінних.

ОБЧИСЛЕННЯ КУТОВИХ МІНОРІВ МАТРИЦІ ГЕССЕ

$$H := \begin{pmatrix} 5.333 & -2 & 0.222 \\ -2 & 6.375 & -1.5 \\ 0.222 & -1.5 & 0.648 \end{pmatrix} \quad \text{- матриця Гессе}$$

$$M_1 := 5.333 \quad \text{- перший кутовий мінор матриці Гессе}$$

$$M_2 := \begin{pmatrix} 5.333 & -2 \\ -2 & 6.375 \end{pmatrix} \quad \text{- другий кутовий мінор матриці Гессе}$$

$$|M_2| = 29.998 \quad \text{- обчислення другого кутового мінору матриці Гессе}$$

$$M_3 := \begin{pmatrix} 5.333 & -2 & 0.222 \\ -2 & 6.375 & -1.5 \\ 0.222 & -1.5 & 0.648 \end{pmatrix} \quad \text{- третій кутовий мінор матриці Гессе}$$

$$|M_3| = 8.457 \quad \text{- обчислення третього кутового мінору матриці Гессе}$$

ОБЧИСЛЕННЯ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ МАТРИЦІ ГЕССЕ

$$VALUE_H := \text{eigenvals}(H) \quad \text{- використання вбудованої функції для визначення власних значень матриці Гессе}$$

$$VALUE_H = \begin{pmatrix} 3.935 \\ 8.158 \\ 0.263 \end{pmatrix} \quad \text{- обчислення власних значень матриці Гессе}$$

2.2.8. Застосування критерію Сільвестра для дослідження функцій багатьох змінних на екстремум

Достатньою умовою існування мінімуму є умова позитивної визначеності матриці Гессе в стаціонарній точці.

Встановити, яка вона – позитивно визначена, негативно визначена чи невизначена, можна за допомогою критерію Сільвестра. Якщо матриця Гессе позитивно визначена, то в стаціонарній точці функція має локальний мінімум; якщо матриця Гессе негативно визначена, то в стаціонарній точці функція має локальний

максимум; якщо матриця Гессе невизначена, то в стаціонарній точці функція не має локального екстремуму (це – так звана сідлова точка).

Існують два основні способи перевірки виконання умов екстремуму. Перший спосіб пов'язаний із дослідженням позитивної чи негативної визначеності кутових мінорів матриці Гессе. Другий спосіб ґрунтується на аналізі власних значень цієї матриці.

Визначеність матриці Гессе за кутовими мінорами встановлюється наступним чином:

- Для того щоб матриця Гессе $H(x^*)$ була позитивно визначеною $H(x^*) > 0$ та стаціонарна точка x^* була точкою локального мінімуму, необхідно і достатньо, щоб знаки кутових мінорів були строго позитивними:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$$

- Для того щоб матриця Гессе $H(x^*)$ була негативно визначеною $H(x^*) < 0$ та стаціонарна точка x^* була точкою локального максимуму, необхідно і достатньо, щоб знаки кутових мінорів чергувалися, починаючи з негативного:

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$$

Для реалізації другого способу знаходимо власні значення матриці Гессе у кожній із стаціонарних точок x^* функції. Якщо всі власні значення:

- Позитивні $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, n$, то в точці x^* локальний мінімум;
- Негативні $\lambda_i < 0, i = 1, \dots, n$, то в точці x^* локальний максимум;
- Невід'ємні $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n$, то в точці x^* може бути локальний мінімум;
- Непозитивні $\lambda_i \leq 0, i = 1, \dots, n$, то в точці x^* може бути локальний максимум;
- Різних знаків, то в точці x^* немає екстремуму;
- Нульові $\lambda_i = 0, i = 1, \dots, n$, то потрібне додаткове дослідження.

Приклад 36. Дослідити функцію трьох змінних $f(x, y, z)$ на екстремум, застосовуючи критерій Сільвестра з використанням власних значень матриці Гессе.

Послідовність виконання завдання:

1. Задати функцію трьох змінних.
2. Визначити градієнт функції трьох змінних у символьному вигляді.
3. Вказати координати початкової точки. Записати необхідні умови для існування екстремуму. Обчислити координати стаціонарної точки.
4. Обчислити матрицю Гессе у стаціонарній точці. Визначити власні значення матриці Гессе.

5. Зробити висновок: чи матриця є позитивно визначеною або негативно визначеною.
6. Знайти значення цільової функції у точці екстремуму.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 36. Дослідити функцію трьох змінних

$f(x, y, z) = (x-2)^2 + (y-5)^2 + (z+2)^2$ на екстремум, використовуючи критерій Сільвестра з використанням власних значень матриці Гессе.

ЗАСТОСУВАННЯ КРИТЕРІЮ СІЛЬВЕСТРА ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ТРЬОХ ЗМІННИХ НА ЕКСТРЕМУМ

$$F(x, y, z) := (x - 2)^2 + (y - 5)^2 + (z + 2)^2 \quad \text{- функція трьох змінних}$$

$$\text{grad}(x1, x2, x3) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx1} F(x1, x2, x3) \\ \frac{d}{dx2} F(x1, x2, x3) \\ \frac{d}{dx3} F(x1, x2, x3) \end{pmatrix} \quad \text{- обчислення градієнту функції трьох змінних}$$

$$\text{grad}(x1, x2, x3) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot x1 - 4 \\ 2 \cdot x2 - 10 \\ 2 \cdot x3 + 4 \end{pmatrix} \quad \text{- результат символічного визначення градієнту функції трьох змінних}$$

НЕОБХІДНІ УМОВИ НАЯВНОСТІ ЕКСТРЕМУМУ

$$x1 := 1 \quad x2 := 2 \quad x3 := 5 \quad \text{- задання початкової точки для пошуку}$$

Given

$$2 \cdot x1 - 4 = 0 \quad 2 \cdot x2 - 10 = 0$$

- необхідні умови

$$2 \cdot x3 + 4 = 0$$

$$\text{Find}(x1, x2, x3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{- обчислення координат стаціонарної точки}$$

P(2, 5, -2) - стаціонарна точка

$$x1 := 2 \quad x2 := 5 \quad x3 := -2$$

$$F(x1, x2, x3) = 0$$

- перевірка

ДОСТАТНІ УМОВИ НАЯВНОСТІ ЕКСТРЕМУМУ

$$G_{11}(x,y,z) := \frac{d^2}{dx^2} F(x,y,z) \quad G_{12}(x,y,z) := \frac{d}{dx} \frac{d}{dy} F(x,y,z)$$

$$G_{13}(x,y,z) := \frac{d}{dx} \frac{d}{dz} F(x,y,z) \quad G_{21}(x,y,z) := \frac{d}{dy} \frac{d}{dx} F(x,y,z)$$

$$G_{22}(x,y,z) := \frac{d^2}{dy^2} F(x,y,z) \quad G_{23}(x,y,z) := \frac{d}{dy} \frac{d}{dz} F(x,y,z)$$

$$G_{31}(x,y,z) := \frac{d}{dz} \frac{d}{dx} F(x,y,z) \quad G_{32}(x,y,z) := \frac{d}{dz} \frac{d}{dy} F(x,y,z)$$

$$G_{33}(x,y,z) := \frac{d^2}{dz^2} F(x,y,z) \quad \text{- обчислення других похідних}$$

$$H(x,y,z) := \begin{pmatrix} G_{11}(x,y,z) & G_{12}(x,y,z) & G_{13}(x,y,z) \\ G_{21}(x,y,z) & G_{22}(x,y,z) & G_{23}(x,y,z) \\ G_{31}(x,y,z) & G_{32}(x,y,z) & G_{33}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

- побудова матриці Гессе

$$H(x,y,z) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{- символічне визначення матриці Гессе}$$

$$H(2,5,-2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- обчислення матриці Гессе в стаціонарній точці P(2, 5, -2)

$$H_point_P := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$VALUE_H_point_P := \text{eigenvals}(H_point_P)$$

$$\text{VALUE_H_point_P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad - \text{ обчислення власних значень матриці Гессе}$$

Так як всі власні значення матриці Гессе в стаціонарній точці позитивні, то матриця є позитивно визначеною та, відповідно, стаціонарна точка $P(2, 5, -2)$ є точкою мінімуму цільової функції $F(x, y, z)$

$$F(2, 5, -2) = 0 \quad - \text{ значення цільової функції в точці мінімуму}$$

Приклад 37. Дослідити функцію чотирьох змінних $f(x, y, v, z)$ на екстремум, застосовуючи критерій Сільвестра з аналізом значень кутових мінорів та власних значень матриці Гессе.

Послідовність виконання завдання:

1. Задати функцію чотирьох змінних.
2. Визначити градієнт функції чотирьох змінних у символьному вигляді.
3. Вказати координати початкової точки. Записати необхідні умови для існування екстремуму. Обчислити координати стаціонарної точки.
4. Обчислити матрицю Гессе у стаціонарній точці.
5. Виконати аналіз кутових мінорів (першого, другого, третього, четвертого) матриці Гессе.
6. Зробити висновок: чи матриця є позитивно визначеною або негативно визначеною.
7. Визначити власні значення матриці Гессе.
8. Зробити висновок: чи матриця є позитивно визначеною або негативно визначеною.
9. Знайти значення цільової функції у точці екстремуму.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 37. Дослідити функцію чотирьох змінних

$$f(x, y, v, z) = \sum_{a=1}^{10} \left(v \cdot \exp\left(x \cdot \frac{-a}{10}\right) - z \cdot \exp\left(y \cdot \frac{-a}{10}\right) - \exp\left(\frac{-a}{10}\right) + 5 \cdot \exp(-a) \right) \text{ на}$$

екстремум, використовуючи критерій Сільвестра з аналізом значень кутових мінорів та власних значень матриці Гессе.

ВИКОРИСТАННЯ КРИТЕРІЮ СІЛЬВЕСТРА ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ЧОТИРЬОХ ЗМІННИХ НА ЕКСТРЕМУМ

$$F(x, y, v, z) := \sum_{a=1}^{10} \left(v \cdot \exp\left(x \cdot \frac{-a}{10}\right) - z \cdot \exp\left(y \cdot \frac{-a}{10}\right) - \exp\left(\frac{-a}{10}\right) + 5 \cdot \exp(-a) \right)^2$$

- визначимо цільову функцію від чотирьох аргументів

$$\text{grad}(x_1, x_2, x_3, x_4) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx_1} F(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \frac{d}{dx_2} F(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \frac{d}{dx_3} F(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \frac{d}{dx_4} F(x_1, x_2, x_3, x_4) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{- обчислення градієнту} \\ \text{функції чотирьох} \\ \text{змінних} \end{array}$$

НЕОБХІДНІ УМОВИ НАЯВНОСТІ ЕКСТРЕМУМУ

$x_1 := 2 \quad x_2 := 8 \quad x_3 := 2 \quad x_4 := 6$ - задання початкової точки
Given для пошуку

$$\begin{array}{ll} \frac{d}{dx_1} F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 & \frac{d}{dx_2} F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \\ \frac{d}{dx_3} F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 & \frac{d}{dx_4} F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{- необхідні} \\ \text{умови} \end{array}$$

$$\text{Find}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 1.0000033 \\ 9.9999857 \\ 1.0000028 \\ 4.9999984 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{- обчислення координат} \\ \text{стаціонарної точки} \end{array}$$

ДОСТАТНІ УМОВИ НАЯВНОСТІ ЕКСТРЕМУМУ

$P(1, 10, 1, 5)$ - стаціонарна точка

$$G_{11}(x, y, v, z) := \frac{d^2}{dx^2} F(x, y, v, z) \quad G_{12}(x, y, v, z) := \frac{d}{dx} \frac{d}{dy} F(x, y, v, z)$$

$$G_{13}(x, y, v, z) := \frac{d}{dx} \frac{d}{dv} F(x, y, v, z) \quad G_{14}(x, y, v, z) := \frac{d}{dx} \frac{d}{dz} F(x, y, v, z)$$

$$G_{21}(x, y, v, z) := \frac{d}{dy} \frac{d}{dx} F(x, y, v, z) \quad G_{22}(x, y, v, z) := \frac{d^2}{dy^2} F(x, y, v, z)$$

$$G_{23}(x, y, v, z) := \frac{d}{dy} \frac{d}{dv} F(x, y, v, z) \quad G_{24}(x, y, v, z) := \frac{d}{dy} \frac{d}{dz} F(x, y, v, z)$$

$$G_{31}(x,y,v,z) := \frac{d}{dv} \frac{d}{dx} F(x,y,v,z) \quad G_{32}(x,y,v,z) := \frac{d}{dv} \frac{d}{dy} F(x,y,v,z)$$

$$G_{33}(x,y,v,z) := \frac{d^2}{dv^2} F(x,y,v,z) \quad G_{34}(x,y,v,z) := \frac{d}{dv} \frac{d}{dz} F(x,y,v,z)$$

$$G_{41}(x,y,v,z) := \frac{d}{dz} \frac{d}{dx} F(x,y,v,z) \quad G_{42}(x,y,v,z) := \frac{d}{dz} \frac{d}{dy} F(x,y,v,z)$$

$$G_{43}(x,y,v,z) := \frac{d}{dz} \frac{d}{dv} F(x,y,v,z) \quad G_{44}(x,y,v,z) := \frac{d^2}{dz^2} F(x,y,v,z)$$

- обчислення других похідних

$$H(x,y,v,z) := \begin{pmatrix} G_{11}(x,y,v,z) & G_{12}(x,y,v,z) & G_{13}(x,y,v,z) & G_{14}(x,y,v,z) \\ G_{21}(x,y,v,z) & G_{22}(x,y,v,z) & G_{23}(x,y,v,z) & G_{24}(x,y,v,z) \\ G_{31}(x,y,v,z) & G_{32}(x,y,v,z) & G_{33}(x,y,v,z) & G_{34}(x,y,v,z) \\ G_{41}(x,y,v,z) & G_{42}(x,y,v,z) & G_{43}(x,y,v,z) & G_{44}(x,y,v,z) \end{pmatrix}$$

- побудова матриці Гессе

$$H(1,10,1,5) = \begin{pmatrix} 1.7519185 & -0.1493182 & -3.0864156 & 0.1495653 \\ -0.1493182 & 0.1188398 & 0.7478266 & -0.1810154 \\ -3.0864156 & 0.7478266 & 7.8107854 & -0.9979047 \\ 0.1495653 & -0.1810154 & -0.9979047 & 0.3130353 \end{pmatrix}$$

- обчислення матриці Гессе в стаціонарній точці P(1, 10, 1, 5)

$$H_point_P := \begin{pmatrix} 1.7519185 & -0.1493182 & -3.0864156 & 0.1495653 \\ -0.1493182 & 0.1188398 & 0.7478266 & -0.1810154 \\ -3.0864156 & 0.7478266 & 7.8107854 & -0.9979047 \\ 0.1495653 & -0.1810154 & -0.9979047 & 0.3130353 \end{pmatrix}$$

АНАЛІЗ КУТОВИХ МІНОРІВ МАТРИЦІ ГЕССЕ

$$M_1 := 1.7519185$$

- перший кутовий мінор
матриці Гессе

$$M_2 := \begin{pmatrix} 1.7519185 & -0.1493182 \\ -0.1493182 & 0.1188398 \end{pmatrix}$$

- другий кутовий мінор
матриці Гессе

$$|M_2| = 0.1859017$$

- обчислення другого кутового
мінору матриці Гессе

$$M_3 := \begin{pmatrix} 1.7519185 & -0.1493182 & -3.0864156 \\ -0.1493182 & 0.1188398 & 0.7478266 \\ -3.0864156 & 0.7478266 & 7.8107854 \end{pmatrix}$$

- третій кутовий мінор матриці Гессе

$$|M_3| = 0.0295079$$

- обчислення третього кутового
мінору матриці Гессе

$$M_4 := \begin{pmatrix} 1.7519185 & -0.1493182 & -3.0864156 & 0.1495653 \\ -0.1493182 & 0.1188398 & 0.7478266 & -0.1810154 \\ -3.0864156 & 0.7478266 & 7.8107854 & -0.9979047 \\ 0.1495653 & -0.1810154 & -0.9979047 & 0.3130353 \end{pmatrix}$$

- четвертий кутовий мінор матриці Гессе

$$|M_4| = 7.6792219 \times 10^{-4}$$

- обчислення четвертого кутового
мінору матриці Гессе

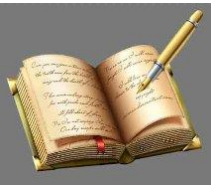
Так як всі кутові мінори матриці Гессе в стаціонарній точці позитивні,
то матриця є позитивно визначеною та, відповідно, стаціонарна точка
 $P(1, 10, 1, 5)$ є точкою мінімуму цільової функції $F(x, y, v, z)$

$$\text{eigenvals}(H_{\text{point}_P}) = \begin{pmatrix} 2.2894337 \times 10^{-3} \\ 0.0547583 \\ 0.660266 \\ 9.2772652 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{- обчислення власних} \\ \text{значень матриці Гессе} \end{array}$$

Всі власні значення матриці Гессе в стаціонарній точці також позитивні,
матриця позитивно визначена та, відповідно, стаціонарна точка є
точкою мінімуму цільової функції $F(x, y, v, z)$

$$F(1, 10, 1, 5) = 0$$

- значення цільової функції
в точці мінімуму



Завдання до самостійної роботи

Завдання 18. Дослідити задану функцію на екстремум,
використовуючи критерій Сільвестра

№ n/n	Функція
1	$f(x) = 5 \cdot x_1^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 + 5 \cdot x_2^2 - x_1 - x_2 \rightarrow \min$
2	$f(x) = 2\sqrt{3 + x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2} - x_1 - x_3 \rightarrow \min$
3	$f(x) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \min$

№ n/n	Функція
4	$f(x) = 3x_1^2 + 4x_2^3 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_1 - 3x_3 \rightarrow \min$
5	$f(x) = x_1^2 + 5 \cdot x_2^2 + 8 \cdot x_3^2 - x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 - x_2 \cdot x_3 + 5 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + x_3 \rightarrow \min$
6	$f(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + 6x_1 + 7x_3 \rightarrow \min$
7	$f(x) = 7x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 - 3x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 + x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \min$
8	$f(x) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 5x_1 + x_3 \rightarrow \min$
9	$f(x) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 + 7x_1 + x_3 \rightarrow \min$
10	$f(x) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3 - x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min$
11	$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3 + e^{x_2^2 + x_3^2} - x_2 + x_3 \rightarrow \min$
12	$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 \cdot x_2 + x_1 - 2 \cdot x_3 \rightarrow \min$

2.3. Чисельне визначення екстремуму нелінійної функції багатьох змінних вбудованими засобами MathCAD

2.3.1. Визначення екстремуму функції кількох змінних

Як і у випадку функцій однієї змінної MathCAD істотно полегшує дослідження функції двох змінних завдяки можливості побудови поверхонь і ліній рівня, що їх описують, за допомогою яких довести безперервність функції, знайти екстремуми, сідлові точки, а також точки або лінії розриву набагато простіше.

Для пошуку значень змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ при яких деяка функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ має максимальне або мінімальне значення, використовують функції **Maximize** ($f, x1, x2, \dots, xn$) та **Minimize** ($f, x1, x2, \dots, xn$). Обидві ці функції не вимагають обчислення похідних функцій $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що як спрощує запис алгоритмів, а й дозволяє вирішувати завдання, у яких обчислення похідних з тих чи інших причин неможливе.

Для функцій з переломами використовують функцію **minerr()**, що повертає значення аргументу, при якому розбіжність між заданим числом і значенням функції мінімально. Для цього за графіком необхідно вибрати число A наперед більше (або менше) екстремального значення функції і записати його як обмеження в блоці **Given-minerr** у вигляді $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A$.

Приклад 38. Знайти екстремум функції кількох змінних за допомогою вбудованих функцій.

Порядок виконання завдання:

1. Задати цільову функцію $f(x, y, z, \dots)$.
2. Присвоїти початкові значення змінним $x, y, z, \dots$.
3. Визначити точку екстремуму, використовуючи функцію **Maximize** ($f, x1, x2, \dots, xn$) чи **Minimize** ($f, x1, x2, \dots, xn$). Визначити значення цільової функції у точці екстремуму.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 38. Знайти екстремум функції декількох змінних за допомогою вбудованих функцій.

$$F(x, y, z) := (x - 2)^2 + (y - 5)^2 + (z + 2)^2 \quad - \text{цільова функція}$$

$$x := 1 \quad y := 1 \quad z := 1 \quad - \text{присвоєння початкових значень змінним}$$

$$\text{Point} := \text{Minimize}(F, x, y, z) \quad - \text{визначення точки екстремуму}$$

$$\text{Point} = \begin{pmatrix} 2.0000001 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad - \text{знайдене значення екстремуму}$$

$$F(\text{Point}_0, \text{Point}_1, \text{Point}_2) = 5.4259914 \times 10^{-15}$$

- значення цільової функції в точці екстремуму

ПОШУК ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЇ ЧОТИРЬОХ ЗМІННИХ ЗА ДОПОМОГОЮ ВБУДОВАНИХ ФУНКЦІЙ

$$F(x, y, v, z) := \sum_{a=1}^{10} \left(v \cdot \exp\left(x \cdot \frac{-a}{10}\right) - z \cdot \exp\left(y \cdot \frac{-a}{10}\right) - \exp\left(\frac{-a}{10}\right) + 5 \cdot \exp(-a) \right)^2$$

- визначимо цільову функцію від чотирьох аргументів

$$v := 4 \quad z := 9 \quad - \text{присвоєння початкових значень змінним}$$

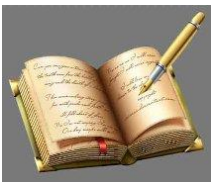
$$x := 3 \quad y := 15$$

$$\text{Point} := \text{Minimize}(F, x, y, v, z)$$

$$\text{Point} = \begin{pmatrix} 0.9989912 \\ 10.0036661 \\ 0.9992351 \\ 5.0008002 \end{pmatrix} \quad - \text{знайдене значення екстремуму}$$

$$F(\text{Point}_0, \text{Point}_1, \text{Point}_2, \text{Point}_3) = 1.0806213 \times 10^{-7}$$

- значення цільової функції в точці екстремуму



Завдання до самостійної роботи

Завдання 19. З використанням вбудованих функцій визначити екстремум заданої функції.

№п/ <i>n</i>	Цільова функція	Початкова точка
1	$y = x_1 + 5 + \sum_{i=2}^n (x_i - i)^2$	$x_i^0 = \frac{i}{2}, i = 1, n$
2	$y = 100 \cdot x_1^2 + \sum_{i=2}^n x_i - 2 \cdot i $	$x_i^0 = 12, i = 1, n$
3	$y = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i + i)^{2 \cdot i}}{100 \cdot i}$	$x_i^0 = \frac{i}{n} - 15, i = 1, n$
4	$y = (x_1 - n)^6 + 0.2 \cdot x_2 + 5 + \sum_{i=3}^n \frac{(x_i + 7 \cdot i)^2}{i}$	$x_i^0 = 0, i = 1, n$
5	$y = (x_1)^4 + (x_2 - 3)^3 + \sum_{i=3}^n \frac{(x_i + 2 \cdot i)^2}{i^2}$	$x_i^0 = 12, i = 1, n$
6	$y = \sum_{i=1,3,\dots,n} (x_i - 2 \cdot i)^2 + \sum_{j=2,4,\dots,n} (x_j - 2 \cdot j)^4$	$x_i^0 = 0, x_j^0 = 0$
7	$y = \sum_{i=2}^n \frac{(x_i + i)^{2 \cdot i}}{10 \cdot i^3}$	$x_i^0 = i, i = 1, n$
8	$y = \sum_{i=1}^n \frac{(i \cdot x_i - n)^{2 \cdot i}}{10 \cdot i^3}$	$x_i^0 = \frac{i}{10}, i = 1, n$
9	$y = \sum_{i=1,3,\dots,n} (0.1 \cdot x_i + 2 \cdot i)^2 + \sum_{j=2,4,\dots,n} (x_j - 11 \cdot n)^4$	$x_i^0 = 3, x_j^0 = 3$
10	$y = (x_1 - 67)^{2 \cdot n} + \sum_{i=2}^n \frac{(x_i - 7 \cdot i)^2}{i^3}$	$x_i^0 = \frac{n}{2}, i = 1, n$
11	$y = (x_n - 75)^4 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(x_i - i)^2}{i^3}$	$x_i^0 = i, i = 1, n$
12	$y = (x_1 - 67)^{2 \cdot n} + 0.1 \cdot x_2 + 5 + \sum_{i=3}^n \frac{(x_i + 7 \cdot i)^2}{i \cdot n}$	$x_i^0 = i, i = 1, n$
13	$y = (x_1 + 7)^8 + \sum_{i=2}^n \frac{(0.01 \cdot x_i - i)^2}{i}$	$x_i^0 = n, i = 1, n$
14	$y = 0.01 \cdot (x_1 - n)^6 + \sum_{i=2}^n (x_i + i)^2$	$x_i^0 = 12, i = 1, n$

<i>№п/ n</i>	<i>Цільова функція</i>	<i>Початкова точка</i>
15	$y = (x_1 + n)^4 + \sum_{i=2}^n (x_i - i)^2$	$x_i^0 = \frac{i}{2}, i = 1, n$
16	$y = \sum_{i=1,3,\dots,n} (x_i + 2 \cdot i)^2 + \sum_{j=2,4,\dots,n} (x_j - 12 \cdot j)^4$	$x_i^0 = 0, x_j^0 = 0$
17	$y = 500 \cdot x_1^6 + \sum_{i=2}^n x_i - 3 \cdot i $	$x_i^0 = \frac{i}{2}, i = 1, n$

2.3.2. Використання умовної оптимізації для розв'язання задач при наявності багатоекстремальної ситуації

Пошук екстремумів полімодальних функцій зручно здійснювати засобами умовної оптимізації, вказуючи в явному вигляді ті області простору пошуку, де локалізований екстремум. Попередню локалізацію екстремумів можна проводити засобами графічного аналізу чи іншими способами. Умовну оптимізацію здійснюють з використанням блоків **Given-Maximize**, **Given-Minimize**.

Приклад 39. Знайти екстремум багатоекстремальної функції $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y)$ за допомогою вбудованих функцій засобами умовної оптимізації.

Порядок виконання завдання:

1. Задати цільову функцію.
2. Побудувати графічне зображення функції за допомогою вбудованої функції **CreateMesh ()**.
3. Знайти локальний максимум функції:
 - Присвоїти початкові значення змінним;
 - Записати умови пошуку екстремуму;
 - Визначити точку екстремуму, використовуючи функцію **Maximize ()**.
Знайти значення цільової функції у точці екстремуму.
4. Знайти локальний мінімум функції:
 - Присвоїти початкові значення змінним;
 - Записати умови пошуку екстремуму;
 - Визначити точку екстремуму за допомогою функції **Minimize ()**. Знайти значення цільової функції у точці екстремуму.

Приклад виконання завдання у MathCAD

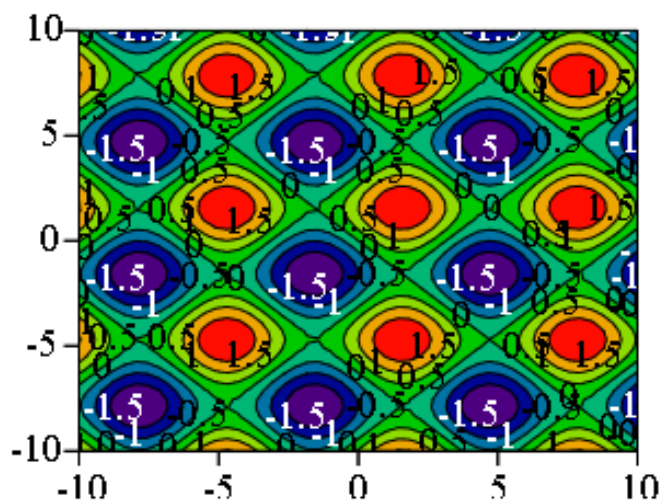
Приклад 39. Знайти екстремум багатоекстремальної функції $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y)$ за допомогою вбудованих функцій засобами умовної оптимізації.

ПОШУК ЕКСТРЕМУМУ БАГАТОЕКСТРЕМАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ
ЗА ДОПОМОГОЮ ВБУДОВАНИХ ФУНКЦІЙ ЗАСОБАМИ
УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

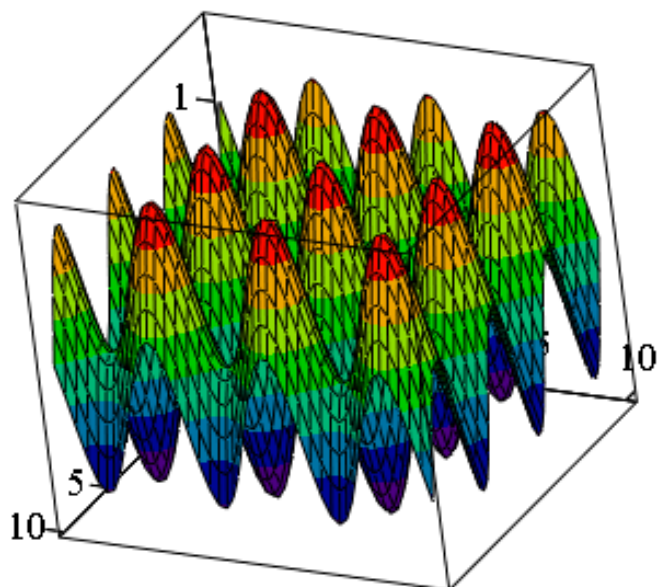
$F(x, y) := \sin(x) + \sin(y)$ - цільова функція

$S := \text{CreateMesh}(F, -10, 10, -10, 10, 50, 50)$

- побудова графічного образу функції



S

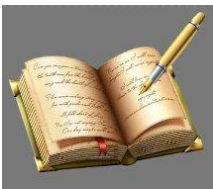


ПОШУК ЛОКАЛЬНОГО МАКСИМУМУ

$x := 1 \quad y := 1$	- присвоєння початкових значень змінним
Given	
$x > 0 \quad y > 0$	
$x < 5 \quad y < 5$	- умови пошуку екстремуму
$\text{Point} := \text{Maximize}(F, x, y)$	- визначення точки екстремуму
$\text{Point} = \begin{pmatrix} 1.571 \\ 1.571 \end{pmatrix}$	- знайдене значення екстремуму
$F(\text{Point}_0, \text{Point}_1) = 2$	- значення цільової функції в точці екстремуму

ПОШУК ЛОКАЛЬНОГО МІНІМУМУ

$x := 3 \quad y := 5$	- присвоєння початкових значень змінним
Given	
$x > 0 \quad y > 0$	
$x < 8 \quad y < 8$	- умови пошуку екстремуму
$\text{Point} := \text{Minimize}(F, x, y)$	- визначення точки екстремуму
$\text{Point} = \begin{pmatrix} 4.712 \\ 4.712 \end{pmatrix}$	- знайдене значення екстремуму
$F(\text{Point}_0, \text{Point}_1) = -2$	- значення цільової функції в точці екстремуму



Завдання до самостійної роботи

Завдання 20. З використанням засобів умовної оптимізації та застосуванням вбудованих функцій знайти глобальні екстремуми заданих функцій.

<i>№ n/n</i>	<i>Функція</i>	<i>Обмеження</i>
1	$f(x, y) = 837.9657 - x \cdot \sin(\sqrt{ x }) - y \cdot \sin(\sqrt{ y })$ (420.98; 420.98) *, min (f) = 0.0	$-500 \leq x \leq 500$ $-500 \leq y \leq 500$
2	$f(x, y) = \left(4 - 2.1 \cdot x^2 + \frac{x^4}{3}\right) \cdot x^2 + x \cdot y + 4 \cdot (y^2 - 1) \cdot y^2$ (-0.0898; 0.713), (0.0898; -0.713) *, min (f) = -1.3	$-3 \leq x \leq 3$ $-2 \leq y \leq 2$

№ n/n	Функція	Обмеження
3	$f(x, y) = 20 + [x^2 - 10 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot x)] +$ $+ [y^2 - 10 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot y)]$ $(0; 0) *, \min(f) = 0$	$-4 \leq x \leq 4$ $-4 \leq y \leq 4$
4	$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{A} - B \cdot [\cos(x) + \cos(y)],$ $A = 2; B = 12$ $(0; 0) *, \min(f) = -24$	$-8 \leq x \leq 8$ $-8 \leq y \leq 8$
5	$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{50} - \left[\cos(x) \cdot \cos\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) \right] + 1$ $(0; 0) *, \min(f) = 0$	$-10 \leq x \leq 10$ $-10 \leq y \leq 10$
6	$f(x, y) = -20 \cdot \exp\left[-\sqrt{0,2 \cdot (x^2 + y^2)}\right] -$ $- \exp(0,5) \cdot (\cos(2 \cdot \pi \cdot x) + \cos(2 \cdot \pi \cdot y)) + 20 + \exp(1)$ $(0; 0) *, \min(f) = 0$	$-30 \leq x \leq 30$ $-30 \leq y \leq 30$
7	$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{A} - B \cdot [\cos(x) + \cos(y)],$ $A = 2; B = 6$ $(0; 0) *, \min(f) = -12$	$-8 \leq x \leq 8$ $-8 \leq y \leq 8$
8	$f(x, y) = -x \cdot \sin(\sqrt{ x }) - y \cdot \sin(\sqrt{ y })$ $(420.98; 420.98) *, \min(f) = -837.96$	$-500 \leq x \leq 500$ $-500 \leq y \leq 500$
9	$f(x, y) = \frac{1 + \cos(12 \cdot \sqrt{x^2 + y^2})}{0.5 \cdot (x^2 + y^2) + 2}$ $(0; 0) *, \min(f) = -1$	$-5 \leq x \leq 5$ $-5 \leq y \leq 5$
10	$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{30} - \left[\cos(x) \cdot \cos\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) \right]$ $(0; 0) *, \min(f) = -1$	$-10 \leq x \leq 10$ $-10 \leq y \leq 10$
11	$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{A} - B \cdot [\cos(x) + \cos(y)], \quad A = 2; B = 9$ $(0; 0) *, \min(f) = -18$	$-8 \leq x \leq 8$ $-8 \leq y \leq 8$

№ n/n	Функція	Обмеження
12	$f(x, y) = \frac{1 + \cos(18 \cdot \sqrt{x^2 + y^2})}{(x^2 + y^2) + 1}$ (0; 0) *, min (f) = -2	$-5 \leq x \leq 5$ $-5 \leq y \leq 5$
13	$f(x, y) = \frac{100}{100 \cdot (x^2 + y^2) + (1 - x)^2 + 1}$ (1.0; 1.0) *, min (f) = 100	$-1.28 \leq x \leq 1.28$ $-1.28 \leq y \leq 1.28$
14	$f(x, y) = 20 + x^2 + y^2 - [10 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot x)] + [10 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot y)]$ (4.533; 4.533), (-4.533; 4.533) *, min (f) = 80.7	$-5.12 \leq x \leq 5.12$ $-5.12 \leq y \leq 5.12$
15	$f(x, y) = \frac{1}{\frac{x^2 + y^2}{200} - \cos(x) \cdot \cos\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) + 2}$ (0; 0) *, min (f) = 1,0	$-20 \leq x \leq 20$ $-20 \leq y \leq 20$

2.4. Алгоритми чисельного пошуку екстремуму багатомірних задач нелінійної оптимізації програмними засобами MathCAD

2.4.1. Алгоритм покоординатного спуску з одномірною оптимізацією методом квадратичної апроксимації

Існує безліч наближених ітераційних методів оптимізації без обмежень, які називаються релаксаційними (to relax – знижувати, розслаблювати) тому, що в процесі їх роботи, починаючи з певним чином обраної вихідної точки $\vec{X}_0$, утворюється послідовність точок $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_k, \vec{X}_{k+1}, \dots$, у якій кожна наступна має краще (менше) значення цільової функції: $f(\vec{X}_{k+1}) < f(\vec{X}_k)$. Якщо завдання має розв'язок і цільова функція обмежена, то межі ця послідовність повинна сходиться до точки мінімуму: $\vec{X}_k \rightarrow \vec{X}^*$. При пошуку мінімуму з поточної точки $\vec{X}_k$ робиться черговий крок для того, щоб наблизитись до оптимуму. Для цього необхідно визначити: напрямок кроку $\vec{d}_k$ та величину кроку t_k у вибраному напрямку. У новій точці, яка визначається за правилом $\vec{X}_{k+1} = \vec{X}_k + t_k \cdot \vec{d}_k$ значення цільової функції зменшиться.

Переважає більшість релаксаційних методів належить до класу методів, що ґрунтуються на лінійному пошуку. Вони первинним є вибір напрямку, після чого проводиться рух у вибраному напрямку.

Метод циклічного покоординатного спуску є класичним повно кроковим методом оптимізації, що не вимагає знання похідних. Напрями одновірної оптимізації кожної ітерації вибираються паралельними координатним осям, тобто змінюється лише одна змінна. При цьому для одновірної оптимізації можна використовувати будь-який метод нульового порядку: золотий переріз, метод Фібоначчі або парабол. Після того, як знайдено мінімум по першій змінній, здійснюється пошук по другій і так до останньої, потім цикл повторюється, поки не буде досягнута необхідна точність. Символічно покоординатний спуск описується такими співвідношеннями:

$$\vec{d}_k \in \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}, \quad (2.8)$$

$$t_k = \arg \min_t f(\vec{X}_k + t_k \cdot \vec{d}_k)$$

$$\vec{X}_{k+1} = \vec{X}_k + t_k \cdot \vec{d}_k.$$

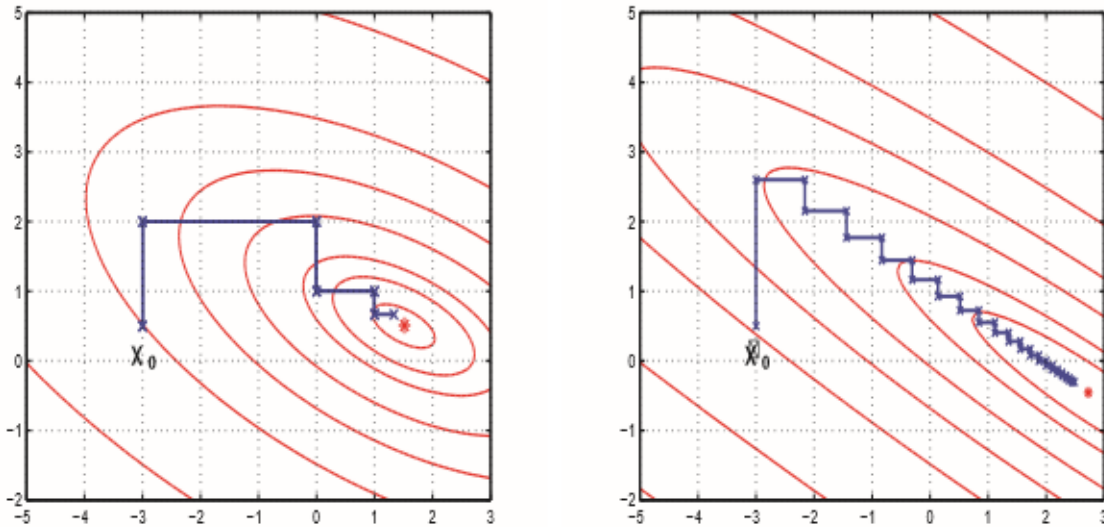


Рисунок 2.2 - Геометрична ілюстрація роботи методу покоординатного спуску

Після вибору деякого початкового наближення $\vec{X}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ відшукується $\min_{x_1} f(X) = f(X)$ при фіксованих значеннях $x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0$. Отже, рух з точки $\vec{X}^0$ відбувається по прямій, паралельній осі OX_1 у бік зменшення функції $f(\vec{X})$ $\min_{x_1} f(\vec{X}) = \vec{X}_1^{(1)}$. Потім пошук йде вздовж осі OX_2 з точки з

координатами $(x_1^{(1)}, x_2^0, \dots, x_n^0)$, тобто відшукується $\min_{x_2} f(\vec{X})$. Описана процедура послідовно повторюється для всіх $x_i, i = 1, \dots, n$.

Після завершення пошуку по всьому x_i отримуємо точку $\vec{X}^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$. Процес пошуку повторюється аналогічно до вищевикладеного, і в результаті маємо точку $\vec{X}^2 = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)$ і так далі. Ітераційний процес пошуку закінчується, коли зміна аргументу $\vec{X}$ мало впливає зміну функції $f(\vec{X})$, тобто виконується така нерівність виду:

$$|f(\vec{X}^{k+1}) - f(\vec{X}^k)| < \varepsilon, \quad (2.9)$$

де ε - задана точність обчислень.

Алгоритм методу покоординатного спуску

Початковий етап. Вибрати точність наближення до мінімуму $\varepsilon > 0$ яка буде використовуватися для зупинки алгоритму. Вибрати початкове наближення – точку $\vec{X}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

Наступна послідовність кроків:

- Відшукується мінімум функції однієї змінної $F1(x) = F(x, x_2^0, \dots, x_n^0)$, тобто функції $F(x)$ при фіксованих всіх змінних, крім першої змінної. Перше наближення для цієї координати переміщується до точки мінімуму $x_1^1 = x_{\min}$;
- Дія повторюється для другої змінної, проводиться пошук мінімуму функції однієї змінної $F2(x) = F(x_1^1, x, x_3^0, \dots, x_n^0)$. Нове значення координати привласнити значення мінімуму цієї функції $x_2^1 = x_{\min}$;
- Продовжувати мінімізацію по всіх координатах, прийшовши до наступного наближення $\vec{X}^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$;
- Аналогічно обчислити $\vec{X}^2, \vec{X}^3$ і т.п., поки $|\vec{X}^k - \vec{X}^{k-1}|$ не стане менше заданої точності ε .

Приклад 40. Знайти екстремум цільової функції $f(\vec{X})$, використовуючи покоординатний спуск з одномірною оптимізацією методом квадратичної апроксимації

Порядок виконання завдання:

1. Записати програму пошуку мінімуму (з виходом із пошуку по завершенню числа ітерацій) або (з виходом із пошуку при виконанні умови).
2. Задати цільову функцію $f(\vec{X})$ та початкові значення вектору змінних.
3. Знайти розв'язок та значення цільової функції у точці екстремуму.
4. Перевірити знайдений розв'язок, використовуючи **Minimize ()**

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 40. Знайти екстремум цільової функції $f(\vec{X})$, використовуючи покоординатний спуск із одномірною оптимізацією методом квадратичної апроксимації

Програма пошуку мінімуму NMin(F, x0, ε),

F - назва функції, в якій міститься цільова функція;

x0 - початкові значення шуканих змінних;

ε - похибка пошуку розв'язку

```
NMin_SPI(F, x0, ε) :=
| N ← length(x0) - 1
| X2 ← x0
| X1 ← x0
| X0 ← x0
| M ← 10000 - число ітерацій
| for j ∈ 0..M
|   | Z ← X2
|   | for n ∈ 0..N
|   |   | X0n ← X2n + 0.01
|   |   | X1n ← X2n
|   |   | X2n ← X2n - 0.01
|   |   | f0 ← F(X0)
|   |   | f1 ← F(X1)
|   |   | while |X2n - X1n| > ε
```

			$f2 \leftarrow F(X2)$ $A \leftarrow f2 \cdot [(X1_n)^2 - (X0_n)^2]$ $A \leftarrow A - f1 \cdot [(X2_n)^2 - (X0_n)^2]$ $A \leftarrow A + f0 \cdot [(X2_n)^2 - (X1_n)^2]$ $A \leftarrow \frac{A}{2 \cdot [f2 \cdot (X1_n - X0_n) - f1 \cdot (X2_n - X0_n) + f0 \cdot (X2_n - X1_n)]}$ $f0 \leftarrow f1$	
			$f1 \leftarrow f2$ $X0 \leftarrow X1$ $X1 \leftarrow X2$ $X2_n \leftarrow A$	
	X2		- вихід із пошуку по завершенню числа ітерацій	
$FR(x) := 100 \cdot [x_1 - (x_0)^2]^2 + (1 - x_0)^2$			- цільова функція	
$x0_0 := 3 \quad x0_1 := 3$			- початкові значення вектору змінних	
$X := NMin_SPI(FR, x0, 0.00001)$			- виклик програми пошуку оптимуму	
$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$			- знайдений розв'язок	
$FR(X) = 1.765 \times 10^{-8}$			- значення цільової функції в точці екстремуму	
ПЕРЕВІРКА РОЗВ'ЯЗАННЯ				
$FR_NEW(x1, x2) := 100 \cdot (x2 - x1^2)^2 + (1 - x1)^2$			- цільова функція	
$x00 := 0.1 \quad y00 := 1.2$			- початкові значення змінних	
$vv := Minimize(FR_NEW, x00, y00)$			- пошук розв'язку за допомогою вбудованої функції	
$vv = \begin{pmatrix} 0.995 \\ 0.99 \end{pmatrix}$			- знайдений розв'язок	
$FR_NEW(vv_0, vv_1) = 2.689 \times 10^{-5}$			- значення цільової функції в точці екстремуму	

Продовження прикладу 40.

Програма пошуку мінімуму $NMin(F, x0, \varepsilon)$,

F - назва функції, в якій міститься цільова функція;

$x0$ - початкових значень шуканих змінних;

ε - похибка пошуку розв'язання

```

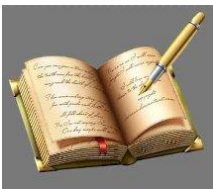
NMin_SPI(F, x0, ε) :=
    N ← length(x0) - 1
    X2 ← x0
    X1 ← x0
    X0 ← x0
    while 1
        Z ← X2
        for n ∈ 0 .. N
            X0n ← X2n + 0.01
            X1n ← X2n
            X2n ← X2n - 0.01
            f0 ← F(X0)
            f1 ← F(X1)
            while |X2n - X1n| > ε
                f2 ← F(X2)
                A ← f2 · [(X1n)2 - (X0n)2]
                A ← A - f1 · [(X2n)2 - (X0n)2]
                A ← A + f0 · [(X2n)2 - (X1n)2]
                A ←  $\frac{A}{2 \cdot [f2 \cdot (X1_n - X0_n) - f1 \cdot (X2_n - X0_n) + f0 \cdot (X2_n - X1_n)]}$ 
                f0 ← f1
                f1 ← f2
                X0 ← X1
                X1 ← X2
                X2n ← A
        return X2 if |F(X2) - F(Z)| ≤ ε
        - вихід із пошуку при виконанні умов

```

$FR(x) := 100 \cdot [x_1 - (x_0)^2]^2 + (1 - x_0)^2$ - цільова функція
 $x_{00} := 3 \quad x_{01} := 3$ - початкові значення вектору змінних
 $X := NMin_SPI(FR, x_0, 0.0000001)$ - виклик програми пошуку оптимуму
 $X = \begin{pmatrix} 1.00455 \\ 1.00912 \end{pmatrix}$ - знайдений розв'язок
 $FR(X) = 2.07115 \times 10^{-5}$ - значення цільової функції в точці екстремуму

ПЕРЕВІРКА РОЗВ'ЯЗАННЯ

$FR_NEW(x_1, x_2) := 100 \cdot (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ - цільова функція
 $x_{00} := 4 \quad y_{00} := 1.2$ - початкові значення змінних
 $vv := Minimize(FR_NEW, x_{00}, y_{00})$ - пошук розв'язку за допомогою вбудованої функції
 $vv = \begin{pmatrix} 0.99623 \\ 0.9925 \end{pmatrix}$ - знайдений розв'язок
 $FR_NEW(vv_0, vv_1) = 1.42336 \times 10^{-5}$ - значення цільової функції в точці екстремуму



Завдання до самостійної роботи

Завдання 21. Дослідити задані функції на екстремум із застосуванням чисельного методу покоординатного спуску з одномірною оптимізацією методом квадратичної апроксимації.

№п/п	Функція
1	$f(x) = 10 \cdot x_1^2 + 5 \cdot x_1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_2^2 - 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 1$
2	$f(x) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1 \cdot x_2)^2$
3	$f(x) = 5 \cdot x_1^2 + x_2^2 + 4 \cdot x_1 \cdot x_2 - 16 \cdot x_1 - 12 \cdot x_2$
4	$f(x) = x_1^2 + 4 \cdot x_2^2 - 4 \cdot x_1 - 8 \cdot x_2 + 5$

5	$f(\mathbf{x}) = 9 \cdot x_1^2 + 16 \cdot x_2^2 - 90 \cdot x_1 - 128 \cdot x_2$
6	$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2 \cdot x_2^2 - 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2$
7	$f(\mathbf{x}) = 2 \cdot x_1^2 + x_2^2 - 12 \cdot x_1$
8	$f(\mathbf{x}) = 4 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2^2 - 2 \cdot x_1^2 + 8 \cdot x_2$
9	$f(\mathbf{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2$
10	$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 0.25 \cdot x_2^4$
11	$f(\mathbf{x}) = 2 \cdot (x_1 - 5.07)^2 + (x_2 - 10.03)^2 - 0.2 \cdot (x_1 - 5.07)^3$
12	$f(\mathbf{x}) = \exp\left(-\left(x_1 - \pi\right)^2 - \left(x_2 - \pi\right)^2\right)$
13	$f(\mathbf{x}) = 3 \cdot x_1^2 + x_2^2 - x_1 \cdot x_2 + x_1$
14	$f(\mathbf{x}) = 1.2 \cdot x_1^2 + 1.8 \cdot x_2^2 - 4 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2$
15	$f(\mathbf{x}) = (x_2 + 1)^2 + (x_1 - 3) + (x_1 - 5)^2 + 10$
16	$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^4 + (x_1 - 5)^2 - 22$
17	$f(\mathbf{x}) = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_1 - 5)^2 + 22$
18	$f(\mathbf{x}) = -(x_1 - 1)^4 - (x_2 - 3)^4 + (x_1 + 5)^2 + 20$
19	$f(\mathbf{x}) = (x_2 + 1)^2 + (x_1^2 - 3) + (x_1^2 - 5)^2 + 20$
20	$f(\mathbf{x}) = (x_1^2 + 4)^2 - (x_2^2 - 10)^2 - (x_2 - 5)^2 - 4$
21	$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - x_1 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3$

2.4.2. Алгоритм покоординатного спуску з використанням одномірного пошуку методом золотого перетину

Приклад 41. Знайти екстремум цільової функції $f(\vec{X})$, використовуючи покоординатний спуск із одномірним пошуком методом золотого перетину

Порядок виконання завдання:

1. Записати програму оптимізації одномірної функції методом золотого перетину: програма користувача **gold (f, v, a, b, eps)**.

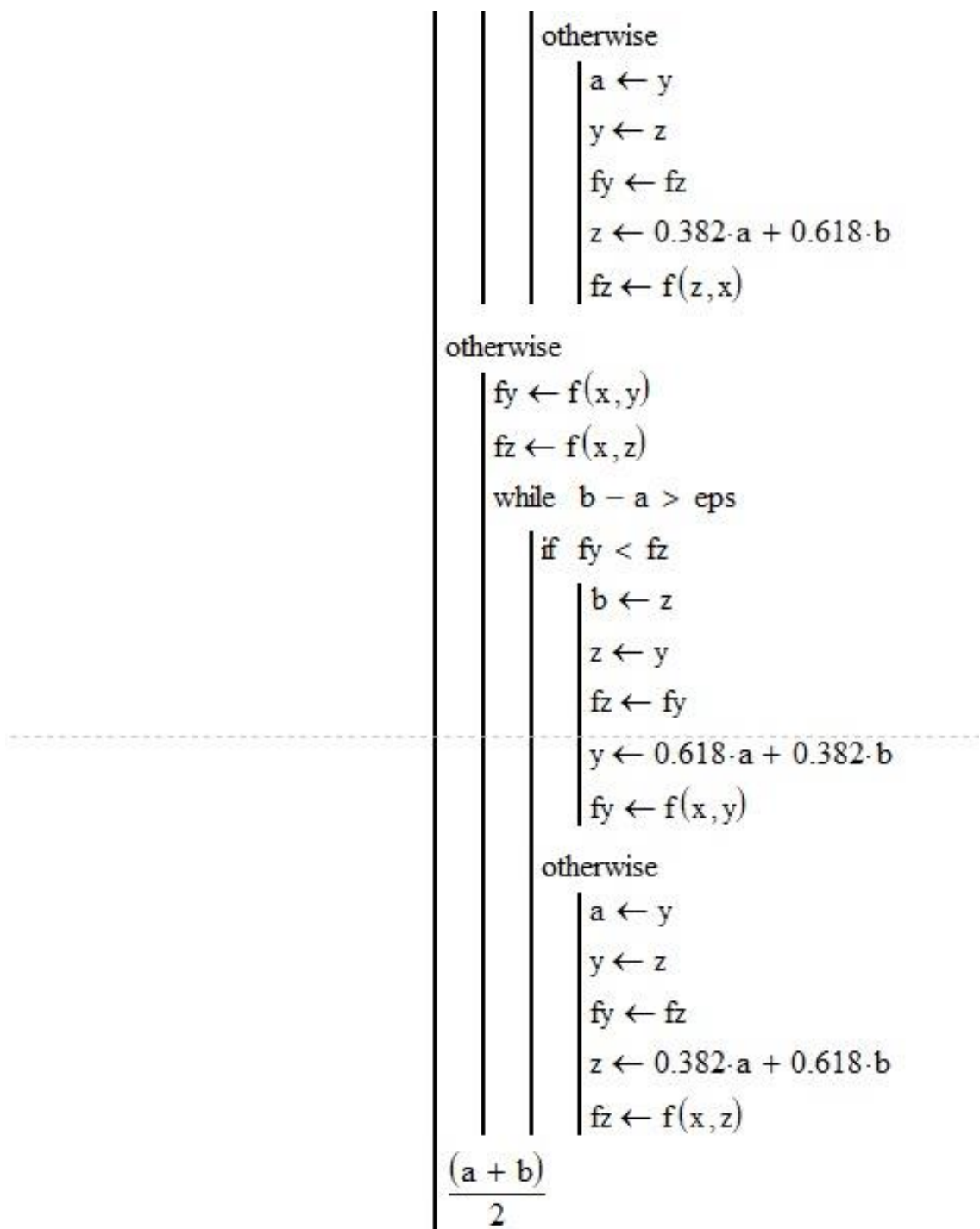
2. Записати програму пошуку оптимуму методом покоординатного спуску: програма користувача **po_koord** (f, x_0, y_0, eps).
3. Задати цільову функцію.
4. Знайти координати точки екстремуму та значення цільової функції у точці екстремуму.
5. Перевірити знайдений розв'язок, використовуючи **Minimize ()**.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 41. Знайти екстремум цільової функції $f(\vec{X})$ використовуючи покоординатний спуск із одномірним пошуком методом золотого перетину

Програма оптимізації одномірної функції методом золотого перетину $\text{gold}(f, v, a, b, \text{eps})$

```
gold(f, v, x, a, b, eps) :=
    y ← 0.618 · a + 0.382 · b
    z ← 0.618 · b + 0.382 · a
    if v = 1
        fy ← f(y, x)
        fz ← f(z, x)
        while b - a > eps
            if fy < fz
                b ← z
                z ← y
                fz ← fy
                y ← 0.618 · a + 0.382 · b
                fy ← f(y, x)
            otherwise
                a ← y
                y ← z
                fy ← fz
                z ← 0.382 · a + 0.618 · b
                fz ← f(z, x)
```



Програма пошуку оптимуму методом покоординатного спуску

po_koord(f, x0, y0, eps),

f - назва функції;

x0, y0 - початкові значення шуканих змінних;

eps- похибка розв'язання задачі.

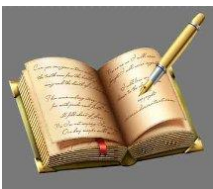
Результат використання програми - вектор, перші дві компоненти

якого представляють координати точки екстремуму x0 та y0,

а третя - значення цільової функції в точці екстремуму f(x0, y0)

$$\text{po_keord}(f, 3, 3, 10^{-6}) = \begin{pmatrix} 7.802 \times 10^{-6} \\ 4.533 \times 10^{-5} \\ -0.713 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{-- виклик програми} \\ \text{пошуку оптимуму} \end{array}$$

$x_{00} := 1 \quad y_{00} := 1$	- початкові значення змінних
$vv := \text{Minimize}(f, x_{00}, y_{00})$	- пошук розв'язку за допомогою вбудованої функції
$vv = \begin{pmatrix} -3.134 \times 10^{-12} \\ 1.191 \times 10^{-10} \end{pmatrix}$	- знайдений розв'язок
$f(vv_0, vv_1) = -0.713$	- значення цільової функції в точці екстремуму



Завдання 22. Дослідити задані функції на екстремум із застосуванням чисельного методу покоординатного спуску з одномірною оптимізацією методом золотого перетину.

<i>№п/п</i>	<i>Функція</i>
1	$f(x, y) = 2 \cdot y^2 + 3 \cdot y^4 + x^2 \cdot y^4 \rightarrow \min$
2	$f(x, y) = 2 \cdot x^4 + 5 \cdot y^2 \rightarrow \min$

<i>№п/п</i>	<i>Функція</i>
3	$f(x, y) = 2 \cdot y^2 \cdot x^4 + 3 \cdot y^2 + x \cdot y \rightarrow \min$
4	$f(x, y) = 2 \cdot x^4 + 3 \cdot y^2 + x \cdot y \rightarrow \min$
5	$f(x, y) = 2 \cdot x^2 \cdot y^2 + 3 \cdot y^2 \rightarrow \max$
6	$f(x, y) = x^2 \cdot y^2 \cdot (y \cdot x + 100) \rightarrow \min$
7	$f(x, y) = (x - 2)^4 + 3 \cdot x \cdot y^2 \rightarrow \max$
8	$f(x, y) = -2 \cdot x^4 - 3 \cdot y^2 + 18 \cdot x \rightarrow \max$
9	$f(x, y) = (y^2 - 18)^2 \cdot x + 9 \cdot x^4 - 10 \rightarrow \min$
10	$f(x, y) = 2 \cdot y^2 + 16 \cdot x^{-2} \cdot y^4 \rightarrow \min$
11	$f(x, y) = -(y^2 - 4 \cdot x^2) + 3 \cdot y^2 + x \rightarrow \min$
12	$f(x, y) = 2.5 \cdot x^3 + 3 \cdot y^2 + x^4 \rightarrow \min$
13	$f(x, y) = 2 \cdot x^3 + 6 \cdot x \cdot y^2 - 30 \cdot x - 24 \cdot y \rightarrow \min$
14	$f(x, y) = 3 \cdot y^2 + 2 \cdot y + x \cdot y^4 \rightarrow \min$
15	$f(x, y) = (x - 3) \cdot (y + 1)^2 + (x - 5)^2 + 10 \rightarrow \min$
16	$f(x, y) = y^2 + x \cdot y^4 + x^4 \rightarrow \min$
17	$f(x, y) = 6 \cdot x^2 \cdot y + 2 \cdot y^3 - 24 \cdot x - 30 \cdot y \rightarrow \min$
18	$f(x, y) = x^3 + 6 \cdot x \cdot y + 3 \cdot y^2 - 18 \cdot x - 18 \cdot y \rightarrow \min$
19	$f(x, y) = y \cdot x^2 - y^3 - x^2 - 3 \cdot y^2 + 3 \rightarrow \max$
20	$f(x, y) = 4 \cdot x \cdot y + x^5 + 3 \cdot y^2 + x \cdot y^4 \rightarrow \min$
21	$f(x, y) = 3 \cdot x^4 \cdot y^4 + 3 \cdot y^2 + x \cdot y^4 \rightarrow \min$
22	$f(x, y) = 2 \cdot x^3 - x \cdot y^2 + 5 \cdot x^2 + y^2 \rightarrow \min$
23	$f(x, y) = x^2 \cdot y + x^5 + 3 \cdot y^2 + x \cdot y^4 \rightarrow \min$
24	$f(x, y) = 6 \cdot x^2 \cdot y + x^5 + 3 \cdot y^2 + x \cdot y^4 \rightarrow \min$

<i>№n/n</i>	<i>Функція</i>
25	$f(x, y) = y^4 + 3 \cdot y^2 + x \cdot y^4 \rightarrow \min$
26	$f(x, y) = x^2 \cdot y - 2 \cdot y^3 - x^2 - 5 \cdot y^2 \rightarrow \max$
27	$f(x, y) = \exp\left(\frac{-x}{2}\right) \cdot (x^2 + y^2) \rightarrow \min$
28	$f(x, y) = x^2 \cdot y^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + x \cdot y + 1 \rightarrow \min$
29	$f(x, y) = 2 - \sqrt[3]{x^2 + y^2} \rightarrow \max$
30	$f(x, y) = 2 - \sqrt[3]{x^2 + y^2} \rightarrow \max$

2.4.3. Алгоритм покоординатного спуску з використанням одномірного пошуку методом Фібоначчі

Приклад 42. Знайти екстремум цільової функції $f(\vec{X})$, використовуючи покоординатний спуск з одномірним пошуком методом Фібоначчі

Порядок виконання завдання:

1. Записати програму оптимізації одномірної функції методом Фібоначчі: програма користувача **Fibonachi** (*a, b, f, v, F, n, j*).
2. Записати програму генерації чисел Фібоначчі.
3. Записати програму пошуку оптимуму методом покоординатного спуску з використанням одномірної оптимізації функції методом Фібоначчі: програма користувача **Koord_spusk** (*a, b, f, v, F*).
4. Задати цільову функцію та вектор початкових значень змінних.
5. Отримати вектор знайденого розв'язку та значення цільової функції у точці екстремуму.
6. Перевірити знайдений розв'язок, використовуючи **Minimize()**.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 42. Знайти екстремум цільової функції

$$f(\vec{X}) = \frac{1}{2} \cdot [5 \cdot x_1^2 + 1 \cdot x_1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_1 \cdot x_2 + 5 \cdot x_2^2] - (10 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2),$$

використовуючи покоординатний спуск з одномірним пошуком методом Фібоначчі.

Програма оптимізації одномірної функції методом Фібоначчі

Fibonacci(a, b, f, v, F, n, j),

f - назва цільової функції;

a, b - границі відрізка, на якому ймовірно знаходиться екстремум;

v - вектор початкових значень координат точки екстремуму;

F - назва програми, яка обчислює числа Фібоначчі;

n - кількість використовуваних чисел Фібоначчі;

j - номер змінної;

eps - похибка розв'язання задачі.

```
Fibonacci(a, b, f, v, F, n, j, eps) := while 0 < 1
    i ← 1
    v2 ← v
    v1 ← v
    v1rows(v)-1-j ← a +  $\frac{F_{n-(i+1)}}{F_n} \cdot (b - a)$ 
    v2rows(v)-1-j ← a +  $\frac{F_{n-i}}{F_n} \cdot (b - a)$ 
    b ← v2rows(v)-1-j if f(v1) < f(v2)
    a ← v1rows(v)-1-j if f(v1) > f(v2)
    if f(v1) = f(v2)
        a ← v1rows(v)-1-j
        b ← v2rows(v)-1-j
    i ← i + 1
    break if  $||v1rows(v)-1-j| - |v2rows(v)-1-j|| < eps$ 
    vrows(v)-1-j ←  $\frac{v1rows(v)-1-j + v2rows(v)-1-j}{2}$ 
```

```

F := | F0 ← 1
      F1 ← 1
      -----
      for n ∈ 2..200          - програма генерації 201 числа
      Fn ← Fn-1 + Fn-2      Фібоначчі F
      F

```

Програма пошуку оптимуму методом покоординатного спуску з використанням одномірної оптимізації методом Фібоначчі

Koord_spusk(a, b, f, v, F),

f - назва цільової функції;

a, b - границі відрізка, на якому ймовірно знаходиться екстремум;

v - вектор початкових значень координат точки екстремуму;

F - назва програми, яка обчислює числа Фібоначчі.

Результат виконання програми - вектор, компоненти якого представляють координати точки екстремуму.

```

Koord_spusk(a, b, f, v, F, n, eps) := | for i ∈ 0, 1..19
                                       |   for j ∈ 0..rows(v) - 1
                                       |   vrows(v)-1-j ← Fibonachi(a, b, f, v, F, n, j, eps)
                                       |   F_Min ← f(v)
                                       |   v
                                       | v

```

$$f1(v) := \frac{1}{2} \cdot [5 \cdot (v_0)^2 + 1 \cdot v_0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_0 \cdot v_1 + 5 \cdot (v_1)^2] - (10 \cdot v_0 + 1 \cdot v_1)$$
- цільова функція

$$v := \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$
- вектор початкових значень змінних

F =

	0
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55

- обчислення 201 числа
Фібоначчі

Minimum := Koord_spusk(-50,200,f1,v,F,20,0.00001)

- виклик програми оптимізації

$$\text{Minimum} = \begin{pmatrix} 2.04167 \\ -0.208339 \end{pmatrix}$$

- вектор знайденого розв'язку

$$f1(\text{Minimum}) = -10.104167$$

- значення цільової функції в точці екстремуму

ПЕРЕВІРКА РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$VV_0 := 1 \quad VV_1 := 1$$

- початкові значення змінних

$$VV := \text{Minimize}(f1, v)$$

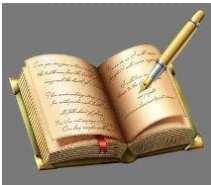
- пошук розв'язку за допомогою вбудованої функції

$$VV = \begin{pmatrix} 2.041667 \\ -0.208333 \end{pmatrix}$$

- знайдений розв'язок

$$f1(VV) = -10.104167$$

- значення цільової функції в точці екстремуму



Завдання до самостійної роботи

Завдання 23. Дослідити задані функції на екстремум із застосуванням чисельного методу покоординатного спуску з одномірною оптимізацією методом Фібоначчі.

№n/ n	Функція	Область пошуку
1	$f(\vec{X}) = 3905.93 - 100 \cdot (x_1^2 - x_2^2)^2 - (1 - x_1)^2 \rightarrow \max$ $X^* = (1; 1), \quad f^* = 3905.93$	$[-\alpha; \alpha]^2$ $\alpha = 2.048$
2	$f(\vec{X}) = (x_1^2 + x_2^2)^{0.25} \cdot \left(\sin^2 \left(50 \cdot (x_1^2 + x_2^2)^{0.1} \right) \right) + 1 \rightarrow \min$ $X^* = (0; 0), \quad f^* = 1$	$[-\alpha; \alpha]^2$ $\alpha = 100$
3	$f(\vec{X}) = 0.26 \cdot (x_1^2 + x_2^2) - 0.48 \cdot x_1 \cdot x_2 \rightarrow \min$ $X^* = (0; 0), \quad f^* = 0$	$[-\alpha; \alpha]^2$ $\alpha = 10$
4	$f(\vec{X}) = 0.5 + \frac{\sin^2(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) - 0.5}{(1.0 + 0.001 \cdot (x_1^2 + x_2^2))^2}$ $X^* = (0; 0), \quad f^* = 0$	$[-\alpha; \alpha]^2$ $\alpha = 0.5$

<i>№п/ n</i>	<i>Функція</i>	<i>Область пошуку</i>
5	$f(\vec{X}) = (x_1 - x_2)^2 + \left(\frac{x_1 - x_2 - 10}{3}\right)^2 \rightarrow \min$ $X^* = (5; 5), \quad f^* = 0$	$[-\alpha; \alpha]^2$ $\alpha = 10$
6	$f(\vec{X}) = -21.5 - x_1 \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot x_1) -$ $- x_2 \cdot \sin(20 \cdot \pi \cdot x_2) \rightarrow \min$ $X^* = (11.62523; 5.72082), \quad f^* = -38.8$	$[-\alpha; \beta]^2$ $\alpha_1 = -3$ $\beta_1 = 12.1$ $\alpha_2 = 4.1$ $\beta_2 = 5.8$
7	$f(\vec{X}) = (x_1^3 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2^2 - 1)^2 + (3 \cdot x_1^2 \cdot x_2 - x_2^3)^2 \rightarrow \min$ $X^* = \left\{(-1; 0), \left(-\frac{1}{2}; \sqrt{\frac{1}{2}}\right), \left(-\frac{1}{2}; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right\}, \quad f^* = 0$	$[-\alpha; \alpha]^2$ $\alpha = 2$
8	$f(\vec{X}) = (x_1^2 - 4 \cdot x_2)^2 + (x_2^2 - 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2)^2 \rightarrow \min$ $X^* = \{(0; 0), (1.695418; 0.7186082)\}, \quad f^* = 0$	$[\alpha; \beta]^2$ $\alpha = -1$ $\beta = 4$
9	$f(\vec{X}) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_2^2 + x_1 - 7)^2 \rightarrow \min$ $X^* = \left\{ (3; 2), (-2.805118; 3.131312), \right.$ $\left. (3.584428; -1.848126), \right.$ $\left. (-3.779310; -3.283186) \right\}, \quad f^* = 0$	$[-\alpha; \alpha]^2$ $\alpha = 6$
10	$f(\vec{X}) = [1.5 - x_1 \cdot (1 - x_2)]^2 + [2.25 - x_1 \cdot (1 - x_2^2)]^2 +$ $+ [2.625 - x_1 \cdot (1 - x_2^3)]^2 \rightarrow \min$ $X^* = (3; 0.5), \quad f^* = 4.336 \cdot 10^{-11}$	$[-\alpha; \alpha]^2$ $\alpha = 5$
11	$f(\vec{X}) = -(0.5 + 0.5 \cdot x_1)^4 \cdot x_2^4 \times$ $\times \exp[2 - (0.5 + 0.5 \cdot x_1)^4 - x_2^4] \rightarrow \min$ $X^* = (1; 1), \quad f^* = -1$	$[\alpha; \beta]^2$ $\alpha = 0$ $\beta = 2$

<i>№п/ n</i>	<i>Функція</i>	<i>Область пошуку</i>
12	$f(\vec{X}) = -(0.3 + 0.4 \cdot x_1 + 0.3 \cdot x_2)^4 -$ $-(0.8 - 0.6 \cdot x_1 + 0.8 \cdot x_2) \times$ $\times \exp \left[\frac{2 - (0.3 + 0.4 \cdot x_1 + 0.3 \cdot x_2)^4 -}{-(0.8 - 0.6 \cdot x_1 + 0.8 \cdot x_2)^4} \right] \rightarrow \min$ $X^* = (-0.089; -0.18), \quad f^* = -4.059$	$[-\alpha; \alpha]^2$ $\alpha = 2$
13	$f(\vec{X}) = -x_1^2 \cdot \exp[1 - x_1^2 - 20.25 \cdot (x_1 - x_2)^2] \rightarrow \min$ $X^* = (1; 1), \quad f^* = -1$	$[\alpha; \beta]^2$ $\alpha = 0.5$ $\beta = 1.5$
14	$f(\vec{X}) = -(0.3 \cdot x_1^2 + 0.7 \cdot x_2^2) \times$ $\times \exp \left[\frac{1 - 0.6 \cdot (x_1 - x_2)^2 -}{-(0.3 \cdot x_1^2 + 0.7 \cdot x_2^2)^3} \right] \rightarrow \min$ $X^* = (0.833; 0.833), \quad f^* = -1.35$	$[\alpha; \beta]^2$ $\alpha = 0$ $\beta = 2$
15	$f(\vec{X}) = \frac{1}{10} \cdot \left[12 + x_1^2 + \frac{1 + x_2^2}{x_1^2} + \frac{x_1^2 \cdot x_2^2 + 100}{(x_1 \cdot x_2)^4} \right] \rightarrow \min$ $X^* = (1.743; 2.03), \quad f^* = 1.744$	$[-\alpha; \alpha]^2$ $\alpha = 20$
16	$f(\vec{X}) = (x_1 + 2 \cdot x_2 - 7)^2 + (2 \cdot x_1 + x_2 - 5)^2 \rightarrow \min$ $X^* = (1; 3), \quad f^* = 0$	$[-\alpha; \alpha]^2$ $\alpha = 10$
17	$f(\vec{X}) = \left(e^{-\frac{x_1}{10}} - e^{-\frac{x_2}{10}} - e^{-\frac{1}{10}} + e^{-1} \right) +$ $+ \left(e^{-\frac{x_1 \cdot 2}{10}} - e^{-\frac{x_2 \cdot 2}{10}} - e^{-\frac{2}{10}} + e^{-2} \right) \rightarrow \min$ $X^* = (0; 0), \quad f^* = -1.491$	$[-\alpha; \alpha]^2$ $\alpha = 1$
18	$f(\vec{X}) = 100 \cdot (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \rightarrow \min$ $X^* = (1; 1), \quad f^* = 0$	$[-\alpha; \alpha]^2$ $\alpha = 30$

<i>№n/ n</i>	<i>Функція</i>	<i>Область пошуку</i>
19	$f(\vec{X}) = x_1^2 + 2 \cdot x_2^2 \rightarrow \min$ $X^* = (-9.515 \cdot 10^{-9}; 9.744 \cdot 10^{-9}), \quad f^* = 0$	$[-\alpha; \alpha]^2$ $\alpha = 30$
20	$f(\vec{X}) = x_1^2 + 2 \cdot x_2^2 + x_1^4 \rightarrow \min$ $X^* = (8.71 \cdot 10^{-8}; 8.923 \cdot 10^{-9}), \quad f^* = 7.746 \cdot 10^{-15}$	$[-\alpha; \alpha]^2$ $\alpha = 10$
21	$f(\vec{X}) = x_1^2 + 2 \cdot x_2^2 + 2 \cdot x_1^4 \rightarrow \min$ $X^* = (6.015 \cdot 10^{-15}; -9.103 \cdot 10^{-13}), \quad f^* = 0$	$[-\alpha; \alpha]^2$ $\alpha = 10$
22	$f(\vec{X}) = (x_1^2 + x_1^4) + 2 \cdot (x_2^2 + x_2^4) \rightarrow \min$ $X^* = (-2.419 \cdot 10^{-13}; -7.043 \cdot 10^{-13}), \quad f^* = 0$	$[-\alpha; \alpha]^2$ $\alpha = 25$
23	$f(\vec{X}) = (1 - x_1)^2 + 100 \cdot (x_2^2 - x_1) \rightarrow \min$ $X^* = (51; -1.676 \cdot 10^{-8}), \quad f^* = -2.6 \cdot 10^3$	$[-\alpha; \beta]^2$ $\alpha_1 = 0$ $\beta_1 = 100$ $\alpha_2 = 100$ $\beta_2 = 100$
24	$f(\vec{X}) = (1 - x_1)^2 + 100 \cdot \left(x_2 - \sin\left(\frac{\pi \cdot x_1}{2}\right) \right)^2 +$ $+ 100 \cdot (x_2 - 1) \rightarrow \min$ $X^* = (2.984; -1.5), \quad f^* = -221.032$	$[-\alpha; \beta]^2$ $\alpha_1 = 5$ $\beta_1 = 5$ $\alpha_2 = 25$ $\beta_2 = 25$

2.4.4. Алгоритм деформованого багатогранника (метод Нелдера-Міда)

Метод Нелдера-Міда, також відомий як метод деформованого багатогранника і симплекс-метод - метод безумовної оптимізації функції від декількох змінних, що не використовує похідних функції, а тому легко застосовний до негладких і/або зашумлених функцій.

У методі Нелдера і Міда мінімізується функція n незалежних змінних з використанням $n+1$ вершин багатогранника, що деформується, в E^n (Евклідовий простір розмірністю n). Кожна вершина може бути ідентифікована вектором $\vec{X}$. Вершина (точка) в E^n , у якій значення $f(\vec{X})$ максимально, проектується через центр тяжіння вершин, що залишилися. Покращені (нижчі) значення цільової

функції знаходяться послідовною заміною точки з максимальним значенням $f(\vec{X})$ на «кращі точки», поки не буде знайдено мінімум $f(\vec{X})$.

Суть методу полягає в послідовному переміщенні та деформуванні симплексу навколо точки екстремуму. Передбачається, що функція визначена у всіх точках простору пошуку, що зустрічаються.

Параметрами методу є:

- коефіцієнт відображення $\alpha > 0$, зазвичай вибирається рівним 1;
- коефіцієнт стиснення $\beta > 0$ зазвичай вибирається рівним 0,5;
- коефіцієнт розтягування $\gamma > 0$, зазвичай вибирається рівним 2.

Алгоритм методу

Нехай $\vec{X}_i^{(k)} = [x_{i1}^{(k)}, \dots, x_{ij}^{(k)}, \dots, x_{in}^{(k)}]^T, i = 1, \dots, n+1$, є i -ю вершиною (точкою) в E^n на k -му етапі пошуку, $k=0, 1, \dots$, і нехай значення цільової функції в $\vec{X}_i^{(k)}$ одно $f(\vec{X}_i^{(k)})$. Крім того, відзначимо ті вектори $\vec{X}$ багатогранника, які дають максимальне та мінімальне значення $f(\vec{X})$.

Визначимо

$$f(\vec{X}_h^{(k)}) = \max \{ f(\vec{X}_1^{(k)}), \dots, f(\vec{X}_{n+1}^{(k)}) \}, \quad (2.10)$$

де $\vec{X}_h^{(k)} = \vec{X}_i^{(k)}$.

$$f(\vec{X}_1^{(k)}) = \min \{ f(\vec{X}_1^{(k)}), \dots, f(\vec{X}_{n+1}^{(k)}) \}, \quad (2.11)$$

де $\vec{X}_1^{(k)} = \vec{X}_i^{(k)}$.

Оскільки багатогранник E^n складається з $(n+1)$ вершин $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_{n+1}$, нехай $\vec{X}_{n+2}$ буде центром тяжіння всіх вершин, за винятком $\vec{X}_h$.

Тоді координати цього центру $\vec{X}_{n+2}^{(k)}$ визначаються формулою:

$$x_{n+2,j}^{(k)} = \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_{ij}^{(k)} \right) - x_{hj}^{(k)} \right], \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.12)$$

де j – індекс позначає координатний напрямок.

Початковий багатогранник зазвичай вибирається у вигляді регулярного симплексу з точкою 1 як початок координат; можна початок координат помістити

до центру ваги. Процедура пошуку вершини в E^n , в якій $f(\vec{X})$ має найкраще значення, складається з наступних операцій:

1. *Відображення*– проектування $\vec{X}_h^{(k)}$ через центр тяжіння відповідно до співвідношення:

$$\vec{X}_{n+3}^{(k)} = \vec{X}_{n+2}^{(k)} + \alpha(\vec{X}_{n+2}^{(k)} - \vec{X}_h^{(k)}), \quad (2.13)$$

де $\alpha > 0$ - коефіцієнтом відображення;

$\vec{X}_{n+2}^{(k)}$ - центр тяжіння, що обчислюється за формулою (2.12);

$\vec{X}_h^{(k)}$ - вершина, в якій функція $f(\vec{X})$ приймає найбільше $n+1$ значень на k -му етапі.

2. *Розтягування*. Ця операція полягає в наступному: якщо $f(\vec{X}_{n+3}^{(k)}) \leq f(\vec{X}_l^{(k)})$, то вектор $(\vec{X}_{n+3}^{(k)} - \vec{X}_{n+2}^{(k)})$ розтягується відповідно до співвідношення:

$$\vec{X}_{n+4}^{(k)} = \vec{X}_{n+2}^{(k)} + \gamma(\vec{X}_{n+3}^{(k)} - \vec{X}_{n+2}^{(k)}), \quad (2.14)$$

де $\gamma > 1$ - коефіцієнт розтягування.

Якщо $f(\vec{X}_{n+4}^{(k)}) < f(\vec{X}_l^{(k)})$, то $\vec{X}_h^{(k)}$ замінюється на $\vec{X}_{n+4}^{(k)}$ та процедура триває знову з операції 1 при $k=k+1$. В іншому випадку $\vec{X}_h^{(k)}$ замінюється на $\vec{X}_{n+3}^{(k)}$ також здійснюється перехід до операції 1 при $k=k+1$.

3. *Стиснення*. Якщо $f(\vec{X}_{n+3}^{(k)}) > f(\vec{X}_i^{(k)})$ для всіх $i \neq h$, то вектор $(\vec{X}_h^{(k)} - \vec{X}_{n+2}^{(k)})$ стискається відповідно до формули:

$$\vec{X}_{n+5}^{(k)} = \vec{X}_{n+2}^{(k)} + \beta(\vec{X}_h^{(k)} - \vec{X}_{n+2}^{(k)}), \quad (2.15)$$

де $0 < \beta < 1$ - коефіцієнт стиснення.

Потім $\vec{X}_h^{(k)}$ замінюємо на $\vec{X}_{n+5}^{(k)}$ і повертаємося до операції 1 для продовження пошуку на $(k+1)$ кроку.

4. *Редуція*. Якщо $f(\vec{X}_{n+3}^{(k)}) > f(\vec{X}_h^{(k)})$, всі вектори $(\vec{X}_i^{(k)} - \vec{X}_l^{(k)})$, $i=1, \dots, n+1$, зменшуються у 2 рази з відліком від $\vec{X}_l^{(k)}$ відповідно до формули:

$$\vec{X}_i^{(k)} = \vec{X}_l^{(k)} + 0,5(\vec{X}_i^{(k)} - \vec{X}_l^{(k)}), \quad i=1, \dots, n+1. \quad (2.16)$$

Потім повертаємося до операції 1 для продовження пошуку на $(k+1)$ -му кроці.

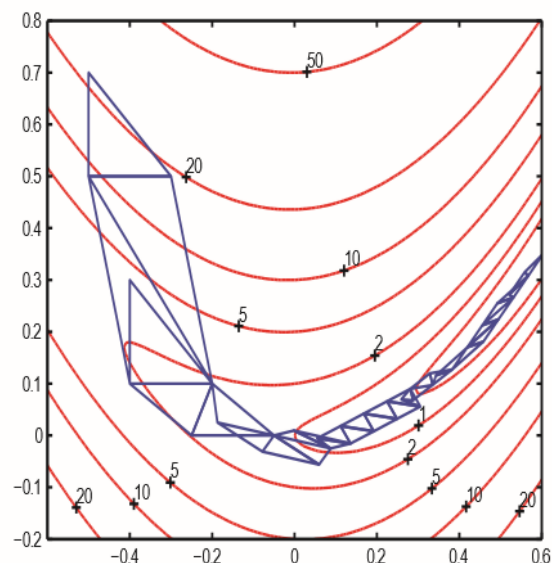
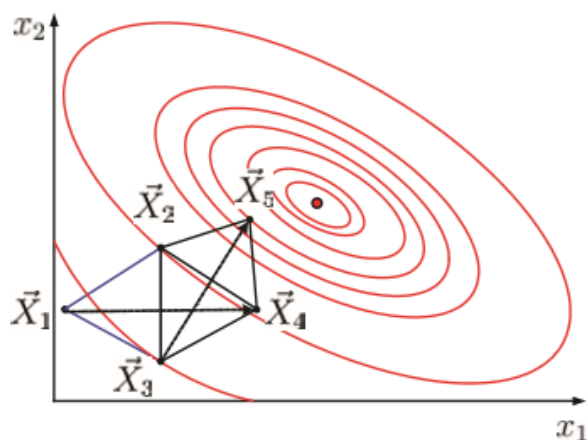


Рисунок 2.3 - Ілюстрація роботи методу деформованого багатогранника на прикладі функції двох змінних (початковий симплекс є правильним трикутником)

Критерій закінчення пошуку, запропонований Нелдером і Мідом, полягає у перевірці умови:

$$\left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \left[f(\vec{X}_i^{(k)}) - f(\vec{X}_{n+2}^{(k)}) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon, \quad (2.17)$$

де ε - довільне мале число, а $f(\vec{X}_{n+2}^{(k)})$ - значення цільової функції у центрі тяжіння $\vec{X}_{n+2}^{(k)}$.

Приклад 43. Знайти екстремум цільової функції $f(\vec{X})$, використовуючи алгоритм оптимізації методом Нелдера-Міда

Порядок виконання завдання:

1. Записати програму пошуку оптимуму методом деформованого багатогранника: програма користувача **Opt (X0, ε , Sqr)**.
2. Задати цільову функцію та вектор початкових значень змінних, похибку розв'язання задачі.
3. Отримати матрицю знайденого розв'язку. Визначити останній рядок результуючої матриці за допомогою функції **last 0**. Знайти значення змінних та значення цільової функції у точці екстремуму.
4. Перевірити знайдений розв'язок, використовуючи **Minimize 0**.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 43. Знайти екстремум цільової функції $f(\vec{X})$, використовуючи алгоритм оптимізації методом Нелдера-Міда.

Програма пошуку оптимуму методом деформованого багатогранника

Opt (X0, ε, Sqf)

Sqf - назва цільової функції;

ε - похибка розв'язку задачі;

X0 - вектор початкових значень координат точки екстремуму

Результат виконання програми - матриця, елементи якої представляють:

0-й стовпчик - номер останнього рядку, який містить три останніх наближень кожної змінної, отриманих в результаті обчислень;

1-3-й стовпчики - три останні наближення першої змінної, отримані на останніх ітераціях;

4-6-й стовпчики - три останні наближення другої змінної, отримані на останніх ітераціях, і т.п.

```

Opt( $X_0, \varepsilon, \text{Sqr}$ ) :=
   $k \leftarrow 0$ 
   $N \leftarrow \text{length}(X_0)$ 
   $as^{(0)} \leftarrow X_0$ 
  for  $j \in 1 \dots N$ 
    for  $i \in 0 \dots N-1$ 
       $as_{i,j} \leftarrow X_{0i} \cdot 1.41$  if  $j-1 = i$ 
       $as_{i,j} \leftarrow X_{0i} \cdot 1.27$  otherwise
  for  $j \in 0 \dots N$ 
     $as_{N,j} \leftarrow \text{Sqr}(as^{(j)})$ 
   $as \leftarrow \text{rsort}(as, N)$ 
  while  $|as_{N,N} - as_{N,0}| > \varepsilon$ 
     $a \leftarrow as$ 
    for  $i \in 0 \dots N-1$ 
       $a_{i,N+1} \leftarrow \frac{1}{N} \cdot \left[ \left( \sum_{j=0}^N a_{i,j} \right) - a_{i,N} \right]$ 
       $a_{i,N+2} \leftarrow a_{i,N+1} + 1(a_{i,N+1} - a_{i,N})$ 
     $a_{N,N+2} \leftarrow \text{Sqr}(a^{(N+2)})$ 
    if  $a_{N,N+2} \leq a_{N,0}$ 
      for  $i \in 0 \dots N-1$ 
         $a_{i,N+3} \leftarrow a_{i,N+1} + 2(a_{i,N+2} - a_{i,N+1})$ 
       $a_{N,N+3} \leftarrow \text{Sqr}(a^{(N+3)})$ 
       $a^{(N)} \leftarrow a^{(N+3)}$  if  $a_{N,N+3} \leq a_{N,0}$ 
       $a^{(N)} \leftarrow a^{(N+2)}$  otherwise
    otherwise
       $a^{(N)} \leftarrow a^{(N+2)}$  if  $a_{N,N+2} < a_{N,N-1}$ 
       $a^{(N)} \leftarrow a^{(N+2)}$  if  $a_{N,N+2} < a_{N,N}$ 

```

```

otherwise
  a(N) ← a(N+2) if aN,N+2 < aN,N-1
  a(N) ← a(N+2) if aN,N+2 < aN,N
  otherwise
    for i ∈ 0 .. N - 1
      ai,N+4 ← ai,N+1 + 0.5(ai,N - ai,N+1)
    aN,N+4 ← Sqr(a(N+4))
    for j ∈ 0 .. N if aN,N+4 ≥ aN,N
      for i ∈ 0 .. N - 1
        ai,j ← ai,0 + 0.5(ai,j - ai,0)
      aN,j ← Sqr(a(j))
    a(N) ← a(N+4) otherwise
as ← 0
for j ∈ 0 .. N
  as(j) ← a(j)
as ← rsort(as,N)
ZZk,0 ← k
for i ∈ 0 .. N
  ZZk,i+1 ← as0,i
for i ∈ 0 .. N
  ZZk,i+4 ← as1,i
k ← k + 1
return a if k > 103 · N

```

ZZ

$Sqr(x) := (1 - x_0)^2 + 10 \cdot [x_1 - (x_0)^2]^2$ - цільова функція

$xx := \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ - вектор початкових значень змінних

$\varepsilon := .00000001$ - похибка розв'язку задані

$V := Opt(xx, \varepsilon, Sqr)$ - виклик програми оптимізації

$$V =$$

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	2.925	5	6.35	5.375	5	7.05
1	1	-0.8125	2.925	5	1.4625	5.375	5
2	2	-0.8125	2.925	-2.8875	1.4625	5.375	1.8375
3	3	-0.8125	-0.915625	2.925	1.4625	2.628125	5.375
4	4	-0.8125	-0.915625	1.0304687	1.4625	2.628125	3.7101562
5	5	-0.8125	-0.8840625	0.1089844	1.4625	2.0453125	2.5863281
6	6	-0.8125	-0.8840625	-1.7855469	1.4625	2.0453125	0.9214844
7	7	-1.3119141	-0.8125	-0.8840625	1.3376953	1.4625	2.0453125
8	8	-1.3119141	-0.8125	-1.2803516	1.3376953	1.4625	0.7548828
9	9	-1.1612793	-1.3119141	-0.8125	1.0774902	1.3376953	1.4625
10	10	-1.0245483	-1.1612793	-1.3119141	1.3350464	1.0774902	1.3376953
11	11	-0.8739136	-1.0245483	-1.1612793	1.0748413	1.3350464	1.0774902
12	12	-1.0552551	-0.8739136	-1.0245483	1.141217	1.0748413	1.3350464

$$V1 := V^{(0)}$$

$nom := \text{last}(V1)$ $nom = 70$ - визначення останнього рядку матриці результату

$$V_{nom,3} = 1.0000899$$

- знайдені значення змінних

$$V_{nom,6} = 1.0001709$$

$$VV := \begin{pmatrix} V_{nom,3} \\ V_{nom,6} \end{pmatrix}$$

$$Sqr(VV) = 8.8697152 \times 10^{-9}$$

- значення цільової функції в точці екстремуму

ПЕРЕВІРКА РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$x := 3 \quad y := 3$$

- початкові значення змінних

$$Sqr(x, y) := (1 - x)^2 + 10 \cdot [y - (x)^2]^2$$

- цільова функція

$$X_p := \text{Minimize}(Sqr, x, y)$$

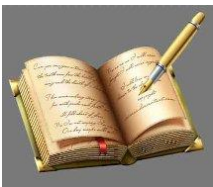
- пошук розв'язку за допомогою вбудованої функції

$$X_p = \begin{pmatrix} 0.9999997 \\ 1.0000005 \end{pmatrix}$$

- знайдений розв'язок

$$Sqr(X_p0, X_p1) = 1.2507799 \times 10^{-11}$$

- значення цільової функції в точці екстремуму



Завдання до самостійної роботи

Завдання 24. Дослідити задані функції на екстремум із застосуванням чисельного методу деформованого багатогранника. Варіанти завдань містяться у попередньому розділі.

2.4.5. Алгоритм градієнтного спуску з дробленням кроку

Нехай дана функція $y = f(\vec{X})$. Потрібно знайти мінімум функції за допомогою градієнтного методу.

Даний метод є одним з найбільш поширених і застосовується у разі, коли функція $f(\vec{X})$ безперервно диференційована на E^n . Для чисельного розв'язання задачі застосовується ітераційна процедура виду:

$$\begin{aligned}\vec{X}^{k+1} &= \vec{X}^k + \alpha_k \cdot S_k, k = 0, 1, 2, \dots \\ \lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{X}^k) &= f^*, \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{X}^k = \vec{X}^*\end{aligned}\tag{2.18}$$

Від того, як вибирається напрямок пошуку S^k та визначається величина кроку α_k залежать властивості ітераційної процедури, такі, як збіжність до розв'язання, швидкість збіжності, обсяг необхідних обчислень.

Оскільки напрямок найшвидшого зростання функції $f(\vec{X})$ у точці $\vec{X}$ збігається з напрямком градієнту функції $f(\vec{X})$, тобто вектор:

$$\nabla f(\vec{X}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T,$$

той необхідний напрямок S^k найшвидшого спадання відповідає напрямку антиградієнту, тобто вектору $-\nabla f(\vec{X})$, обчисленого в точці $\vec{X}^k$.

Отже, формула (2.18) набуває наступного вигляду:

$$\vec{X}^{(k+1)} = \vec{X}^{(k)} - \alpha_k \cdot \frac{\nabla f(\vec{X}^k)}{\|\nabla f(\vec{X}^k)\|},\tag{2.19}$$

$$\text{де норма градієнту } \|\nabla f(\vec{X}^k)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2_{x^k}}.$$

Основною трудностю є спосіб вибору величини α_k кроку градієнту. Існують різні алгоритми зміни кроку α_k в залежності від того, вдалою чи ні виявилися попередні ітерації. Найпростішим алгоритмом, який забезпечує прийнятну

швидкість збіжності є наступний: пропонується збільшувати в 1,25 рази крок α_k якщо спроба виявилася вдалою і, відповідно, зменшувати його в 2 рази, якщо спроба невдала. У цьому, у разі невдалої спроби, тобто $f(\vec{X}^{k+1}) > f(\vec{X}^k)$, у формулі (2.19) змінюється тільки крок $\alpha_k \left(\alpha_k = \frac{\alpha_k}{2} \right)$ тобто повторюється k -а ітерація.

Як критерій завершення розрахунку використовується така умова:

$$\|\nabla f(\vec{X}^k)\| < \varepsilon \quad (2.20)$$

де ε - задана позитивна величина.

Алгоритм градієнтного методу

1. Задати параметр точності $\varepsilon > 0$, початковий крок α_0 , вибрати $\vec{X}^0 \in E^n$, обчислити значення $f(\vec{X}^0)$ прийняти $k=0$.
2. Знайти градієнт $\nabla f(\vec{X}^k)$ та його норму $\|\nabla f(\vec{X}^k)\|$, перевірити $\|\nabla f(\vec{X}^k)\| < \varepsilon$. Якщо умова виконується, перейти до п.5, інакше до п.3.
3. Знайти нову точку $\vec{X}^{(k+1)}$ відповідно до формули (2.19) та обчислити $f(\vec{X}^{k+1})$.
4. Якщо $f(\vec{X}^{k+1}) < f(\vec{X}^k)$, то прийняти: $\vec{X}^k = \vec{X}^{k+1}$, $f(\vec{X}^k) = f(\vec{X}^{k+1})$, $\alpha_k = 1.25 \cdot \alpha_k$, $k = k + 1$ та перейти до п.2, інакше $\alpha_k = 0,5 \cdot \alpha_k$, та перейти до п.3.
5. Завершити обчислення, прийнявши $\vec{X}^* = \vec{X}^k$, $f^* = f(\vec{X}^k)$.

Приклад 44. Знайти екстремум цільової функції $f(\vec{X})$, використовуючи метод градієнтного спуску з дробленням кроку.

Порядок виконання завдання:

1. Задати цільову функцію.
2. Обчислити похідні за всіма змінними, які входять у цільову функцію.
3. Записати програму оптимізації багатомірної функції методом градієнтного спуску: програма користувача **grad_sp** (**x0**, **y0**, **eps**). Отримати результат розв'язання задачі.
4. Перевірити знайдений розв'язок за допомогою функції **Minimize ()**.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 44. Знайти екстремум цільової функції $f(\bar{X}) = \ln(c + d \cdot y^2) + \arctg(a \cdot x + b \cdot y)^2$, використовуючи метод градієнтного спуску з дробленням кроку.

$a := 7 \quad b := -0.8 \quad c := 0.49 \quad d := 0.17$

$f(x, y) := \ln(c + d \cdot y^2) + \text{atan}(a \cdot x + b \cdot y)^2$ - цільова функція

$f_x(x, y) := \frac{d}{dx} f(x, y) \quad f_y(x, y) := \frac{d}{dy} f(x, y)$

- функції, які обчислюють похідні по всім змінним, які містяться в цільовій функції

Програма оптимізації багатомірної функції методом градієнтного спуску
 $\text{grad_sp}(x0, y0, \text{eps})$, $x0, y0$ - початкові значення змінних; eps - похибка розв'язку задачі.

Результат виконання програми - вектор, перші дві компоненти якого представляють координати точки екстремуму, а третя - значення цільової функції у цій точці.

```
grad_sp(x0, y0, eps) := | f0 ← f(x0, y0)
                        | gradx ← fx(x0, y0)
                        | grady ← fy(x0, y0)
                        | h ← 10
                        | grad0 ← √(gradx2 + grady2)
                        | while grad0 > eps
                        |   | x1 ← x0 - h · gradx
                        |   | y1 ← y0 - h · grady
                        |   | f1 ← f(x1, y1)
                        |   | if f1 < f0
                        |   |   | x0 ← x1
                        |   |   | y0 ← y1
                        |   |   | f0 ← f1
                        |   |   | gradx ← fx(x0, y0)
                        |   |   | grady ← fy(x0, y0)
                        |   |   | grad0 ← √(gradx2 + grady2)
                        |   |   | continue
                        |   | h ← h/2
                        | ( x0
                        |   y0
                        | f(x0, y0) )
```

$$\text{grad_sp}(3, 3, 10^{-7}) = \begin{pmatrix} 3.39 \times 10^{-5} \\ 2.918 \times 10^{-4} \\ -0.713 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{- результат розв'язку} \\ \text{задані} \end{array}$$

ПЕРЕВІРКА РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$\begin{array}{lll} x_0 := 3 & y_0 := 3 & \text{- початкові значення змінних} \\ \text{per} := \text{Minimize}(f, x_0, y_0) & & \text{- пошук розв'язку за допомогою} \\ & & \text{вбудованої функції} \\ \text{per} = \begin{pmatrix} 2.353 \times 10^{-11} \\ -4.723 \times 10^{-9} \end{pmatrix} & & \text{- знайдений розв'язок} \\ f(\text{per}_0, \text{per}_1) = -0.713 & & \text{- значення цільової функції в} \\ & & \text{точці екстремуму} \end{array}$$



Завдання до самостійної роботи

Завдання 25. Визначити методом градієнтного спуску з дробленням кроку екстремальні значення функцій.

№ n/n	Функція
1	$f(x) = x_1^4 + x_2^4 + 2 \cdot x_1^2 \cdot x_2^2 - 4 \cdot x_1 + 3 \rightarrow \min$
2	$f(x) = x_1^2 + 2 \cdot x_2^2 - 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \rightarrow \min$
3	$f(x) = 2 \cdot x_1^2 + x_2^2 - 12 \cdot x_1 \rightarrow \min$
4	$f(x) = -2x_1^2 - 2 \cdot x_2^2 - 4 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \rightarrow \max$
5	$f(x) = x_1^2 + 2 \cdot x_2^2 + e^{(x_1+x_2)} \rightarrow \min$
6	$f(x) = 2 \cdot x_1^2 + x_2^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2 + x_1 \rightarrow \min$
7	$f(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \rightarrow \min$
8	$f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + \cos(x_1 + x_2) \rightarrow \min$
9	$f(x) = \sqrt{1 + 2x_1^2 + x_2^2} + e^{x_1^2 + 2x_2^2} - x_1 - x_2 \rightarrow \min$
10	$f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 2 \sin\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) + x_2 \rightarrow \min$

<i>№ n/n</i>	<i>Функція</i>
11	$f(\mathbf{x}) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1 \cdot x_2)^2 \rightarrow \min$
12	$f(\mathbf{x}) = 5 \cdot x_1^2 + x_2^2 + 4 \cdot x_1 \cdot x_2 - 16x_1 - 12x_2 \rightarrow \min$
13	$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4 \cdot x_2^2 - 4x_1 - 8 \cdot x_2 + 5 \rightarrow \min$
14	$f(\mathbf{x}) = 10x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 + 10x_2 \rightarrow \min$
15	$f(\mathbf{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \rightarrow \min$
16	$f(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{x_2}{6}\right) + \left(\frac{x_1}{4}\right)}} \cdot \left(x_1 + \sqrt{\frac{\pi}{4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{x_2}{6} + \frac{x_1}{4}\right)}} + x_2^2 \right) \rightarrow \min$
17	$f(\mathbf{x}) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2 \rightarrow \min$
18	$f(\mathbf{x}) = x_1^3 + \operatorname{ctg}(x_1) + e^{x_1} \cdot x_2 + \frac{1}{x_2} \rightarrow \min$
19	$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(x_1 + 1)^2 + x_2^2} \rightarrow \max$
20	$f(\mathbf{x}) = 200 \cdot (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 \rightarrow \min$

2.4.6. Алгоритм градієнтного спуску з дробленням кроку та обчисленням похідних за формулою центральних різниць

Насправді нерідко доводиться зіштовхуватися із завданнями мінімізації функцій, які хоч і є гладкими, але настільки складні, що аналітичне обчислення похідних виявляється проблематичним. У цьому випадку можна діяти двояким чином: або використовувати методи нульового порядку, наприклад, метод деформованого багатогранника, або скористатися яким-небудь із методів першого порядку, підмінивши справжній градієнт $\nabla f(\vec{X})$ його звичайно-різницевою апроксимацією.

Ідея апроксимації є досить очевидною, але, на жаль, нетривіальною, оскільки за чисельного диференціювання виникає проблема чутливості кінцево-різницевої наближень до помилок обчислень. Докладний аналіз показує, що для кожної функції $f(\vec{X})$ і кожної схеми наближених обчислень, що визначається насамперед

довжиною розрядної сітки комп'ютера, існують оптимальні значення прирощень h_j , що мінімізують помилки обчислення оцінок складових градієнту.

Ці оцінки можна проводити як за звичайною формулою:

$$\frac{\partial f(\vec{X})}{\partial x_j} = \frac{1}{h_j} \cdot [f(\vec{X} + h_j \cdot \vec{e}_j) - f(\vec{X})], \quad (2.21)$$

яка називається формулою правих різниць, так і за формулою центральних різниць:

$$\frac{\partial f(\vec{X})}{\partial x_j} = \frac{1}{2 \cdot h_j} \cdot [f(\vec{X} + h_j \cdot \vec{e}_j) - f(\vec{X} - h_j \cdot \vec{e}_j)], \quad (2.22)$$

яка стійкіша до помилок обчислень, коли функція має особливості.

Для дійсно гладких функцій метод першого порядку з кінцевою оцінкою градієнту виявляється ефективнішим, ніж метод нульового порядку, так як він використовує апіорну інформацію про безперервність похідних.

Приклад 45. Знайти екстремум цільової функції $f(\vec{X})$, використовуючи метод градієнтного спуску з дробленням кроку. Обчислити градієнт із використанням формули центральних різниць.

Порядок виконання завдання:

1. Записати програму чисельного обчислення градієнту із застосуванням формули центральних різниць: програма користувача **Grad (F, x, Δ)**.
2. Записати програму градієнтного спуску для обчислення оптимуму функції із застосуванням формули центральних різниць: програма користувача **NMin_G (F, x0, h, Δ, eps_central)**.
3. Задати цільову функцію, початкові значення змінних. Отримати результат розв'язання задачі.
4. Перевірити знайдений розв'язок за допомогою функції **Minimize ()**.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 45. Знайти екстремум цільової функції $f(\vec{X}) = 100 \cdot (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, використовуючи метод градієнтного спуску з дробленням кроку. Обчислити градієнт із використанням формули центральних різниць.

Програма чисельного обчислення градієнту із застосуванням формули центральних різниць $\text{Grad}(F, x, \Delta)$,
 F - назва функції;
 x - вектор поточних значень змінних;
 Δ - крок для обчислення кінцево-різницевої апроксимації похідної.

Результат виконання програми - вектор нормованого градієнту цільової функції, обчислений у поточній точці x .

$$\text{Grad}(F, x, \Delta) := \begin{array}{|l} N \leftarrow \text{length}(x) \\ X_r \leftarrow x \\ X_l \leftarrow x \\ \text{for } n \in 0 \dots N - 1 \\ \quad \begin{array}{|l} X_{r_n} \leftarrow x_n + \Delta \\ X_{l_n} \leftarrow x_n - \Delta \\ G_n \leftarrow \frac{F(X_r) - F(X_l)}{2 \cdot \Delta} \end{array} \\ \text{for } n \in 0 \dots N - 1 \\ \quad \text{Out}_n \leftarrow \frac{G_n}{|G|} \\ \text{Out}_N \leftarrow F(x) \\ \text{Out} \end{array}$$

Програма чисельного обчислення оптимуму функції із застосуванням формули центральних різниць
 $\text{NMin_G}(F, x_0, h, \varepsilon, \text{eps_centr})$,
 F - назва функції;
 x_0 - вектор початкових значень змінних;
 h - початковий крок пошуку рішення градієнтним методом;
 ε - точність розв'язку задачі;
 eps_centr - крок для обчислення кінцево-різницевої апроксимації похідної.

Результат виконання програми – вектор, перші N компонент якого містять знайдені значення координат точки екстремуму;
 $(N+1)$ -а компонента - значення цільової функції у точці екстремуму;
 $(N+2)$ -а компонента – кількість ітерацій, витрачених для пошуку екстремуму.

Результат виконання програми – вектор, перші N компонент якого містять знайдені значення координат точки екстремуму;
 (N+1)-а компонента - значення цільової функції у точці екстремуму;
 (N+2)-а компонента – кількість ітерацій, витрачених для пошуку екстремуму.

```

NMin_G(F, x0, h, ε, eps_centr) :=
  N ← length(x0)
  I ← 0
  while 1
    g ← Grad(F, x0, eps_centr)
    for n ∈ 0 .. N - 1
      xn ← x0n - h · gn
    I ← I + 1
    Out0 ← F(x)
    Out1 ← I
    return stack(x, Out) if h < ε
    if F(x) ≥ gN
      h ←  $\frac{h}{2}$ 
      x ← x0
  x0 ← x
  
```

$FR(x) := 100[x_1 - (x_0)^2]^2 + (1 - x_0)^2$ - цільова функція
 $x0_0 := 3 \quad x0_1 := 3$ - початкові значення змінних

$X := NMin_G(FR, x0, 1, 0.000001, 0.0001)$ - виклик програми пошуку розв'язку

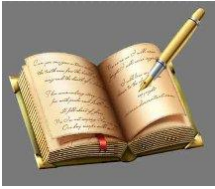
$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.001 \\ 6.761 \times 10^{-8} \\ 3.748 \times 10^3 \end{pmatrix}$ - результат розв'язку задані

ПЕРЕВІРКА РОЗВ'ЯЗАННЯ

$F(x, y) := 100[y - (x)^2]^2 + (1 - x)^2$ - цільова функція
 $x := 3 \quad y := 3$ - початкові значення змінних

$Minimize(F, x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.999 \end{pmatrix}$ - знайдений розв'язок

$F(X_0, X_1) = 6.761 \times 10^{-8}$ - значення цільової функції у точці екстремуму



Завдання до самостійної роботи

Завдання 26. Визначити методом градієнтного спуску із дробленням кроку екстремальні значення функцій. Для обчислення градієнту функції використовувати його кінцево-різницеву апроксимацію. Варіанти завдань містяться у попередньому розділі.

2.4.7. Алгоритм найшвидшого спуску

Цей метод є модифікацією градієнтного методу. Основна ідея методу полягає в тому, що напрямок пошуку S^k з точки $\vec{X}^k$ збігається з вектором $-\nabla f(\vec{X})$, обчисленим у точці $\vec{X}^k$ і не змінюється доти, доки функція $f(\vec{X})$ зменшується в цьому напрямі. Точку, в якій отримуємо $\min f(\vec{X})$ у напрямку S^k приймаємо за точку $\vec{X}^{k+1}$.

У цій точці знову визначається новий напрямок руху S^{k+1} і відшукується новий $\min f(\vec{X})$ у цьому напрямі. Процес пошуку закінчується тоді, коли відстань між двома послідовними мінімумами виявиться меншою за деяку, заздалегідь задану малу величину $\varepsilon > 0$, тобто. при виконанні умови:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{k+1} - x_i^k)^2} < \varepsilon \quad (2.23)$$

Для знаходження $\min f(\vec{X})$ за заданим напрямом існують різні способи. Найпростіший із них полягає в наступному.

Будемо рухатися по прямій, що з'єднує точки $\vec{X}^k$ і $\vec{X}^{k+1}$ з постійним кроком до тих пір, поки в певній точці функція $f(\vec{X})$ не стане більше, ніж у попередній. Після цього розділимо крок навпіл і продовжимо рух у зворотному напрямку з точки, в якій функція $f(\vec{X})$ мала найменше значення тощо. Пошук $\min f(\vec{X})$ у напрямку S^k (тобто знаходження точки $\vec{X}^{k+1}$) будемо вважати закінченим, якщо величина поточного кроку по абсолютній величині стане меншою за деякий, наперед заданий мінімальний крок $h_{\min}$. Отже, пошук $\min f(\vec{X})$ по заданому напрямку з точки $\vec{X}^k$ до точки $\vec{X}^{k+1}$ умовно можна розглядати як коливання маятника із загасаючою амплітудою.

Розглянутий спосіб вимагає багатьох обчислень значень функції $f(\vec{X})$ вздовж заданого спрямування.

Істотного збільшення швидкості пошуку мінімуму на прямій, що з'єднує дві сусідні точки $\vec{X}^k$ і $\vec{X}^{k+1}$ можна досягти, якщо використати наступний спосіб.

Зробимо з точки $\vec{X}^k$ три пробні кроки, величиною $h_1, h_2, h_3 (h_1 < h_2 < h_3)$ і, відповідно, отримаємо значення $f(h_1), f(h_2), f(h_3)$. За цими трьома значеннями можна побудувати параболу, тобто. отримати наступну залежність: $f(h) = a_1 h^2 + a_2 h + a_3$ тоді величина оптимального кроку h_{opt} , при якому знаходиться $\min f(\vec{X})$ за заданим напрямком, обчислюється за умови $f'(h) = 0$. Отже, $h_{opt} = -a_2 / 2 \cdot a_1$. Отже, нова точка $\vec{X}^{k+1}$ визначається відповідно до формули (2.18) як:

$$\vec{X}^{k+1} = \vec{X}^k + h_{opt} \cdot S_k, \quad (2.24)$$

Представимо алгоритм методу найшвидшого спуску відповідно до першого способу.

Алгоритм методу найшвидшого спуску

1. Задаємо точність обчислення ε , початковий та мінімальний кроки і h_{min} , початкову точку $\vec{X}^0$, $k = 0$.
2. Обчислюємо значення $f(\vec{X}^0)$.
3. Задаємо поточний крок, запам'ятовуємо початкову точку $\vec{X}^L = \vec{X}^k$, обчислюємо градієнт та її норму у цій точці.
4. Пошук $\min f(\vec{X})$ за напрямком вектору-антиградієнту:
 - обчислюємо $\vec{X}^{L+1}$ відповідно до формули (2.24);
 - знаходимо $f(\vec{X}^{L+1})$;
 - якщо $f(\vec{X}^{L+1}) < f(\vec{X}^L)$, то $\vec{X}^L = \vec{X}^{L+1}$, $f(\vec{X}^L) = f(\vec{X}^{L+1})$ інакше $h = -h/2$.
5. Якщо $|h| > h_{min}$, то повернення до п.4, інакше перейти до п.6.
6. Останнє отримане значення $\vec{X}^{L+1}$ приймаємо за $\vec{X}^{k+1}$ та перевіряємо умову (2.23). Якщо воно не виконується, то повернення до п.3, інакше завершуємо обчислення, прийняв $\vec{X}^* = \vec{X}^{k+1}$, $f(\vec{X}^*) = f(\vec{X}^{k+1})$.

Приклад 46. Знайти екстремум цільової функції $f(\vec{X})$, використовуючи метод найшвидшого спуску.

Порядок виконання завдання:

1. Задати цільову функцію.
2. Обчислити похідні від цільової функції за змінними x, y .
3. Записати функцію знаходження величини кроку: програма користувача $T0(x0, y0)$.
4. Записати програму пошуку екстремуму методом найшвидшого спуску: програма користувача ***Naisk_Spusk*** ($x0, y0, \varepsilon1, M$). Знайти розв'язання задачі пошуку екстремуму.
5. Перевірити знайдений розв'язок, використовуючи ***Minimize 0***.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 46. Знайти екстремум цільової функції

$f(\vec{X}) = 3 \cdot x^2 + y^2 - x \cdot y + x$, використовуючи метод найшвидшого спуску.

$$f(x, y) := 3 \cdot x^2 + y^2 - x \cdot y + x \quad - \text{цільова функція}$$

$$f_x(x, y) := \frac{d}{dx} f(x, y) \quad - \text{обчислення похідної від цільової функції по змінній } x$$

$$f_x(x, y) \rightarrow 6 \cdot x - y + 1$$

$$f_y(x, y) := \frac{d}{dy} f(x, y) \quad - \text{обчислення похідної від цільової функції по змінній } y$$

$$f_y(x, y) \rightarrow 2 \cdot y - x$$

ФУНКЦІЯ ЗНАХОДЖЕННЯ ВЕЛИЧИНИ КРОКУ

$$T0(x0, y0) := \left| \begin{array}{l} f0 \leftarrow f(x0, y0) \\ \text{grad}x \leftarrow f_x(x0, y0) \\ \text{grad}y \leftarrow f_y(x0, y0) \\ xt \leftarrow x0 - t0 \cdot \text{grad}x \\ yt \leftarrow y0 - t0 \cdot \text{grad}y \\ F \leftarrow f(xt, yt) \\ h \leftarrow 10 \\ \frac{d}{dt} F = 0 \end{array} \right. \quad \text{solve, } t0 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{(37 \cdot x0^2 - 16 \cdot x0 \cdot y0 + 12 \cdot x0 - 2 \cdot y0 + 5 \cdot y0^2 + 1)}{(9 \cdot y0^2 - 53 \cdot x0 \cdot y0 + 115 \cdot x0^2 + 37 \cdot x0 - 8 \cdot y0 + 3)}$$

ПРОГРАМА ПОШУКУ ЕКСТРЕМУМУ МЕТОДОМ НАЙШВИДКОГО

СПУСКУ $\text{Naish_Spusk}(x_0, y_0, \varepsilon_1, M)$,

x_0, y_0 - початкові значення змінних;

ε_1 - точність розв'язання задачі;

M - максимальне можливе число ітерацій.

Результат виконання програми - вектор,

перші дві компоненти якого - знайдені значення змінних;

третя - значення цільової функції в точці екстремуму;

четверта - витрачена на пошук екстремуму кількість ітерацій.

$\text{Naish_Spusk}(x_0, y_0, \varepsilon_1, M) :=$	$k \leftarrow 0$ $f_0 \leftarrow f(x_0, y_0)$ $\text{gradx} \leftarrow f_x(x_0, y_0)$ $\text{grady} \leftarrow f_y(x_0, y_0)$ $\text{grad} \leftarrow \sqrt{\text{gradx}^2 + \text{grady}^2}$ $\text{while } \text{grad} > \varepsilon_1$ <table border="0" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> $\text{break if } k \geq M$ $t_0 \leftarrow T_0(x_0, y_0)$ $x_1 \leftarrow x_0 - t_0 \cdot \text{gradx}$ $y_1 \leftarrow y_0 - t_0 \cdot \text{grady}$ $f_1 \leftarrow f(x_1, y_1)$ $\text{if } f_1 < f_0$ <table border="0" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> $x_0 \leftarrow x_1$ $y_0 \leftarrow y_1$ $f_0 \leftarrow f_1$ $\text{gradx} \leftarrow f_x(x_0, y_0)$ $\text{grady} \leftarrow f_y(x_0, y_0)$ $\text{grad} \leftarrow \sqrt{\text{gradx}^2 + \text{grady}^2}$ </td> </tr> </table> </td> </tr> </table> $k \leftarrow k + 1$	$\text{break if } k \geq M$ $t_0 \leftarrow T_0(x_0, y_0)$ $x_1 \leftarrow x_0 - t_0 \cdot \text{gradx}$ $y_1 \leftarrow y_0 - t_0 \cdot \text{grady}$ $f_1 \leftarrow f(x_1, y_1)$ $\text{if } f_1 < f_0$ <table border="0" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> $x_0 \leftarrow x_1$ $y_0 \leftarrow y_1$ $f_0 \leftarrow f_1$ $\text{gradx} \leftarrow f_x(x_0, y_0)$ $\text{grady} \leftarrow f_y(x_0, y_0)$ $\text{grad} \leftarrow \sqrt{\text{gradx}^2 + \text{grady}^2}$ </td> </tr> </table>	$x_0 \leftarrow x_1$ $y_0 \leftarrow y_1$ $f_0 \leftarrow f_1$ $\text{gradx} \leftarrow f_x(x_0, y_0)$ $\text{grady} \leftarrow f_y(x_0, y_0)$ $\text{grad} \leftarrow \sqrt{\text{gradx}^2 + \text{grady}^2}$
$\text{break if } k \geq M$ $t_0 \leftarrow T_0(x_0, y_0)$ $x_1 \leftarrow x_0 - t_0 \cdot \text{gradx}$ $y_1 \leftarrow y_0 - t_0 \cdot \text{grady}$ $f_1 \leftarrow f(x_1, y_1)$ $\text{if } f_1 < f_0$ <table border="0" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> $x_0 \leftarrow x_1$ $y_0 \leftarrow y_1$ $f_0 \leftarrow f_1$ $\text{gradx} \leftarrow f_x(x_0, y_0)$ $\text{grady} \leftarrow f_y(x_0, y_0)$ $\text{grad} \leftarrow \sqrt{\text{gradx}^2 + \text{grady}^2}$ </td> </tr> </table>	$x_0 \leftarrow x_1$ $y_0 \leftarrow y_1$ $f_0 \leftarrow f_1$ $\text{gradx} \leftarrow f_x(x_0, y_0)$ $\text{grady} \leftarrow f_y(x_0, y_0)$ $\text{grad} \leftarrow \sqrt{\text{gradx}^2 + \text{grady}^2}$		
$x_0 \leftarrow x_1$ $y_0 \leftarrow y_1$ $f_0 \leftarrow f_1$ $\text{gradx} \leftarrow f_x(x_0, y_0)$ $\text{grady} \leftarrow f_y(x_0, y_0)$ $\text{grad} \leftarrow \sqrt{\text{gradx}^2 + \text{grady}^2}$			

$\left(\begin{array}{c} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \\ k \end{array} \right)$

$$\text{Naиск_Spusk}(50, 1.5, 10^{-4}, 100) = \begin{pmatrix} -0.18182 \\ -0.0909 \\ -0.09091 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- знайдений розв'язок задачі пошуку екстремуму

ПЕРЕВІРКА РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$f(x, y) := 3 \cdot x^2 + y^2 - x \cdot y + x$$

- цільова функція

$$x := 1 \quad y := 1$$

- початкові значення змінних

$$X_solve := \text{Minimize}(f, x, y)$$

- пошук розв'язку за допомогою вбудованої функції

$$X_solve = \begin{pmatrix} -0.18182 \\ -0.09091 \end{pmatrix}$$

- знайдений розв'язок

$$f(X_solve_0, X_solve_1) = -0.09091$$

- значення цільової функції в точці екстремуму



Завдання до самостійної роботи

Завдання 27. Визначити методом найшвидшого спуску екстремальні значення функцій.

№п/п	Функція
1	$f(x) = 7x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 + x_1 - 10x_2 \rightarrow \min$
2	$f(x) = 3x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 + x_2 \rightarrow \min$
3	$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{x_1^2 + x_2^2} - x_1 + x_2 \rightarrow \min$
4	$f(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \rightarrow \min$
5	$f(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 13x_1^2 + 5x_2^2 \rightarrow \min$
6	$f(x) = x_1^4 + 2x_2^4 + x_1^2x_2^2 + 2x_1 + x_2 \rightarrow \min$
7	$f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + \cos(x_1 + x_2) \rightarrow \min$
8	$f(x) = \sqrt{1 + 2x_1^2 + x_2^2} + e^{x_1^2 + 2x_2^2} - x_1 - x_2 \rightarrow \min$

9	$f(\mathbf{x}) = x_1 + 5x_2 + e^{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \min$
10	$f(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 17x_1 \rightarrow \min$
11	$f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$
12	$f(\mathbf{x}) = 10x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 + 10x_2 \rightarrow \min$
13	$f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_1^2 + x_1 - x_2 \rightarrow \min$
14	$f(\mathbf{x}) = x_1^4 + x_2^4 + \sqrt{2 + x_1^2 + x_2^2} - 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$
15	$f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 2\sin\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) + x_2 \rightarrow \min$
16	$f(\mathbf{x}) = \ln(1 + 3x_1^2 + 5x_2^2 + \cos(x_1 - x_2)) \rightarrow \min$
17	$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + e^{x_1^2 + x_2^2} + 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$
18	$f(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 + 4\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \min$
19	$f(\mathbf{x}) = 2x_1 - 5x_2 + e^{x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2} \rightarrow \min$

2.4.8. Алгоритм Ньютона

Для використання багатомірних методів другого порядку необхідно мати аналітичні вирази для оптимізованої функції $f(\vec{X})$, вектор градієнту $\nabla f(\vec{X})$ та матриці Гессе других похідних $H(\vec{X})$. Цей метод є безпосереднім узагальненням одномірного методу Ньютона на багатомірний випадок.

Нехай відомо наближене значення мінімуму на k -й ітерації $\vec{X}_k$. Якщо функція $f(\vec{X})$ є двічі диференційованою, то в околі точки $\vec{X}_k$ вона може бути розкладена в ряд Тейлора і апроксимована параболоїдом:

$$Q(\vec{X}) = f(\vec{X}_k) + \nabla^T f(\vec{X}_k) \cdot (\vec{X} - \vec{X}_k) + \frac{1}{2} \cdot (\vec{X} - \vec{X}_k)^T \cdot H(\vec{X}_k) \cdot (\vec{X} - \vec{X}_k) \quad (2.25)$$

Точка мінімуму цього параболоїда перебуває з рівняння:

$$\frac{dQ(\vec{X})}{d\vec{X}} = \nabla^T f(\vec{X}_k) + H(\vec{X}_k) \cdot (\vec{X} - \vec{X}_k) = 0 \quad (2.26)$$

Звідси нове наближення $\vec{X}_{k+1}$:

$$\vec{X}_{k+1} = \vec{X}_k - H^{-1}(\vec{X}_k) \cdot \nabla f(\vec{X}_k) \quad (2.27)$$

Якщо порівнювати вираз (2.27) зі стандартним правилом обчислення наступного наближення в релаксаційному методі $\vec{X}_{k+1} = \vec{X}_k - t_k \cdot \vec{d}_k$, то можна побачити, що класичний метод Ньютона на кожній ітерації визначає не тільки ньютонівський напрямок $\vec{d}_k = -H^{-1}(\vec{X}_k) \cdot \nabla f(\vec{X}_k)$, а й довжину кроку t_k , завжди дорівнює одиниці.

Класичний метод Ньютона має дві очевидні переваги:

- він добре вивчений теоретично, простий у реалізації та швидко сходиться на опуклих функціях, а при квадратичній цільовій функції дає розв'язок всього за один крок;
- він не використовує процедуру одномірної оптимізації вздовж перетину і тому вимагає грубої локалізації екстремуму.

Однак, ця перевага методу може обернутися його недоліком.

З іншого боку, при практичному використанні методу в реальних умовах виявляється ряд недоліків:

- метод дуже чутливий до складності оптимізованої функції. Якщо рельєф реальної цільової функції сильно порізаний, квадратичне наближення у великій області стає занадто грубим. Тоді ньютонівський напрямок на точку мінімуму апроксимаційного параболоїду може виявитися далеким від напрямку на справжній екстремум, крок на одиничну довжину веде пошук далеко в бік;
- якщо цільова функція у всій області визначення невіпукла, то матриця Гессе на деякій ітерації може втратити властивість позитивної визначеності, в результаті ньютонівський напрямок не буде знижувальним.

Ще одним істотним недоліком є необхідність аналітичного обчислення не тільки градієнту, але і матриці других похідних, що може бути вельми ускладненим для непростої цільової функції.

Приклад 47. Знайти екстремум цільової функції $f(\vec{X})$, використовуючи метод Ньютона.

Порядок виконання завдання:

1. Задати цільову функцію, початкові значення змінних.
2. Обчислити градієнт функції.
3. Визначити матрицю Гессе (матрицю других похідних) у символьному вигляді.

4. Записати програму пошуку екстремуму методом Ньютона: програма користувача $N_f(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, M)$. Знайти розв'язання задачі пошуку екстремуму.
5. Перевірити знайдений розв'язок за допомогою функції **Minimize ()**.

Приклад виконання завдання у MathCAD

Приклад 47. Знайти екстремум цільової функції

$f(\bar{X}) = 3 \cdot x_1^2 + x_2^2 - x_1 \cdot x_2 + x_1$, використовуючи метод Ньютона.

$$f(x_1, x_2) := 3 \cdot x_1^2 + x_2^2 - x_1 \cdot x_2 + x_1 \quad - \text{цільова функція}$$

$$x_0 := \begin{pmatrix} 10.5 \\ 9.5 \end{pmatrix} \quad - \text{початкові значення змінних}$$

$$x_1 := x_{0_1} \quad x_2 := x_{0_2}$$

$$g(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx_1} f(x_1, x_2) \\ \frac{d}{dx_2} f(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad - \text{обчислення градієнту функції}$$

$$H(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dx_1^2} f(x_1, x_2) & \frac{d}{dx_1} \frac{d}{dx_2} f(x_1, x_2) \\ \frac{d}{dx_2} \frac{d}{dx_1} f(x_1, x_2) & \frac{d^2}{dx_2^2} f(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

- обчислення матриці Гессе (матриці других похідних)

ПРОГРАМА ПОШУКУ ЕКСТРЕМУМУ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

$N_f(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, M)$,

x_0 - вектор початкових значень змінних;

ε_1 - точність розв'язання задачі з використанням критерію для градієнту;

ε_2 - точність розв'язання задачі з використанням критерію для сходження шуканих змінних;

M - максимальне можливе число ітерацій.

Результат виконання програми - вектор,

перші дві компоненти якого - знайдені значення змінних;

третя - значення цільової функції в точці екстремуму;

четверта - витрачене на пошук екстремуму число ітерацій.

$$\begin{aligned}
 N_f(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, M) := & \left| \begin{array}{l} k \leftarrow 1 \\ x^{(0)} \leftarrow x_0 \\ x^{(1)} \leftarrow x^{(0)} - H(x_1, x_2)^{-1} \cdot g(x_0, x_1) \\ \text{while } |x^{(k-1)} - x^{(k)}| > \varepsilon_2 \\ \quad \text{break if } |g(x_0, x_1)| \leq \varepsilon_1 \\ \quad \text{break if } k \geq M \\ \quad \text{break if } |f(x_0, k, x_1, k)| < \varepsilon_2 \\ \quad x^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)} - H(x_1, x_2)^{-1} \cdot g(x_0, k, x_1, k) \\ \quad k \leftarrow k + 1 \\ \left(\begin{array}{c} x_0, k \\ x_1, k \\ f(x_0, k, x_1, k) \\ k \end{array} \right) \end{array} \right. \\
 N_f(x_0, 10^{-3}, 10^{-4}, 100) = & \left(\begin{array}{c} -0.182 \\ -0.091 \\ -0.091 \\ 2 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{- знайдений розв'язок задачі} \\ \text{пошуку екстремуму} \end{array}
 \end{aligned}$$

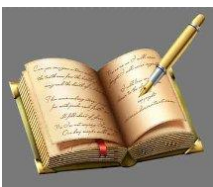
ПЕРЕВІРКА РОЗВ'ЯЗАННЯ

$x_1 := 10 \quad x_2 := 34$ - початкові значення змінних

$X_solve := \text{Minimize}(f, x_1, x_2)$ - пошук розв'язку вбудованої функції

$X_solve = \left(\begin{array}{c} -0.181818 \\ -0.090909 \end{array} \right)$ - знайдений розв'язок

$f(X_solve_0, X_solve_1) = -0.091$ - значення цільової функції в точці екстремуму



Завдання до самостійної роботи

Завдання 28. Поліпшити початковий розв'язок x^1 методом найшвидшого спуску (зробити дві ітерації), а потім застосувати метод Ньютона до завдання $f(x) \rightarrow \text{extr}$.

<i>№ n/n</i>	<i>Функція</i>
1	$f(x) = 9x_1^2 + 16x_2^2 - 90x_1 - 128x_2 \rightarrow \min, x^1 = (0,0)$
2	$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \min, x^1 = (1,0)$
3	$f(x) = x_2^2 + 2x_1^2 - 12x_1 \rightarrow \min, x^1 = (5,3)$
4	$f(x) = 6x_1 + 32x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (0,0)$
5	$f(x) = 16x_1 + 32x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (7,4)$
6	$f(x) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \min, x^1 = (8,9)$
7	$f(x) = 5(x_1 - 2)^2 + 3(x_2 - 1)^2 \rightarrow \min, x^1 = (4,5)$
8	$f(x) = -10(x_1 - 2)^2 - 2(x_2 - 3)^2 \rightarrow \max, x^1 = (6,4)$
9	$f(x) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_1 - x_2)^2 \rightarrow \min, x^1 = (3,-1)$
10	$f(x) = 20x_1 + 16x_2 - 2x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (2,3)$
11	$f(x) = -2x_1^2 - 4x_2^2 + 5x_1 - 3x_2 \rightarrow \max, x^1 = (5,2)$
12	$f(x) = 32x_1 + 24x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (3,10)$
13	$f(x) = x_1 + x_2 - 8x_1^2 - 4x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (2,7)$
14	$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_2 \rightarrow \min, x^1 = (2,2)$
15	$f(x) = -20x_1^2 - 18x_2^2 - x_1 + 5x_2 \rightarrow \max, x^1 = (2,3)$
16	$f(x) = -4(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 11)^2 \rightarrow \max, x^1 = (3,5)$
17	$f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 30x_1 + 6x_2 \rightarrow \min, x^1 = (2,6)$
18	$f(x) = 3x_1 - 0.2x_1^2 + x_2 - 0.5x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (1,2)$
19	$f(x) = 2x_1 - 0.1x_1^2 + 3x_2 - 3x_2^2 \rightarrow \max, x^1 = (3,1)$
20	$f(x) = 3x_1 - (x_1 - 2)^2 - (2x_2 + 1)^2 \rightarrow \max, x^1 = (5,4)$
21	$f(x) = 9x_1^2 + 49x_2^2 - (x_1 - 3)^2 - (x_2 + 0,1)^2 \rightarrow \min, x^1 = (0,5)$
22	$f(x) = 6x_1 + 4x_2^2 + x_1^2 - 18 \rightarrow \min, x^1 = (3,2)$
23	$f(x) = (x_1 - 3)^2 + 2(x_2 - 11)^2 \rightarrow \min, x^1 = (7,0)$
24	$f(x) = (9x_1 - 10)^2 + (0.1x_2 + 10)^2 \rightarrow \min, x^1 = (0,5)$

Список літератури

1. Lippert, R.A. (2007). Introduction to non-linear optimization. <http://web.mit.edu/9.520/www/spring08/Classes/optlecture.pdf>
2. Григорків В.С. Оптимізаційні методи та моделі : підручник / В.С. Григорків, М.В. Григорків, О.І. Ярошенко. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2022. – 440 с.
3. Жалдак М.І., Триус Ю.В. Основи теорії і методів оптимізації: Навчальний посібник. - Черкаси: Брама-Україна, 2005. - 608 с. https://shron1.chtyvo.org.ua/Zhaldak_Myrosлав/Osnovy_teorii_i_metodiv_optymizatsii.pdf
4. Оптимізаційні методи та моделі в підприємницькій діяльності: Навчальний посібник. / Волонтир Л.О, Потапова Н.А., Ушкаленко І.М., І.А.Чіков., Вінницький національний аграрний університет. – Вінниця: ВНАУ, 2020 – 404 с. <http://repository.vsau.org/getfile.php/25186.pdf>
5. Скорук О. В. Оптимізаційні методи і моделі : навчальний посібник. Луцьк : Волинський національний університет імені Лесі Українки, 2023. 273 с. https://evnuir.vnu.edu.ua/bitstream/123456789/22437/1/OMM_posib.pdf
6. Fox, W. P. (2021). Nonlinear optimization: Models and applications. CRC Press.
7. Bartholomew-Biggs, M. (2008). Nonlinear optimization with engineering applications (Vol. 19). Springer Science & Business Media.
8. Pillo, G., & Giannessi, F. (Eds.). (2013). Nonlinear optimization and Applications. Springer Science & Business Media.
9. Bartholomew-Biggs, M. (2006). Nonlinear optimization with financial applications. Springer Science & Business Media.
10. Ruszczyński, A. (2011). Nonlinear optimization. Princeton university press.
11. Griva, I., Nash, S. G., & Sofer, A. (2008). Linear and Nonlinear Optimization 2nd Edition. Society for Industrial and Applied Mathematics.
12. Chong, E. K., Lu, W. S., & Zak, S. H. (2023). An Introduction to Optimization: With Applications to Machine Learning. John Wiley & Sons.
13. Andrei, N. (2020). Nonlinear conjugate gradient methods for unconstrained optimization. Berlin, Heidelberg: Springer International Publishing.
14. Diwekar, U. M. (2020). Introduction to applied optimization (Vol. 22). Springer Nature.

Терміни та визначення

Багатовимірна задача оптимізації - випадок, коли розмірність вектору варійованих параметрів X у детермінованій задачі оптимізації більша за одиницю

Безумовна оптимізація - завдання, що полягає у відшукуванні максимуму або мінімуму дійсної функції від дійсних змінних і у визначенні відповідних значень аргументів на всій безлічі n -мірного простору.

Вектором варійованих параметрів (вектором варійованих змінних) - називається сукупність керованих параметрів

Відрізок локалізації екстремуму - виокремлення (локалізація) усередині відрізка $[a, b]$ таких відрізків $[c, d]$, кожний з яких містить тільки один екстремум

Власні значення $\lambda_i, i=1, \dots, n$ матриці Гессе $H(x^*)$ розміру $n \times n$ в точці x^* являють собою корені характеристичного рівняння (алгебраїчного рівняння n -го ступеня) $\det(H(x^*) - \lambda \cdot E)$, де E - одинична матриця

Глобальний екстремум - найбільше або найменше значення числової функції на всій множині значень, які приймає ця функція, тобто її глобальний максимум або глобальний мінімум

Градiєнтом функції z у точці M називається вектор, що виходить із точки M і має своїми координатами частинні похідні функції z

Детермінованою задачею оптимізації - називається задача оптимізації, у якій критерій оптимальності $\Phi(X)$ і обмежувальні функції-нерівності $g(X)$, а також функції-рівності $h(X)$, не залежать від випадкового вектору зовнішніх параметрів Q

Екстремум - деяке значення функції, що є її максимумом або мінімумом

Задача опуклого програмування - випадок, коли критерій оптимальності $\Phi(X)$ на множині допустимих значень вектору варійованих параметрів X є опуклим. Визначення опуклої функції $\Phi(X)$ вимагає опуклості її області визначення

Задача умовної оптимізації - випадок, коли в детермінованій задачі є обмеження на вектор варійованих змінних X у тій чи іншій формі

Задача умовної оптимізації загального виду - випадок, коли в детермінованій задачі оптимізації множина допустимих значень вектору варійованих параметрів формується як обмеженнями типу нерівностей, так і обмеженнями типу рівностей

Золотим перетином відрізка називається його розбиття на дві нерівні частини, так, що відношення довжини всього відрізка до довжини його більшої частини дорівнює відношенню довжини більшої частини до довжини меншої частини

Критерій оптимальності (критерій ефективності, функція мети, цільова функція, функція корисності) - величина, що показує відносну перевагу одних значень компонент вектору змінних параметрів стосовно інших значень цих компонент

Кутовими мінорами k -го порядку матриці розміру $n \times n$, де $k < n$, називаються визначники, складені з елементів вихідної матриці, які стоять у ній на перетині k верхніх рядків і k лівих стовпців

Лінією рівня функції двох змінних $z = f(x, y)$ називається лінія на площині xOy , у кожній точці якої функція зберігає постійне значення

Локальний екстремум - значення функції в точці, у якій виконується така умова: існує така область точки, що найменшого (найбільшого) значення в даному околі функція досягає саме в розглянутій точці

Матриця Гессе - матриця, утворена другими частинними похідними функції за умови їх існування

Методи оптимізації нульового порядку - методи оптимізації, які не використовують похідні для пошуку екстремуму

Методи оптимізації першого порядку - методи оптимізації, які використовують градієнт цільової функції, тобто використовують похідні для пошуку екстремуму, тому ці методи називають градієнтними

Методи оптимізації другого порядку - методи оптимізації, які засновані на застосуванні других похідних для визначення екстремуму

Нелінійна оптимізація - різновид задачі оптимізації, у якій цільовою функцією або обмеженням є нелінійна функція

Область допустимих значень - область допустимих значень вектору керованих формованих параметрів, по-перше, обмеженнями, що безпосередньо накладені на вектор керованих параметрів, і, по-друге, обмеженнями, що накладені на вектор вихідних параметрів

Одновимірна задача оптимізації - випадок, коли розмірність вектору варійованих параметрів X дорівнює одиниці

Сідлова точка - така точка з області визначення функції, яка є стаціонарною для даної функції, проте не є її локальним екстремумом

Стаціонарна точка - точка, у якій похідні функції за всіма змінними обертаються в нуль

Унімодальна функція - функція є унімодальною на відрізку, якщо вона на цьому відрізку має єдину точку глобального екстремуму і зліва від цієї точки є суворо спадаючою, а праворуч суворо зростаючою (для точки мінімуму) і навпаки (для точки максимуму)