МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Смірнов Даніїл Олексійович

УДК 621.391

ДИСЕРТАЦІЯ

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ, МЕТОДИ ТА ЗАСОБИ ВИЯВЛЕННЯ ПОСТІЙНОГО СИГНАЛУ НА ФОНІ НЕГАУСОВИХ КОРЕЛЬОВАНИХ ЗАВАД

122 – комп'ютерні науки
12 –Інформаційні технології

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____Д.О.Смірнов

Науковий керівник
Палагін Володимир Васильович,
доктор технічних наук, професор

Черкаси – 2025

АНОТАЦІЯ

Смірнов Д.О. Математичні моделі, методи та засоби виявлення постійного сигналу на фоні негаусових корельованих завад. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 122 – комп'ютерні науки (12 Інформаційні технології). – Черкаський державний технологічний університет, Міністерство освіти і науки України, Черкаси, 2025.

У дисертаційному дослідженні вирішено актуальне науково-прикладне завдання розробки та реалізації моделей процесів виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад на основі моментно-кумулянтного представлення випадкових процесів з формуванням моментного критерію якості перевірки статистичних гіпотез і розробки поліноміальних розв’язувальних правил для побудови ефективних методів і комп’ютерних засобів функціонування систем обробки даних відповідного класу.

У роботі відмічено, що застосування традиційного підходу до дослідження та розробки систем обробки випадкових негаусових процесів має значні обмеження, зумовлені складністю алгоритмічної реалізації та зростаючими вимогами до обчислювальних ресурсів. Це створює суттєві труднощі для синтезу ефективних програмно-алгоритмічних засобів для обробки сигналів. Додаткові ускладнення виникають через те, що досліджувані випадкові процеси можуть мати корельований негаусовий характер. Такі особливості роблять традиційні методи обробки сигналів, які базуються на ймовірнісних критеріях якості та описують випадкові величини за допомогою щільності розподілу, менш ефективними.

Сучасні дослідження показують, що для вирішення завдань обробки негаусових процесів перспективним є альтернативний підхід, який використовує моменти й кумулянти (семіваріанти) для опису статистичних властивостей випадкових величин. Цей підхід дозволяє з прийнятною точністю

охарактеризувати статистичні характеристики негаусових процесів, підвищуючи точність обробки сигналів у порівнянні з традиційним кореляційним методом. Він також дає змогу зменшити складність алгоритмів виявлення сигналів, реалізовувати їх обробку в умовах адитивної взаємодії з негаусовими завадами та враховувати статистичні зв'язки між негаусовими випадковими величинами.

Запропонований новий підхід, який базується на використанні одновимірних (1D) і двовимірних (2D) моментно-кумулянтних моделей вищих порядків, які надають можливість не тільки описати негаусові характеристики досліджуваних процесів, але і їх кореляційні властивості. На основі даного підходу сформовані нові математичні моделі моментно-кумулянтного опису випадкових величин, що дозволило представити нові класи корельованих асиметричних, ексцесних та асиметрично-ексцесних негаусових процесів.

В роботі показано представлення відношення правдоподібності для перевірки статистичних гіпотез у вигляді поліноміального розв’язувального правила (РП), оптимальні коефіцієнти якого знаходяться по одному з моментних критеріїв якості. Запропонована модифікація моментного критерію якості верхніх границь ймовірностей помилок, який базується на обмеженнях ймовірностей помилок першого та другого роду поліноміальних РП та використовує дисперсію та математичне сподівання РП при гіпотезі та альтернативі з врахуванням статистичних зв’язків досліджуваних процесів. На основі модифікованого критерію якості перевірки статистичних гіпотез запропоновані нові методи синтезу нелінійних алгоритмів виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад з новими якісними показниками.

На основі запропонованих моделей і розроблених методів синтезовані лінійні та нелінійні РП виявлення сигналів, досліджені їх властивості та отримані характеристики, які демонструють їх ефективність при впливі корельованих негаусових завад різних типів. Показано, що нелінійна обробка вибіркових значень та врахування статистик вищих порядків негаусових процесів у вигляді коефіцієнтів асиметрії та ексцесу призводить до покращення ефективності виявлення сигналів, що проявляється у зменшенні значення критерію якості РП,

і відповідно, зменшенні ймовірностей помилок першого та другого роду поліноміальних РП у порівнянні з відомими результатами для широко застосованих гаусових моделей завад. Запропоновані нелінійні РП показали свою високу ефективність і при дії випадкових процесів із сильними статистичними зв'язками, при яких традиційні рішення без врахування кореляційних зв'язків суттєво знижують свою ефективність і збільшують ймовірності помилок першого та другого роду такими РП.

У четвертому розділі представлені програмні засоби комп'ютерного моделювання процесів виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад, які отримані на основі результатів дисертаційного дослідження.

Автором розроблено програмний комплекс, структура та набір його модулів забезпечують комп'ютерне моделювання процесів виявлення сигналів при адитивній взаємодії широкого класу корельованих негаусових завад. Ефективність програмних модулів була підтверджена шляхом обчислювальних експериментів, на модельних прикладах апробовані програмні модулі та досліджено ефективність застосування отриманих алгоритмів.

Наукова новизна дисертаційної роботи полягає в створенні математичних моделей корельованих негаусових асиметричних, ексцесних та асиметрично-ексцесних випадкових величин та методів математичного та комп'ютерного моделювання процесів виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад на основі застосування одновимірних та двовимірних кумулянтних функцій вищих порядків та модифікованого моментного критерію якості прийняття рішень, що надало можливість підвищити точністні характеристики процесів виявлення сигналів у комп'ютеризованих інформаційно-вимірювальних системах.

Практична значущість отриманих результатів полягає в тому, що: запропоновані методи та засоби моделювання забезпечують розробку нелінійних алгоритмів виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад з меншими ймовірностями помилок першого та другого роду порівняно з відомими методами; алгоритми характеризуються простотою практичної

реалізації та високою точністю, яка підвищується зі збільшенням степеня стохастичних поліномів РП та врахуванням параметрів негаусових завад; розроблена структурна схема поліноміальних РП для виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад, що дозволяє вирішувати завдання розробки та проектування комп'ютеризованих систем контролю, діагностики й управління.

Ключові слова: комп'ютерне та математичне моделювання, негаусові корельовані процеси, статистики вищих порядків, моментний критерій якості перевірки статистичних гіпотез, поліноміальні алгоритми виявлення сигналів, інформаційні технології.

ABSTRACT

Smirnov D.O. Mathematical models, methods and tools for constant signal detecting in correlated non-Gaussian noise. – Qualifying scientific work on manuscript rights.

Dissertation for obtaining the scientific degree of Doctor of Philosophy in the specialty 122 Computer Sciences (12 Information Technologies). Cherkasy State Technological University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Cherkasy, 2025.

In the dissertation research, an urgent scientific and applied task was solved: developing and implementing models for signal detection in correlated non-Gaussian noise. This was achieved using moment-cumulant representations of random processes, the formation of a moment criterion for hypothesis testing quality, and the development of polynomial decision rules to construct efficient methods and computer tools for data processing systems of this class.

The study emphasizes that the traditional approach to analyzing and designing systems for processing random non-Gaussian processes faces significant limitations. These limitations are associated with the complexity of algorithmic implementation and the increasing demands on computational resources, which create serious difficulties in synthesizing effective software and algorithmic tools for signal processing. Additional complications arise from the fact that the random processes

under study may have a correlated non-Gaussian nature. Such features significantly reduce the effectiveness of traditional signal processing methods based on probabilistic quality criteria and describe random variables using probability density functions.

Recent studies show that an alternative approach, which uses moments and cumulants (semi-invariants) to describe the statistical properties of random variables, is promising for solving the problems of processing non-Gaussian processes. This approach allows the statistical characteristics of non-Gaussian processes to be characterized with acceptable accuracy, improving the precision of signal processing compared to the traditional correlation method. Moreover, it simplifies the complexity of signal detection algorithms, facilitates processing in conditions of additive interaction with non-Gaussian noise, and considers statistical dependencies between non-Gaussian random variables.

The study proposes a novel approach based on one-dimensional (1D) and two-dimensional (2D) moment-cumulant models of higher orders. These models enable the description of the non-Gaussian properties of the investigated processes and their correlation characteristics. This approach developed new mathematical models of moment-cumulant descriptions of random variables, enabling the representation of new classes of correlated asymmetric, excess, and asymmetric-excess non-Gaussian processes.

The research demonstrates the representation of the likelihood ratio for hypothesis testing in the form of a polynomial decision rule (DR), whose optimal coefficients are determined according to one of the moment-based quality criteria. A modification of the moment-based quality criterion was proposed, which focuses on the upper bounds of error probabilities and incorporates the variances and expectations of the DR under the hypothesis and alternative hypotheses, considering the statistical dependencies of the investigated processes. Based on this modified criterion, novel methods for synthesizing nonlinear signal detection algorithms in correlated non-Gaussian noise with improved qualitative characteristics were proposed.

Using the proposed models and methods, linear and nonlinear DRs for signal detection were synthesized, their properties were studied, and their characteristics were

obtained, demonstrating their efficiency under various types of correlated non-Gaussian noise. The study shows that the nonlinear processing of sampled values and considering higher-order non-Gaussian statistics, such as asymmetry and excess coefficients, improve signal detection efficiency. This reduces the DR quality criterion and lowers probabilities of first- and second-type errors compared to known results for widely used Gaussian noise models. The proposed nonlinear DRs demonstrated high efficiency even under the influence of random processes with strong statistical dependencies, whereas traditional solutions that ignore correlation significantly reduce their efficiency and increase error probabilities.

The fourth chapter presents software tools for computer-modelling signal detection processes in correlated non-Gaussian noise, developed based on the dissertation research results.

The author has developed a software package whose structure and modules support computer modelling of signal detection processes under additive interaction with a wide class of correlated non-Gaussian noise. The effectiveness of the software modules was confirmed through computational experiments, where the modules were tested on model problems, and the efficiency of the implemented algorithms was analyzed.

The scientific novelty of the dissertation lies in the development of mathematical models for correlated non-Gaussian asymmetric, kurtotic, and asymmetric-kurtotic random variables, as well as methods for mathematical and computer modeling of signal detection processes in correlated non-Gaussian noise. This is achieved through the application of one-dimensional and two-dimensional higher-order cumulant functions and a modified moment criterion for decision-making quality, enabling improved accuracy in signal detection processes within computerized information-measurement systems.

The practical significance of the results is that the proposed methods and modelling tools enable the development of nonlinear algorithms for signal detection in correlated non-Gaussian noise with lower first- and second-type error probabilities than known methods. The algorithms are characterized by simplicity of practical

implementation and high precision, which increases with the degree of stochastic polynomials in DRs and the consideration of non-Gaussian noise parameters. The developed structural scheme of polynomial DRs for signal detection in correlated non-Gaussian noise environments allows solving tasks related to developing and designing computerized monitoring, diagnostics, and control systems.

Keywords: computer and mathematical modelling, correlated non-Gaussian processes, higher-order statistics, moment-based quality criterion for hypothesis testing, polynomial signal detection algorithms, information technology

Список опублікованих праць за темою дисертації:

– статті у наукових фахових виданнях України, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. В.В.Палагін., Д.О.Смірнов. Статистики вищих порядків в задачах виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад// Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць – Кам.-Подільський: Кам.-Подільський нац. ун-т ім. Івана Огієнка, 2024. – Вип. 26. – С. 106-118. DOI: https://doi.org/10.32626/2308-5916.2024-26.19-42 URL: http://mcm-tech.kpnu.edu.ua/article/view/316544/310180. ISSN 2308-5916. Фахове видання категорії Б (включене до Index Copernicus, WorldCat, Citefactor, Google Академія, Crossref, OpenAIRE, Наукова періодика України).

   Особистий внесок автора полягає у побудові методів поліноміального виявлення сигналів на фоні корельованих асиметрично-ексцесних негаусових завад та проведенні комп'ютерного моделювання результатів дослідження, становить 0,3 друк. арк

2. В.В.Палагін, Д.О.Смірнов. Моделі та методи обробки сигналів на фоні корельованих асиметричних процесів // Інформатика та математичні методи в моделюванні, Національний університет «Одеська політехніка, Vol. 14 (2024), No. 1-2, pp. 56-69.

DOI: https://doi.org/10.15276/imms.v14.no1-2.56 URL: http://immm.op.edu.ua/files/archive/n1-2_v14_2024/immm_n1-2_v14_2024.pdf. ISSN: 2223-5744. Фахове видання категорії Б (включене до Index Copernicus, Google Академія, Наукова періодика України).

Особистий внесок автора полягає у формуванні математичних моделей та їх реалізації при побудові методів виявлення сигналів на фоні корельованих асиметричних негаусових завад та становить 0,3 друк. арк.

3. Д.О.Смірнов, Д.А.Ведерников, О.А.Палагіна, В.В.Палагін. Методи статистичного оцінювання параметрів сигналу на фоні негаусових корельованих завад. // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць – Кам.-Подільський: Кам.-Подільський нац. ун-т ім. Івана Огієнка, 2021. – Вип. 22. – С. 106-118. DOI: https://doi.org/10.32626/2308-5916.2021-22.106-118 URL: http://mcm-tech.kpnu.edu.ua/article/view/251088. ISSN 2308-5916. Фахове видання категорії Б (включене до Index Copernicus, WorldCat, Citefactor, Google Академія, Crossref, OpenAIRE, Наукова періодика України).

Особистий внесок автора полягає у формування математичних моделей двовимірних кореляційних функцій для опису випадкових корельованих негаусових процесів та становить 0,3 друк. арк.

– статті у іноземних виданнях, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

4. D.Smirnov, E.Palahina, V.Palahin. Mathematical Modeling of Signal Detection in Non-Gaussian Correlated Noise // International Conference on Smart Technologies in Urban Engineering - Proceedings of STUE-2022, Lecture Notes in Networks and Systems - LNNS, volume 536, pp.65-74, DOI:https://doi.org/10.1007/978-3-031-20141-7, URL: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-031-20141-7, ISSN 2367-3370. **Видання індексується в наукометричній базі Scopus**.

Особистий внесок автора полягає у створенні моделей та методів математичного та комп'ютерного моделювання процесів виявлення

сигналів на фоні корельованих асиметричних негаусових завад та становить 0,3 друк. арк

5. Smirnov, D., Zorin, O., Palahina, E., Ivchenko, O., Palahin, V. (2024). Development of Moment Quality Criterion and Polynomial Methods for Signals Detection and Distinction in Non-Gaussian Noise. In: Faure, E., et al. Information Technology for Education, Science, and Technics. ITEST 2024. Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies, vol 221., pp.368–381, Springer, Cham. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-71801-4_27 URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-031-71801-4_27 ISSN 2367-4512. **Видання індексується в наукометричній базі Scopus**.

   Особистий внесок автора полягає у застосуванні інформаційних технологій в задачах перевірки статистичних гіпотез та становить 0,3 друк. арк.

– наукові праці, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

6. D.Smirnov, V.Chepynoha, O.Zorin, A.Honcharov, E.Palahina, V.Palahin. The Methods of Joint Signal Discrimination and Parameters Estimation in non-Gaussian Noise // IEEE 4-th International Conference on Advanced Trends in Information Theory – 2022, Kyiv, Ukraine, 2022, pp. 23-27, DOI: https://doi.org/10.1109/ATIT58178.2022.10024190. URL: https://ieeexplore.ieee.org/document/10024190. ISBN:979-8-3503-3262-9. **Видання індексується в наукометричній базі Scopus**.

   Особистий внесок автора полягає у проведенні аналізу впливу статистик вищих порядків на ефективність алгоритмів виявлення сигналів в негаусових завадах та становить 0,3друк. арк

7. Daniil Smirnov, Oleksandr Zorin, Elena Palahina, Volodymyr Palahin. Development o f Moment Quality Criterion and Polynomial Methods for Signals Detection and Distinction in Non-Gaussian Noise // VII Міжнародна науково-практична конференція “Інформаційні технології в освіті, науці й техніці”

ІТОНТ-2024, с.195-196. URL: https://knsa.chdtu.edu.ua/wp-content/uploads/2024/06/Conference-Proceedings-ITEST-2024_25_06.pdf

Особистий внесок автора полягає у застосуванні моментного критерію якості перевірки статистичних гіпотез та оцінювання його ефективності в задачах виявлення сигналів на фоні негаусових завад та становить 0,1 друк. арк.

8. Д.О.Смірнов, О.А.Палагіна, В.В.Палагін. Методи виявлення сигналів на фоні статистичнозалежних негаусових процесів // Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси (ІІРТК-2024), сімнадцята міжнародна науково-практична конференція, 21-22 травня 2024 р., Київ, Україна, - с.466-468.

   Особистий внесок автора полягає у проведені аналізу застосування сумісних моментно-кумулянтних функцій для опису випадкових процесів в задачах виявлення сигналів та становить 0,1 друк. арк

9. Д.О.Смірнов, В.В.Палагін. Моделі та методи виявлення сигналів на фоні негаусових корельованих завад // 28-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка і молодь у XXI столітті», 16 – 18 квітня 2024 р., Конференція «Електронна, лазерна та біомедична інженерія» – с.5-7

   Особистий внесок автора полягає у побудові нелінійних розв'язувальних правил виявлення сигналів та становить 0,1 друк. арк

10. Volodymyr Palahin, Olena Palahina, Daniil Smirnov, Oleksandr Zorin. Polynomial Methods and Algorithms for Signals Detection and Distinction in Non-Gaussian Noise // «Modern Problems of Mathematical Modelling, Forecasting, and Optimization» in memory of the Honorary Professor of the Kamianets-Podilskyi National University, Dr. Sc., Prof., Cor. member NAPSU Anatoliy Fedorovich VERLAN, с.66-68. URL: https://cs.kpnu.edu.ua/wp-content/uploads/2024/07/optima_2024-tezdop_1.pdf

    Особистий внесок автора полягає у проведенні математичного та комп'ютерного моделювання поліноміальних правил виявлення сигналів та становить 0,1 друк. арк

11. Д.О.Смірнов, О.А.Палагіна, В.В.Палагін. Математичне моделювання задач виявлення сигналів на фоні негаусових корельованих завад // Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси (ІІРТК-2022), п’ятнадцята міжнародна науково-практична конференція, 17-18 травня 2022р., Київ, Україна, - с.224-225.

    Особистий внесок автора полягає у проведенні математичного моделювання систем виявлення сигналів при впливі корельованих завад та становить 0,1 друк. арк

12. Palahina E., Kunchenko-Kharchenko V., Tonkopriad S., Push I., Smirnov D., Palahin V. Signal detection in additive-multiplicative non-Gaussian noise // Праці VII Міжнародної науково-практичної конференції «Обробка сигналів і негауссівських процесів», присвяченої пам’яті професора Ю.П.Кунченка: Тези доповідей. – Черкаси: ЧДТУ, 2021. – с.123-124. URL: https://chdtu.edu.ua/files/fet/OSNP2021(1).pdf

    Особистий внесок автора полягає у побудові математичних моделей та їх дослідження в задачах виявлення сигналів при адитивно-мультиплікативній взаємодії з негаусовими завадами та становить 0,15 друк. арк

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ 16

ВСТУП 17

РОЗДІЛ 1 АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ОПИСУ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ТА МЕТОДІВ ВИЯВЛЕННЯ СИГНАЛІВ 25

1.1. Аналіз задач математичного моделювання процесів виявлення сигналів на фоні завад 25

1.2. Аналіз опису випадкових величин та процесів 36

1.3. Застосування статистик вищих порядків для опису випадкових величин та процесів 47

1.4. Аналіз ймовірнісних критеріїв якості перевірки статистичних гіпотез 52

1.5. Аналіз моментних критеріїв якості перевірки статистичних гіпотез 58

1.6. Висновки до 1 розділу 61

Список використаних джерел до розділу 1 62

РОЗДІЛ 2 МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ВИЯВЛЕННЯ ПОСТІЙНОГО СИГНАЛУ НА ФОНІ НЕГАУСОВИХ КОРЕЛЬОВАНИХ ЗАВАД 74

2.1. Математичні моделі негаусових корельованих випадкових процесів 74

2.2. Представлення статистик вищих порядків для побудови математичних моделей адитивної взаємодії постійних сигналів та корельованих негаусових завад 80

2.3. Моментний критерій якості верхньої границі ймовірностей помилок для побудови методів виявлення сигналів на фоні завад 89

2.4. Властивості стохастичних поліномів та їх використання для обробки сигналів 98

2.5. Модифікація моментного критерію якості перевірки статистичних гіпотез для побудови поліноміальних розв’язувальних правил 102

виявлення сигналів за статистично залежними вибірковими значеннями
2.6. Висновки до 2 розділу 107
Список використаних джерел до розділу 2 109

РОЗДІЛ 3 СИНТЕЗ ТА АНАЛІЗ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ АЛГОРИТМІВ ВИЯВЛЕННЯ СИГНАЛІВ НА ФОНІ КОРЕЛЬОВАНИХ НЕГАУСОВИХ ЗАВАД 116
3.1. Синтез поліноміальних алгоритмів виявлення сигналів на фоні корельованих асиметричних негаусових завад 116
3.1.1. Синтез поліноміальних розв'язувальних правил при степені поліному s=1 118
3.1.2. Синтез поліноміальних розв'язувальних правил при степені поліному s=2 125
3.1.3. Аналіз поліноміальних розв'язувальних правил виявлення сигналів на фоні корельованих асиметричних негаусових завад 129
3.2. Синтез поліноміальних алгоритмів виявлення сигналів на фоні корельованих асиметрично-ексцесних негаусових завад 136
3.2.1 Синтез лінійних поліноміальних розв'язувальних правил при степені поліному s=1 136
3.2.2. Синтез нелінійних поліноміальних розв'язувальних правил при степені поліному s=2 137
3.2.3. Аналіз поліноміальних розв'язувальних правил виявлення сигналів на фоні корельованих асиметрично-ексцесних негаусових завад 139
3.3. Синтез поліноміальних алгоритмів виявлення сигналів на фоні корельованих ексцесних негаусових завад 147
3.3.1 Синтез поліноміальних розв'язувальних правил при степені поліному s=1, 2 147

3.3.2. Синтез поліноміальних розв’язувальних правил при степені поліному s=3 148
3.3.3. Аналіз поліноміальних розв’язувальних правил виявлення сигналів на фоні корельованих ексцесних негаусових завад 154
3.4. Висновки до 3 розділу 158
Список використаних джерел до розділу 3 161
РОЗДІЛ 4 ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ КОМП’ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ВИЯВЛЕННЯ СИГНАЛІВ НА ФОНІ КОРЕЛЬОВАНИХ НЕГАУСОВИХ ЗАВАД 164
4.1. Створення програмних засобів комп'ютерного моделювання процесів виявлення сигналів 164
4.2. Програмна реалізація стаціонарних корельованих негаусових процесів з визначеними характеристиками 171
4.3. Комп'ютерне моделювання поліноміальних алгоритмів виявлення постійних сигналів при адитивній взаємодії зі статистично залежними негусовими процесами 190
4.4. Практична реалізація поліноміальної системи виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових процесів 196
4.5. Висновки до 4 розділу 199
Список використаних джерел до розділу 4 201
ВИСНОВКИ 203
ДОДАТКИ 206

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

GPS —Global Positioning System

5G — п’яте покоління мобільного зв’язку

РП — розв’язувальне правило

MD PDF — (англ. *MultiDimensional Probability Density Function)* багатовимірна функція щільності розподілу

HOS — (англ. *Higher Order Statistics*) статистики вищих порядків

ВСТУП

Актуальність теми

Системи обробки та виявлення сигналів є невід’ємною частиною багатьох сучасних технологічних рішень при побудові систем діагностики, управління, контролю та ін. Зі зростанням вимог до точності, надійності й функціональності таких систем підвищується і складність їхнього проектування. Важливим аспектом удосконалення таких систем є не лише технологічне оновлення, а й розробка передових методів обробки сигналів при застосуванні математичного та комп’ютерного моделювання, які дозволяють враховувати випадкову природу сигналів в умовах складних і неоднорідних завад.

Побудова систем виявлення сигналів зазвичай ґрунтується на класичних підходах теорії перевірки статистичних гіпотез, які, як правило, не накладають жорстких обмежень на форму розподілу випадкових величин. На практиці найбільшого поширення набув нормальний розподіл, проте його використання часто не дозволяє достатньо точно відобразити реальні процеси із необхідною адекватністю. Вплив численних дестабілізуючих чинників, таких як завади в умовах багатопроменевого поширення сигналів, їх проходження крізь неоднорідні середовища та флуктуації характеристик каналів зв'язку, створюють складні сигнально-завадові ситуації. У таких випадках реальні процеси краще описуються негаусовими розподілами, що суттєво ускладнює використання стандартних гаусових моделей для розробки ефективних алгоритмів обробки сигналів із дотриманням вимог до точності та обмежень на їх обчислювальну складність.

Застосування класичного підходу до дослідження та розробки систем обробки випадкових негаусових процесів має значні обмеження, що пов’язані з алгоритмічною складністю, зростанням вимог до обчислювальних ресурсів, що створює труднощі при розробці ефективних програмно-апаратних засобів для обробки сигналів. Крім того, застосування цього підходу ускладняється тим, що випадкові процеси можуть бути статистично залежними і потребують інших методів реалізації опрацювання сигналів. Це призводить до значних труднощів

при використанні традиційних методів обробки сигналів, які ґрунтуються на ймовірнісних критеріях якості (таких як критерії Байєса, максимальної правдоподібності тощо), де для опису випадкових величин використовуються щільність ймовірності розподілу.

Останні дослідження показують, що для обробки негаусових процесів перспективним є альтернативний підхід, що використовує моменти та кумулянти (семіваріанти) для опису статистичних характеристик випадкових величин. Цей підхід дозволяє з достатнім наближенням описати статистичні властивості досліджуваних негаусових процесів. Такий альтернативний підхід дає змогу підвищити точність обробки негаусових сигналів у порівнянні з традиційними кореляційними підходами та зменшити обчислювальну складність алгоритмів виявлення сигналів, враховуючи кореляційні залежності негаусових випадкових величин.

Для опису корельованих негаусових процесів потрібно використовувати моментно-кумулянтні моделі на основі статистик вищих порядків, що вимагає проведення додаткових теоретичних та практичних досліджень. Необхідно розробити нові математичні моделі із застосуванням сумісних моментів та кумулянтів, які б враховували кореляційні зв’язки досліджуваних негаусових процесів, провести модифікацію моментного критерію якості перевірки статистичних гіпотез для його застосування при побудові поліноміальних розв’язувальних правил, які відрізняються від класичних рішень при застосуванні відношення правдоподібності для широко поширених гаусових моделей випадкових процесів.

Дослідження з питань розробки математичних моделей та методів опрацювання випадкових процесів присвячені роботи П.Ю. Баранова, А.Я. Білецького, В.М. Безрука, Т.К. Вінцюка, В.О. Власенка, Я.П. Драгана, Ю.П. Кунченка, Б.Г. Марченка, Л.С. Сікори, В.І. Тихонова, Я.Д. Ширмана, М.І. Шлезінгера, М.О. Шутка, Л.М. Щербака, І.М. Яворського, Van Trees H., Davenport W., Duvant P, Kay S., Kassam A., Lehman E., Middleton D., Rao C., Picinbono B., та інших фахівців.

Вивченню та впровадженню нових піходів і методів щодо опрацювання негаусових випадкових процесів присвячені наукові праці В.С.Берегун, Т.В.Воробкало, О.С.Гавриша, А.В.Гончарова, С.В.Заболотнього, О.В.Івченка, О.І.Красильнікова, Ю.Г.Леги, С.С.Мартиненка, В.В.Палагіна, С.М.Первунінського, В.А. Тихонова, А.В.Чепиноги та ін.

Отже, важливою науково-технічною задачею є розробка та впровадження методів та інструментальних засобів математичного та комп'ютерного моделювання процесів обробки сигналів на фоні корельованих негаусових завад для вирішення завдань аналізу, синтезу, проектування сучасних систем обробки сигналів. Підхід до вирішення цього завдання передбачає розробку нових математичних моделей з урахуванням специфіки обробки корельованих негаусових процесів, модифікації моментного критерію якості для перевірки статистичних гіпотез та створення ефективних поліноміальних алгоритмів для реалізації процесів виявлення сигналів

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Науковий напрямок дисертаційної роботи відповідає планам науково-дослідних робіт, які проводилися в Черкаському державному технологічному університеті. Дослідження виконані відповідно до науково-дослідних робіт: «Моделі, методи та засоби сумісного виявлення сигналів та оцінювання їх параметрів на фоні негаусових завад», номер державної реєстрації 0122U201835; «Обчислювальні методи визначення допплерівського зсуву частоти гармонічного сигналу при негаусових завадах», номер державної реєстрації 0121U114029, де автор був виконавцем окремих розділів.

Мета і завдання дослідження

Метою дисертаційної роботи є підвищення ефективності систем виявлення сигналів при адитивній взаємодії з корельованими негаусовими завадами на основі реалізації моментно-кумулянтних моделей досліджуваних випадкових величин із формуванням модифікованого моментного критерію якості перевірки статистичних гіпотез та поліноміальних розв'язувальних

правил для синтезу ефективних методів і комп'ютерних засобів обробки сигналів.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв’язати такі задачі:

- проведення аналізу наукових досліджень та практичних результатів щодо особливостей використання моделей і методів обробки корельованих негаусових випадкових величин в задачах перевірки статистичних гіпотез та застосування статистик вищих порядків до опису випадкових процесів;
- розробка математичних моделей негаусових випадкових величин в умовах адитивної взаємодії сигналів і завад для статистично залежних вибіркових значень із використанням одновимірного та двовимірного моментно-кумулянтного представлення корельованих негаусових процесів;
- модифікація моментного критерію якості перевірки статистичних гіпотез для розробки ефективних методів поліноміального виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад;
- синтез та аналіз обчислювальних алгоритмів для виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад;
- розробка програмних засобів для комп’ютерного моделювання та дослідження ефективності систем виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад.

Об'єкт дослідження — процеси виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад в системах прийому та обробки даних.

Предмет дослідження — математичні моделі корельованих негаусових випадкових процесів на основі статистик вищих порядків при моментно-кумулянтному представлені випадкових величин, методи і засоби математичного моделювання процесів виявлення сигналів для створення інструментальних засобів їх комп’ютерної реалізації.

Методи дослідження. Методологічна основа наукового дослідження представлена методами теорії ймовірності та математичної статистики (для дослідження та опису випадкових процесів та побудови їх математичних моделей), математичного аналізу (для модифікації моментного критерію якості),

теорії обробки сигналів та перевірки статистичних гіпотез (для побудови поліноміальних методів виявлення сигналів), створенні комп’ютерних засобів моделювання процесів виявлення сигналів (для розробки прикладного програмного забезпечення).

Наукова новизна проведеного дослідження полягає у розробці нових методів математичного та комп’ютерного моделювання процесів виявлення сигналів при адитивній взаємодії з корельованими негаусовими завадами. Запропоновані методи базуються на модифікації моментного критерію якості перевірки статистичних гіпотез, застосуванні стохастичних поліноміальних розв’язувальних правил та статистик вищих порядків для опису випадкових величин, що дозволило досягти підвищеної точності обробки сигналів у комп’ютеризованих системах. Основні отримані результати включають наступне:

Вперше розроблено:

— математичні моделі корельованих негаусових асиметричних, ексцесних та асиметрично-ексцесних випадкових величин, що описують адитивну взаємодію сигналів і завад на основі одновимірного та двовимірного моментно-кумулянтного представлення досліджуваних процесів, що дозволило розширити спектр розв’язуваних задач та модифікувати моментний критерій якості перевірки статистичних гіпотез для побудови поліноміальних розв'язувальних правил виявлення сигналів в складних завадових умовах;

— метод побудови поліноміальних стохастичних розв'язувальних правил виявлення постійних сигналів на фоні корельованих негаусових асиметричних, ексцесних та асиметрично-ексцесних завад, оптимальних за модифікованим моментним критерієм якості перевірки статистичних гіпотез, що дозволило підвищити якість виявлення сигналів в системах контролю, діагностики та моніторингу;

Удосконалено:

— моментний критерій якості верхньої границі ймовірностей помилок перевірки статистичних гіпотез із врахуванням сумісних моментів та кумулянтів вищих порядків для побудови поліноміальних методів виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад, що дозволило забезпечити підвищення точності обробки сигналів в комп'ютеризованих системах;

— метод генерації корельованих негаусових випадкових величин на основі полігаусових моделей та застосуванні сумісних моментів та кумулянтів для представлення статистичних зв'язків досліджуваних процесів, що дозволяє проводити аналіз впливу параметрів кореляції та статистик вищих порядків на точність обробки сигналів.

Практичне значення отриманих результатів визначається тим, що запропоновані в дисертаційному досліджені методи та засоби моделювання дозволяють синтезувати нелінійні алгоритми обробки сигналів на фоні корельованих негаусових завад з меншими ймовірностями помилок першого і другого роду у порівнянні з відомими результатами. Запропоновані алгоритми характеризуються своєю нескладною практичною реалізацією і високою ефективністю, яка збільшується при зростанні степеня розв'язувальних правил та врахуванні характеристик корельованих негаусових завад. Запропонована структурна схема поліноміальної системи виявлення сигналів для її практичної реалізації, розроблені програмні засоби комп'ютерного моделювання, що дає можливість розв'язувати широкий клас задач при проектуванні систем діагностики, контролю та управління.

Особистий внесок здобувача. Основний зміст дисертаційної роботи та її результати відображено в опублікованих наукових працях автора. Усі теоретичні та практичні результати, які становлять основний зміст роботи і виносяться на захист, отримано автором самостійно і опубліковані в 12 працях. У всіх роботах, опублікованих у співавторстві, особистий науковий внесок здобувача є таким: у роботі [1] проведено побудову методів поліноміального виявлення сигналів на фоні корельованих асиметрично-ексцесних негаусових завад та проведено комп'ютерне моделювання результатів дослідження; у роботі [2] представлено

формування математичних моделей та їх реалізація при побудові методів виявлення сигналів на фоні корельованих асиметричних негаусових завад; у роботі [3, 11] запропоновано формування математичних моделей двовимірних кореляційних функцій для опису випадкових корельованих негаусових процесів; у роботах [4, 10, 12] розроблені моделі та методи математичного та комп'ютерного моделювання процесів виявлення сигналів на фоні корельованих асиметричних негаусових завад; у роботі [5] запропонована інформаційна технологія для розв'язку задач перевірки статистичних гіпотез; у роботі [6] проведено аналіз впливу статистик вищих порядків на ефективність алгоритмів виявлення сигналів в негаусових завадах; у роботі [7] продемонстровано застосування моментного критерію якості перевірки статистичних гіпотез та оцінювання його ефективності в задачах виявлення сигналів на фоні негаусових завад; у роботі [8] проведено аналіз застосування сумісних моментно-кумулянтних функцій для опису випадкових процесів в задачах виявлення сигналів; у роботі [9] продемонстровано побудову та аналіз ефективності нелінійних розв'язувальних правил виявлення сигналів на фоні негаусових завад.

Апробація результатів дисертації. Наукові результати та основні положення дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на науково-практичних і міжнародних конференціях, зокрема на: IEEE 4-th International Conference on Advanced Trends in Information Theory (Kyiv, 2002); VII Міжнародна науково-практична конференція "Інформаційні технології в освіті, науці й техніці" ІТОНТ-2024; Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси (ІІРТК-2024), сімнадцята міжнародна науково-практична конференція (Київ, 2024); 28-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка і молодь у XXI столітті» (Харків, 2024); Modern Problems of Mathematical Modelling, Forecasting, and Optimization» in memory of the Honorary Professor of the Kamianets-Podilskyi National University, Dr. Sc., Prof., Cor. member NAPSU Anatoliy Fedorovich VERLAN (Kamianets-Podilsk, 2024); Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси (ІІРТК-2022), п'ятнадцята міжнародна науково-практична конференція (Київ, 2022); Праці VII Міжнародної науково-

практичної конференції «Обробка сигналів і негауссівських процесів», присвяченої пам’яті професора Ю.П.Кунченка (Черкаси, 2021).

Публікації. За темою дисертації опубліковано 12 наукових робіт, у тому числі 3 статі у фахових виданнях України категорії «Б», 2 статті в іноземних виданнях, які індексуються в наукометричній базі Scopus, і 7 публікацій у матеріалах конференцій, одна з яких індексуються в наукометричній базі Scopus (Додаток Б).

Структура і обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел з 122 найменувань та додатків. Загальний обсяг дисертаційної роботи становить 217 сторінок, у тому числі 155 сторінок основного, містить 50 рисунків та 8 таблиць.

РОЗДІЛ 1
АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ОПИСУ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ТА МЕТОДІВ ВИЯВЛЕННЯ СИГНАЛІВ

1.1. Аналіз задач математичного моделювання процесів виявлення сигналів на фоні завад

Розвиток сучасної науки і техніки відзначається активним використанням математичного та комп’ютерного моделювання, яке сприяє поєднанню теоретичних і експериментальних досліджень для вивчення властивостей різноманітних процесів, об’єктів і систем [1-6]. Актуальність задач математичного та комп’ютерного моделювання процесів виявлення сигналів на фоні завад обумовлена необхідністю підвищення точності та надійності сучасних комп’ютеризованих систем зв’язку, радіолокаційних та навігаційних систем, різноманітних систем контролю, моніторингу та інших систем, що працюють в умовах значного шумового впливу [7-10]. Складність реальних умов функціонування таких систем, зокрема варіативність характеристик завад, багатоканальність та можливість перехресних інтерференцій, робить неможливим забезпечення високої якості їх проектування та функціонування без застосування адекватних математичних моделей досліджуваних випадкових процесів та аналізу їх впливу. Математичне та комп’ютерне моделювання дозволяє описати фізичні процеси, які лежать в основі роботи таких систем, і створити ефективні алгоритми, що забезпечують стабільне виявлення сигналів в складних завадових умовах їх функціонування [11, 12].

Системи виявлення сигналів є невід'ємною й важливою складовою сучасних комп’ютеризованих систем спостереження, діагностики, моніторингу, контролю та управління. Удосконалення цих систем значною мірою залежить не тільки від оновлення елементної бази, але і від розробки нових методів обробки сигналів, які представляють собою випадкові процеси [13-18].

Математичне та комп’ютерне моделювання процесів виявлення сигналів безпосередньо пов'язане зі створенням і вивченням нових математичних

моделей, інноваційних методів та інструментів, які дозволяють ефективно вирішувати завдання аналізу, розробки, проектування і функціонування систем прийому та обробки випадкових сигналів [13, 19, 20].

Для ефективної обробки сигналів у сучасних системах, що працюють з випадковими процесами, сигнали часто піддаються дискретизації, перетворюючись на дискретні часові ряди, що дозволяє ефективно використовувати цифрову техніку для оброки таких сигналів [21, 22]. Ці ряди складаються з послідовностей значень, що відповідають певним фізичним параметрам. Оскільки більшість фізичних процесів є випадковими за своєю природою, а також можуть містити похибки вимірювань, ці сигнали стають випадковими величинами. Тому для точного видобутку корисної інформації з таких даних необхідно застосовувати статистичні методи обробки, що дозволяють виділити корисний сигнал від шуму і завад, що можуть спотворювати результат [23-29].

Один із прикладів технічних систем, де активно використовується статистичний підхід обробки випадкових сигналів, — це **радіолокаційні системи** (рисунок 1.1). До таких систем відноситься загоризонтна радіолокація, авіаційні системи виявлення сигналів та ін. [30-32]. В таких системах для виявлення і розпізнавання об'єктів, застосовується технологія виявлення і обробки відбитих від них сигналів, які можуть бути зашумлені випадковими атмосферними чи технічними завадами. Відбиті від об'єктів сигнали потравляють в антенний тракт, підсилюються, додатково обробляються і потрапляють в *детектор (Detector)*, де і відбувається основна обробка щодо прийняття рішення про наявність чи відсутність корисного сигналу. Застосування схемотехнічних рішень щодо фільтрації і виділення корисного сигналу при слабких відношеннях сигнал/шум, як правило, не мають позитивного результату. Тому застосування *статистичних методів* для таких задач дозволяє суттєво підвищити точність виявлення об'єктів та зменшити кількість помилкових рішень щодо хибних цілей чи пропусків сигналів.

Попри те, що системи радіолокації пройшли значний шлях удосконалення і нині є сучасними засобами виявлення, однією з основних проблем залишається підвищення ефективності процесів виявлення та розпізнавання корисного сигналу на фоні завад, реалізації процесів пасивної локації об’єктів тощо.

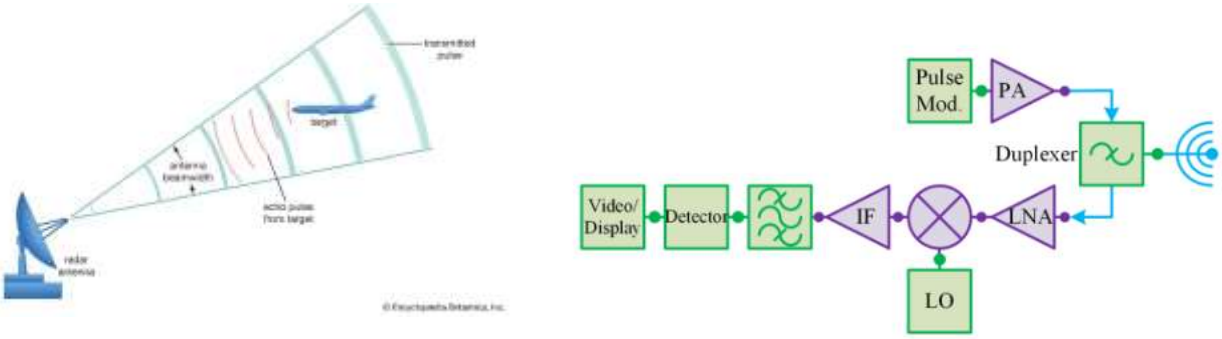


Рисунок 1.1. Узагальнена структурна схема імпульсного радару для виявлення сигналів

Супутникові навігаційні системи, такі як GPS, Galileo, BeiDou та ін. відіграють критичну роль у транспорті, геодезії, зв’язку та військових технологіях. Однак точність і надійність їх роботи значною мірою залежить від здатності ефективно виявляти слабкі сигнали супутників, які можуть бути зашумлені через природні перешкоди (атмосферні явища, сонячну активність) або штучні завади (глушіння, електромагнітні перешкоди). Удосконалення методів виявлення таких сигналів, зокрема шляхом застосування сучасних статистичних підходів, дозволяє забезпечити стабільність роботи навігаційних систем навіть у складних умовах, що має вирішальне значення для критичних інфраструктур і високоточних задач [33-35].

На рисунку 1.2 наведена структурна схема типового модуля GPS приймача, який містить *процесор кореляційної обробки* і відповідає за прийняття рішення про наявність сигналу в каналі зв’язку. Такий модуль є складовою частиною загальної системи точного визначення місцезнаходження і критично важливим для виявлення слабких сигналів на фоні шуму. Статистичні методи, зокрема фільтрація за допомогою фільтра Калмана, використовуються для відновлення корисного сигналу з завад, забезпечуючи точність вимірювань. Разом з тим

відомо, що така фільтрація є оптимальною лише для гаусових моделей щільності розподілу. При впливі негаусових завад на слабкі сигнали така обробка не буде оптимальною і в цих випадках виникає гостра потреба у вдосконаленні функціонування таких систем в складних завадових ситуаціях з врахуванням специфіки щільності розподілу досліджуваних випадкових процесів.

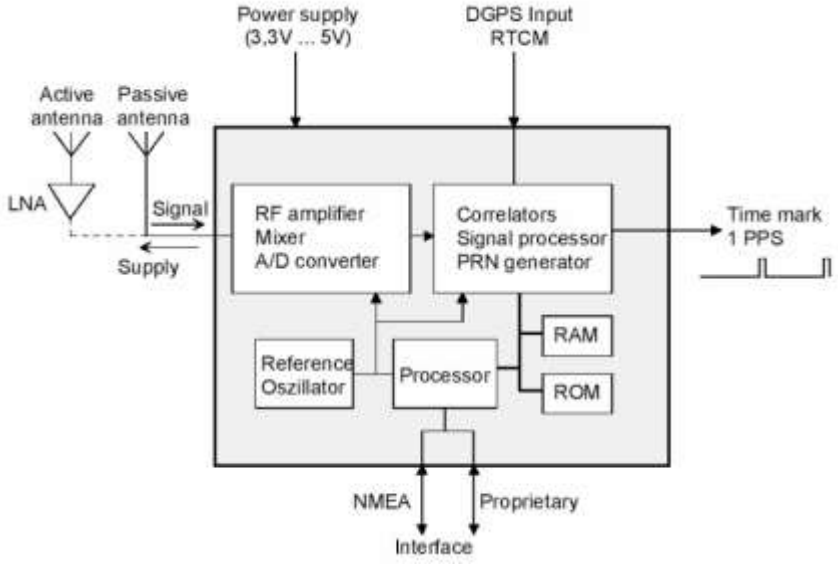


Рисунок 1.2. Структура типового модуля GPS приймача з елементом кореляційної обробки сигналів

Мобільні системи зв'язку є невід'ємною частиною сучасного життя, забезпечуючи передачу голосу, даних та мультимедійного контенту. Однак ефективність їх роботи суттєво залежить від здатності виявляти слабкі сигнали мобільних пристроїв, які часто зазнають впливу завад, спричинених багатопроменевим поширенням, інтерференцією та штучними перешкодами. Удосконалення методів обробки таких сигналів, зокрема використання статистичних підходів при побудові *демодуляторів*, дозволяє підвищити якість зв'язку, зменшити кількість помилок у прийомі даних та оптимізувати використання частотного спектра. Це особливо важливо для сучасних мобільних мереж п'ятого покоління (5G), які вимагають максимальної надійності в умовах високої щільності підключень [36-39].

Як правило, сигнали зазнають впливу багатопроменевого поширення, що призводить до виникнення кореляційних залежностей між компонентами

сигналу. Ці залежності ускладнюють процес їх обробки та погіршують якість прийому, оскільки традиційні методи виявлення сигналів, орієнтовані на незалежні випадкові процеси, втрачають свою ефективність. Удосконалення статистичних підходів, які враховують кореляційні властивості сигналів і завад, дозволяє підвищити надійність прийому, зменшити ймовірність помилок і забезпечити стабільну роботу мобільних мереж в умовах інтенсивного радіозавантаження.

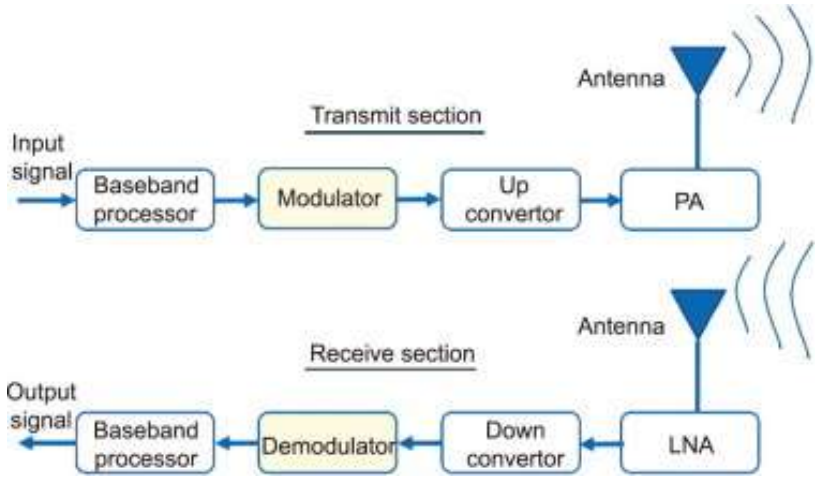


Рисунок 1.3. Структурна схема обробки сигналів в системах мобільного зв’язку

Системи акустичного виявлення (сонари) відіграють важливу роль у морській навігації, оборонній сфері, а також у дослідженні океанів. Виявлення корисного сигналу, відбитого від підводних об'єктів, є важливим для точного визначення їх місцезнаходження. Однак одним із ключових викликів є виявлення слабких сигналів у складних акустичних середовищах, де присутні значні завади від природних джерел, таких як хвилі, або техногенних джерел, наприклад, шуму суден. Додатковою проблемою є поява кореляційних залежностей між сигналами та шумами через відображення звукових хвиль від морського дна, поверхні чи підводних об'єктів. Ці кореляційні залежності ускладнюють процеси виявлення та знижують точність імовірнісних методів обробки сигналів.

Удосконалення статистичних підходів, які враховують кореляційні властивості акустичних завад і дозволяють виділяти корисні сигнали, є актуальним завданням і можуть бути реалізовані через покращення функціонування демодуляторів таких систем. Це сприятиме підвищенню

ефективності роботи сонарних систем у складних умовах і забезпеченню їх надійності для широкого спектра завдань [40].

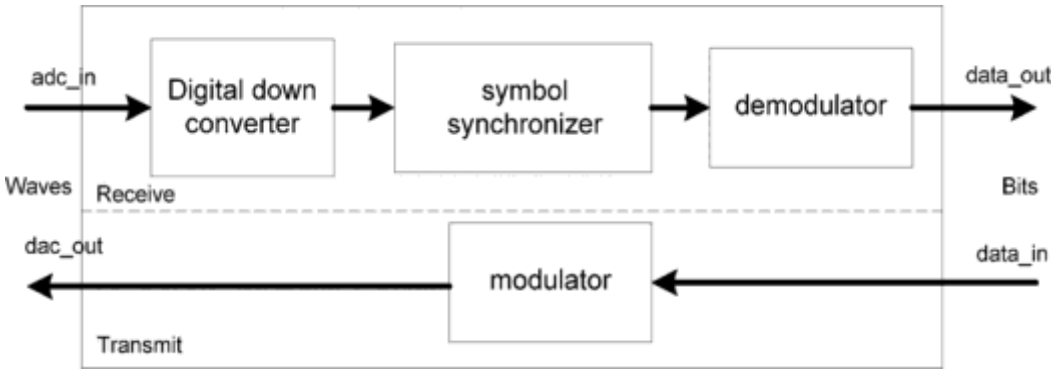


Рисунок 1.4. Структурна схема акустичного модему обробки сигналів

Сейсмічні системи, які використовуються для моніторингу землетрусів, дослідження земної кори та в геологорозвідці, стикаються з проблемою виявлення слабких сигналів на фоні значних шумів. Ці шуми можуть бути спричинені як природними процесами (вітри, океанські хвилі, тектонічні рухи), так і техногенними факторами (транспорт, промислові вібрації). Додатковою складністю є поява кореляційних залежностей між сигналами та шумами через відбиття сейсмічних хвиль від різних шарів земної кори або їх взаємодію з локальними геологічними структурами. Удосконалення статистичних підходів, що враховують специфіку сейсмічного середовища, дозволить ефективніше виділяти корисні сигнали з шумів, підвищити надійність роботи комп'ютеризованих сейсмічних систем та побудови на їх основі високоякісних автоматизованих комплексів прогнозування подій [41, 42] .

Рисунок 1.5. Комп'ютеризована система автоматизації процесів місцезнаходження осередків сейсмічної активності

Для моделювання різноманітних процесів обробки даних необхідно мати відповідні математичні моделі потенційно можливих об’єктів дослідження та їхніх характеристик, моделі процесів функціонування технічних і інформаційно-керуючих систем, які можуть враховувати особливості об’єктно-сигнальної ситуації та широкий спектр метеорологічних факторів, що суттєво впливають на статистичні властивості досліджуваних сигналів. Однією з ключових складностей при цьому є розробка адекватного математичного, алгоритмічного та програмно-інструментального забезпечення, необхідного для створення комплексів імітаційного моделювання.

Дослідження з питань розробки математичних моделей та методів опрацювання випадкових процесів присвячені роботи П.Ю. Баранова, А.Я. Білецького, В.М. Безрука, Т.К. Вінцюка, В.О. Власенка, Я.П. Драгана, Ю.П. Кунченка, Б.Г. Марченка, Л.С. Сікори, В.І. Тихонова, Я.Д. Ширмана, М.І. Шлезінгера, М.О. Шутка, Л.М. Щербака, І.М. Яворського, Van Trees H., Davenport W., Duvant P, Kay S., Kassam A., Lehman E., Middleton D., Rao C., Picinbono B. та інших фахівців.

Вивченню та впровадженню нових підходів і методів щодо опрацювання негаусових випадкових процесів присвячені наукові праці В.С.Берегун, Т.В.Воробкало, О.С.Гавриша, А.В.Гончарова, С.В.Заболотнього, О.В.Івченка, О.І.Красильнікова, Ю.Г.Леги, С.С.Мартиненка, В.В.Палагіна, С.М.Первунінського, В.А. Тихонова, А.В.Чепиноги та ін.

Сигнали, що досліджуються в телекомунікаційних, інформаційних та радіотехнічних системах мають стохастичний характер і не завжди піддаються опису стандартними розподілами ймовірностей. Хоча гаусові моделі часто використовуються на практиці, вони не завжди здатні з достатньою точністю апроксимувати флуктуації сигналів у реальних каналах зв’язку. У багатьох випадках такі сигнали мають складні негаусові розподіли ймовірності [7, 43- 47]. Це призводить до того, що існуючі алгоритми обробки сигналів, розроблені в межах традиційного кореляційного підходу [48-50] стають недостатньо

ефективними в умовах реальної об’єктно-сигнальної ситуації у багатьох технічних системах [7, 43- 47].

Вплив різноманітних дестабілізуючих чинників при розповсюдженні сигналів, а також виникнення інтерференційних завад через багатопроменеве поширення радіохвиль та їх відбиття формують складну сигнально-завадову ситуацію, яка не описується з достатньою точністю широко вживаними гаусовими моделями випадкових процесів [7, 43- 47].

На практиці, не дивлячись на сигнальні особливості щодо виду щільностей розподілу, в більшості випадків при функціонуванні інформаційно-телекомунікаційних систем здебільшого використовують припущення про гаусову модель досліджуваних процесів, що призводить до неоптимальної обробки сигналів, яка грунтується на застосуванні класичних кореляційних приймачів (*Correlation Receiver*) чи узгоджених фільтрів (*Matched Filter*) [51] (рисунок 1.6), які в свою чергу не мають обмежень щодо застосування видів щільностей розподілу при їх побудові. Ці методи визначають достатню статистику $\Lambda(\boldsymbol{X}) = \mathrm{P}(\boldsymbol{X}/H_1)/\mathrm{P}(\boldsymbol{X}/H_0)$ на основі обробки вибіркових значень $\boldsymbol{X}$, а отримані результати порівнюються з пороговим значенням h для прийняття рішення (*Threshold Device*) про реалізацію гіпотези H_0 або H_1, де значення порогу h обирається згідно заданого критерію якості на основі наявної апріорної інформації про досліджувані випадкові процеси [48-50].

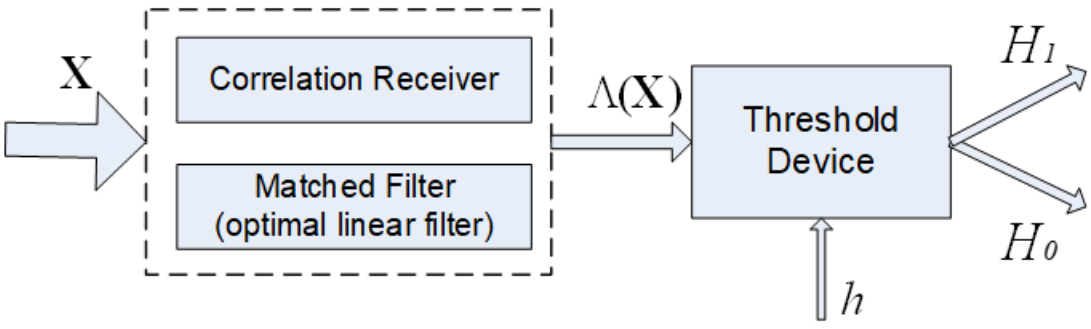


Рисунок 1.6. Узагальнена структурна схема приймального пристрою.

Розробка ефективних систем виявлення сигналів має велике значення для проектування та синтезу систем зв'язку, навігаційних і радіолокаційних систем, систем управління тощо [48-50]. Для розробки нових систем виявлення сигналів

необхідно враховувати їх випадковий розподіл, який виникає під впливом різних типів шумів. Для розв’язання цієї задачі широко використовуються класичні методи теорії перевірки статистичних гіпотез, де можна використовувати будь-яку щільність розподілу випадкових процесів [48, 51]. Використання нормального розподілу випадкових величин набуло широкого поширення на практиці при реалізації систем виявлення сигналів. Однак у багатьох випадках відобразити реальні процеси з необхідною точністю такою моделлю випадкових процесів стає неможливим. Дія на сигнали різноманітних дестабілізуючих факторів, комплекс шумів при багатопроменевому поширенні сигналів, їх проходження через неоднорідні середовища, флуктуація параметрів зв’язку каналів породжують складну сигнально-шумову ситуацію, яка описується негаусовими випадковими процесами [43-47]. Використання традиційного підходу до дослідження та розробки систем обробки випадкових негаусових процесів характеризується суттєвими обмеженнями, пов’язаними зі складністю їх алгоритмічної реалізації. Складнощі з класичним підходом також пов’язані з тим, що випадкові процеси можуть бути корельованими негаусовими випадковими процесами [43, 52, 53]. На практиці часто виникають проблеми з обмеженим діапазоном спостережень, де не можна ігнорувати статистичні зв’язки випадкових значень випадкової величини [7].

Попри відносну простоту реалізації кореляційного підходу до алгоритмічного забезпечення роботи зазначених систем, на сучасному етапі він не забезпечує ефективного розв’язання багатьох завдань, пов'язаних із функціонуванням сучасних інформаційно-телекомунікаційних систем при складній сигнально-завадовій ситуації, коли випадкові процеси відрізняються від гаусових.

Таким чином, стохастична природа досліджуваних випадкових процесів із вираженими негаусовими щільностями розподілу зумовлює необхідність розробки нових моделей їх представлення та відповідних методів обробки.

Одним із напрямків для побудови оптимальних систем виявлення сигналів при впливі негаусових завад є застосування полігаусових моделей, що дозволяє

описати досліджувані процеси із заданою точністю. Проте такий підхід змушує оперувати щільностями гаусових розподілів, проводити підбір параметрів та їх оцінку для забезпечення адекватного опису [54, 55].

Марківські моделі є ще одним ефективним інструментом для обробки негаусових процесів, особливо у випадках, коли процеси мають часову залежність і можуть бути описані як послідовність станів із заданими ймовірностями переходів [56].

Одним із методів вирішення поставленої задачі є метод використання функції щільності ймовірності, яка використовується для опису випадкових негаусових процесів. Запропоновано метод, заснований на пороговій системі, призначеній для виявлення детермінованого сигналу з незалежним негаусовим шумом, функції щільності ймовірності невідомі, але вони симетричні та унімодальні [57]. Цей метод підтверджено взяттям великої кількості зразків за наявності білого шуму та слабкого сигналу. Для конкретної функції щільності ймовірності, як спеціального кореляційного детектора з певними обмеженнями, представлені різні варіанти обробки сигналу [58]. На основі надпорогового стохастичного резонансу [59] нелінійний кореляційний детектор складається з узгодженого фільтра. В [60] наведено структуру субоптимального детектора з паралельним масивом двокаскадних квантувачів у негаусовому шумі. Представлено процес виявлення сигналу на основі функції щільності ймовірності в корельованому негаусовому шумі [61]. Функції щільності ймовірності обумовлені обмеженнями і труднощами в обчисленнях, хоча мають детальний опис випадкових процесів.

Відмітимо, що зазначені наукові напрями базуються на ймовірнісному підході до опису випадкових процесів, основою якого є використання щільності ймовірності розподілу для моделювання випадкових величин та процесів. Такий підхід дозволяє створювати ймовірнісні моделі для опису сигналів і завад при проектуванні різноманітних систем. Однак він має низку недоліків, серед яких є складність оперування з щільностями розподілу ймовірностей, що не завжди

можливо на практиці по причині їх невизначеності, а також складність реалізації подібних моделей при побудові практичних систем.

Аналіз наукових досліджень показав, що властивості розв’язувальних функцій можна охарактеризувати за допомогою таких показників, як дисперсія розв’язувальних правил і середнє. Наприклад, розроблено критерій відхилення в класі лінійно-квадратичних (L-Q) систем [62-64]. Детальний опис цього критерію наведено в [65]. Але класичні критерії досить слабо пов'язані з наведеним критерієм відхилення та його модифікаціями, що не розкриває всіх властивостей правил прийняття рішень.

Для розв’язання поставлених задач виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад можуть застосовуватися і останні дослідження, які пов’язанні з розгортанням нейронних мереж, глибинним навчанням та застосуванням штучного інтелекту для обробки даних [72-76]. Проте такий підхід обумовлений значними обчислювальними навантаженнями на систему обробки сигналів, необхідністю тренування моделей на достатньо великих обсягах даних, відсутність гнучкого налаштування при зміні середовища прийому сигналів та ін.

Для розв’язання задач математичної статистики значного поширення набув інший підхід, у якому замість щільності ймовірності розподілу використовують моментно-кумулянтний опис випадкових величин. Моментно-кумулянтні моделі дозволяють простіше і ефективніше вирішувати прикладні завдання, забезпечуючи високу якість обробки випадкових процесів. Цей підхід є особливо актуальним у випадках, коли характеристики розподілу сигналів та завад мають складний негаусовий характер [66-71].

Вагомий внесок у цьому напрямі був зроблений професором Ю.П. Кунченком та продовжений його учнями, що дало змогу розвинути теорію статистичної обробки сигналів та запропонувати ефективні рішення обробки сигналів на фоні негаусових завад [7, 13, 45, 46, 77, 78] та ін.

У роботі запропоновано підхід для врахування негаусової щільності розподілу випадкових величин та їх кореляційних властивостей, який базується

на моментно-кумулянтному описі випадкових процесів та застосуванні статистик вищих порядків (HOS - *Higher-Order Statistics*), що значно спрощує їх опис і враховує негаусову щільність розподілу.

Метою роботи є підвищення ефективності систем виявлення сигналів при адитивній взаємодії з корельованими негаусовими завадами на основі застосування моментно-кумулянтних моделей досліджуваних випадкових величин із формуванням модифікованого моментного критерію якості перевірки статистичних гіпотез та поліноміальних розв’язувальних правил для синтезу ефективних методів і комп'ютерних засобів обробки сигналів.

1.2. Аналіз опису випадкових величин та процесів

Статистичний опис випадкових процесів є фундаментальною складовою для побудови сучасних систем виявлення сигналів. У реальних технічних системах сигнали та завади, з якими працює система, здебільшого мають випадковий характер. Використання статистичних моделей дозволяє не лише описувати основні характеристики цих процесів, але й враховувати їхню варіативність, що є ключовим для прийняття точних рішень. Наприклад, у телекомунікаційних системах це дозволяє ефективно розрізняти корисний сигнал на фоні шуму, мінімізуючи ймовірність помилок і підвищуючи надійність передачі інформації.

Одним із важливих аспектів статистичного опису є можливість врахування кореляційних залежностей і негаусової природи сигналів, що часто зустрічаються в реальних умовах. Такі підходи дозволяють будувати математичні моделі, які забезпечують адекватне відображення сигнально-завадової обстановки. Це особливо важливо для систем із високими вимогами до точності, таких як радіолокаційні, супутникові або сейсмічні системи. Статистичний підхід забезпечує можливість моделювання, аналізу та оптимізації методів обробки сигналів, що сприяє створенню більш досконалих алгоритмів для роботи в складних умовах.

Щільність розподілу ймовірностей. Статистичні методи опису випадкових процесів поділяються на кілька основних класів залежно від підходу до моделювання характеристик сигналів і завад. Один із найбільш поширених методів базується на використанні щільності розподілу ймовірностей $p(x)$. Прикладом таких щільностей розподілу можуть бути Релеєвський закон розподілу, Експоненційний, Райса, Лапласа, Вейбула, Навагами, Бета та ін. Цей підхід надає повний опис випадкових процесів і дозволяє виконувати точні розрахунки ймовірностей подій.

Повним описом випадкової скалярної величини ξ є функція розподілу ймовірностей $\boldsymbol{F}_{\xi}(x)$, яка дорівнює ймовірності того, що випадкова величина ξ прийме значення, менше за дійсне число *x*:

$$F_{\xi}(x) = P(\xi < x).$$

Випадкова величина має щільність розподілу тоді й лише тоді, коли існує така інтегрована функція $p_{\xi}(x)$, що для всіх *x* виконується рівність:

$$\boldsymbol{F}_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{x} p_{\xi}(u)du.$$

Функція $p_{\xi}(x)$ називається щільністю розподілу випадкової величини ξ. Так як функція $F_{\xi}(x)$ є неперервною функцією, то справедливо:

$$\boldsymbol{F}_{\xi}^{'}(x) = p_{\xi}(x).$$

Також відомо, що якщо випадкова величина є векторною, тобто, $\vec{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$, то її повним описом є багатовимірна функція розподілу:

$$\boldsymbol{F}_{\xi}(\vec{x}) = \boldsymbol{F}_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \boldsymbol{P}(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n),$$

якій відповідає багатовимірна (спільна) щільність розподілу

$$p_{\xi}(\vec{x}) = p_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Якщо компоненти ξ_i векторної випадкової величини *ξ=(ξ1, ξ2,…,ξn)* є незалежними, але нерівномірно розподіленими випадковими величинами, то багатовимірна щільність розподілу дорівнює добутку відповідних одномірних щільностей розподілу:

$$p_\xi(\vec{x}) = \prod_{i=1}^{n} p_i(x_i).$$

У випадку, якщо всі компоненти мають однаковий розподіл, багатовимірна щільність розподілу набуває вигляду:

$$p_\xi(\vec{x}) = \prod_{i=1}^{n} p_\xi(x_i).$$

Наприклад, поширеною випадковою величиною є така, що описується *нормальним (або гаусовим) законом розподілу* з параметрами a (середнє значення) та σ^2 (дисперсія) - $N(a,\sigma^2)$:

$$p(x/a;\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (-\infty < x < \infty).$$

Функція розподілу для такої випадкової величини задається формулою:

$$F(x/a;\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Незважаючи на широке використання нормального закону розподілу, у багатьох випадках він не є адекватною моделлю для реальних випадкових величин. У таких випадках застосовуються інші закони розподілу, наприклад: розподіли Лапласа, Вейбула, Ерланга, бета-розподіл, розподіл Навагами, Коші, Релея тощо.

Наприклад, випадкова величина, розподілена за *законом Лапласа*, має щільність розподілу:

$$p(x/a;\ \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{\sqrt{2}|x-a|}{\sigma}}, \quad (-\infty < x < \infty),$$

а функція розподілу для цієї випадкової величини:

$$F(x/a;\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\frac{\sqrt{2}(x-a)}{\sigma}}, & (-\infty < x < a), \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}(x-a)}{\sigma}}, & (a < x < \infty). \end{cases}$$

Для випадкової величини, розподіленої *за законом Ерланга*, щільність розподілу має вигляд

$$p(x/a;\sigma) = \begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0), \\ \frac{x^{(a-1)}}{\sigma^a (a-1)!} e^{-\frac{x}{\sigma}}, & (0 < x < \infty), \end{cases}$$

$$a = 1,\ 2,\ 3, \ldots \quad .$$

а функція розподілу визначається виразом

$$F(x/a;\sigma) = \begin{cases} 0, & (-\infty < x < 0), \\ 1 - \sum_{k=0}^{a-1} \frac{x^k}{\sigma^k k!}\ e^{-\frac{x}{\sigma}}, & (0 < x < \infty). \end{cases}$$

Інший вид розподілу, який відмінний від нормального - розподіл Релея, який моделює амплітуду сигналів в умовах багатопроменевого поширення. Щільність розподілу має наступний вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

де $\sigma > 0$ — параметр масштабу, який визначає середню енергію сигналу.

Закон розподілу Релея використовується для опису випадкової огинаючої вузькосмугового випадкового процесу (шуму), законів надійності, деяких радіотехнічних сигналів. Цей закон розподілу апроксимує амплітудні значення шумових коливань (перешкод) в радіоприймачі, значення амплітуди випадкового сигналу, що завмирає, у каналах зв'язку.

Розподіл Стьюдента використовується для моделювання сигналів із важкими хвостами, щільність розподілу якого має вид:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}},$$

де ν>0 – число степенів свободи, Г(*) -гама функція.

Щільність розподілу повинна відповідати таким умовам:

$$p_\xi\left(x/\vec{\vartheta}\right) \geq 0 \text{ для } \forall x \in (\text{c,d}),\ \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi\left(x/\vec{\vartheta}\right) dx = 1).$$

Закон розподілу Релея-Райса використовується для опису випадкової огинаючої суми сигналу і вузькосмугового шуму.

Експоненційний закон розподілу використовується в теорії масового обслуговування і теорії надійності для моделювання часу безвідмовної роботи системи.

Логарифмічно нормальний закон розподілу використовується у випадку, коли випадкові величини діють мультиплікативно.

В таблиці 1.1 подані деякі найпоширеніші одновимірні закони розподілу ймовірностей неперервних випадкових процесів [7]. В таблиці 1.2 подані деякі найпоширеніші одновимірні закони розподілу ймовірностей дискретних випадкових процесів.

Відомо, що кожній інтегрованій щільності ймовірності будь-якої випадкової величини відповідає спряжена функція Фур'є, яку прийнято називати *характеристичною функцією*. Тому, окрім функцій і щільностей розподілу, повним описом випадкової величини також є характеристична функція $f_\xi\left(u/\vec{\vartheta}\right)$, що залежить від параметра $\vec{\vartheta}$:

$$f_\xi\left(u/\vec{\vartheta}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi\left(x/\vec{\vartheta}\right) e^{jux} dx.$$

Зворотне перетворення від характеристичної функції $f_\xi\left(u/\vec{\vartheta}\right)$ записується як:

$$p_\xi\left(x/\vec{\vartheta}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi\left(u/\vec{\vartheta}\right) e^{-jux} du.$$

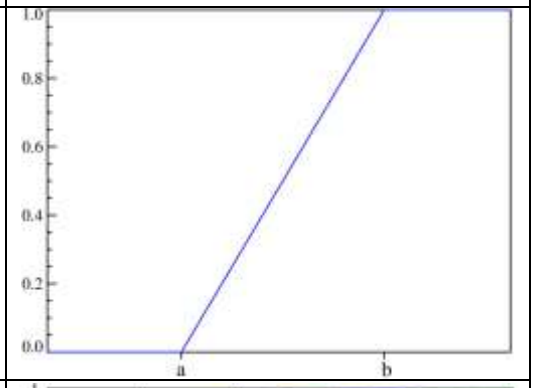
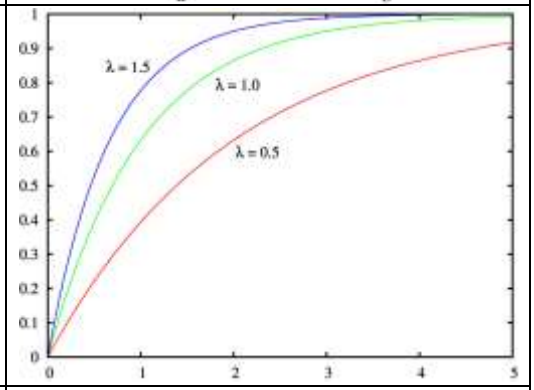
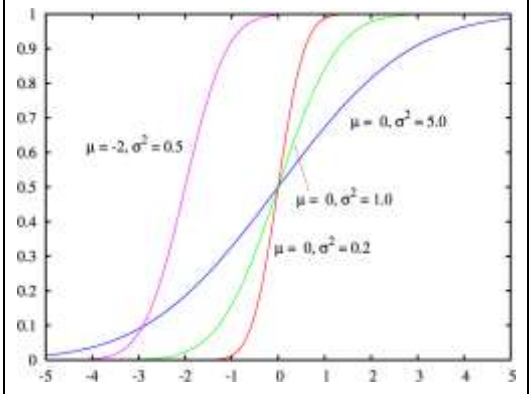
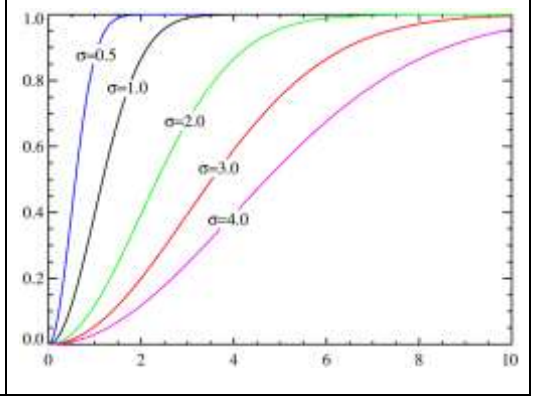
Таким чином, ці перетворення дозволяють стверджувати, що характеристична функція є тотожним представленням щільності розподілу.
а для випадкової величини, розподіленої за законом Лапласа, характеристична функція записується як:

$$f_\xi(u/a,\sigma) = \frac{e^{jua}}{\left(1+\frac{\sigma^2 u^2}{2}\right)}.$$

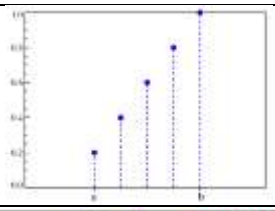
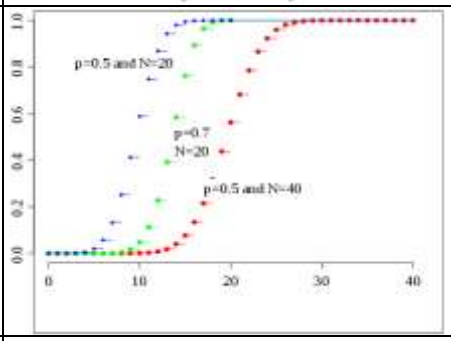
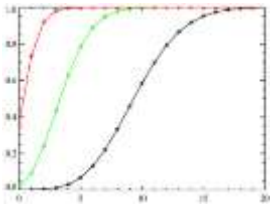
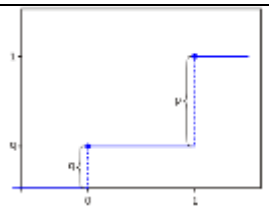
У свою чергу, характеристична функція випадкової величини, розподіленої за законом Ерланга, має вигляд:

$$f_\xi(u/a,\sigma) = \frac{(1+j\sigma u)^a}{(1+\sigma^2 u^2)^a}.$$

Таблиця 1.1 – Типові закони розподілу ймовірностей неперервних випадкових процесів

Назва закону розподілу	Одновимірна функція розподілу $F_1(x,t)$	Графік функції $F_1(x,t)$
Рівномірний	$F_1 = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{(x-a)}{(b-a)}, & a \le x < b \\ 1, & x \ge b \end{cases}$	
Екпоненційний	$F_1 = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	
Нормальний (закон Гауса)	$F_1 = \frac{1}{2}\left[1 + erf\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)\right]$ μ – математичне сподівання σ – дисперсія	
Закон розподілу Релея	$F_1 = \begin{cases} 1-e^{-x^2/2\sigma^2}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	

Таблиця 1.2 – Типові закони розподілу ймовірностей дискретних випадкових процесів

Назва закону розподілу	Одновимірна функція розподілу $F_1(x,t)$	Графік функції $F_1(x,t)$
Дискретний рівномірний	$F_1 = \left\{ \begin{array}{c} 0, x < a \\ (x-a+1)/n,\ a \le x \le b \\ 1, x > b \end{array} \right\}$	
Дискретний біноміальний	$F_1 = I_{1-p}(n-\lvert k\rvert, 1+\lvert k\rvert)$	
Пуассона	$F_1 = \dfrac{\Gamma(k+1,\lambda)}{k!}$	
Бернуллі	$F_1 = \left\{ \begin{array}{c} 0,\ k < 0 \\ q,\ 0 \le k < 1 \\ 1,\ k \ge 1 \end{array} \right\}$	

Наприклад, характеристична функція випадкової величини, розподіленої за нормальним законом із параметрами $N(a,\sigma^2)$, має вигляд:

$$f_\xi(u/a,\sigma^2) = e^{jua-\frac{\sigma^2u^2}{2}},$$

Таким чином, характеристична функція, яка є тотожним представленням ймовірнісного розподілу $p_\xi(x/\vec{\vartheta})$, володіє такими властивостями:

1. $f_\xi(u/\vec{\vartheta})$ — неперервна функція для всіх значень u;
2. $f_\xi(0/\vec{\vartheta})$=1;
3. $|f_\xi(u/\vec{\vartheta})| \le f_\xi(0/\vec{\vartheta})$;
4. $f_\xi(-u/\vec{\vartheta}) = f^*{}_\xi(u/\vec{\vartheta})$, де $f^*{}_\xi(u/\vec{\vartheta})$ — комплексно-спряжена характеристична функція;
5. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(u/\vec{\vartheta})\ e^{-jux}du$ — дійсна і невід'ємна функція, якщо щільність розподілу випадкової величини є симетричною функцією;
6. якщо $\eta = h\xi + a$, де h, a — довільні константи, то $f_\eta(u/\vec{\vartheta}) = e^{jua} f_\xi(hu/\vec{\vartheta})$.

В таблиці 1.3 подані деякі найпоширеніші одновимірні характеристичні функції неперервних випадкових процесів.

Таблиця 1.3 – Типові одновимірні характеристичні функції неперервних випадкових процесів

Назва закону	Одновимірна характеристична функція $f_\xi(u/\vec{\vartheta})$
Рівномірний	$f_\xi(u/\vec{\vartheta}) = \frac{1}{ju(b-a)}(e^{jub} - e^{-jua})$
Екпоненційний	$f_\xi(u/\vec{\vartheta}) = (1 - \frac{ju}{\lambda})^{-1}$
Нормальний (закон Гауса)	$f_\xi(u/\vec{\vartheta}) = \exp(ju - 0{,}5\sigma^2 u^2)$
Релея	$f_\xi(u/\vec{\vartheta}) = 1 + j\cdot\sigma\cdot t\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot w(\frac{\sigma\cdot t}{\sqrt{2}})$

Перелічені властивості повністю визначають характеристичну функцію випадкової величини ξ.

Оскільки характеристична функція тотожно представляє щільність розподілу, будь-які параметри розподілу також можна отримати з цієї функції. Зокрема, моменти розподілу довільного порядку (за умови їх існування) виражаються як:

$$\alpha_r(\vec{\vartheta}) = j^{-r}\left[\frac{d^r}{du^r} f_\xi(u/\vec{\vartheta})\right]_{u=0},\ \mathrm{r} = 1,2,...$$

У свою чергу, знаючи нескінченну послідовність моментів, можна знайти характеристичну функцію:

$$f_\xi(u/\vec{\vartheta}) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(\vec{\vartheta})}{k!}(ju)^k.$$

Таким чином, знаючи нескінченну послідовність моментів, можна апроксимувати характеристичну функцію з достатньою точністю, а відповідно й щільність розподілу випадкової величини. Отже, послідовність моментів є певним описом випадкової величини.

Обчислення моментів за відомою характеристичною функцією широко використовується в різних застосуваннях, адже іноді цей підхід є простішим і ефективнішим порівняно з повним описом випадкової величини у вигляді щільності розподілу.

Розгляд одномірних розподілів щільності ймовірності охоплює широкий спектр задач, що використовуються у різних галузях. Водночас часто виникають ситуації, коли необхідно розглянути багатовимірні розподіли, виражені через багатовимірну щільність розподілу $p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Для випадкової величини, розподіленої за багатовимірним нормальним законом, щільність розподілу задається як:

$$\mathrm{p_n}(\mathrm{x_1}, \mathrm{x_2}, \dots, \mathrm{x_n}) = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n \sqrt{(2\pi)^n \mathrm{D}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\mathrm{D}} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{D_{ij}} \frac{\mathrm{x_i} - \mathrm{E(x_i)}}{\sigma_\mathrm{i}} \frac{\mathrm{x_j} - \mathrm{E(x_j)}}{\sigma_\mathrm{j}}\right\},$$

де $\mathrm{E(x_i)}$ - математичне сподівання *i*-ї випадкової величини, σ_i - дисперсія *i*-ї випадкової величини, D – визначник кореляційної матриці ρ, який має вид

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n1} & \cdots & \rho_{nn} \end{pmatrix},$$

де D_{ij} — алгебраїчне доповнення елемента ρ_{ij} у визначнику D, ρ_{ij} — коефіцієнт кореляції випадкових величин x_i та x_j, і який має вид

$$\rho\{x_i, x_j\} = \frac{K\{x_i, x_j\}}{\sqrt{\sigma_i \sigma_j}},$$

де $K\{x_i, x_j\} = E\big(x_i - E(x_i)\big)\Big(x_j - \big(x_j\big)\Big)$ — коваріація випадкових величин x_i та x_j.

Характеристичні функції для опису багатовимірних розподілів мають складнішу залежність від моментів, ніж представлена одновимірна характеристична функція:

$$f_{\xi}\big(u, v/\vec{\vartheta}\big) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{l,k}(\vec{\vartheta})}{l!k!} (ju)^l (jv)^k,$$

де $\alpha_{l,k}\big(\vec{\vartheta}\big)$ — двовимірний момент порядку (l+k), який залежить від параметра ϑ.

Таким чином, кореляційні зв'язки між випадковими величинами описуватимуться через сумісні моменти відповідних порядків. Зокрема, можна сказати, що $K\{x_i, x_j\}$ виражається саме через кореляційний момент другого порядку $\alpha_{11}(x_i, x_j)$. Кореляційні моменти вище за другий порядок описують більш складні залежності між випадковими величинами і будуть розглянуті нижче.

Однак методи цього класу мають значну обчислювальну складність і вимагають точного знання функцій розподілу, що не завжди можливо у практичних умовах. Вони ефективні для аналізу процесів із відомими розподілами, такими як нормальний, але не завжди придатні для складних і змінних сигналів.

Полігаусові моделі випадкових процесів. Інший перспективний напрямок — використання полігаусових моделей, які дозволяють апроксимувати складні розподіли шляхом представлення їх у вигляді сум кількох гаусових компонент. Цей підхід особливо корисний для моделювання змішаних сигналів і завад із комплексною структурою. Проте йому властиві такі недоліки, як велика

кількість параметрів для точного опису та значні обчислювальні витрати. Застосування полігаусових моделей потребує попереднього налаштування, що ускладнює їх використання в реальному часі.

Марківські моделі. Методи на основі марківських моделей орієнтовані на опис процесів із пам'яттю, що дозволяє враховувати часові залежності. Вони широко застосовуються у розпізнаванні мовлення, аналізі образів і телекомунікаціях. Їхня сильна сторона — здатність моделювати часові залежності у сигналах, однак вони обмежені припущенням про марківський характер процесу. Крім того, для коректної оцінки параметрів марківської моделі потрібен значний обсяг даних, що іноді є складним завданням.

Загалом, статистичні методи мають низку переваг, зокрема гнучкість у моделюванні, можливість розробки оптимальних алгоритмів прийняття рішень і широкий спектр застосувань. Однак вони також мають обмеження: високі вимоги до обчислювальних ресурсів, необхідність апріорної інформації про сигнали і завади, а також складність інтеграції в системи реального часу. Ці фактори визначають актуальність подальшого розвитку і вдосконалення статистичних методів для вирішення завдань виявлення сигналів у різних технічних системах.

Моментно-кумулянтні моделі. Моментно-кумулянтний підхід є одним із найефективніших у контексті опису негаусових випадкових процесів. Цей метод менше залежить від обчислювальних ресурсів порівняно з іншими підходами і дозволяє описувати складні негаусові процеси за допомогою кумулянтів. Водночас точність цього підходу залежить від обраного порядку моментів і кумулянтів. Такий підхід широко використовується для виявлення слабких сигналів у зашумлених каналах, особливо коли сигнали і завади мають складну статистичну природу.

1.3. Застосування статистик вищих порядків для опису випадкових величин та процесів

У роботі пропонується використовувати моментно-кумулянтний опис негаусових випадкових величин, заснований на використанні моментів і кумулянтів (семіваріантів) [45, 46]. У цьому напрямку отримано добре розроблений математичний апарат, але на практиці його застосування для розв'язання конкретних задач майже відсутнє. Розглянемо особливості такого опису для незалежних і залежних випадкових величин [13].

При обробці випадкових величин іноді виникають ситуації, коли для опису і вивчення випадкової величини ξ описують іншу випадкову величину - η, яка не спостерігається, а є деякою дійсною функцією $\phi(\cdot)$ від випадкової ξ, тобто. $\eta = \phi(\xi)$. Будемо вважати, що функція $\phi(\cdot)$ є скінченною і однозначно визначеною для всіх дійсних значень ξ.

Оскільки ξ є випадковою величиною, то й η також буде випадковою величиною з щільністю розподілу $p_\eta\left(z/\vec{\vartheta}\right)$, яка визначається розподілом випадкової величини ξ. При цьому щільність розподілу $p_\eta\left(z/\vec{\vartheta}\right)$ випадкової величини η у загальному випадку відрізняється від щільності розподілу випадкової величини ξ.

Відомо, що математичне сподівання неперервної випадкової величини ξ визначається виразом:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p_\xi(x/\vec{\vartheta})dx.$$

З іншого боку, математичне сподівання випадкової величини η можна обчислити також через щільність розподілу $p_\eta\left(z/\vec{\vartheta}\right)$, або за допомогою щільності розподілу $p_\xi\left(x/\vec{\vartheta}\right)$, використовуючи співвідношення:

$$\Psi\left(\vec{\vartheta}\right) = E\eta = \int_{-\infty}^{\infty} z p_\eta\left(z/\vec{\vartheta}\right)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) p_\xi\left(x/\vec{\vartheta}\right)dx.$$

Видно, що в загальному випадку математичне сподівання випадкової величини η залежить від параметра u.

Припустимо, що є безліч випадкових величин η_i, $i=1,2,...$, які є деякими функціями $\varphi_i(\cdot)$ від однієї і тієї ж випадкової величини ξ, тобто

$$\eta_i = \phi_i(\xi).$$

У цьому випадку при використанні щільності розподілу випадкової величини ξ можна також обчислити математичне сподівання від випадкових величин η_i

$$\Psi_i(\vec{\vartheta}) = E\eta_i = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_i(x) p_\xi(x/\vec{\vartheta}) dx,\ i = 1,2,\ldots .$$

В загальному випадку математичні сподівання $\Psi_i(\vec{\vartheta})$ є функціями параметра $\vec{\vartheta}$. Тут, і в подальшому, будемо припускати, що функції перетворення $\varphi_i(\cdot)$ випадкових величин ξ такі, що математичні сподівання від них існують.

Розглянемо одне з можливих перетворень випадкової величини ξ — степеневе, тобто функції $\varphi_i(\xi)$ є степеневими функціями виду:

$$\phi_i(\xi) = \xi^i,$$

тоді математичні сподівання цих функцій будуть рівні:

$$\alpha_i(\vec{\vartheta}) = \mathrm{E}\xi^i = \int_{-\infty}^{\infty} x^i p_\xi(x/\vec{\vartheta}) dx. \qquad (1.1)$$

Визначення 1.1. Функції $\alpha_i(\vec{\vartheta})$, $i=1,2,...$, що залежать від параметра $\vec{\vartheta}$, називаються моментами випадкової величини ξ порядку i.

Необхідно відзначити, що в деяких випадках нескінченна послідовність моментів виду (1.1) буде тотожно представляти ймовірнісний розподіл випадкової величини ξ. Однак, якщо при відомій щільності розподілу $p_\xi(x/\vec{\vartheta})$ математичні сподівання $\Psi_i(\vec{\vartheta})$ визначаються однозначно, то значення нескінченної послідовності функцій $\Psi_i(\vec{\vartheta})$ в загальному випадку не дозволяє однозначно визначити невідому щільність розподілу. Так, при моментному описі випадкової величини ξ можна привести приклади різних щільностей розподілу з однаковими моментами всіх цілих порядків (проблема моментів).

Зазвичай випадкові величини доцільніше описувати не за допомогою моментів, а через кумулянти або семіваріанти порядку [7, 45, 46 та ін.]. Незважаючи на те, що моментний опис випадкових величин дає їх повну статистичну характеристику, кумулянтний підхід має низку переваг. Зокрема, кумулянти та кумулянтні коефіцієнти, на відміну від моментів, мають самостійне статистичне значення і можуть бути задані в певному сенсі незалежно один від одного, апроксимуючи при цьому певну функцію щільності розподілу. Крім того, врахування кумулянтних коефіцієнтів вищих порядків дозволяє досить легко описати степінь негаусовості розподілу випадкових величин, так як тільки для гаусового розподілу ненульовими будуть лише перші два кумулянти, які визначають математичне сподівання та дисперсію випадкової величини. Водночас моменти вищих порядків (третього, четвертого тощо) будуть ненульовими.

Відомо, що логарифм характеристичної функції в околі нуля можна подати у вигляді степеневого ряду

$$ln\, f_{\xi}\left(u/\vec{\vartheta}\right) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\chi_r(\vec{\vartheta})}{r!} (ju)^r. \qquad (1.2)$$

Таким чином, як і моменти виражаються через коефіцієнти розкладу характеристичної функції, так і коефіцієнти розкладу в (1.2) є характеристиками ймовірнісного розподілу.

Визначення 1.2. Кумулянти порядку i розподілу випадкової величини визначаються як коефіцієнти розкладу $\chi_i(\vec{\vartheta})$ логарифма характеристичної функції у степеневий ряд (1.2).

Необхідно зазначити, що на практиці використовують не нескінченну послідовність моментів і кумулянтів, а певну кінцеву послідовність, яка, в свою чергу, лише частково апроксимує щільність ймовірності випадкової величини. Перевагою такого підходу є те, що ці кінцеві послідовності описують не одну випадкову величину, а безліч випадкових величин. У цьому випадку у кожної випадкової величини цього множини кумулянти (моменти) до певного m-го порядку однакові, а кумулянти (моменти) вищі за m-й можуть бути різними.

Приклад виразів для початкових моментів до шостого порядку, записаних через кумулянти, наведено в **Додатку В**.

Як уже було зазначено, з практичної точки зору зручніше використовувати кумулянти, оскільки вони мають чітке тлумачення. Кумулянти першого $\chi_1(\vec{\vartheta})$ та другого $\chi_2(\vec{\vartheta})$ порядків мають очевидне фізичне значення — це математичне очікування (середнє значення) та дисперсія випадкової величини. Кумулянт третього порядку $\chi_3(\vec{\vartheta})$ відомий як асиметрія (**skewness**) розподілу, що вказує на ступінь його відхилення від симетричного. Кумулянт четвертого порядку $\chi_4(\vec{\vartheta})$ називається ексцесом (**kurtosis**) і визначає ступінь гостроти або пологості розподілу (рисунок 1.7).

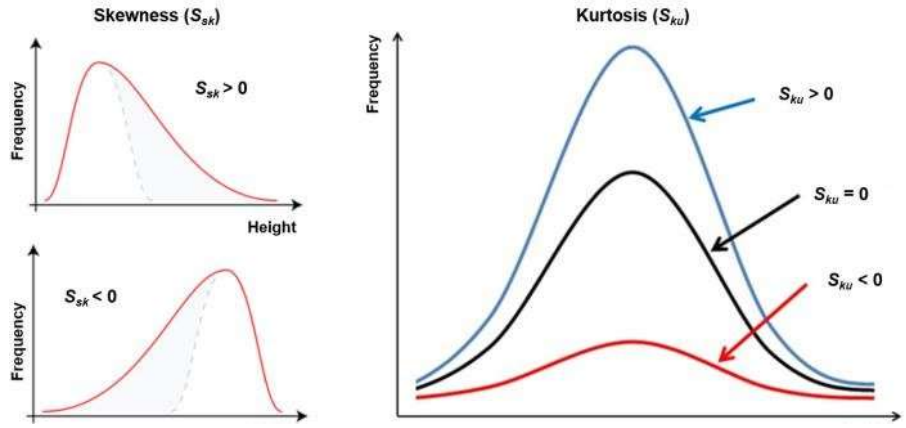


Рисунок 1.7. Представлення щільностей розподілу випадкової величин при різних значеннях коефіцієнтів асиметрії (**skewness)** та ексцесу (**kurtosis**)

Для зручності вводяться безрозмірні величини, які називаються кумулянтними коефіцієнтами порядку *r*, і вони дорівнюють

$$\gamma_r(\vec{\vartheta}) = \frac{\chi_r(\vec{\vartheta})}{\chi_2^{\frac{r}{2}}(\vec{\vartheta})}.$$

Наприклад, перші чотири кумулянтні коефіцієнти можуть бути записані у вигляді

$$\gamma_1(\vec{\vartheta}) = \frac{\chi_1(\vec{\vartheta})}{\sqrt{\chi_2(\vec{\vartheta})}}, \quad \gamma_2 = 1, \quad \gamma_3(\vec{\vartheta}) = \frac{\chi_3(\vec{\vartheta})}{\chi_2^{1,5}(\vec{\vartheta})}, \quad \gamma_4(\vec{\vartheta}) = \frac{\chi_4(\vec{\vartheta})}{\chi_2^2(\vec{\vartheta})}$$

і мають певне фізичне значення. Кумулянтний коефіцієнт першого порядку $\gamma_1(\vec{\vartheta})$ називають коефіцієнтом зсуву, третього порядку $\gamma_3(\vec{\vartheta})$— коефіцієнтом асиметрії, четвертого порядку $\gamma_4(\vec{\vartheta})$ — коефіцієнтом ексцесу. Коефіцієнти вищих порядків не мають конкретних назв. Окрім того, кумулянтні коефіцієнти непарного порядку характеризують асиметричність функції щільності розподілу, тоді як коефіцієнти парного порядку описують ексцесність функції розподілу.

Урахування кореляційних зв'язків між випадковими величинами, зокрема між вибірковими значеннями спостережуваної випадкової величини, є важливим етапом для побудови багатьох технічних систем. Однак через складний математичний апарат основний розвиток у цьому напрямі отримали гаусові моделі багатовимірних розподілів [66, 79-81 та ін.]. Тому в даній роботі запропоновано розвиток математичного апарату та побудову моделей і методів для розв’язання задач перевірки статистичних гіпотез при дослідженні саме негаусових корельованих випадкових процесів, як найбільш загальних, що мають місце у багатьох практичних додатках.

Одним із шляхів вирішення подібних задач може бути використання опису випадкових величин у вигляді моментів і кумулянтів багатовимірних розподілів [66]. Наприклад, якщо розглянути двовимірний випадок, коли спостерігаються дві випадкові залежні величини η та μ з сумісною щільністю розподілу, то сумісний початковий момент матиме вигляд:

$$\alpha_{l,k}^{\eta,\mu} = \int_{-\infty}^{\infty} \int x^l y^k P_{\eta,\mu}(x,y)dxdy.$$

Як видно з наведеного виразу, початковий момент характеризується не тільки описуваними випадковими величинами (η та μ), але й порядком моменту — це сума (l+k). Моменти називаються сумісними, якщо хоча б одна з змінних l або k відрізняється від нуля. В іншому випадку моменти вигляду $\alpha_{l0}, \alpha_{0,m}$ характеризують одномірні розподіли випадкових величин. Зазвичай спільний момент другого порядку називають кореляцією випадкових величин η та μ:

$$\alpha_{1,1}^{\eta,\mu} = E(\eta\mu).$$

Якщо випадкові величини статистично незалежні, то багатовимірні моменти розпадаються на одномірні, і всі спільні кумулянти дорівнюють нулю.

Таким чином, поставлені задачі в дисертаційній роботі по побудові методів виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад потребують подальшого розвитку і застосування нових моментно-кумулянтних моделей на базі вищих статистик із використанням одновимірних та двовимірних (сумісних) моделей випадкових величин, що буде зроблено в наступних розділах дисертації.

1.4. Аналіз ймовірнісних критеріїв якості перевірки статистичних гіпотез

Теорія перевірки статистичних гіпотез широко використовується для розв'язання задач виявлення сигналів на фоні завад, зокрема в телекомунікаційних та навігаційних системах, системах супутникового зв'язку тощо [48-50, 82-84]. Основна мета в таких задачах полягає у визначенні наявності або відсутності корисного сигналу в зашумлених даних. Це досягається шляхом формулювання двох гіпотез: нульової - H_0, яка припускає, що сигнал відсутній, і альтернативної H_1, яка стверджує, що сигнал присутній. Статистичний аналіз спостережуваних даних дозволяє обчислити ймовірність помилок першого і другого роду, що забезпечує ефективне налаштування параметрів системи виявлення для мінімізації хибних тривог або пропуску сигналу.

Теорія перевірки статистичних гіпотез ґрунтується на припущенні, що спостерігається випадкове явище, яке може перебувати в одному з двох можливих станів. У разі реалізації одного стану приймається гіпотеза H_0, а для іншого — гіпотеза H_1. Спостереження явища здійснюється шляхом формування вибірки $\vec{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ обсягом n. За умови відомих спільних щільностей розподілу вибірки для гіпотез H_0 та H_1. визначається функція правдоподібності $P(\vec{x}/H_0)$ при гіпотезі H_0, та $P(\vec{x}/H_1)$ при гіпотезі H_1. За результатами обробки вибірки $\vec{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ необхідно прийнятті рішення про реалізацію однієї з гіпотез.

При такій постановці завдання та фіксованому розмірі вибірки простором спостереження (вибірковим простором) є n-мірний евклідовий простір X^n, на

якому задані дві функції правдоподібності $P(\vec{x}/H_0)$ та $P(\vec{x}/H_1)$. В цьому випадку простір рішення буде складатися з двох елементів: γ_0 – рішення про прийняття гіпотези H_0, та рішення γ_1 про прийняття гіпотези H_1. Кожне рішення передбачає поділ вибіркового простору X^nна дві області, що не перетинаються - X_0 та X_1, $X_0 \cup X_1 = X^n$. Якщо вибірка потрапила в область X_0, то приймається рішення γ_0, а якщо в область X_1, то рішення γ_1.

У найпростішому випадку перевірки двох гіпотез H_0 та H_1 спостережувані вибіркові значення $\vec{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ є випадковими величинами. Відповідно, рішення γ_0 та γ_1 також будуть випадковими і матимуть свої ймовірності помилок. Зокрема, можна виділити ймовірність помилки першого роду, яка виникає, коли справедливою є гіпотеза H_0, і вибірка має потрапити до області X_0, але вибірку помилково віднесено до області X_1 на основі рішення γ_1

$$\alpha = P\{\gamma_1/H_0\} = P\{\vec{x} \in X_1/H_0\} = \int_{X_1} P(\vec{x}/H_0)\, dx.$$

Аналогічно, ймовірність помилки другого роду записується як

$$\beta = P\{\gamma_0/H_1\} = P\{\vec{x} \in X_0/H_1\} = \int_{X_0} P(\vec{x}/H_1)\, dx,$$

коли здійснилася гіпотеза H_1 і вибірка належить до області X_1, але ухвалили рішення γ_0, тобто, вибірку віднесли до області X_0 (рисунок 1.8).

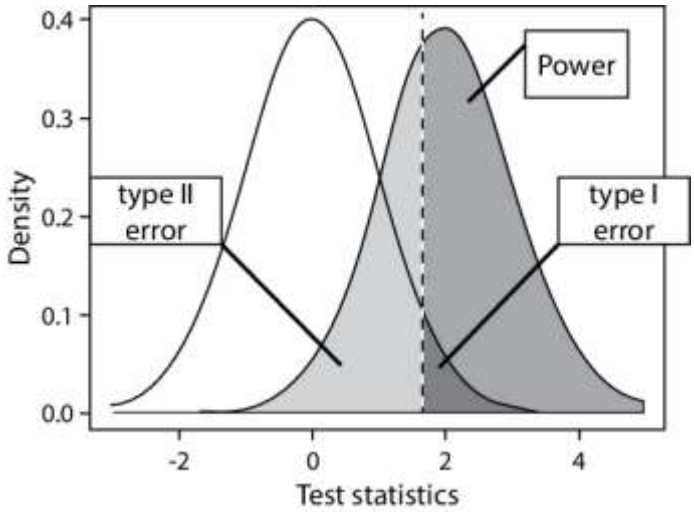


Рисунок 1.8. Інтерпретація ймовірностей помилок РП першого (type I error) та другого (type II error) роду.

Під завданням оптимального рішення розумітимемо певні дії над вибірковими значеннями, які дозволять якнайкраще прийняти рішення про реалізацію однієї з гіпотез H_0 або H_1, тобто, синтезувати оптимальне у певному сенсі (по заданому критерію якості перевірки статистичних гіпотез) РП, що дозволяє розрізнити гіпотези.

Нехай інформація, що підлягає обробці, є вибіркою $\vec{x} = \vec{x}(t_n)$ з сигналу , який може бути представлений у вигляді

$$x(t) = a \cdot S(t, \vec{\gamma}) + \eta(t, \vec{\mu}),$$

де $\eta(t, \vec{\mu})$ — складова, обумовлена впливом завад, що характеризуються вектором параметрів $\vec{\mu}$, частина яких може бути невідома; a — дискретний параметр, що асоціюється з наявністю ($a = 1$, реалізувалася гіпотеза H_1) або відсутністю ($a = 0$, реалізувалася гіпотеза H_0) сигналу; $S(t, \vec{\gamma})$ — відома функція часу, що представляє очікуваний сигнал і залежить від вектора $\vec{\gamma}$ невідомих параметрів, які можуть бути детермінованими або випадковими і розглядатися як вимірювані або заважають.

Оскільки вплив завад $\eta(t, \vec{\mu})$ на корисний сигнал $S(t, \vec{\gamma})$ є випадковими, завдання виявлення носить імовірнісний характер і трактується як перевірка статистичних гіпотез: гіпотеза H_0 передбачає відсутність сигналу ($a = 0$), альтернативна гіпотеза H_1 — його наявність ($a = 1$). В цьому випадку статистичні властивості вибірок повністю описуються спільними умовними розподілами $\mathrm{P}(\vec{\mathrm{x}}_{\mathrm{к}}/\mathrm{H}_{0,1})$. Функції $P(\vec{x}_n/H_0)$ та $P(\vec{x}_n/H_1)$ називають функціями правдоподібності [48-50].

Застосування загальної теорії перевірки статистичних гіпотез ґрунтується на використанні так званих *критеріїв оптимальності*, які обираються залежно від повноти апріорної інформації про ймовірнісні характеристики випадкових величин. До таких критеріїв належать байєсівський критерій, критерій максимуму апостеріорної ймовірності, критерій максимуму правдоподібності, критерій Неймана-Пірсона, критерій Вальда тощо [48-50]. Ці критерії якості широко застосовуються в різних задачах і потребують короткого розгляду для їх характеристики.

Серед критеріїв, які використовуються в сучасній теорії перевірки статистичних гіпотез, найбільш універсальним є критерій ***мінімізації середнього (байєсівського) ризику*** [48-50].

Через випадковий характер завад, а також можливі випадкові зміни параметрів сигналів, прийняття абсолютно достовірного рішення за кінцевий час спостереження є неможливим. Тобто, рішення γ_0 та γ_1 можуть бути як правильними, так і помилковими. Можливі такі поєднання реальних ситуацій і прийнятих рішень:

— H_1/γ_1 — правильне виявлення (є сигнал); H_1/γ_0 — пропуск сигналу;

— H_0/γ_0— правильне невиявлення (сигнал відсутній); H_0/γ_1— хибна тривога.

Перелічені ситуації утворюють повну групу подій, сума ймовірностей яких дорівнює одиниці:

$$P(\gamma_1/H_1) + P(\gamma_0/H_1) + P(\gamma_1/H_0) + P(\gamma_0/H_0) = 1.$$

Кожному помилковому рішенню можна зіставити певну вартість, так званий ризик — R_{ij}. Згідно з байєсівським критерієм, оптимальність алгоритму прийняття рішення визначається мінімальним значенням середнього ризику $R(\alpha, \beta)$:

$$R(\alpha, \beta) = pR_{00} + qR_{11} + p(R_{01} - R_{00})\alpha + q(R_{10} - R_{11})\beta,$$

де R_{ij} — елементи матриці втрат, які характеризують вартість помилкових рішень, p та q — ймовірності появи гіпотез H_0 та H_1 відповідно, причому $i, j = 0,1$.

Оптимальним вважається правило прийняття рішень, яке забезпечує мінімум середнього ризику, тобто відповідає байєсівському критерію оптимальності. Алгоритм, що задовольняє цю умову, називається байєсівським правилом.

Слід зазначити, що для обчислення величини байєсівського ризику необхідна повна апріорна інформація про сумісні ймовірності $P(\gamma_i/H_i)$ та вартості помилкових рішень. Обґрунтований вибір цих величин, особливо в задачах з апріорною невизначеністю, є щонайменше складним завданням. Тому характеристики байєсівського правила прийняття рішень у теорії перевірки

статистичних гіпотез зазвичай розглядають як потенційні для порівняння квазіоптимальних алгоритмів.

Відомо [48-50], що оптимальний байєсівський алгоритм перевірки простих гіпотез можна представити у вигляді відношення правдоподібності:

$$\Lambda(\vec{x}) = \frac{P(\vec{x}/H_1)}{P(\vec{x}/H_0)} \begin{matrix} H_1 \\ > \\ < \\ H_0 \end{matrix} \frac{R_{01}-R_{00}}{R_{10}-R_{11}} \frac{p}{q}, \tag{1.3}$$

яке мінімізує значення середнього ризику. Вираз (1.3) та подібні нижче трактуються так: якщо ліва частина більша за праву, реалізується гіпотеза H_1, якщо ж навпаки — гіпотеза H_0.

Часто, у разі відсутності часткової апріорної інформації про події, що відбуваються, відношення правдоподібності (1.3) зазнає певних змін.

У першому випадку, використовуючи критерій максимальної апостеріорної ймовірності, враховують лише ймовірності реалізації гіпотез p та q, а також ймовірності помилок α и β. Тоді правило прийняття рішень повинно мінімізувати значення:

$$R_1 = p\alpha + q\beta.$$

Очевидно, що цей критерій збігається з байєсівським, якщо

$$R_{00} = R_{11} = 0, R_{01} = R_{10} = 1.$$

У цьому випадку оптимальний алгоритм перевірки простих гіпотез зводиться до обчислення відношення правдоподібності та порівняння його з наступним пороговим значенням:

$$\Lambda(\vec{x}) = \frac{P(\vec{x}/H_1)}{P(\vec{x}/H_0)} \begin{matrix} H_1 \\ > \\ < \\ H_0 \end{matrix} \frac{p}{q}. \tag{1.4}$$

У другому випадку, при апріорній невизначеності ймовірностей появи гіпотези та альтернативи, а також вартості втрат, застосовують ***критерій максимальної правдоподібності***, згідно з яким оптимальний алгоритм прийняття рішення мінімізує величину:

$$R_2 = \alpha + \beta$$

та оптимальне РП має вигляд порівняння відношення правдоподібності з порогом, рівним одиниці:

$$\Lambda(\vec{x}) = \frac{P(\vec{x}/H_1)}{P(\vec{x}/H_0)} \begin{matrix} H_1 \\ > \\ < \\ H_0 \end{matrix} 1. \qquad (1.5)$$

У третьому випадку, за умов апріорної невизначеності, застосовується ***критерій Неймана-Пірсона***, відповідно до якого оптимальне правило прийняття рішень забезпечує мінімально можливу ймовірність помилки другого роду β за умови, що ймовірність помилки першого роду α не перевищує задане значення ρ:

$$R_3 = \min_{\Lambda(x)} \beta, \; / \; \alpha \leq \rho.$$

Тоді оптимальне РП перевірки гіпотез за критерієм Неймана-Пірсона зводиться до порівняння відношення правдоподібності з деяким порогом h :

$$\Lambda(\vec{x}) = \frac{P(\vec{x}/H_1)}{P(\vec{x}/H_0)} \begin{matrix} H_1 \\ > \\ < \\ H_0 \end{matrix} h, \qquad (1.6)$$

де сам поріг визначається з граничної умови заданого значення ймовірності помилки першого роду РП (1.6)

$$P(\Lambda(\vec{x}) \geq h/H_0) = \rho.$$

Розглядаються також і інші критерії якості прийняття рішень (критерій Вальда та ін.), які також за результатом спостереження вибіркових значень обраховують відношення правдоподібності, які будуть відрізнятися від (1.3-1.6)

Визначення 1.3. Критерії якості вибору статистичних рішень, засновані на використанні щільностей розподілу для опису випадкових величин і ймовірностей помилок правил прийняття рішень, будемо називати ***ймовірнісними критеріями якості***.

Ймовірнісні критерії якості знайшли своє широке застосування в багатьох прикладних задачах. Розвитку цього підходу та застосуванню вказаних критеріїв присвячені роботи як зарубіжних, так і вітчизняних вчених [13, 48-50 та ін.].

Варто зазначити, що класична теорія перевірки статистичних гіпотез не обмежує вибір розподілів, які можуть бути використані. Однак на практиці найбільш поширеним є застосування гаусових моделей розподілів. Це пояснюється зручністю використання математичного апарату для синтезу та аналізу систем. Для гаусових моделей сигналів і завад отримано важливі результати за допомогою ймовірнісних критеріїв якості.

Разом з тим, використання ймовірнісних критеріїв якості для інших типів розподілів, відмінних від гаусових, створює низку практичних і математичних складнощів [43-46]. Тому результати синтезу правил прийняття рішень для гаусових моделей сигналів і завад можуть бути неоптимальними, якщо ці моделі не відповідають нормальним розподілам. Це створює потребу в розробці та адаптації нових підходів і методів, які б адекватно враховували реальні розподіли випадкових процесів, що відрізняються від гаусових.

1.5. Аналіз моментних критеріїв якості перевірки статистичних гіпотез

Як показують дослідження, випадкові величини можна характеризувати не тільки через щільності ймовірностей розподілів, але і через послідовність моментів і кумулянтів різних порядків, що знайшло відображення в роботах [13, 45, 46, 67-69 та ін.]. Проте варто зазначити, що, незважаючи на розвинений математичний апарат моментно-кумулянтного опису випадкових величин і процесів, його практичне застосування обмежене в ряді сфер, зокрема при розв'язанні завдань виявлення та розрізнення сигналів у системах прийому і обробки даних.

Тому важливою є розробка теорії та методів створення статистик прийняття рішень, що базуються на моментно-кумулянтному описі випадкових величин. Це передбачає використання моментів функції прийняття рішення

(математичного сподівання та дисперсії статистики прийняття рішення) при гіпотезі та альтернативі для формулювання правил прийняття рішень.

Визначення 1.4. Критерії якості вибору статистик прийняття рішень, що ґрунтуються на моментах функцій прийняття рішення при гіпотезі та альтернативі, називатимемо ***моментними критеріями якості***.

Цей науковий напрям, що пов'язаний із застосуванням моментних критеріїв якості, активно розвивається в різних країнах, про що свідчать публікації [60-62 та ін.]. Основна ідея використання моментних критеріїв якості полягає в тому, що правила прийняття рішень задаються в класі функцій, відомих з точністю до певного набору параметрів, які вибираються оптимальними за моментними критеріями якості.

Наприклад, показано використання одного з моментних критеріїв якості — критерію відхилення (*deflection criterion*) [62], де статистика прийняття рішення задається у вигляді стохастичного полінома, невизначені параметри якого вибираються з максимуму функціонала.

$$D_1 = \frac{[E_1 - E_0]^2}{G_0},$$

де E_i, G_i — математичне сподівання та дисперсія розв’язувальної функції при гіпотезі H_i, $i = 0{,}1$.

Слід зазначити, що *критерій відхилення* запропонований на основі логічних міркувань, в яких відсутня математичний зв'язок з добре вивченими ймовірнісними критеріїв, і тому важко оцінити їх ефективність.

Інший математичний апарат, заснований на використанні стохастичних поліномів як статистики прийняття рішень та моментно-кумулянтного опису випадкових величин, був запропонований у роботах [85-89], де побудовано нові моментні критерії якості перевірки статистичних гіпотез.

Нехай маємо певне правило прийняття рішень (РП):

$$f(\vec{x}) = \gamma(\vec{x}) - k_0 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0, \qquad (1.7)$$

де константа k_0 обрана так, що

$$M_0 = E[f(\vec{x})/H_0] < 0, M_1 = E[f(\vec{x})/H_1] \geq 0.$$

В данном випадку M_0 и M_1 — математичне сподівання розв'язувальної функції $f(\vec{x})$ при гипотезах H_i, $i = 0,1$ відповідно.

Згідно нерівності Чебишева [90], ймовірності помилок першого і другого роду запишуться як верхні границі відношення дисперсії до квадрата математичного сподівання розв'язувальної функції $f(\vec{x})$:

$$\alpha = P[f(\vec{x}) \geq 0/H_0] =\leq \frac{G_0}{M_0^2} = \alpha_0, \quad \beta = P[f(\vec{x}) < 0/H_1] \leq \frac{G_1}{M_1^2} = \beta_0,$$

де $G_i = \int_{-\infty}^{\infty}[f(\vec{x}) - M_i]^2 p(\vec{x}/H_i)\Pi\ dx, \quad i = 0,1$ – дисперсія розв'язувальної функції $f(\vec{x})$ при гіпотезах H_i, $i = 0,1$, а константа k_0 обрана з умови

$$k_0 = \frac{1}{2}(E_0 + E_1),$$

де E_i — математичне сподівання $\gamma(\vec{x})$ при гіпотезах H_i, $i = 0,1$.

Тоді можна записати наступну нерівність

$$R_1(\alpha, \beta) = \alpha + \beta \leq \alpha_0 + \beta_0 = \frac{G_0}{M_0^2} + \frac{G_1}{M_1^2} = \Phi_1(G, M),$$

Показано [85-89], що для даного виду k_0 функція $\Phi_1(G, M)$ прийме вид $\Phi_1(G, M) = 4Ku1(E, G)$,

де

$$Ku1(E, G) = \frac{G_0[\gamma] + G_1[\gamma]}{(E_1[\gamma] - E_0[\gamma])^2}. \quad (1.8)$$

Функціонал Ku1(E,G) (1.8) обраний за критерій якості вибору РП виду (1.7). Цей критерій називається ***критерієм верхньої границі ймовірностей помилок***, детальний огляд якого та модифікація для статистично залежних вибіркових значень розглянута в розділі 3.

Як показано [88, 89], що при великих обсягах вибіркових значень ймовірності помилок РП (1.7) прямують до нормального закону розподілу, отже, для побудови розв'язувальних статистик можна використовувати ще один моментний критерій якості, який також безпосередньо пов'язаний з

ймовірностями помилок першого і другого роду. Такий критерій називається ***критерієм асимптотичної нормальності*** і отримав свій розвиток у ряді робіт [88, 89 та ін.]

$$Yu(E,G) = \frac{\left(G_0^{0.5}+G_1^{0.5}\right)^2}{(E_1-E_0)^2}. \quad (1.9)$$

Запропонований критерій якості відрізняється від критерію (1.8), пов'язаний з ймовірнісними критеріями якості та отриманий у припущенні використання великих обсягів вибіркових значень.

Запропоновані критерії якості (1.8) та (1.9) ґрунтуються на мінімізації суми ймовірностей помилок першого та другого роду РП, добре зарекомендували себе при вирішенні низки практичних завдань, показали здатність отримувати прості високоефективні РП при розгляді адитивної та адитивно-мультиплікативної взаємодії сигналів із негаусовими завадами [91-100].

Проте залишаються відкритими питання щодо застосування такого підходу і запропонованих моментних критеріїв якості для обробки статистично залежних вибіркових значень, їх модифікації при застосуванні сумісних моментів та кумулянтів для опису кореляційних залежностей досліджуваних процесів, побудови оптимальних розв’язувальних правил за цими критеріями якості та ін. Ці питання потребують подальшого дослідження та аналізу і розглянуті в наступних розділах дисертаційної роботи.

1.6. Висновки до 1 розділу

Аналіз роботи інформаціно-телекомунікаційних систем, систем контролю, моніторингу, управління та ін. вказує на необхідність розробки нових методів математичного та комп’ютерного моделювання процесів виявлення випадкових сигналів у системах прийому та обробки даних, зокрема при застосуванні статистик вищих порядків на основі моментно-кумулянтного підходу до опису випадкових величин.

Дослідження демонструють, що теорія перевірки статистичних гіпотез, як складова теорії статистичної обробки даних, є добре розробленою і не накладає обмежень на розподіли випадкових величин і процесів. Водночас, з практичної

точки зору, через нормалізацію багатьох природних процесів і зручність використання математичного апарату, найбільш поширені гаусові моделі досліджуваних випадкових величин, що не завжди точно відображають реальні процеси. Застосування класичної теорії, заснованої на ймовірнісних критеріях якості перевірки гіпотез для негаусових моделей сигналів і завад, створює низку труднощів через складність алгоритмічної реалізації відповідних процесів обробки, особливо при врахуванні кореляційних зв’язків досліджуваних вибіркових значень.

Для вирішення поставлених завдань пропонується інший підхід, який потребує свого подальшого дослідження і розвитку. Застосування моментно-кумулянтних моделей для опису корельованих випадкових величин має ряд особливостей, що вимагають проведення теоретичних досліджень та розробок для врахування статистичних зв'язків між випадковими величинами. Крім того, необхідно модифікувати моментний критерії якості перевірки статистичних гіпотез побудови РП та проведення аналізу їх ефективності і рекомендацій щодо практичної реалізації.

Отже, розвиток і дослідження моделей негаусових процесів та методів їх статистичної обробки є важливими та актуальними. В результаті, виникає науково-технічне завдання розробки та застосування методів і засобів математичного та комп'ютерного моделювання процесів обробки сигналів на фоні корельованих негаусових завад для вирішення завдань аналізу, синтезу, проектування, побудови та функціонування в системах спостереження, контролю, діагностики та управління.

Список використаних джерел до розділу 1

1. Згуровський М.З., Панкратова Н.Д. Системный анализ: методология. Проблемы. Приложения. 2-е издание, переработанное и дополненное, К., «Наукова думка», 2007, 726с.
2. Верлань А.Ф., Дячук А.А., Палагин В.В. Методы математической редукции моделей динамических систем. – Киев: Наукова думка, 2019. – 311 с.

3. Томашевський В.М. Моделювання систем. – К. : Видавнича группа BHV, 2005. – 352с.
4. Стеценко І.В. Моделювання систем: навч. посіб. [Електронний ресурс, текст] / І.В. Стеценко ; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси : ЧДТУ, 2010. – 399 с. ISBN 978-966-402-073-9
5. Тимченко А.А. Основи системного проектування та системного аналізу складних об'єктів: Підручник для студентів вищих закладів освіти /За ред.В.І.Бикова – К.:Либідь, 2000. – 270с.
6. Обод І.І., Заволодько Г.Е., Свид І.В. Математичне моделювання систем: навчальний посібник / За редакцією І.І. Обода – Харків : НТУ «ХПІ», Друкарня МАДРИД, 2019. – 268 с.
7. Палагін В.В. Статистичне оцінювання параметрів негаусових корельованих випадкових процесів: монографія / В. В. Палагін, О. В. Івченко, Д. А. Вєдєрніков; Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси: видавець ФОП Гордієнко Є.І., 2018. – 199 с.
8. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень. Частина 1: навчальний посібник / Квєтний Р.Н., Богач І.В., Бойко О.Р., Софина О.Ю., Шушура О.М.; за заг. ред. Р.Н. Квєтного. – Вінниця: ВНТУ, 2012. – 193 с.
9. Верлань А.Ф. Моделирование процессов формирования и обработки акустических когерентных изображений / А.Ф. Верлань, И.М. Гвоздева, В.Ф. Миргород // Электронное моделирование. — 2004. — Т. 26, №5. — С.111 — 118.
10. Безрук В.М. Теоретические основы проектирования систем распознавания сигналов для автоматизированного радиоконтроля: монография / В.М. Безрук, Г.М. Певцов - Х.: Коллегиум, 2007 - 430 с.
11. Li, Yanjun, Mathematical Modeling Methods and Their Application in the Analysis of Complex Signal Systems, *Advances in Mathematical Physics*, 2022, 1816814, 10 pages, 2022. https://doi.org/10.1155/2022/1816814
12. Kostyria O. O., Hryzo A. A., Khudov, H. V., Dodukh, O. M., & Solomonenko, Y. S. (2024). Mathematical model of current time of signal from serial combination

linear-frequency and quadratically modulated fragments . *Radio Electronics, Computer Science, Control*, (2), 24. https://doi.org/10.15588/1607-3274-2024-2-3

13. Палагін В.В. Математичні моделі, методи та засоби виявлення і розрізнення сигналів на фоні негаусових завад: дис. д-ра техн. наук : 01.05.02. Київ, 2013. 552 с.
14. Калюжний О.Я. Математичні алгоритми приймання та оброблення сигналів. // Навчальний посібник, Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна, 2021. – 302 с [Онлайн]. Доступно: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/48420/1/Kaliuzhnyi_Posibnyk_2022.pdf .
15. Коваль О.В. Метод підвищення завадостійкості системи радіозв'язку в умовах дії негаусових завад. // Військово-технічний збірник, вип. 21, с. 45-52, 2019. DOI: https://doi.org/10.17721/2519-481X/2020/66-09
16. Безрук В.М. Інформаційні та телекомунікаційні технології розпізнавання сигналів у телемедицині / В.М. Безрук, І.П. іколаєв, Д.В.Чеботарьова // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Інформаційні системи та мережі. - 2014. - № 805. - С. 17-22. - Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/VNULPICM_2014_805_4
17. Барингольц Т.В., Демин Д.В., Жук С.Я. і Цисарж В.В. 2019. Адаптивный алгоритм сопровождения маневрирующих целей в сложной помеховой обстановке для многофункциональной радиолокационной станции с фазированной антенной решеткой. Вісті вищих учбових закладів. Радіоелектроніка. 62, 7 (Лип 2019), 413–426. DOI: https://doi.org/10.20535/S0021347019070021.
18. Neuimin O.S., Zhuk S.Y. Sequential detection of target trajectory tracking loss using the decision statistics of pips. Radioelectron.Commun.Syst. 57, 352–361 (2014). DOI: https://doi.org/10.3103/S0735272714080032
19. Michael H. Herzog, Gregory Francis, Aaron Clarke: Experimental Design and the Basics of Statistics: Signal Detection Theory (SDT). Springer. (2019). https://doi.org/10.1007/978-3-030-03499-3.
20. Kay, S.M.: Fundamentals of Statistical Signal Processing. Prentice Hall PTR, NJ (2008).

21.Самборський І.І., Шолохов С.М., Юрченко О.В., Ніколаєнко Б.А., Основи цифрової обробки сигналів: навчальний посібник. Київ: ІСЗЗІ КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 171 с.

22.D.Sundararajan. Digital Signal Processing. Springer Cham. (2024) DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-56740-7.

23.Кичак, В. М. Методи та пристрої обробки радіосигналів бортових авіаційних систем посадки: монографія / В. М. Кичак, Ю. М. Воловик, А. Ю. Воловик. – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 208 с.

24.Гумен М. Б. Основи теорії процесів в інформаційних системах: підручник (у 2-х кн.). Кн.1. Аналіз детермінованих процесів /М. Б. Гумен, В. М. Співак, С. К. Мещанінов, Г. Г. Власюк, Т. Ф. Гумен. – 2-е вид., зі змінами і доповн. – К: Кафедра, 2017. − 281 с.

25.Методы параметрической и непараметрической обработки нестационарных сигналов с использованием свойств кумулянтных функций третьего порядка и биспектра [Текст] : [монография] / А. А. Зеленский, В. В. Науменко, А. В. Тоцкий ; Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского "Харьк. авиац. ин-т". - Харьков : ХАИ, 2016. - 339 с.

26.Файнзильберг Л.С. Информационные технологии обработки сигналов сложной формы. Теория и практика [Текст] / Л. С. Файнзильберг ; НАН Украины, Междунар. науч.-учеб. центр информац. технологий и систем. - К. : Наукова думка, 2008. - 334 с.

27.Бабак В.П. Обробка сигналів [Текст]: підруч. для студ. техн. спец. вищих закл. освіти / В. П. Бабак [та ін]. - 2.вид., перероб. й доп. - К. : Либідь, 1999. - 496 с.

28.Драган Я.П. Прикладна теорія випадкових процесів і полів / [Я.П. Драган, К.К. Васільєв, В.А. Казаков и др.]; під ред. Я.П. Драгана, В.О. Омельченко. — Харків; Львів; Тернопіль, 1993. — 248 с.

29.Методы и алгоритмы восстановления сигналов и изображений: монография / А.В. Верлань, И.О. Горошко, Е.Ю.Карпенко и др. — К.:НАН Украины, Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова, 2011. – 386 с.

30.Яновський Ф.Й. Радіолокаційні системи повітряних суден: підруч. / Ф.Й.Яновський. - К. : НАУ, 2012. - 688 с.

31.Свид І.В. Обробка радіолокаційної інформації систем спостереження повітряного простору: монографія. / І. В. Свид. Дніпро : ЛІРА ЛТД, 2022. 224с.
32.G. A. Fabrizio, "Over the horizon radar," 2008 IEEE Radar Conference, Rome, Italy, 2008, pp. 1-2, doi: 10.1109/RADAR.2008.4721156.
33.Системы радиосвязи / А.А. Зеленский, В.Ф. Солодовник. – Учеб. пособие. Ч. 1. - Харьков: Нац. аэрокосмический ун-т "Харьк. авиац. ин-т", 2002. – 93 с.
34.Ніколаєнко Б.А., Пелешок Є.В. Сучасні супутникові системи зв'язку: навч. посібник. К.: ІСЗЗІ КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 146 с.
35.Супутникові радіонавігаційні системи: навчальний посібник / авт. кол.: І.В.Корнієнко, В.І.Богом'я, О.І.Терещук, С.П.Корнієнко. – Чернігів : Черніг. нац. технол. ун-т, 2014. – 280 с.
36.Системы радиосвязи / А.А. Зеленский, В.Ф. Солодовник. – Учеб. пособие. Ч. 2. - Харьков: Нац. аэрокосмический ун-т "Харьк. авиац. ин-т", 2002. – 63 с.
37.Системы радиосвязи / А.А. Зеленский, В.Ф. Солодовник. – Учеб. пособие. Ч. 3. - Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т "Харьк. авиац. ин-т", 2003. – 90 с.
38.Tanaka T. Statistical mechanics of CDMA multiuser demodulation. Europhysics Letters, Volume 54, Number 4 DOI: https://doi.org/10.1209/epl/i2001-00306-3
39.He K., He L., Fan L., Deng Y., Karagiannidis G.K., and Nallanathan A. Learning Based Signal Detection for MIMO Systems with Unknown Noise Statistics. arXiv preprint arXiv:2101.08435, 2021. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/2101.08435.
40.Benson B. et al. Design of a Low-Cost Underwater Acoustic Modem," in IEEE Embedded Systems Letters, vol. 2, no. 3, pp. 58-61, Sept. 2010, DOI: https://doi.org/10.1109/LES.2010.2050191.
41.Haikin L.M., Kushnir A.F., Dainty A.M. Erratum: Combined Automated and Off-line Computer Processing System for Seismic Monitoring with Small Aperture Arrays. Seismological Research Letters, 1998; 69 (5): 405. DOI: https://doi.org/10.1785/gssrl.69.5.405
42.Vakaliuk T.A., Pilkevych I.A., Hordiienko Y.O., Loboda V.V., & Saliy A.O. Detection of a seismic signal by a three-component seismic station and determination of the seismic event center . Radio Electronics, Computer Science, Control, (4), 175. (2024). DOI: https://doi.org/10.15588/1607-3274-2023-4-16

43. Kassam S. Signal Detection in Non-Gaussian Noise. Springer Verlag, New York (2011).
44. D.Middleton: Non-Gaussian Statistical Communication Theory, a Jonn Willey & Sons, 2012.
45. Kunchenko Y.: Polynomial Parameter Estimations of Close to Gaussian Random Variables. Shaker Verlag, Aachen (2002).
46. Y.Kunchenko: Stochastic Polynomials, Naukova Dumka, 2006.
47. Duana F., Chapeau-Blondeaub F., Abbott D.: Non-Gaussian noise benefits for coherent detection of narrow band weak signal, Physics Letters A. 378, pp.1820–1824 (2014).
48. Van Trees, H., Bell, K., Tiany, Z.: Detection Estimation and Modulation Theory. Wiley; 2nd edition, New Jersey (2013).
49. Kay S.M.: Fundamentals of Statistical Signal Processing. Prentice Hall PTR, NJ (2008).
50. Hautus, M.J., Macmillan, N.A., & Creelman, C.D.: Detection Theory: A User's Guide (3rd ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003203636 , 2021 (2021)
51. Michael H. Herzog, Gregory Francis, Aaron Clarke.: Experimental Design and the Basics of Statistics: Signal Detection Theory (SDT). Springer. (2019). https://doi.org/10.1007/978-3-030-03499-3.
52. L. D. Chamain, P. Dharmawansa, S. Atapattu, and C. Tellambura, "Detection of a Signal in Colored Noise: A Random Matrix Theory Based Analysis," arXiv preprint arXiv:1901.09568, 2019. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/1901.09568.
53. L. D. Chamain, P. Dharmawansa, S. Atapattu, and C. Tellambura, "Eigenvalue Based Detection of a Signal in Colored Noise: Finite and Asymptotic Analyses," arXiv preprint arXiv:1902.02483, 2019. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/1902.02483.
54. Artyushenko V.M. and Volovach V.I. Using Polygaussian Models to Describe Random Signals and Noises with the non-Gaussian Nature of Distribution. *2020* International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon), 2020, pp.1-6.
55. Чепинога А. В., Заболотний С. В., Бурдукова Е. В. Оценивание параметров полигауссовых моделей методом максимизации полинома. Eastern-European

Journal of Enterprise Technologies, 2(4(68), 43–46. (2014). https://doi.org/10.15587/1729-4061.2014.23156

56. Primak S., Lyandres V., Kontorovich V. Markov models of non-Gaussian exponentially correlated processes and their applications. Phys. Rev. E 63, 061103 – Published 21 May, 2001. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevE.63.061103

57. Guo, G., Mandal, M., Jing, Y.: A robust detector of known signal in non-Gaussian noise using threshold systems. Signal Processing, vol. 92, issue 11, 2676-2688 (2012). https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2012.04.014.

58. Duana, F., Chapeau-Blondeau, F., Abbott, D.: Non-Gaussian noise benefits for coherent de-tection of narrow band weak signal. Physics Letters A., vol. 378., 1820–1824 (2014). https://doi.org/10.1016/j.physleta.2014.04.061

59. Hari, V.N., Anand, G.V., Premkumar, A.B., Madhukumar, A.S.: Design and performance analysis of a signal detector based on suprathreshold stochastic resonance. Signal Processing, vol.92, issue 6, 1745–1757 (2012). https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2012.01.013.

60. Rousseau, D., Anand, G.V., Chapeau-Blondeau, F.: Noise enhanced nonlinear detector to im-prove signal detection in non-Gaussian noise. Signal Processing, vol. 86, issue 11, 3456–3465 (2006). https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2006.03.008.

61. Izzo, L., Tanda, M.: Asymptotically optimum diversity detection in correlated non-Gaussian noise. IEEE Transactions on Communication, vol. 44, issue 5, 542 - 545 (1996). https://doi.org/10.1109/26.494296.

62. Picinbono, B.: On deflection as a performance criterion in detection. IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol. 31, no. 3, 1072–1081 (1995). https://doi.org/10.1109/7.395235.

63. Gancho Vachkov.: Online detection of deviation in performance of multichannel dynamical processes. no.5, 1681–1686 (2016). https://doi:10.1109/ICMA.2013.6618168.

64. Solc T, Mohorcic M, Fortuna C.: A methodology for experimental evaluation of signal detection methods in spectrum sensing. PLoS ONE 13(6): 1-31 (2018). https://doi.org/10.1371/journal. pone.0199550.

65. Biglieri, E., Lops, M.: Linear–Quadratic Detectors for Spectrum Sensing. Journal of Communications and Networks, vol. 16, no.5, 485-492 (2014). https://doi.org/10.1109/JCN.2014.000087.
66. A. Stuart and K. Ord, Kendall's Advanced Theory of Statistics, Distribution Theory, Wiley, vol. 1, 2010.
67. A.I. Krasilnikov, V.S. Beregun, T.A. Polobyuk and A.I. Krasilnikov. Cumulant methods in the problems of noise diagnostics of heat-and-power equipment. Kyiv: Osvita of Ukraine, 2019.
68. V.S. Beregun and A.I. Krasilnikov. Research of Excess Kurtosis Sensitiveness of Diagnostic Signals for Control of the Condition of the Electrotechnical Equipment. Technical Electrodynamics, no. 4, pp. 79-85, 2017.
69. A.I. Bereznytskyi. Detection of Noise Signal in the Additive Mixture Based on the Second-Order Cumulant. Electronic and Acoustic Engineering, vol. 4, no. 2, June 2021.
70. A. Krasilnikov, V. Beregun and O. Harmash, "Analysis of Estimation Errors of the Fifth and Sixth Order Cumulants", 2019 IEEE 39th International Conference on Electronics and Nanotechnology ELNANO 2019 - Proceedings, pp. 754-759, 2019.
71. V.Beregun, A.Krasilnikov. The use of cumulant methods for distinction of diagnostic signals with gamma distribution // 2020 IEEE 40th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO), pp.741-746.
72. Lin, C., Chang, Q., Li, X.: A Deep Learning Approach for MIMO-NOMA Downlink Signal Detection. Sensors, 19, 2526 (2019). https://doi.org/10.3390/s19112526.
73. Keawin, C.; Innok, A.; Uthansakul, P. Optimization of Signal Detection Using Deep CNN in Ultra-Massive MIMO. *Telecom* **2024**, *5*, 280-295. https://doi.org/10.3390/telecom5020014
74. Arun Kumar, Nishant Gaur, Manoj Gupta, Aziz Nanthaamornphong, Implementation of the deep learning method for signal detection in massive-MIMO-NOMA systems, Heliyon, Volume 10, Issue 3, 2024, e25374, ISSN 2405-8440, https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2024.e25374.

75.B. Lin, Q. Lai, Z. Ghassemlooy, X. Tang A machine learning based signal demodulator in NOMA-VLC J. Lightwave Technol., 39 (10) (2021), pp. 3081-3087, 10.1109/JLT.2021.3058591

76.Zha, X.; Peng, H.; Qin, X.; Li, G.; Yang, S. A Deep Learning Framework for Signal Detection and Modulation Classification. *Sensors* **2019**, *19*, 4042. https://doi.org/10.3390/s19184042

77.Smirnov, D., Zorin, O., Palahina, E., Ivchenko, O., Palahin, V. (2024). Development of Moment Quality Criterion and Polynomial Methods for Signals Detection and Distinction in Non-Gaussian Noise. In: Faure, E., *et al.* Information Technology for Education, Science, and Technics. ITEST 2024. Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies, vol 221. pp.368–381. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-71801-4_27

78.Volodymyr Palahin, Oleksandr Zorin. Models and Methods for RZ-signals distinction in non-Gaussian noise for information-measurement systems. Journal of Electrical Engineering Vol. 75, No. 5, 2024, pp. 372-382 DOI: https://doi.org/10.2478/jee-2024-0045

79.Баранов П.Е. Адаптивный рекуррентный алгоритм компенсации помех с произвольными корреляционными матрицами / П.Е. Баранов // Радиоэлектроника. — 1990. — Т. 33, № 4. — С. 10 — 14. — (Изв. высш. учеб. заведений).

80.Баранов П.Е. Управляемое обнаружение сигналов в условиях комплекса разнородных помех: дис. д–ра техн. наук.: спец. 05.12.13 «Системы, сети и устройства телекоммуникаций»; 05.12.04 «Радиотехника, в том числе системы и устройства телевидения» / П.Е. Баранов — Одесса, ОПИ, 1993. — 51 с.

81.Peterson J. Observation and modeling of seismic background noise / J. Peterson // USGS Tech. Rept. Open-Files, 93-322. — Albuquerque, NM, 1993. — 95 p.

82.Теорія радіолокаційних систем (видання друге): підручник/ Б.Ф.Бондаренко, В.В.Вишнівський, В.П.Долгушин та ін.; за заг.ред. С.В.Лєнкова. – К. Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2011.- 383с.

83.Теорія радіолокаційних та радіонавігаційних систем: навч. посіб. для студ. ВНЗ за напрямком "Радіотехніка" / Я.І.Лепіх; Одеська нац. морська акад. Одеса: Екологія, 2008. -224 с.

84.Прокопенко І.Г. Статистична обробка сигналів: навч. посіб. МОНУ/ І.Г. Прокопенко. — К.: НАУ, 2011. — 220 с.

85.Кунченко Ю.П. Применение функциональных полиномов для обнаружения радиосигналов на фоне негауссовских помех / Ю.П. Кунченко, П.А. Мельяновский, В.М. Слюсаренко — Харьков, 1988. — 35 с. — (Препр. №363. АН УССР. Ин-т радиофизики и электроники).

86.Kunchenko Y.P. A Moment Performance Criterion of a Decision Making for Testing Simple Statistical Hypothesis / Y.P. Kunchenko // IEEE, International Symposium on Information Theory, June-July, 1997. — Ulm, 1997 — 231 p.

87.Кунченко Ю.П. Разработка нелинейных обнаружителей сигналов при негауссовых помехах, оптимальных по дисперсионным критериям / Ю.П. Кунченко, С.С. Мартыненко, В.В. Палагин // Труды 2-ой междунар. науч.-техн. конференции по радиосвязи, звуковому и телевизионному вещанию (УкрТелеКом-95), 1995г.: тезисы докл.. — Одесса, 1995. — С. 440 — 443.

88.Кунченко Ю.П. Критерий асимптотической нормальности проверки простых статистических гипотез / Ю.П. Кунченко, В.В. Палагин // Праці УНДІРТ. — Одеса, 1998. — № 3 — С. 66 — 70.

89.Палагин В.В. Разработка алгоритмов обнаружения радиосигналов на фоне негауссовских помех / В.В. Палагин // Праці УНДІРТ. — Одеса, 1998. — № 3 — С. 82 — 85.

90.Гихман И.И. Теория вероятностей и математическая статистика / И.И. Гихман, А.В. Скороход, М.И. Ядренко — К.: Вища шк., 1988. — 439 с.

91.Volodymyr Palahin, Oleksandr Zorin. Models and Methods for RZ-signals distinction in non-Gaussian noise for information-measurement systems. Journal of Electrical Engineering Vol. 75, No. 5, 2024, pp. 372-382 DOI: https://doi.org/10.2478/jee-2024-0045

92.D.Smirnov, V.Chepynoha, O.Zorin, A.Honcharov, E.Palahina, V.Palahin. The Methods of Joint Signal Discrimination and Parameters Estimation in non-Gaussian Noise // IEEE 4-th International Conference on Advanced Trends in Information Theory – 2022, Kyiv, Ukraine, 2022, pp. 23-27, DOI: https://doi.org/10.1109/ATIT58178.2022.10024190.

93.Palahina E., Kunchenko-Kharchenko V., Tonkopriad S., Push I., Smirnov D., Palahin V. Signal detection in additive-multiplicative non-Gaussian noise // Праці VII Міжнародної науково-практичної конференції «Обробка сигналів і негауссівських процесів», присвяченої пам'яті професора Ю.П.Кунченка: Тези доповідей. – Черкаси: ЧДТУ, 2021. – с.123-124. URL:https://er.chdtu.edu.ua/handle/ChSTU/789

94.Палагін, В.В. і Зорін, О.С. 2023. Моделі та методи розрізнення RZ-сигналів в інформаційно-вимірювальних системах на фоні асиметричних негаусових завад. Вісник Вінницького політехнічного інституту. 4 (Серп. 2023), 78–86. DOI: https://doi.org/10.31649/1997-9266-2023-169-4-78-86

95.V.Palahin, J.Juhár, S.Leleko, S.Polozhaenko, E.Palahina. Computer Simulation of Signal Detection in non-Gaussian Noise with the Neyman-Pearson Moment Quality Criterion. // 9th International IEEE Conference Dependable Systems, Services and Technologies DESSERT'2018 UKRAINE, KIEV, MAY 24-27, 2018, pp.639-644. DOI: https://doi.org/10.1109/DESSERT.2018.8409203

96.V.Palahin, J.Juhár, O. Zorin, D.Viediernikov, E. Palahina. Computer Modeling of Noise Signals Proccesing System in non-Gaussian Noise // IEEE 38th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO-2018), April 24-26, 2018, pp.658-662 DOI: DOI: 10.1049/iet-spr.2016.014210.1109/ELNANO.2018.8477442

97.В.В. Палагин, С.А. Лелеко, А.С. Зорин. Компьютерное моделирование обнаружения сигналов на фоне негауссовских помех по моментному критерию типа Неймана-Пирсона // Наукоемкие технологии в инфокоммуникациях: обработка информации, кибербезопасность, информационная борьба : Монография / под общей редакцией В. М. Безрука, В. В. Баранника. Х. : Издательство «Лидер», 2017., с.276-290

98.Палагін В.В, Палагіна О.А., Зорін О.С. Комп'ютерне моделювання системи обробки шумових сигналів на фоні негаусових завад / В.В. Палагін, Палагіна О.А., Зорін О.С., // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць – Кам.-Подільський: Кам.-Подільський нац. ун-т ім. Івана Огієнка, 2017. – Вип. 16. – С. 104-113.

99. V.Palahin, J.Juhár. Joint Signal parameters estimation in non-Gaussian noise by the method of polynomial maximization. – Journal of Electrical Engineering, Vol. 67 (2016), no.3, 217–221, 2016. DOI:10.1515/jee-2016-0031

100. Elena Palahina, Volodymyr Palahin, “Signal Detection in Additive-Multiplicative non-Gaussian Noise Using Higher Order Statistics,” in Radioelectronika 2016, 26-th International Conference (19-20 April 2016, Kosice, Slovak Republic), 262-267pp., 2016 DOI:10.1109/RADIOELEK.2016.7477367

РОЗДІЛ 2
МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ВИЯВЛЕННЯ ПОСТІЙНИХ СИГНАЛІВ НА ФОНІ КОРЕЛЬОВАНИХ НЕГАУСОВИХ ЗАВАД

2.1. Математичні моделі негаусових корельованих випадкових процесів

Корельовані негаусові процеси – це випадкові процеси, характеристики яких виходять за рамки нормального розподілу і включають складніші кореляційні зв'язки [1-5]. Для опису таких процесів використовують різноманітні математичні моделі, здатні відобразити як кореляційну структуру, так і асиметрію або ексцес розподілу. До ключових методів опису таких процесів належать як багатомірні PDF[5, 6], так і моментно-кумулянтні моделі на основі статистик вищих порядків (higher-order statistics) [7-10], які дозволяють відобразити не лише середнє значення та дисперсію, але й більш складніші статистичні характеристики [11-19].

Багатовимірна функція щільності ймовірності (MD PDF - *MultiDimensional Probability Density Function*) є загальним математичним представленням статистично залежного випадкового процесу ξ(t). Наприклад, MD PDF використовується для опису залежностей між кількома випадковими величинами, таких як у багатовимірному нормальному розподілі, який є поширеним прикладом багатовимірної щільності ймовірності [1, 2, 5, 6]:

$$f_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{X^T}|\Sigma|^{-1}\boldsymbol{X}\right),$$

де Σ — матриця коваріацій між випадковими величинами, а $\boldsymbol{X}$ **-** вектор значень цих величин.

MD PDF слугує універсальною математичною моделлю для опису статистично залежного випадкового процесу ξ(t). Вона відображає ймовірність того, що випадкові величини, які є компонентами процесу, приймають певні значення в багатовимірному просторі. Це дає змогу враховувати статистичну залежність між компонентами процесу, а також

описувати кореляційні властивості складних сигналів і процесів, де дані не обмежуються лише одновимірними розподілами.

MD PDF використовується для моделювання випадкових процесів, у яких залежність між змінними не обмежується простими кореляціями, як у гаусових процесах, а може бути набагато складнішою. У цьому контексті багатовимірна функція щільності ймовірності дозволяє більш точно врахувати всі залежності, включно з нелінійними та негаусовими характеристиками, що є важливим при аналізі сигналів в умовах завад або інших нелінійних взаємодій.

MD PDF використовується для моделювання залежностей між різними параметрами сигналів, наприклад, при аналізі багатоканальних сигналів. У таких випадках, де сигнали можуть бути корельованими або взаємодіяти з негаусовими завадами, багатовимірна функція щільності дозволяє точніше оцінити ймовірність наявності сигналу та його параметри в умовах шуму. В системах автономних роботів MD PDF застосовується для опису та прогнозування взаємодії між різними сенсорами та елементами управління. MD PDF використовується в задачах, пов'язаних із розпізнаванням зображень або аналізом відео на фоні різноманітних шумових факторів, де одночасно можна обробляти різні характеристики зображення, такі як кольори, текстури, форми або об'єкти та ін.

Разом з тим, математичні моделі опису випадкових процесів на основі MD PDF мають ряд обмежень в своєму практичному застосуванні. Наприклад, MD PDF не завжди може бути відома і можуть виникнути деякі труднощі з оцінкою її параметрів $(\vartheta_1, \vartheta_2, \ \ldots, \vartheta_n)$. Застосування MD PDF вимагає високої обчислювальної складності - обчислення багатовимірної функції щільності ймовірності, особливо для великих вимірів (наприклад, коли число змінних n дуже велике), може вимагати значних обчислювальних ресурсів. У багатьох випадках дані для оцінки багатовимірної функції щільності ймовірності можуть бути обмеженими або неповними. Це особливо важливо, коли ми

працюємо з малими вибірками, що може призвести до великих похибок у побудові MD PDF та ін.

Альтернативний підхід до опису корельованих негаусових процесів, заснований на моментно-кумулянтному представленні, дозволяє гнучко враховувати статистичну залежність між випадковими величинами, що значно розширює можливості класичних методів обробки сигналів. Зокрема, такий підхід надає змогу описувати складні, нелінійні взаємодії між сигналами, а також враховувати особливості розподілу, які не можна повністю охарактеризувати гаусовими моделями. Завдяки застосуванню кумулянтів та моментів вищих порядків, можна отримати більш повну інформацію про структуру кореляцій та негаусові особливості досліджуваних сигналів, що підвищує точність і надійність алгоритмів для виявлення та оцінювання параметрів сигналів. Таке представлення також спрощує побудову моделей в умовах взаємодії сигналів із негаусовими завадами, зокрема в задачах виявлення та розрізнення сигналів.

Варто зазначити, що, незважаючи на наявні рішення щодо застосування моментно-кумулянтного підходу для опису випадкових процесів, залишаються невирішеними питання опису статистично залежних негаусових процесів і розробки алгоритмів виявлення сигналів при взаємодії з негаусовими завадами. Це вимагає додаткових досліджень та розробок, які були реалізовані та викладені в публікаціях щодо оцінювання невідомих параметрів сигналів на фоні корельованих негаусових завад [6, 20 - 31], так і для задач виявлення [32- 40].

Розглянемо представлення одновимірних (1D) та двовимірних (2D) PDF через моментно-кумулянтний опис випадкових процесів [5, 32, 33]. Одновимірні (1D) моменти m_i порядка i випадкової величини ξ визначаються за допомогою PDF $p(\xi)$

$$m_i = \mathrm{E}\left(\xi^{\mathrm{i}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^{\mathrm{i}} \mathrm{p}(\xi)\mathrm{dx}. \qquad (2.1)$$

MD PDF може представляти статистично залежні випадкові величини [5, 6]. При розв'язанні практичних задач важливою характеристикою, яка описує статистичний зв'язок між двома випадковими величинами, є двовимірний ймовірнісний розподіл [5, 6]. У цьому контексті випадкову величину з будь-яким статистичним зв'язком вибіркових значень можна характеризувати не тільки одновимірними, а й сумісними кумулянтами, які виражаються через сумісні моменти:

$$E\left(\xi_1{}^{i}\xi_2{}^{j}\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\xi_1{}^{i}\xi_2{}^{j}p(\xi_1,\xi_2)dx. \qquad (2.2)$$

Можна уявити, що існують вибіркові значення стаціонарного випадкового процесу, які розглядаються як окремі випадкові значення. На практиці широко використовуваним прикладом статистично залежних значень є співвідношення для двох випадкових величин. У цьому випадку можна використовувати 2D PDF. Розглянемо випадок двох незалежних випадкових змінних ξ і η з p_ξ і p_η PDF відповідно. Тоді початкові моменти порядку i мають наступний вид:

$$m_i^{(\xi)} = E\xi^i = \int_{-\infty}^{+\infty} x^i\, p_\xi(x)dx,\ m_i^{(\eta)} = E\eta^i = \int_{-\infty}^{+\infty} y^i\, p_\eta(y)dy. \qquad (2.3)$$

Для негаусових статистично незалежних випадкових величин (з нульовим середнім значенням та дисперсією χ_2) зв’язок між початковими моментами m_i та кумулянтами χ_i до четвертого порядку має наступний вид:

$$m_1 = 0, m_2 = \chi_2, m_3 = \chi_3, m_4 = \chi_4 + 3\chi_2^2. \qquad (2.4)$$

Як відомо, для гаусових процесів кумулянтні коефіцієнти третього та вищих порядків $(\chi_3, \chi_4,\ \ldots)$ дорівнюють нулю.

Якщо випадкові величини ξ і η є статистично залежними, тоді окрім початкових моментів вони мають також змішані (сумісні) моменти різних порядків.

Визначення 2.1. Сумісним моментом двох випадкових величин ξ і η розмірності (*ij*) будемо називати величину, що дорівнює математичному

сподіванню добутку i-го степеня випадкової величини ξ та j-го степеня випадкової величини η:

$$m_{ij}^{(\xi,\eta)} = E\xi^i\eta^j = \int_{-\infty}^{+\infty} x^i y^j \, p(x,y)dxdy, \qquad (2.5)$$

де $p(x,y)$ – сумісний розподіл випадкових величин ξ та η.

Враховуючи співвідношення (2.5) можемо написати наступну рівність:

$$m_i^{(\xi)} = m_{i0}^{(\xi,\eta)}, m_j^{(\eta)} = m_{0j}^{(\xi,\eta)}, m_{i+j}^{(\xi)} = m_{ij}^{(\xi,\xi)}, m_{i+j}^{(\eta)} = m_{ij}^{(\eta,\eta)}.$$

Випадкові величини ξ і η мають спільні моменти розмірності (ij), оскільки вони залежать один від одного.

Для опису статистичного зв'язку між вибірковими значеннями будуть використані сумісні моменти m_{ij} та кумулянти χ_{ij} розмірності (ij) до четвертого порядку включно, які мають наступні співвідношення [6, 32, 33]:

$$m_{11} = \chi_{11}, m_{12} = \chi_{12}, m_{13} = \chi_{13} + 3\chi_2\chi_{11}, m_{22} = \chi_{22} + \chi_2^2 + 2\chi_{11}^2. \qquad (2.6)$$

Очевидно, що аналогічно можна визначити сумісні моменти для трьох і більше випадкових величин, що дозволяє досліджувати більш складні кореляційні залежності.

Для опису кореляційних властивостей досліджуваних випадкових величин окрім початкових моментів i-го порядку та сумісних моментів розмірності (ij) будемо використовувати кореляційні моменти розмірності (ij).

Визначення 2.2. Для двох випадкових величин ξ і η кореляційний момент $F_{ij}^{(\xi,\eta)}$ розмірності (ij) визначається наступною рівністю:

$$F_{ij}^{(\xi,\eta)} = E\left(\xi^i - m_i^{(\xi)}\right)\left(\eta^j - m_j^{(\eta)}\right) = E\xi^i\eta^j - m_i^{(\xi)}m_j^{(\eta)} = m_{ij}^{(\xi,\eta)} - m_i^{(\xi)}m_j^{(\eta)}.$$

Застосування сумісних моментів m_{ij} дає змогу описувати не лише такі характеристики випадкового негаусового процесу у вигляді кумулянтних коефіцієнтів, як асиметрія (γ_3) та ексцес (γ_4), але і інші параметри, які визначають ступінь статистичного взаємозв'язку між випадковими величинами.

При розгляді негаусової статистично залежної випадкової величини з нульовим математичним очікуванням χ_1 та дисперсією χ_2, її зв'язок між сумісними моментами m_{ij} і кумулянтамиχ_{ij} до шостого порядку має вигляд [6, 32, 33]:

$$m_{11} = \chi_{11}, m_{12} = \chi_{12}, m_{13} = \chi_{13} + 3\chi_2\chi_{11},$$

$$m_{22} = \chi_{22} + \chi_2^2 + 2\chi_{11}^2, m_{23} = \chi_{23} + \chi_2\chi_3 + 6\chi_{11}\chi_{12} + 3\chi_2\chi_{12},$$

$$m_{33} = \chi_{33} + 3\chi_{31}\chi_2 + \chi_3^2 + 9\chi_{11}\chi_{22} + 9\chi_{12}^2 + 3\chi_{13}\chi_2 + 9\chi_2^2\chi_{11} + 6\chi_{11}^3, \dots .$$

При відсутності статистичного зв’язку багатовимірні моменти (для представленої задачі - двовимірні) трансформуються в добуток одновимірних.

Використання початкових моментів та кумулянтів є досить зручним інструментом для дослідження випадкових процесів, тому що можуть бути отримані в результаті експериментів як певні усереднення вибіркових значень. Очевидно, що при нескінченній послідовності моментних та кумулянтних функцій є можливість відновити форму характеристичної функції, яка є повним описом досліджуваних процесів. Таким чином, для негаусових випадкових процесів саме ці характеристики будуть мати всю необхідну інформацію, яка характеризує їх статистичні зв’язки та розподіли.

Відмінність від нуля сумісних кумулянтів χ_{ij} характеризує випадковий досліджуваний процес як статистично залежний. Окрім того, сумісні моменти та кумулянти характеризуються зв'язками, які подібні до зв'язків при дослідженні одновимірних випадкових величин. Наприклад, сумісний кумулянт другого порядку χ_{11} або коваріація характеризує статистичний зв'язок першого порядку або так звану корельованість випадкових величин:

$$\chi_{11} = m_{11} - m_{\xi 1}m_{\xi 2},$$

де $m_{\xi 1}$ и $m_{\xi 2}$ - математичне сподівання випадкових величин ξ_1 та ξ_2 відповідно.

Важливо відмітити, що наявність статистичного зв'язку між двома вибірковими значеннями, для яких сумісний кумулянт не дорівнює нулю $\chi_{11} \neq 0$, описує кореляцію цих двох вибіркових значень. Разом з тим, рівність

нулю χ_{11} не характеризує вибіркові значення як статистично незалежні, оскільки кумулянти вищих порядків, які характеризують більш складні статистичні залежності випадкових величин, можуть бути відмінні від нуля.

Зауважимо, що для задачі виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад застосування моментно-кумулянтних моделей для опису досліджуваних процесів потребують додаткових досліджень та розробок. Для спрощення поставленої задачі застосуємо класифікацію досліджуваних процесів, при якій введемо певні класи кумулянтів звичайної характеристичної функції з її спільними властивостями.

Кумулянти при розкладі характеристичної функції в ряд можна класифікувати за певними класами. Ця категорія описує функцію щільності ймовірності (PDF) зі спільними властивостями. Цей тип класифікації для негаусових випадкових величин називається перфорованими випадковими величинами [11]. В цій класифікації моментні та кумулянтні моделі представлені лише частиною кумулянтів з усіх можливих наборів, які відповідають реальному процесу.

Визначення 2.3. Перфорована випадкова змінна – це така величина, де в її кумулянтному описі деякі кумулянтні коефіцієнти третього та вище порядків не дорівнюють нулю, деякі кумулянтні коефіцієнти нульові, інші кумулянтні коефіцієнти вищого порядку можуть приймати будь-які значення.

Відповідно до прийнятої класифікації [11] розрізняють різні типи *асиметричних, ексцесних і асиметрично-ексцесних* випадкових негаусових величин, дослідження яких проводилися в роботах [32-40].

2.2. Представлення статистик вищих порядків для побудови математичних моделей адитивної взаємодії постійних сигналів та корельованих негаусових завад

Для вирішення поставлених в дисертаційній роботі завдань розроблено нові моделі негаусових корельованих випадкових процесів, що ґрунтуються

на застосуванні 1D та 2D моментно-кумулянтних функцій вищих порядків. Це дозволило не лише описати негаусовий характер розподілу досліджуваних процесів, але і їх кореляційні властивості. Завдяки такому підходу стали доступними для використання не тільки параметри моментно-кумулянтного опису, такі як коефіцієнти асиметрії (γ_3) та ексцесу (γ_4), але і сумісні моменти та кумулянти, які здатні характеризувати статистичні зв'язки досліджуваних випадкових процесів і представлені у вигляді сумісних кумулянтів χ_{ij} різних порядків, які наведені в Таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Двовимірні сумісні кумулянти

Порядок сумісних кумулянтів	Двовимірні сумісні кумулянти					
1	χ_{10}	χ_{01}	–	–	–	–
2	χ_{20}	χ_{11}	χ_{02}	–	–	–
3	χ_{30}	χ_{12}	χ_{21}	χ_{03}	–	–
4	χ_{40}	χ_{31}	χ_{22}	χ_{13}	χ_{04}	–
…	…	…	…	…	…	…

Відмітимо, що при застосуванні сумісних кумулянтів третього і вище порядків з'являється можливість врахувати кореляційні властивості випадкових величин. Достатньою умовою статистичної незалежності випадкових процесів є рівність нулю всіх сумісних кумулянтів χ_{ij} третього та вище порядків.

Надамо визначення, які відповідно до прийнятої класифікації [11] розрізняють різні типи *асиметричних, ексцесних і асиметрично-ексцесних* корельованих випадкових негаусових величин.

Визначення 2.4. Гаусовими некорельованими випадковими величинами будуть вважатися такі, які характеризуються відмінними від нуля одновимірним χ_2 і сумісним χ_{11} кумулянтами другого порядку, а решта

кумулянтних коефіцієнтів третього та вище порядків, а також сумісні кумулянти вище другого порядку дорівнюють нулю. Тоді початкові моменти α_i для для гаусової статистично незалежної випадкової величини до шостого порядку запишуться через кумулянти χ_i як:

$$\alpha_1 = \chi_1, \alpha_2 = \chi_2, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 3\chi_2^2, \alpha_5 = 0, \alpha_6 = 15\chi_2^3, \ldots,$$

а сумісні моменти $m_{ij}^{(v,k)}$ порядку (ij) випадкової величини в моменти часу (v,k) виразяться через сумісні кумулянти наступним чином:

$$m_{11}^{(v,k)} = \chi_{11} = \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)}, m_{12} = \chi_{12} = 0,$$

$$m_{22}^{(v,k)} = \chi_2^2 + 2\chi_{11}^2 = \chi_2^2\left(1 + 2\rho^{(v,k)^2}\right), \ldots,$$

де $\rho^{(v,k)}$ - кореляційна функція заданого виду між v -м і k -м вибірковими значеннями.

При дослідженні статистичних зв'язків випадкових процесів важливим є питання вибору кореляційних функцій, які адекватно характеризують кореляційні властивості досліджуваних процесів. Перелік таких функцій є досить широким, разом з тим в [6] наведені деякі типові кореляційні функції, які мають своє застосування в багатьох додатках:

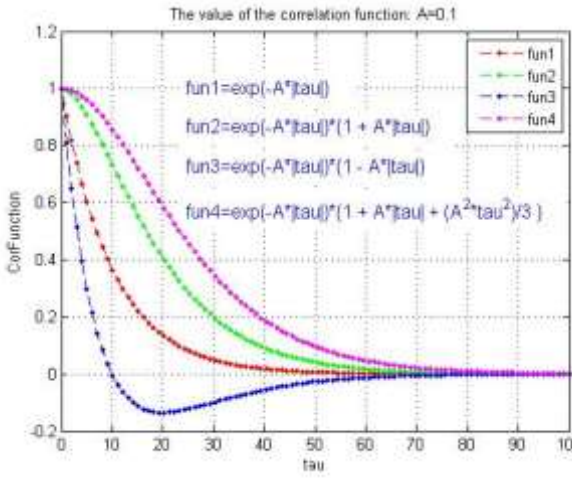
$$\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}, \rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}(1 + A|\tau|), \rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}(1 - A|\tau|),$$

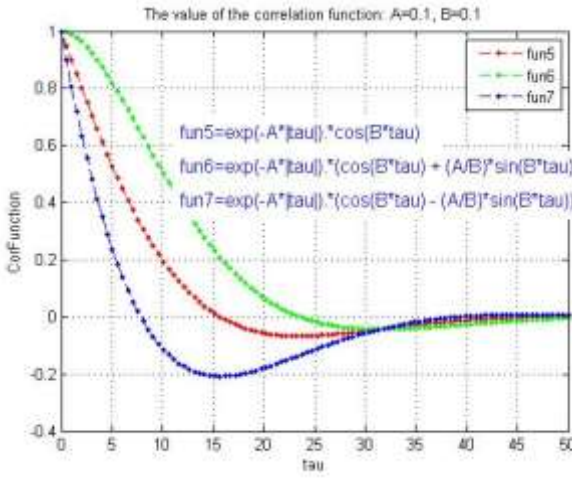
$$\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}\left(1 + A|\tau| + \frac{A^2\tau^2}{3}\right), \rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}\left(cos\,\mathrm{B}\,\tau + \frac{A}{\mathrm{B}} sin\,\mathrm{B}\,|\tau|\right),$$

$$\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}\left(cos\,\mathrm{B}\,\tau - \frac{A}{\mathrm{B}} sin\,\mathrm{B}\,|\tau|\right), \rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}\,cos\,\mathrm{B}\,\tau, \qquad (2.7)$$

де $\tau = |t_v - t_k|$ - кореляційний інтервал, який при врахуванні статистичних зв'язків менший інтервалу кореляції $\tau = |t_v - t_k| \le \tau_{кор}$, $v, k = \overline{1,n}$; $\tau_{кор}$ - час кореляції; $\sigma^2 = \rho_\xi(0)$ - дисперсія випадкового процесу; $\mathrm{A}, \mathrm{B} > 0$ – масштабуючі коефіцієнти, які характеризують статистичні зв'язки між вибірковими значеннями. Часове представлення наведених кореляційних

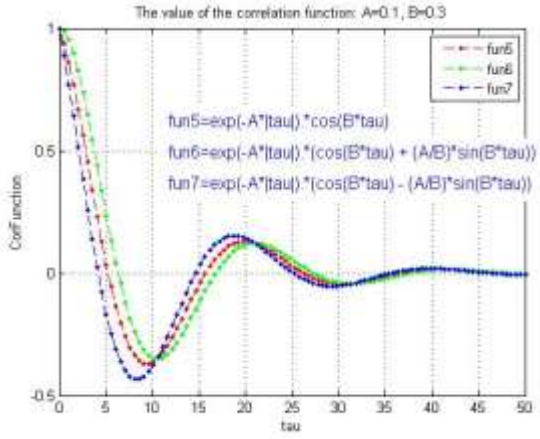
функцій (2.7) від інтервалу кореляції та масштабуючих коефіцієнтів A і B представлено на рисунках 2.1.-2.3

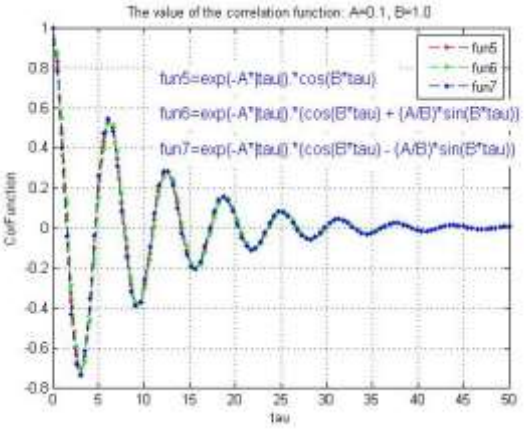




а) б)

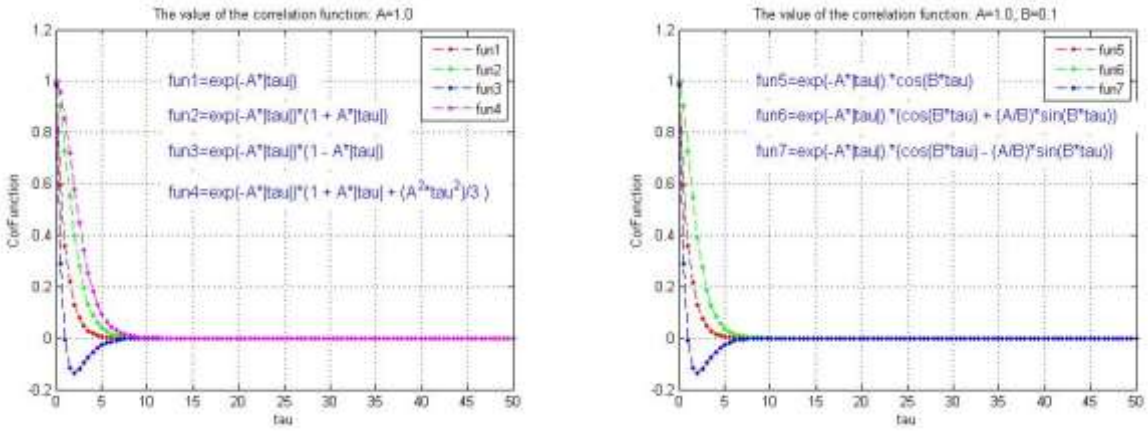
Рисунок 2.1. Залежність кореляційних функцій $\rho_\xi(\tau)$ з параметрами масштабування «A» і «B» від інтервалу кореляції tau (τ): (а) A=0.1; (б) A=0.1, B=0.1.





а) б)

Рисунок 2.2. Залежність кореляційних функцій $\rho_\xi(\tau)$ з параметрами масштабування «A» і «B» від інтервалу кореляції tau (τ): (а) A=0.1, B=0.1; (б) A=0.1, B=1.0.



а) б)

Рисунок 2.3. Залежність кореляційних функцій $\rho_\xi(\tau)$ з параметрами масштабування «*A*» і «*B*» від інтервалу кореляції tau (τ): (а) *A*=1.0; (б) *A*=1.0, *B*=0.1.

Як видно з наведених рисунків, масштабуючі коефіцієнти A та B суттєво впливають на поведінку кореляційних функцій, наведених в (2.7). При малих значеннях параметрів масштабування «*A*» і «*B*» (в межах 0.1) спостерігаються сильні статистичні зв'язки, і відповідно, збільшений час кореляції tau (τ). При збільшенні значень *A* та *B* спостерігається зменшення інтервалу кореляції фактично для всіх досліджуваних функцій. Детальний вплив статистичних зв'язків на процеси виявлення сигналів будуть досліджуватися в наступних розділах.

В роботі проводяться дослідження синтезу поліноміальних нелінійних РП виявлення сигналів, що приймається на фоні корельованих негаусових *асиметричних, ексцесних та асиметрично-ексцесних* завад. Дамо визначення для кожного із зазначених класів із наведенням моментно-кумулянтних моделей їх опису.

Розглянемо одні із поширених асиметричних негаусових процесів, які характеризуються відмінними від нуля непарними кумулянтними функціями. Прикладом *асиметричних негаусових процесів* може бути *Гамма розподіл*, який застосовується для моделювання відбитих сигналів у середовищах з багатошляховим розповсюдженням, таких як міські умови з

великою кількістю будівель, де сигнали від різних шляхів можуть бути корельованими, в системах телекомунікації для опису часу життя пакету в мережах з високою затримкою, де затримки можуть бути корельованими через повторювані збої або затори в мережі та ін. Даний клас досліджуваного корельованого випадкового процесу представлений в таблиці 2.2.

Таблиця 2.2 – Представлення двовимірних сумісних кумулянтів корельованої асиметричної негаусової величини

Порядок спільних кумулянтів	Позначення двовимірних спільних кумулянтів					
1	χ_{01}	χ_{10}	–	–	–	–
2	χ_{02}	χ_{11}	χ_{20}	–	–	–
3	χ_{03}	χ_{12}	χ_{21}	χ_{30}	–	–
4	–	–	–	–	–	–

Визначення 2.5. Асиметричними статистично залежними випадковими величинами будемо називати такі величини, для яких відмінними від нуля будуть дисперсії χ_2 та кумулянт третього порядку χ_3, а також сумісні кумулянти $\chi_{03}, \chi_{11}, \chi_{12}, \chi_{21}, \chi_{30}$ а всі інші одновимірні кумулянти четвертого та вище порядків, а також сумісні кумулянти четвертого та вище порядків дорівнюють нулю. Тоді початкові моменти до шостого порядку включно запишуться як:

$$\alpha_1 = \chi_1, \alpha_2 = \chi_2, \alpha_3 = \chi_3, \alpha_4 = 3\chi_2^2, \alpha_5 = 10\chi_2\chi_3, \alpha_6 = 10\chi_3^2 + 15\chi_2^3. \quad (2.8)$$

Представимо зв'язок сумісних моментів з сумісними кумулянтами наступним чином:

$$m_{11}^{(v,k)} = \chi_{11} = \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)}, m_{12}^{(v,k)} = \chi_{12} = \gamma_3 \chi_2^{\frac{3}{2}} \rho^{(v,k)^{\frac{3}{2}}},$$

$$m_{22}^{(v,k)} = \chi_2^2 + 2\chi_{11}^2 = \chi_2^2\left(1 + 2\rho^{(v,k)^2}\right) \ldots . \quad (2.9)$$

Основним параметром, який описує властивості асиметричного розподілу є коефіцієнт асиметрії γ_3, який не може приймати довільні значення, і для даного типу завад належить наступній області допустимих значень [11]:

$$\gamma_3^2 \leq \sqrt{\gamma_4 + 2} \leq 2.$$

До іншого типу випадкових процесів відносять *ексцесні негаусові процеси.* Для такого типу, наприклад, характерний розподіл *Лапласа,* який застосовується для моделювання шумів у радіолокаційних системах. Шуми можуть мати піки, які значно відрізняються від середнього рівня і можуть бути корельованими через загальні джерела інтерференції. В системах телекомунікації даний вид розподілу використовується для опису втрат пакетів в мережах, де втрати можуть мати високий ексцес і бути корельованими через спільні причини втрат, такі як перевантаження мережі або апаратні збої. Даний клас досліджуваного корельованого випадкового процесу представлений в таблиці 2.3.

Таблиця 2.3 – Представлення двовимірних сумісних кумулянтів корельованої ексцесної негаусової величини

Порядок спільних кумулянтів	Позначення двовимірних спільних кумулянтів					
1	χ_{01}	χ_{10}	–	–	–	–
2	χ_{02}	χ_{11}	χ_{20}	–	–	–
3	–	–	–	–	–	–
4	χ_{04}	χ_{13}	χ_{22}	χ_{31}	χ_{40}	–

Визначення 2.6. Ексцесними статистично залежними випадковими величинами будемо називати такі, для яких відмінними від нуля будуть χ_2 і χ_4, а також сумісні кумулянти χ_{04}, χ_{11}, χ_{31}, χ_{22}, χ_{13}, χ_{40} а всі інші кумулянти третього і вище четвертого порядків, а також сумісні кумулянти вище

четвертого порядку дорівнюють нулю. Тоді початкові моменти до шостого порядку включно запишуться як:

$$\alpha_1 = \chi_1, \alpha_2 = \chi_2, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = \chi_4 + 3\chi_2^2, \alpha_5 = 0, \quad (2.10)$$

$$\alpha_6 = 15\chi_2\chi_4 + 15\chi_2^3, \ldots .$$

Представимо зв'язок сумісних моментів з сумісними кумулянтами наступним чином:

$$m_{11}^{(v,k)} = \chi_{11} = \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)}, m_{12}^{(v,k)} = \chi_{12} = 0, m_{13}^{(v,k)} = \gamma_4\chi_{11}^2 + 3\chi_2\chi_{11}, \quad (2.11)$$

$$m_{22}^{(v,k)} = \chi_2^2\left(\gamma_4\rho^{(v,k)^2} + 1 + 2\rho^{(v,k)^2}\right), \ldots .$$

Один із поширених негаусових процесів є *асиметрично-ексцесний.* До такого типу відноситься розподіл *Вейбула, Релея, Коші, розподіл Пірсона типу IV* та ін., які описують характеристики сигналів в умовах складних завад, де шуми мають як асиметрію, так і високий ексцес і можуть бути корельованими через загальні джерела завад. В системах телекомунікації моделюють інтервали затримки передачі пакетів у мережах з великим навантаженням, де затримки можуть мати одночасно асиметрію, високий ексцес і бути корельованими через спільні мережеві умови. Також такі процеси застосовуються для моделювання амплітуд сигналів у безпосередньому радіолокаційному зв’язку, де сигнали можуть бути корельованими через загальні траєкторії розповсюдження та ін.

Наприклад, в телекомунікаційних системах часто спостерігаються процеси з Релеєвською щільністю розподілу, яка характеризується такими коефіцієнтами асиметрії $\gamma_3 = 0{,}63$ та ексцесу, $\gamma_4 = 3{,}26$. Такі параметри відповідають асиметрично-ексцесним випадковим процесам.

Виявлення сигналів на фоні негаусових корельованих завад є важливою задачею в різних технічних галузях. Зокрема, виявлення об'єктів з низькою ефективною площею розсіювання (наприклад, дронів або стелс-літаків) у складних умовах завад від землі або води, де завади мають негаусовий характер і корельовані через повторювані відбиття [41-44]. До таких задач

відноситься виявлення та декодування сигналів мобільних пристроїв у міських умовах, де завади від численних джерел, таких як будівлі та інші інфраструктурні об'єкти, мають негаусовий характер та є корельованими. Виявлення природних сейсмічних подій (землетрусів) в умовах міських або промислових зон, де завади від людської діяльності (транспорт, промислові машини) мають негаусовий характер і корельовані через повторюваність діяльності. Виявлення аномальних серцевих ритмів на фоні негаусових корельованих завад, які можуть виникати через артефакти руху або м'язову активність. Даний клас досліджуваного корельованого випадкового процесу представлений в таблиці 2.4.

Таблиця 2.4 – Представлення двовимірних сумісних кумулянтів корельованої асиметрично-ексцесної негаусової величини

Порядок спільних кумулянтів	Позначення двовимірних спільних кумулянтів					
1	χ_{01}	χ_{10}	–	–	–	–
2	χ_{02}	χ_{11}	χ_{20}	–	–	–
3	χ_{03}	χ_{12}	χ_{21}	χ_{30}	–	–
4	χ_{04}	χ_{13}	χ_{22}	χ_{31}	χ_{40}	–

Визначення 2.7. Асиметрично-ексцесними статистично залежними випадковими величинами будемо називати такі, для яких відмінними від нуля будуть χ_2, χ_3 і χ_4, а також сумісні кумулянти χ_{03}, χ_{11}, χ_{12}, χ_{21}, χ_{30}, χ_{04}, χ_{31}, χ_{22}, χ_{13}, χ_{40} а всі інші кумулянти п’ятого і вище порядків, а також сумісні кумулянти вище четвертого порядку рівні нулю. Тоді початкові моменти до шостого порядку включно запишуться як:

$$\alpha_1 = \chi_1, \alpha_2 = \chi_2, \alpha_3 = \chi_3, \alpha_4 = \chi_4 + 3\chi_2^2, \alpha_5 = 10\chi_3\chi_3, \qquad (2.12)$$

$$\alpha_6 = 15\chi_2\chi_4 + 10{\chi_3}^2 + 15\chi_2^3, \ldots .$$

Представимо зв'язок сумісних моментів з сумісними кумулянтами наступним чином:

$$m_{11}^{(v,k)} = \chi_{11} = \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)}, m_{12}^{(v,k)} = \chi_{12} = \gamma_3 \chi_2^{\frac{3}{2}} \rho^{(v,k)^{\frac{3}{2}}},$$

$$m_{13}^{(v,k)} = \gamma_4 \chi_{11}^2 + 3\chi_2\chi_{11}, m_{22}^{(v,k)} = \chi_2^2\left(\gamma_4 \rho^{(v,k)^2} + 1 + 2\rho^{(v,k)^2}\right), \ldots . \quad (2.13)$$

В даній роботі пропонується розробка нових моментно-кумулянтних моделей статистично залежних асиметричних негаусових випадкових величин. На основі цих моделей створені нові методи виявлення сигналів з використанням модифікованого моментного критерію якості перевірки статистичних гіпотез [32-39]. Такі методи відрізняються від існуючих, використовують багатовимірні моментно-кумулянтні функції вищих порядків (HOS) для врахування тонкої структури негаусових корельованих випадкових процесів. Такий підхід буде використаний для синтезу поліноміальних стохастичних розв'язувальних правил (РП) для виявлення сигналів на фоні корельованих *асиметричних, ексцесних* та *асиметрично-ексцесних* негаусових завад.

2.3. Моментний критерій якості верхньої границі ймовірностей помилок для побудови методів виявлення сигналів на фоні завад

Нехай випадкові сигнали $\xi(t)$ спостерігаються на інтервалі часу $(0, T)$. Необхідно розробити алгоритми обробки стохастичних процесів ξ(t) для прийняття рішення: стохастичні процеси містять корисний сигнал $s(t)$ (реалізується гіпотеза H_1) або корисний сигнал відсутній і випадкові процеси $\xi(t)$ містять тільки заваду $\eta(t)$ (реалізується гіпотеза H_0), де $\xi(t) = s(t) + \eta(t)$, $\eta(t) -$ стаціонарний корельований негаусовий випадковий процес, який описується набором 1D і 2D кумулянтів та початкових моментів.

Будемо вважати, що множина моментів при реалізації гіпотези H_1 матиме вигляд – $\left(m_i^{(v)}, m_{ij}^{(\tau)}\right)$, а для гіпотези H_0 –$\left(u_i^{(v)}, u_{ij}^{(\tau)}\right)$, де $\{u_i^{(v)}, m_i^{(v)}\}$ -

1D моменти в момент часу t_v порядку i та $\{\{u_{ij}^{(\tau)}, m_{ij}^{(\tau)}\}$ - 2D спільні моменти розмірності (ij) при реалізації гіпотези H_0 і H_1 відповідно.

Для практичної реалізації алгоритмів обробки сигналів зручніше опрацьовувати не неперервний сигнал, а дискретний. В цьому випадку дискретна вибірка сигналу $\xi(t)$ буде мати вид $\boldsymbol{X} = \{x_1,\ x_2, \dots, x_n\}$ в моменти часу t_v, а реалізацію гіпотез H_0 and H_1 представимо наступним чином:

$$H_1\colon \xi_v = s_v(\alpha_k) + \eta_v\left(\gamma_k, \chi_{ij}^{(\tau)}\right),$$

$$H_0\colon \xi_v = \eta_v\left(\gamma_k, \chi_{ij}^{(\tau)}\right),\ v = \overline{1,n}, \tag{2.14}$$

де $s_v(\alpha_k)$ – корисний сигнал, який описується параметрами α_k, $\eta_v\left(\gamma_k, \chi_{ij}^{(\tau)}\right)$ – негаусова випадкова величина з параметрами у формі набору кумулянтів $\chi_{ij}^{(\tau)}$ та кумулянтних коефіцієнтів γ_k.

Для розв'язання поставленої задачі скористаємося загальноприйнятим підходом теорії перевірки статистичних гіпотез. Відповідно до класичного підходу, оптимальний Байєсівський алгоритм виявлення сигналів мінімізує середній ризик [1-4]. Достатня статистика, яка необхідна для перевірки гіпотез, визначається як відношення правдоподібності і має вид

$$\Lambda(\boldsymbol{X}) = \frac{P(\boldsymbol{X}|H_1)}{P(\boldsymbol{X}|H_0)}. \tag{2.15}$$

Як правило, таке відношення правдоподібності в більшості випадків інтерпретується і застосовується для нормальних законів розподілу щільності ймовірності. Разом з тим, отримання розв'язків у формі рівняння (2.15) для негаусових корельованих PDF створює алгоритмічні труднощі, пов'язані з невизначеністю як різновиду PDF, так і її параметрів, технічною складністю реалізації алгоритмів. Отже, потрібні альтернативні підходи, щоб подолати ці проблеми. Один із таких альтернативних підходів полягає у вираженні відношення правдоподібності, як степеневої поліноміальної функції [45-47].

Для цього розглянемо питання розкладу логарифма відношення правдоподібності в певні стохастичні ряди з метою їх використання для побудови РП, оптимальних за одним із моментних критеріїв якості, які використовують для опису досліджуваних процесів не PDF, а оперують поняттями математичного сподівання та дисперсії РП. Визначимо, що розуміється під стохастичним рядом і поліномом.

Нехай при гіпотезі H_0 спостерігається випадкова величина x, яка має функцію щільності розподілу $P(x|H_0)$, а при гіпотезі H_1 — функцію щільності розподілу $P(x|H_1)$. Припустимо, що ці щільності розподілу є неперервними функціями аргументу x. Тоді неперервною по x буде також функція такого вигляду:

$$f(x) = ln(P(\boldsymbol{X}|H_1)/P(\boldsymbol{X}|H_0)).$$

Зазначимо, що функція $f(x)$ є звичайною безперервною функцією у сенсі математичного аналізу. Тоді в загальному випадку можна сказати, що існують деякі функції $\phi_i(x)$ та константи $k_i,\ i = \overline{1,\infty}$ такі, що $f(x)$ можна подати у вигляді нескінченної суми добутків констант k_i та функцій $\phi_i(x)$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \phi_i(x) + k_0, \qquad (2.16)$$

тобто у вигляді ряду.

Легко бачити, що множина таких функцій і констант не є нульовою, оскільки, згідно з першою і другою теоремами Вейєрштрасса про наближення функцій, у ролі таких функцій можуть виступати або степеневі $\phi_i(x) = x^i$, або тригонометричні $\phi_i(x) = sin(iux),\ \phi_i(x) = cos(iux)$ функції. Крім того, якщо функції $\phi_i(x)$ є лінійно незалежними й утворюють базис, то для широкого класу функцій $f(x)$ можливе розкладання у вигляді ряду (2.16).

Якщо аргумент x є випадковою величиною, то функція $f(x)$ також буде випадковою величиною, а отже, і права частина (2.16) буде випадковою величиною, тобто ряд (2.16) також стане випадковою величиною.

Визначення 2.8. Якщо в звичайному ряді виду (2.16) незалежна змінна x є випадковою величиною, то такий ряд будемо називати узагальненим стохастичним рядом.

Аналогічно, можна дати визначення і для багатовимірного випадку $\boldsymbol{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Нехай при гіпотезі H_k спостерігається випадкова величина з функцією щільності розподілу

$$P(\boldsymbol{X}/H_k) = \prod_{v=1}^{n} P_v\,(x_v/H_k), k = 0{,}1,$$

яка є неперервною за кожною зі змінних x_v. Тоді функція

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = ln\frac{P(\boldsymbol{X}/H_1)}{P(\boldsymbol{X}/H_0)} = \sum_{v=1}^{n} ln\frac{P_v(x_v/H_1)}{P_v(x_v/H_0)} \qquad (2.17)$$

також буде неперервною за кожною змінною x_v. Використовуючи рівняння (2.17), можна стверджувати, що існують такі функції $\phi_i(x_v)$ та константи k_{iv}, що

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = k_0 + \sum_{v=1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty} k_{iv}\phi_i(x_v), \qquad (2.18)$$

де $k_0 = \sum_{v=1}^{n} k_{0v}$.

Зауважимо, що ряд (2.18) є звичайним рядом у сенсі математичного аналізу.

Визначення 2.9. Якщо в ряді (2.18) незалежні змінні x_v є випадковими величинами, то такий ряд будемо називати узагальненим стохастичним рядом 1-го типу розмірності n. Розмірність стохастичного ряду дорівнює обсягу вибірки.

У практичних застосуваннях використовуються не нескінченні ряди, а багаточлени (поліноми) з обмеженим числом членів.

Визначення 2.10. Багаточлен виду

$$f_{sn}(\boldsymbol{X}) = k_0 + \sum_{i=1}^{s}\sum_{v=1}^{n} k_{iv}\phi_i(x_v), \qquad (2.19)$$

де x_v є випадковими величинами, будемо називати узагальненим стохастичним поліномом степеня s і розмірності n.

Вирази (2.18) та (2.19) називаються узагальненими рядами та поліномами відповідно, тому що функції $\phi_i(x_v)$ записані в загальному вигляді.

Очевидно, що можна отримати багато результатів, не уточнюючи конкретний вид функцій $\phi_i(x_v)$. Наприклад, якщо використовувати степеневі $\phi_i(x) = x^i$ функції перетворення, то як апріорним описом випадкових величин будуть їх початкові моменти. Якщо використовувати тригонометричні перетворення, наприклад виду $\phi_i(x) = sin(iux)$, $\phi_i(x) = cos(iux)$, то апріорним описом випадкових величин будуть характеристичні функції.

При заміні незалежної змінної у звичайному ряді (або поліномі) на випадкову величину сам ряд (поліном) змінює свої властивості. Стверджувати, що певний поліном кінцевого ступеня є точною апроксимацією функції від випадкових аргументів, не завжди правомірно.

Будемо вважати, що РП задані в класі стохастичних поліномів кінцевого степеня виду (2.19). При цьому визначені коефіцієнти k_{iv} будемо знаходити з умови мінімуму того чи іншого моментного критерію якості вибору РП. Таким чином, пропонується метод перевірки статистичних гіпотез, заснований на використанні стохастичних поліномів кінцевого степеня.

Представлений поліном виду (2.19), як функція від вибіркових значень, є функцією відношення правдоподібності, яку можна використовувати як РП $\Lambda(\boldsymbol{X})$ для перевірки статистичних гіпотез

$$\Lambda(\boldsymbol{X})_{sn} = k_0 + \sum_{i=1}^{s}\sum_{v=1}^{n} k_{iv}\phi_i(x_v) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0.$$

Якщо використовувати степеневі перетворення від вибіркових значень, то РП для неоднаково розподілених вибіркових значень (наприклад, вибіркові значення з радіосигналу) набуде вигляду

$$\Lambda(\boldsymbol{X})_{sn} = k_0 + \sum_{i=1}^{s}\sum_{v=1}^{n} k_{iv}x_v^i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0. \qquad (2.20)$$

Для однаково розподілених вибіркових значень (наприклад, вибіркові значення з постійного або повністю відомого сигналу) оптимальні коефіцієнти РП не будуть залежати від номера вибіркових значень і РП набуде вигляду

$$\Lambda(\boldsymbol{X})_{sn} = k_0 + \sum_{i=1}^{s} k_i \sum_{v=1}^{n} x_v^i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0 \qquad (2.21)$$

Відмітимо, що в загальному випадку в (2.20) та (2.21) порівняння повинно відбуватися не з нулем, а з певним порогом. Оскільки коефіцієнт k_0 не визначений, цей поріг можна включити в сам коефіцієнт k_0.

Визначення 2.11. РП виду (2.20) та (2.21) будемо називати правилами, представленими у вигляді узагальненого стохастичного полінома розмірності n, де існують такі коефіцієнти k_0 та k_{iv}, що РП є еквівалентним порівнянню логарифма відношення правдоподібності з певним порогом.

Очевидно, що залишається відкритим питання вибору невизначених коефіцієнтів k_0 та k_{iv},. Як було показано раніше, порівняння логарифма відношення правдоподібності з певним порогом є РП, яке оптимальне за багатьма поширеними ймовірнісними критеріями якості. Тобто логарифм відношення правдоподібності забезпечує мінімум для певного обраного критерію якості. З іншого боку, за наявності базису існують такі коефіцієнти, що логарифм відношення правдоподібності можна подати у вигляді узагальненого полінома (2.20) або (2.21). Отже, існують такі коефіцієнти k_{iv}, які мінімізують той чи інший критерій якості. Таким чином, приходимо до висновку, що невизначені коефіцієнти k_{iv} в узагальненому поліномі (2.20) та (2.21) необхідно знаходити на основі мінімуму обраного критерію якості.

Попри очевидність такого підходу для визначення коефіцієнтів k_{iv}, його не можна застосувати для ймовірнісних критеріїв якості. Тому, щоб використовувати поліноміальні РП для перевірки гіпотез, необхідно змінити критерії вибору РП таким чином, щоб вони, з одного боку, були пов'язані з відомими і добре вивченими ймовірнісними критеріями, а з іншого —

дозволяли виразити критерій якості через невизначені коефіцієнти k_{iv}. При проведенні мінімізації такого критерію якості за невизначеними коефіцієнтами k_{iv}, можна знайти самі ці коефіцієнти. Таким умовам задовольняють моментні критерії якості, які добре зарекомендували себе при вирішенні багатьох практичних задач.

Відмітимо, що не кожна спостережувана випадкова величина має початкові моменти. Існує певна множина випадкових величин, для яких моменти не існують [11, 12]. В цьому випадку для них неможливо застосовувати степеневі стохастичні ряди та поліноми. Виходом з цієї ситуації є використання в якості РП так званих тригонометричних стохастичних рядів і поліномів. При використанні цих рядів в якості апріорної інформації застосовується характеристичні функції. Відомо, що характеристична функція існує для кожної випадкової величини і є її повним описом.

На практиці можуть використовуватися як степеневі, так і тригонометричні РП. Це залежить, по-перше, від наявної у користувача апріорної інформації про опис досліджуваного процесу, по-друге, від технічних або алгебраїчних можливостей реалізації РП. Однак при використанні тригонометричних поліномів і рядів як РП, аналітичні вирази стають занадто громіздкими і важко піддаються інтерпретації. Тому в даній роботі використовуються степеневі стохастичні поліноми для побудови РП при вирішенні задач обробки сигналів у системах прийому та обробки даних.

Як вже відмічалося, щоб вирішити проблему знаходження невідомих коефіцієнтів РП, запропоновано новий підхід, який заснований на використанні та подальшій модифікації моментного критерію якості перевірки статистичних гіпотез [32-39]. Продемонструємо побудову такого критерію якості.

Нехай РП для перевірки статистичних гіпотез представлено в наступній формі:

$$\Lambda(\boldsymbol{X}) = \gamma(\boldsymbol{X}) - k_0 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0, \tag{2.22}$$

де $\gamma(\boldsymbol{X})$ є функцією вибіркових значень з вибірки $\boldsymbol{X}$ та коефіцієнт k_0 обраний з наступних умов

$$M_0 = E[\Lambda(\boldsymbol{X})|H_0] = \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(\boldsymbol{X}) p(\boldsymbol{X}|H_0) \Pi\ dx < 0,$$

$$M_1 = E[\Lambda(\boldsymbol{X})|H_1] = \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(\boldsymbol{X}) p(\boldsymbol{X}|H_1) \Pi\ dx \geq 0.$$

Тоді, відповідно до нерівності Чебишева [48, 49], ймовірність помилок першого та другого роду РП запишеться наступним чином:

$$\alpha = P[\Lambda(\boldsymbol{X}) \geq 0|H_0] \leq G_0/M_0^2 = \alpha_0, \beta = P[\Lambda(\boldsymbol{X}) < 0|H_1] \leq G_1/M_1^2 = \beta_0,$$

де $G_i(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(\mathbf{X}) - M_i]^2 p(\boldsymbol{X}|H_i) \Pi\ dx$ - дисперсія розв'язувальної функції $\gamma(\mathbf{X})$ при гіпотезі та альтернативі H_i, $i = 0,1$.

Тоді сума ймовірності помилок першого та другого роду виразиться наступним чином

$$F(\alpha, \beta) = \alpha + \beta \leq \alpha_0 + \beta_0 = \frac{G_0}{M_0^2} + \frac{G_1}{M_1^2} = \Phi(G, M). \tag{2.23}$$

Для зазначених виразів M_0 та M_1 коефіцієнт k_0 визначимо як:

$$k_0 = 0.5(E_0 + E_1), \tag{2.24}$$

де $E_i(\gamma) = E[\gamma(\mathbf{X})|H_i]$ - математичне очікування розв'язувальної функції $\gamma(\mathbf{X})$ (2.22) при гіпотезі та альтернативі H_i, $i = 0,1$.

Тоді, функція $\Phi(G, M)$ (2.23) для таких коефіцієнтів k_0 (2.24) отримає наступну форму

$$\Phi(G, M) = 4Ku(G, E),$$

де

$$Ku(E, G) = (G_{0(sn)} + G_{0(sn)}) / \left(E_{1(sn)} - E_{0(sn)}\right)^2, \tag{2.25}$$

де математичне очікування $E_{i(sn)}$ та дисперсія $G_{i(sn)}$ РП (2.20) для перевірки статистичних гіпотез H_i ($i=0,1$) визначаються наступним чином:

$$E_{0(sn)} = \sum_{v=1}^{n}\sum_{i=1}^{s} k_{iv}u_{iv},\ E_{1(sn)} = \sum_{v=1}^{n}\sum_{i=1}^{s} k_{iv}m_{iv}, \tag{2.26}$$

$$G_{0(sn)} = \sum_{v=1}^{n}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} k_{iv}k_{jv}F_{(ij)v}\,(H_0),$$

$$G_{1(sn)} = \sum_{v=1}^{n}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} k_{iv}k_{jv}F_{(ij)v}\,(H_1), \tag{2.27}$$

де m_{iv}, u_{iv} - початкові моменти порядку i в моменти часу v для гіпотез H_1 та H_0, відповідно, та

$$F_{(ij)v}(H_0) = u_{(i+j)v} - u_{iv}u_{jv},\quad F_{(ij)v}(H_1) = m_{(i+j)v} - m_{iv}m_{jv}. \tag{2.28}$$

Визначення 2.12. Визначимо функціонал $Ku(E,G)$ (2.25) як моментний критерій якості прийняття рішень у вигляді РП виду (2.20), де оптимальні коефіцієнти k_{iv} та k_0, які мінімізують праву частину (2.25), визначають цей критерій. Назвемо цей функціонал як моментний критерій якості верхніх границь ймовірностей помилок перевірки статистичних гіпотез, або коротко критерієм Ku. Зазначимо, що чим менше значення критерію (2.25), тим менше значення суми ймовірностей помилок першого та другого роду РП (2.20).

Даний моментний критерій якості тісно пов'язаний із класичними ймовірнісними критеріями і має прозорий фізичний зміст. Найкращим буде таке поліноміальне РП, для якого сума дисперсій $G_{i(sn)}$ РП при гіпотезі та альтернативі будуть мінімальними, а відстань між математичними очікуваннями $E_{i(sn)}$, $i = 0,1$, буде максимальною.

Такий критерій досліджений і добре себе зарекомендував при синтезі поліноміальних РП виявлення сигналів на фоні негаусових завад [50, 51]. Для розв’язання поставленої задачі в дисертаційній роботі для синтезу алгоритмів виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад необхідно провести додаткові наукові розробки та дослідження, які спрямовані на врахування статистичних зв’язків досліджуваних вибіркових значень.

2.4. Властивості стохастичних поліномів та їх використання для обробки сигналів

Побудова одного з моментних критеріїв якості, а саме критерію верхньої границі ймовірностей помилок, базується на застосуванні теореми Чебишева, де ймовірності помилок розв'язувальної функції обмежуються зверху співвідношенням між дисперсією і математичним сподіванням цієї функції. У [52] показано наслідок теореми Чебишева, який відіграє важливу роль при використанні стохастичних поліномів, як розв'язувальної функції.

Нехай є випадкова величина $\xi(t)$, яку будемо розглядати як стаціонарну з нульовим математичним сподіванням $E(\xi)$ і дисперсією χ_2. Розглянемо наслідок теореми Чебишева.

Наслідок теореми Чебишева. Якщо $E(\xi)$ менше нуля, то ймовірність $\mathrm{P}(\xi \geq 0)$, а якщо $E(\xi)$ більше нуля, то ймовірність $\mathrm{P}(\xi \leq 0)$ буде меншою або рівною відношенню дисперсії випадкової величини до квадрата її математичного сподівання, або меншою чи рівною оберненій величині кумулянтного коефіцієнта першого порядку.

На основі цього наслідку в [52] було розглянуто властивість стохастичних поліномів. Розглянемо деякі положення, на основі яких будуть отримані нові результати.

Нехай спостерігається деяка випадкова величина ξ, від якої існують впорядковані функції $\phi_i(\xi)$, $i = \overrightarrow{1,s}$ з математичним сподіванням $\psi_i(\xi) = E[\phi_i(\xi)]$.

Візьмемо стохастичний поліном $\eta_s = \sum_{i=1}^{s} k_i \phi_i(\xi)$ порядку s і припустимо, що коефіцієнти k_i, $i = \overrightarrow{1,s}$ такі, що математичне сподівання порядку s від стохастичного полінома має вигляд:

$$E_s = E\eta_s = \sum_{i=1}^{s} k_i \psi_i(\xi) > 0.$$

Тоді, згідно з наслідком теореми Чебишева для стохастичного полінома, справедлива наступна нерівність:

$$P[\eta_s \leq 0] \leq \frac{G_s}{(E_s)^2},$$

де G_s — це дисперсія порядку s стохастичного полінома η_s.

Показано, що у розгорнутому вигляді ця нерівність набуває вигляду[52]:

$$P[\eta_s \leq 0] \leq \frac{\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} k_i k_j F_{i,j}(\xi)}{\left(\sum_{i=1}^{s} k_i \psi_i(\xi)\right)^2} = B_s\left(\vec{k}\right), \quad (2.29)$$

де $F_{i,j}(\xi)$ — узагальнені корелянти випадкової величини ξ, а $B_s\left(\vec{k}\right)$ — верхня границя ймовірності того, що стохастичний поліном η_s буде менше нуля.

Існують такі коефіцієнти k_i та k_j, при яких права частина нерівності (2.29) $B_s\left(\vec{k}\right)$ приймає мінімальне значення. Для цих коефіцієнтів справедливе рівняння:

$$K_s(\xi) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} k_i k_j F_{i,j}(\xi) = \sum_{i=1}^{s} k_i \psi_i(\xi),$$

де функція $K_s(\xi)$ називається кунінформою стохастичного полінома і для неї виконується рівність:

$$B\left(\vec{k}\right)_{smin} = \frac{1}{K_s(\xi)}.$$

Показано, що для граничного випадку, коли порядок полінома зростає і прагне до нескінченності ($s \to \infty$), тоді $K_s(\xi) = \infty$, а верхня границя $\mathrm{B_s}\left(\vec{\mathrm{k}}\right)$ буде рівна нулю. На основі наведених міркувань сформульовано властивість стохастичних поліномів.

Властивість стохастичних поліномів. Існують випадкові величини та стохастичні поліноми від них з такими коефіцієнтами, для яких математичне сподівання полінома є додатнім, а ймовірність того, що поліном буде менше нуля, прямує до нуля при збільшенні порядку стохастичного полінома до нескінченності.

У цьому випадку для математичного сподівання та дисперсії стохастичного полінома спостерігається збіжність:

$$\lim_{s\to\infty} E_s = \lim_{s\to\infty} G_s \to K(\xi) = \infty,$$

а верхня границя ймовірності помилок прямує до нуля.

На основі цієї властивості стохастичних поліномів можна отримати нові результати, які будуть використані в теорії перевірки стохастичних гіпотез при побудові конкретних РП для виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад.

Одними з моментних критеріїв якості, які використовувалися для побудови РП виявлення сигналів на фоні завад, є критерій суми верхніх границь ймовірностей помилок $Ku(E,G)$ (2.25), який у розширеному варіанті з врахуванням виразів (***) має наступний вигляд:

$$Ku(E,G) = \frac{\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} k_i k_j \left(F_{i,j}(H_0)+F_{i,j}(H_1)\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{s} k_i (m_i - u_i)\right)^2}, \qquad (2.30)$$

де невідомі коефіцієнти k_i та k_j, що мінімізують значення цього критерію, знаходяться з системи рівнянь:

$$\sum_{j=1}^{s} k_j \left[F_{i,j}(H_0) + F_{i,j}(H_1)\right] = m_i - u_i,\ i = \overline{1,s}. \qquad (2.31)$$

З принципів побудови моментного критерію якості $Ku(E,G)$ (2.30) видно, що він базується на верхніх границях ймовірностей помилок першого та другого роду. На основі властивості стохастичних поліномів можна очікувати, що при збільшенні степеня стохастичного полінома така верхня границя буде зменшуватися, а отже, ймовірності помилок першого та другого роду розв'язувальної функції також зменшаться.

При представленні даного моментного критерію використовували верхні границі ймовірностей помилок першого та другого роду РП. Така ймовірнісна верхня границя помилок у РП, представлених рівнянням (2.20), дає відносно грубу оцінку їхньої ефективності. Тому доцільно дослідити асимптотичні властивості поліноміальних РП, які є оптимальними за критерієм (2.25).

При достатньо великій вибірці ($n\to\infty$), згідно центральній граничній теоремі [48, 49] можна припустити, що випадкові значення РП, наведені в рівнянні (2.20), відповідають нормальному розподілу. Зокрема, при аналізі стохастичного полінома в загальній формі (2.20), коли $n\to\infty$, варто розглядати суму $\sum_{v=1}^{n} x_v^i$, яка складається з однаково розподілених випадкових величин, піднесених до степеня i. Математичне сподівання кожної випадкової величини дорівнює m_i, а дисперсія визначається як:

$$\sigma^2 = F_{i,j} = E\left(x^i - m_i\right)^2.$$

Згідно з центральною граничною теоремою, для достатньо великої вибірки ($n\to\infty$) друга сума в рівнянні (2.20) буде розподілена за нормальним законом для будь-якого фіксованого значення i:

$$P(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(F_{i,i})n}} exp\left[-\frac{(\xi - nm_i)^2}{2F_{i,i}n}\right].$$

У цьому випадку сума гаусових випадкових величин з різними коефіцієнтами k_{iv}, які не прямують до нескінченності, також буде розподілена за нормальним законом. Таким чином, РП (2.20) для будь-якого скінченного s асимптотично при $n\to\infty$ буде розподілятися за нормальним законом із математичним сподіванням $E_{i(sn)}$ і дисперсією $G_{i(sn)}$, i=0,1.

Розглянемо, яке значення матиме точна ймовірність того, що стохастичний поліном для гаусової випадкової величини, визначений у класі степеневих перетворень, і є РП степеня s з математичним сподіванням E_0 та дисперсією G_0, буде менше нуля при реалізації гіпотези H_1:

$$P\left[f(\boldsymbol{X}) \le \frac{0}{H_1}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi G_0}} \int_0^\infty exp\left[-\frac{\left(x-(E_0-k_0)\right)^2}{2G_0}\right] dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{V_0}^\infty exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz,$$

де $V_0 = -\frac{(E_0-k_0)}{G_0^{0.5}}$.

З огляду на те, що коефіцієнт k_0, який відіграє роль порога, обирається з рівності (2.9), тоді підінтегральний вираз набуде вигляду:

$$V_0 = (E_1 - E_0)/2G_0^{0.5}.$$

Верхня границя ймовірностей помилок визначається наступним виразом:

$$P\left[f(\boldsymbol{X}) \le \frac{0}{H_1}\right] \le \frac{4G_0}{(E_1-E_0)^2}.$$

При проведенні аналогічних міркувань можна записати ймовірність того, що стохастичний поліном, визначений у класі степеневих перетворень, буде більше нуля при реалізації гіпотези H_0:

$$P\left[f(\boldsymbol{X}) > \frac{0}{H_0}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi G_1}}\int_{-\infty}^{0} exp\left[-\frac{\left(x-(E_1-k_0)\right)^2}{2G_1}\right]dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{V_1} exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz,$$

де $V_1 = -E_1 - \frac{E_0}{2G_1^{0.5}}$.

і відповідно верхня границя ймовірностей помилок буде визначена як

$$P\left[f(\boldsymbol{X}) > \frac{0}{H_0}\right] \le \frac{4G_1}{(E_1-E_0)^2}.$$

Таким чином, для $n\to\infty$ мінімізовані асимптотичні ймовірності помилок першого та другого роду для РП $\Lambda(\boldsymbol{X})_{sn}$ (2.20) набувають вигляду:

$$\alpha_{Kuns\ min} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{V(\alpha)_{Kuns}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz, \quad \beta_{Kuns\ min} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{V(\beta)_{Kuns}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz,$$

де

$$V(\alpha)_{Kuns} = \frac{E_{1(sn)}-E_{0(sn)}}{\sqrt{G_{0(sn)}}}, \quad V(\beta)_{Kuns} = -\frac{E_{0(sn)}-E_{1(sn)}}{\sqrt{G_{1(sn)}}}.$$

Ці вирази дозволяють аналізувати асимптотичні властивості поліноміальних РП, оптимальних по моментному критерію якості ймовірнісної верхньої границі помилок (2.25).

2.5. Модифікація моментного критерію якості перевірки статистичних гіпотез для побудови поліноміальних розв'язувальних правил виявлення сигналів за статистично залежними вибірковими значеннями

Для застосування нового підходу для перевірки статистичних гіпотез для статистично залежних вибіркових значень на основі запропонованого

моментного критерію якості необхідно провести додаткові дослідження. Ці дослідження мають базуватися на застосування нових математичних моделей на основі спільних 2D моментах та кумулянтах, які мають властивості описувати кореляційні зв'язки досліджуваних випадкових процесів.

Для розв'язання поставленої задачі потрібно так змінити підхід до побудови РП виду (2.20), щоб він, з одного боку, враховував статистичні залежності досліджуваного процесу, а з іншого, міг використати всі ті позитивні напрацювання і властивості, якими наділений запропонований моментний критерій верхньої границі ймовірностей помилок (2.25).

Нехай на заданому інтервалі спостереження є *n* статистично залежних випадкових величин $\boldsymbol{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Скористаємося підходом, представленим у п.2.3, коли логарифм відношення правдоподібності, за теоремою Вейєрштраса, для *n* статистично залежних випадкових величин представляється у вигляді ряду для функції багатьох змінних. В цьому випадку існують такі коефіцієнти, що логарифм відношення правдоподібності можна представити як:

$$ln\frac{P(\boldsymbol{X}|H_1)}{P(\boldsymbol{X}|H_0)} = k_0 + \sum_{v=1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty} k_{(v)i}\, x_{(v)}^{i} + \sum_{v=1}^{n}\sum_{p=2}^{n}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} k_{(v,p)i,j} x_{(v)}^{i} x_{(p)}^{j} +$$

$$\dots + \sum_{i=1}^{\infty}\underset{(n)}{\dots}\sum_{r=1}^{\infty} k_{(i,\dots,r)} x_1^i x_2^j \dots x_n^r \quad . \qquad (2.32)$$

У виразі (2.32) можна бачити, що окрім першого доданку у вигляді суми певних степенів самої змінної із заданими коефіцієнтами, фігурують також комбінації добутків змінної з різними степенями, що дозволяє враховувати статистичні зв'язки між випадковими величинами. Відмітимо, якщо статистичний зв'язок між випадковими змінними відсутній, то третє і наступні доданки в цьому виразі повинні дорівнювати нулю, і представлення логарифма відношення правдоподібності у вигляді степеневого ряду збігається з виразом, отриманим для незалежних випадкових величин (2.20).

Для розкладу відношення правдоподібності в ряд застосовувалася добре відома властивість теореми Вейєрштраса, але такий підхід не визначає методів

знаходження самих невідомих коефіцієнтів такого ряду. Таким чином, ряд (2.32) будемо використовувати як РП для розрізнення статистичних гіпотез, де невизначені коефіцієнти знаходяться з умови екстремуму (мінімуму чи максимуму) вибраного критерію якості. Так само, як і при синтезі РП у вигляді стохастичних рядів для незалежної вибірки, неможливо використовувати ймовірнісні критерії якості, оскільки неможливо знайти ймовірність помилок першого та другого роду, виражену через невизначені коефіцієнти.

Для розв'язання поставленої задачі застосуємо моментний критерій якості та проведемо його модифікацію, що дозволить знайти невизначені коефіцієнти через мінімізацію модифікованого критерію якості.

Як вже відмічалося, для розв'язанні практичних задач доцільно використовувати не ряди, а поліноми із заданою кількістю членів:

$$ln\frac{P(\boldsymbol{X}|H_1)}{P(\boldsymbol{X}|H_0)} = k_0 + \sum_{v=1}^{n}\sum_{i=1}^{s} k_{(v)i}\, x_{(v)}^{i} + \sum_{v=1}^{n}\sum_{p=2}^{n}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} k_{(v,p)i,j} x_{(v)}^{i} x_{(p)}^{j} + \ldots + \sum_{i=1}^{s}\underset{(n)}{\ldots}\sum_{r=1}^{s} k_{(i,\ldots,r)} x_1^i x_2^j \ldots x_n^r \qquad (2.33)$$

Поліном виду (2.33) при скінченному значенні s в загальному випадку не може дорівнювати логарифму відношення правдоподібності, представленому в (2.17). Разом з тим, певна кількість доданків в такому поліномі надасть можливість наближення до логарифма відношення правдоподібності, і найпростішим таким наближенням буде наявність в поліномі (2.33) перших двох доданків:

$$\Lambda(\boldsymbol{X})_{(sn)}^{(\tau)} = k_0^{(\tau)} + \sum_{i=1}^{s}\sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{(\tau)} x_v^i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0, \qquad (2.34)$$

де невідомі коефіцієнти $k_0^{(\tau)}$ і $k_{iv}^{(\tau)}$ повинні врахувати статистичні зв'язки (τ) між досліджуваними вибірковими значеннями.

Для обробки корельованих негаусових процесів необхідно внести корективи у формування критерію якості перевірки статистичних гіпотез таким чином, щоб врахувати як статистичні зв'язки між вибірковими

значеннями, так і їх негаусовий розподіл. Щоб врахувати такі статистичні зв'язки, необхідно використовувати спільні моменти та кумулянти різних порядків, математичні моделі яких представлені в п.2.1 і 2.2. та мають властивості для опису таких характеристик. Очевидно, що коефіцієнти $k_0^{(\tau)}$ і $k_{iv}^{(\tau)}$ РП, які мають враховувати статистичні залежності вибіркових значень, залежать як від 1D, так і від 2D початкових моментів. У цьому випадку математичне сподівання $E_{i(sn)}^{(\tau)}$ та дисперсія $G_{i(sn)}^{(\tau)}$ РП (2.20) також будуть залежати від спільних моментів і кумулянтів та отримають наступний вид:

$$E_{0(sn)}^{(\tau)} = \sum_{v=1}^{n} \sum_{i=1}^{s} k_{iv}^{(\tau)} u_{iv}, \tag{2.35}$$

$$E_{1(sn)}^{(\tau)} = \sum_{v=1}^{n} \sum_{i=1}^{s} k_{iv}^{(\tau)} m_{iv}, \tag{2.36}$$

$$G_{0(sn)}^{(\tau)} = \sum_{v=1}^{n} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} k_{iv}^{(\tau)} k_{jv}^{(\tau)} F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_0), \tag{2.37}$$

$$G_{1(sn)}^{(\tau)} = \sum_{v=1}^{n} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} k_{iv}^{(\tau)} k_{jv}^{(\tau)} F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_1), \tag{2.38}$$

де

$$F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_0) = u_{(ij)}^{(\tau)} - u_i^{(v)} u_j^{(k)}, F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_1) = m_{(ij)}^{(\tau)} - m_i^{(v)} m_j^{(k)}. \tag{2.39}$$

У цьому випадку визначення кореляційних моментів (2.39) є відмінним від наведених в (2.28) та залежать не лише від одномірних моментів $u_i^{(v)}$ та $m_i^{(v)}$, але й від двовимірних (2D) або спільних моментів $u_{(ij)}^{(\tau)}$ and $m_{(ij)}^{(\tau)}$ для гіпотез H_0 та H_1 відповідно. Тоді оптимальні коефіцієнти $k_{iv}^{(\tau)}$ РП (2.34) мають бути визначені з мінімуму функціоналу:

$$Ku\left(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}\right) = \left(G_{0(sn)}^{(\tau)} + G_{1(sn)}^{(\tau)}\right) / \left(E_{1(sn)}^{(\tau)} - E_{0(sn)}^{(\tau)}\right)^2. \tag{2.39}$$

Оптимальні коефіцієнти $k_{iv}^{(\tau)}$ поліноміального стохастичного РП (2.34) повинні бути обрані таким чином, щоб мінімізувати ймовірності помилок першого та другого роду. При дослідженні на екстремум критерію $Ku\left(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}\right)$ (2.39) і визначення його мінімального значення дозволило отримати систему рівнянь для знаходження оптимальних коефіцієнтів $k_{iv}^{(\tau)}$ ::

$$\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{s}} k_{iv}^{(\tau)} \left(F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_0) + F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_1) \right) = m_i^{(v)} - u_i^{(v)}, v = \overline{1,n}, i = \overline{1,s}. \quad (2.40)$$

Визначення 2.13. Нехай функціонал $Ku\left(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}\right)$ (2.39) визначається як моментний критерій якості перевірки статистичних гіпотез для статистично залежних вибіркових значень у вигляді РП виду (2.34). Припустимо, що оптимальні коефіцієнти РП $k_0^{(\tau)}$ і $k_{iv}^{(\tau)}$ з (2.34), які мінімізують праву частину рівняння (2.39), визначають цей критерій. Назвемо цей критерій як "модифікований моментний критерій якості верхніх границь ймовірностей помилок для перевірки статистичних гіпотез". Зауважимо, що менше значення критерію (2.39) вказує на менше значення суми ймовірностей помилок першого та другого роду РП виду (2.34).

Для розв'язання системи рівнянь (2.40) використовують числові методи та доповнення Шура для обробки блокових матриць. Двовимірні 2D сумісні моменти $u_{(ij)}^{(\tau)}$ та $m_{(ij)}^{(\tau)}$ використані для визначення кореляційної функції $\rho_\xi(\tau)$ (2.7), яка визначається як:

$$r_\xi(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & r^{(\tau_{1,2})} & \dots & r^{(\tau_{1,n})} \\ r^{(\tau_{2,1})} & 1 & \dots & \rho r^{(\tau_{2,n})} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho r^{(\tau_{n,1})} & r^{(\tau_{n,2})} & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Наприклад, для експоненційної кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$ можна записати наступне співвідношення:

$$\rho_\xi(\tau) = \rho_\xi^{(\tau_{v,k})} = e^{-A|t_v - t_k|},$$

де $\tau_{(v,k)}$ — час кореляції, а A — масштабуючий коефіцієнт.

Властивість 2.1. Якщо оптимальні коефіцієнти РП (2.34) визначені шляхом розв'язання системи алгебраїчних рівнянь (2.40), то вони задовольняють умову:

$$I_{\mathrm{sn}}^{(\tau)} = \sum_{v=1}^{n} \sum_{i=1}^{s} k_{iv}^{(\tau)} k_{jv}^{(\tau)} \left[F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_0) + F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_1) \right] =,$$

$$= \sum_{v=1}^{n} \sum_{i=1}^{s} k_{iv}^{(\tau)} \left(m_i^{(v)} - u_i^{(v)} \right), j = \overline{1,s}. \quad (2.42)$$

Визначення 2.14. Нехай $I_{\text{sn}}^{(\tau)}$ (2.42) визначений як кількість інформації, яка отримана при розрізненні гіпотез H_0 та H_1 з вибірки розміру n, коли використовується стохастичний поліном РП (2.34) степеня s.

Властивість 2.2. Для коефіцієнтів, визначених з системи алгебраїчних рівнянь (2.40), значення критерію якості $Ku\left(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}\right)$ (2.39) обернено пропорційне кількості інформації, отриманої при розрізненні гіпотез H_0 та H_1 з вибірки розміру n, коли використовується стохастичний поліном РП (2.34) степеня s, і виражається наступним чином:

$$I_{\text{sn}}^{(\tau)} = \frac{1}{Ku\left(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}\right)} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{(\tau)} \left(m_i^{(v)} - u_i^{(v)}\right). \quad (2.43)$$

Значення $Ku\left(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}\right)$ and $I_{\text{sn}}^{(\tau)}$ будуть використанні для оцінювання ефективності синтезованих стохастичних РП (2.34) при різних степенях поліномів.

2.6. Висновки до 2 розділу

У другому розділі дисертаційного дослідження розглядається загальний підхід до побудови математичних моделей асиметричних, ексцесних та асиметрично-ексцесних негаусових корельованих випадкових процесів, які є ключовими для синтезу поліноміальних алгоритмів виявлення сигналів на фоні завад. В дослідженні проаналізовано використання багатовимірної щільності ймовірності (MD PDF) та моментно-кумулянтного опису для моделювання залежностей і статистичних зв'язків між випадковими величинами, що мають складну кореляційну структуру. Показано, що MD PDF дозволяє ефективно описувати складні залежності між компонентами випадкових процесів, враховуючи їх кореляційні та негаусові особливості. Разом з тим, застосування MD PDF для представленої задачі має ряд обмежень, пов’язаних з практичною реалізацією алгоритмів виявлення

сигналів. Тому в роботі застосовується інший підхід, який грунтується на статистиках вищих порядків при застосуванні моментно-кумулянтного опису статистичних залежностей корельованих негаусових процесів.

В роботі запропонований новий підхід, який базується на використанні одновимірних (1D) і двовимірних (2D) моментно-кумулянтних моделей вищих порядків, які надають можливість не тільки описати негаусові характеристики досліджуваних процесів, але і їх кореляційні властивості. На основі такого підходу сформовані нові математичні моделі на основі моментно-кумулянтного опису, що дозволило представити такі класи корельованих негаусових процесів, як асиметричні, ексцесні та асиметрично-ексцесні. Сформовані нові моделі на основі статистик вищих порядків будуть досліджені в наступному розділі роботи.

В даному розділі дисертаційної роботи показано, що відношення правдоподібності для перевірки статистичних гіпотез можна представити у вигляді поліноміального РП, оптимальні коефіцієнти якого знаходяться по одному з моментних критеріїв якості перевірки статистичних гіпотез. Запропонована модифікація моментного критерію якості верхніх границь ймовірностей помилок. Запропонований новий модифікований критерій якості базується на обмеженнях ймовірностей помилок першого та другого роду поліноміального РП, а також використовує дисперсію та математичне сподівання РП при гіпотезі та альтернативі з врахуванням статистичних зв’язків досліджуваних процесів. Отримана система рівнянь для знаходження оптимальних коефіцієнтів РП за новим модифікованим критерієм якості перевірки статистичних гіпотез, що дозволяє проводити синтез та аналіз нелінійних алгоритмів виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад з новими якісними показниками.

Список використаних джерел до розділу 2

1. Van Trees, H., Bell, K., Tiany, Z. Detection Estimation and Modulation Theory. Wiley; 2nd edition, New Jersey (2013).

2. Kay S.M. Fundamentals of Statistical Signal Processing. Prentice Hall PTR, NJ (2008).

3. Tuzlukov V.P. Signal Processing Noise. / V.P. Tuzlukov. — CRC Press, 2002, - 676 pp.

4. Hautus, M.J., Macmillan, N.A., & Creelman, C.D.: Detection Theory: A User's Guide (3rd ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003203636 , 2021 (2021)

5. A. Stuart and K. Ord, Kendall's. Advanced Theory of Statistics, Distribution Theory, Wiley, vol. 1, (2010).

6. Палагін В.В. Статистичне оцінювання параметрів негаусових корельованих випадкових процесів: монографія / В. В. Палагін, О. В. Івченко, Д. А. Вєдєрніков; Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси: видавець ФОП Гордієнко Є.І., 2018. – 199 с.

7. Nandi A.K. Blind Estimation Using Higher-Order Statistics. Springer-Verlag, (1999).

8. Yang Chenyang, Qu Jianming, Li Shaohong, Mao Shiyi. Signal detection with higher-order statistics. Signal Processing, 3rd International Conference on Signal Processing. 2, 2-26, 1996.

9. Orosco, E., Diez, P., Laciar, E., Mut, V., Soria, C., Sciascio, F.. On the use of high-order cumulant and bispectrum formuscular-activity detection. Biomedical Signal Processing and Control. 18, 2015, pp.325–333.

10. Sadler B.M., Giannakis G.B., K.Lii. Estimation and detection in non-Gaussian noise using higher order statistics. IEEE Trans. Signal Process. 42(10), 1994, pp.2729–2741.

11. Kunchenko Y.: Polynomial Parameter Estimations of Close to Gaussian Random Variables. Shaker Verlag, Aachen (2002).

12. Кунченко Ю.П. Оценка параметров случайных величин методом максимизации полинома / Ю.П. Кунченко, Ю.Г. Лега. – К.: Наукова думка, 1992. – 180 с.

13. Кунченко Ю.П. Нелинейная оценка параметров негауссовских радиотехнических сигналов / Ю.П. Кунченко. – К.: Выща шк.,1987. – 191 с.

14. Лега Ю. Г. Принципы построения и исследования систем связи с использованием шумовых сигналов: дисс. ... д-ра техн. наук: 05.12.14 / Ю. Г. Лега. – Черкассы, 2001. – 342 с.

15. Первунинский С.М. Нелинейная фильтрация негауссовых сигналов в классе степенных полиномиальных операторов/ С.М. Первунинский. – К.: Наук. думка, 2001. – 235 с.

16. Palahin V. Models and methods of signal processing in interaction with correlated Non-Gaussian interference. Electronic modeling, 2015, Volume 37, No. 6. - p.19-34.

17. Zabolotnii S., .Khotunov V, Chepynoha A., Tkachenko O. Estimating parameters of linear regression with an exponential power distribution of errors by using a polynomial maximization method. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 1/4(109), pp.64-73, 2021.

18. Palahin V., Honcharov A., Umanets V. Polynomial Algorithms Joint Signals Discrimination and Estimation of Their Parameters in Asymmetric non-Gaussian Noise, International scientific-theoretical journal "Electronic modeling, 2014, issue 4. – pp.51–67.

19. Palahin V., Palahina O., Filipov V., Leleko S., Ivchenko A. Modeling of Joint Signal Detection and Parameter Estimation on Background of Non-Gaussian Noise. Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. 14(3), 87-94 (2015).

20. Палагін В.В. Адаптація методу максимізації полінома для оцінки параметрів випадкових величин за статистично-залежною вибіркою / В.В. Палагін, О.В. Івченко // Збірник наукових праць «Системи обробки інформації». – Харків. – 2009. – випуск 2(76). – С.118-123

21. Палагін В.В. Особливості оцінювання параметрів статистично залежних випадкових величин / В.В. Палагін, О.В. Івченко // Вісник ЧДТУ. – 2009. – №1. – С. 73 – 78.

22. Палагін В.В. Оцінка скалярного параметра корельованої асиметричної випадкової величини першого типу першого виду методом максимізації полінома / В.В. Палагін, О.В. Івченко // Журнал «Інформаційні технології та комп`ютерна інженерія».- Вінниця .- 2009.- №3(16) .- С. 64-71

23. Палагін В.В. Оцінка скалярного параметра корельованої ексцесної випадкової величини 1-го типу 1-го виду методом максимізації полінома / В.В. Палагін, О.В. Івченко // Вісник Інженерної Академії Наук України, випуск 2.- Київ .- 2009.- С. 268-274.

24. Палагин В.В. Полиномиальные методы оценивания параметров сигнала на фоне негауссовских коррелированных помех/ Палагин В.В., Ивченко А.В., Палагина Е.А., Ведерников Д.А. // Информатика и математические методы в моделировании. Том. 9 (2019), № 4. - С.266 - 279.

25. Палагин В.В. Нелинейные методы оценивания параметров сигнала на фоне асимметрично-эксцессных негауссовских коррелированных помех / Палагин В.В., Ведерников Д.А // Вісник ЧДТУ, 2020, №2. - С.77-86.

26. Ведерников Д.А Модели и методы оценивания параметров сигнала на фоне эксцессных негауссовских коррелированных помех / Ведерников Д.А. // Slovak International Scientific Journal, №41 (2020), VOL.1, pp. 47-53.

27. Вєдєрніков Д.А. Математичне моделювання оцінювання параметрів сигналів на фоні негаусових корельованих завад / Вєдєрніков Д.А., Палагіна О.А., Палагін В.В. // 9-та Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації», Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 14-15 травня 2020 р. . - С. 30-31.

28. Івченко О.В. Особливості застосування моментно-кумулянтного опису статистично залежних випадкових величин / Івченко О.В.// Materialy V

mezinarodni vedecko – prakticka conference “Moderni vymozenosti vedy – 2010” – Praha, 2010. – С. 29–31.

29. Івченко О.В. Особливості опису стохастичних процесів за допомогою статистичних характеристик вищих порядків / Івченко О.В.// Праці V Міжнародної науково-практичної конференції «Обробка сигналів і негауссівських процесів», присвяченої пам’яті професора Ю.П. Кунченка: Тези доповідей. – Черкаси: ЧДТУ, 2015. – С. 35–37.

30. Д.О.Смірнов, Д.А.Ведерников, О.А.Палагіна, В.В.Палагін. Методи статистичного оцінювання параметрів сигналу на фоні негаусових корельованих завад. // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць – Кам.-Подільський: Кам.-Подільський нац. ун-т ім. Івана Огієнка, 2021. – Вип. 22. – С. 106-118. DOI: https://doi.org/10.32626/2308-5916.2021-22.106-118

31. L.Vokorokos , S.Marchevský, A.Ivchenko, E.Palahina, V.Palahin. Parameters Estimation of Correlated non-Gaussian processes by the Method of Polynomial Maximization. – Submitted to IET Signal Processing, Volume 11, Issue 3, 2017, p. 313 – 319. DOI: https://doi.org/10.1049/iet-spr.2016.0142

32. В.В.Палагін, Д.О.Смірнов. Моделі та методи обробки сигналів на фоні корельованих асиметричних процесів// Інформатика та математичні методи в моделюванні, Національний університет «Одеська політехніка, Vol. 14 (2024), No. 1-2, pp. 56-69. DOI: https://doi.org/10.15276/imms.v14.no1-2.56

33. D.Smirnov, E.Palahina, V.Palahin. Mathematical Modeling of Signal Detection in Non-Gaussian Correlated Noise // International Conference on Smart Technologies in Urban Engineering - Proceedings of STUE-2022, Lecture Notes in Networks and Systems - LNNS, volume 536, pp.65-74, DOI:https://doi.org/10.1007/978-3-031-20141-7,

34. Smirnov, D., Zorin, O., Palahina, E., Ivchenko, O., Palahin, V. (2024). Development of Moment Quality Criterion and Polynomial Methods for Signals Detection and Distinction in Non-Gaussian Noise. In: Faure, E., et al. Information Technology for Education, Science, and Technics. ITEST 2024. Lecture Notes on

Data Engineering and Communications Technologies, vol 221., pp.368–381, Springer, Cham. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-71801-4_27

35. Daniil Smirnov, Oleksandr Zorin, Elena Palahina, Volodymyr Palahin. Development o f Moment Quality Criterion and Polynomial Methods for Signals Detection and Distinction in Non-Gaussian Noise // VII Міжнародна науково-практична конференція “Інформаційні технології в освіті, науці й техніці” ІТОНТ-2024, с.195-196. URL: https://knsa.chdtu.edu.ua/wp-content/uploads/2024/06/Conference-Proceedings-ITEST-2024_25_06.pdf

36. Д.О.Смірнов, О.А.Палагіна, В.В.Палагін. Методи виявлення сигналів на фоні статистичнозалежних негаусових процесів // Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси (ІІРТК-2024), сімнадцята міжнародна науково-практична конференція, 21-22 травня 2024 р., Київ, Україна, - с.466-468.

37. Д.О.Смірнов, В.В.Палагін. Моделі та методи виявлення сигналів на фоні негаусових корельованих завад // 28-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка і молодь у XXI столітті», 16 – 18 квітня 2024 р., Конференція «Електронна, лазерна та біомедична інженерія» – с.5-7.

38. Volodymyr Palahin, Olena Palahina, Daniil Smirnov, Oleksandr Zorin. Polynomial Methods and Algorithms for Signals Detection and Distinction in Non-Gaussian Noise // «Modern Problems of Mathematical Modelling, Forecasting, and Optimization» in memory of the Honorary Professor of the Kamianets-Podilskyi National University, Dr. Sc., Prof., Cor. member NAPSU Anatoliy Fedorovich VERLAN, с.66-68. URL: https://cs.kpnu.edu.ua/wp-content/uploads/2024/07/optima_2024-tezdop_1.pdf

39. Д.О.Смірнов, О.А.Палагіна, В.В.Палагін. Математичне моделювання задач виявлення сигналів на фоні негаусових корельованих завад // Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси (ІІРТК-2022), п’ятнадцята міжнародна науково-практична конференція, 17-18 травня 2022р., Київ, Україна, - с.224-225.

40. E.Palahina, M.Gamcová , I.Gladisova, J.Gamec, V.Palahin. Signals Detection in Correlated non-Gaussian Noise Using Higher-Order Statistics. – Circuits, Systems,

and Signal Processing, 2018, 37(4), 1704-1723. DOI: https://doi.org/10.1007/s00034-017-0623-5

41. Fabrizio G.A. Over the horizon radar. 2008 IEEE Radar Conference, Rome, Italy, 2008, pp. 1-2, doi: 10.1109/RADAR.2008.4721156.

42. Теорія радіолокаційних систем (видання друге): підручник/ Б.Ф.Бондаренко, В.В.Вишнівський, В.П.Долгушин та ін.; за заг.ред. С.В.Лєнкова. – К. Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2011.- 383с.

43. Яновський Ф.Й. Радіолокаційні системи повітряних суден: підруч. / Ф.Й.Яновський. - К. : НАУ, 2012. - 688 с.

44. Свид І.В. Обробка радіолокаційної інформації систем спостереження повітряного простору: монографія. / І. В. Свид. Дніпро : ЛІРА ЛТД, 2022. 224с.

45. Кунченко Ю.П. Применение функциональных полиномов для обнаружения радиосигналов на фоне негауссовских помех / Ю.П. Кунченко, П.А. Мельяновский, В.М. Слюсаренко — Харьков, 1988. — 35 с. — (Препр. №363. АН УССР. Ин-т радиофизики и электроники).

46. Кунченко Ю.П. Критерий асимптотической нормальности проверки простых статистических гипотез / Ю.П. Кунченко, В.В. Палагин // Праці УНДІРТ. — Одеса, 1998. — № 3 — С. 66 — 70.

47. Палагін В.В. Математичні моделі, методи та засоби виявлення і розрізнення сигналів на фоні негаусових завад: дис. д-ра техн. наук : 01.05.02. Київ, 2013. 552 с.

48. Бабак В.П. Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика / В.П. Бабак, Б.Г. Марченко, М.Є. Фриз. — К.: Техніка, 2004. — 288 с.

49. Жлуктенко, В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч.-метод. посіб. Ч. ІІ. Математична статистика / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний, С. С. Савіна. — К. : КНЕУ, 2005. — 335 с.

50. Volodymyr Palahin, Oleksandr Zorin. Models and Methods for RZ-signals distinction in non-Gaussian noise for information-measurement systems. Journal of Electrical Engineering Vol. 75, No. 5, 2024, pp. 372-382

51. Палагін, В.В. і Зорін, О.С. 2023. Моделі та методи розрізнення RZ-сигналів в інформаційно-вимірювальних системах на фоні асиметричних негаусових завад. Вісник Вінницького політехнічного інституту. 4 (Серп. 2023), 78–86. DOI: https://doi.org/10.31649/1997-9266-2023-169-4-78-86

52. Кунченко Ю.П. Стохастические полиномы / Ю.П. Кунченко — Киев: Наук. думка, 2006. — 275 с.

Розділ 3

СИНТЕЗ ТА АНАЛІЗ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ АЛГОРИТМІВ ВИЯВЛЕННЯ СИГНАЛІВ НА ФОНІ КОРЕЛЬОВАНИХ НЕГАУСОВИХ ЗАВАД

3.1. Синтез поліноміальних алгоритмів виявлення сигналів на фоні корельованих асиметричних негаусових завад

На основі запропонованих математичних моделей корельованих негаусових процесів і модифікації моментного критерію якості перевірки статистичних гіпотез в даному розділі дисертаційної роботи проведений синтез поліноміальних алгоритмів виявлення сигналів і порівняльний аналіз їх ефективності у порівнянні з відомим результатами.

Постановка задачі. Нехай досліджуваний вхідний сигнал $\xi(t)$ складається з адитивної суміші корисного сигналу $s(t)$ та завади $\eta(t)$, які спостерігається на інтервалі часу $[0, \mathrm{T}]$

$$\xi(t) = s(t) + \eta(t), \tag{3.1}$$

де $\eta(t)$ – стаціонарний корельований негаусовий випадковий процес, який описується набором 1D та 2D кумулянтів і моментів [1].

На практиці, при побудові технічних систем, іноді зручніше опрацьовувати не неперервний сигнал, а дискретний в певні моменти часу, що пов'язано із широким застосуванням цифрових систем обробки сигналів [2, 3]. В цьому випадку дискретна вибірка сигналу $\xi(t)$ буде мати вид $\boldsymbol{X} = \{x_1,\ x_2, \dots, x_n\}$ в моменти часу t_v, а наявність чи відсутність корисного сигналу $s(t)$ в цій вибірці $\boldsymbol{X}$ буде описуватися реалізаціє відповідної гіпотези H_0 (корисний сигнал $s(t)$ відсутній) або H_1 (корисний сигнал $s(t)$ присутній) наступним чином [4-6]:

$$H_i\colon \xi_v = s_v(\alpha_k) + \eta_v\left(\gamma_k, \chi_{ij}^{(\tau)}\right), \quad H_0\colon \xi_v = \eta_v\left(\gamma_k, \chi_{ij}^{(\tau)}\right), v = \overline{1,n}, \tag{3.2}$$

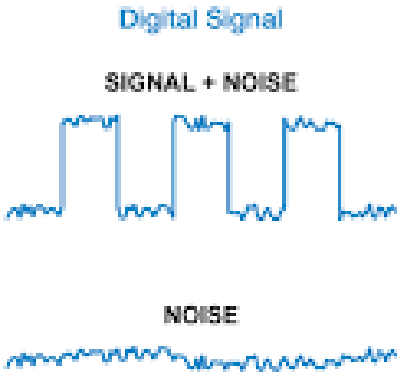
де $s_v(\alpha_k)$ – корисний сигнал, який описується параметрами α_k, $\eta_v\left(\gamma_k, \chi_{ij}^{(\tau)}\right)$ – негаусова випадкова величина з параметрами у формі набору кумулянтів $\chi_{ij}^{(\tau)}$, $k = \overline{1,\mu}$.

Будемо вважати, що множина 1D та 2D моментів при реалізації гіпотези H_1 матиме вигляд – $\left(m_i^{(v)}, m_{ij}^{(\tau)}\right)$, а для гіпотези H_0 –$\left(u_i^{(v)}, u_{ij}^{(\tau)}\right)$, де $\{u_i^{(v)}$,$m_i^{(v)}\}$ - 1D моменти в момент часу t_v порядку i та $\{\{u_{ij}^{(\tau)}, m_{ij}^{(\tau)}\}$ – 2D сумісні моменти розмірності (ij) при реалізації гіпотези H_0 і H_1 відповідно.

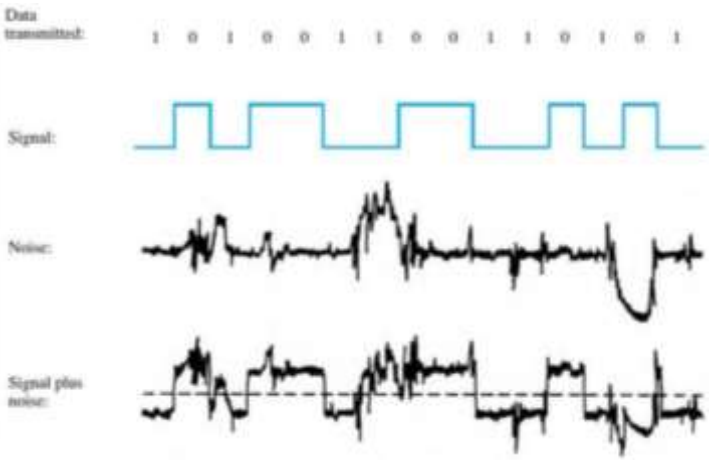
В даному досліджені припустимо, що в якості корисного сигналу $s(t)$ буде виступати повністю відомий постійний сигнал a, Виявлення повністю відомого стаціонарного сигналу a є класичною задачею в теорії виявлення сигналів. Цей тип сигналу зустрічається у випадках, коли характеристики сигналу, такі як форма і спектр, повністю відомі й залишаються постійними з часом (рисунок .3.1). Така постановка завдань виникає в системах, де існує чітке знання про сигнал, який необхідно виявити на фоні шуму, наприклад [7-9]:

1. *Радіолокаційні системи:* виявлення сигналу від об’єктів на фоні природного або штучного шуму. В таких системах характеристичний сигнал, що відбивається від об’єкта, відомий наперед, а процес виявлення зводиться до визначення цього сигналу на фоні завад;
2. *Телекомунікаційні системи:* декодування і виявлення сигналів, що передаються через зашумлені канали зв’язку, де сигнал передбачений і його параметри відомі. Наприклад, детектування відомих еталонних сигналів в протоколах зв’язку;
3. *Системи активного моніторингу:* акустичні або ультразвукові системи, де відомий сигнал (наприклад, ехо-сигнал) аналізується для моніторингу середовища або об’єктів, таких як підводні човни чи промислове обладнання;

4. *Біомедичні застосування:* виявлення певних фізіологічних сигналів (наприклад, пульсуючих сигналів у кардіології), коли форма сигналу і його спектральні характеристики є відомими та ін.



а)



б)

Рисунок 3.1. а) - представлення адитивної суміші повністю відомого постійного сигналу a (Signal) та завади $\eta(t)$ (Noise); б) - представлення процесу передачі дискретних сигналів при адитивній взаємодії з завадами

3.1.1. Синтез поліноміальних розв'язувальних правил при степені поліному s=1

Скористаємося загальним РП, представленим в (2.34), де оптимальні коефіцієнти знаходяться з мінімуму модифікованого моментного критерію $Ku\left(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}\right)$ (2.39).

Для побудови такого РП наведемо моментно-кумулянтний опис у вигляді одновимірних (1D) моментів до другого порядку (2s порядку) (2.8), та двовимірні моменти другого порядку для гіпотези та альтернативи (2.9).

При степені полінома s=1 РП (2.34) буде мати наступний загальний вид

$$\Lambda(\boldsymbol{X})_{(1n)}^{(\tau)} = k_0^{(\tau)} + \sum_{v=1}^{n} k_{1v}^{(\tau)} x_v^i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0. \qquad (3.3)$$

Початкові моменти u_i досліджуваної випадкової величини при гіпотезі H_0 та m_i при гіпотезі H_1 отримають наступний вид

$$u_1 = 0, u_2 = \chi_2, m_1 = a, m_2 = a^2 + \chi_2,$$

а сумісні моменти $u_{11}^{(v,k)}$ при гіпотезі H_0 та $m_{11}^{(v,k)}$ при гіпотезі H_1 запишуться як:

$$u_{11}^{(v,k)} = \chi_{11} = \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)}, m_{11}^{(v,k)} = a^2 + \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)},$$

де $\rho^{(v,k)}$ – кореляційна функція випадкового процесу, яка визначається згідно (2.7) або може мати інший вид і обирається згідно відповідної задачі дослідження.

Відповідно до (2.39), функції $F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_i)$, i=0,1, матимуть наступний вид:

$$F_{(11)}^{(\tau)}(H_0) = \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)} \quad , F_{(11)}^{(\tau)}(H_1) = \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)}. \tag{3.4}$$

Оскільки РП (3.3) залежить від випадкових вибіркових значень x_v^i, то і результат обробки таких значень теж буде випадковим. Отже, стохастичний поліном (3.3) характеризується математичним сподіванням $E_{i(sn)}^{(\tau)}$ та дисперсією $G_{i(sn)}^{(\tau)}$ при гіпотезі та альтернативі H_i, i=0,1, які в загальному випадку представлені в (2.35)-(2.38). Для даного РП ці вирази, з врахуванням (3.4), мають наступний вид:

$$E_{0(1n)}^{(\tau)} = nk_{1v}^{(\tau)} u_{1v} = 0, \; E_{1(n)}^{(\tau)} = nk_{1v}^{(\tau)} m_{1v} = nk_{1v}^{(\tau)} a, \tag{3.5}$$

$$G_{0(1n)}^{(\tau)} = nk_{1v}^{2(\tau)} \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)}, G_{1(1n)}^{(\tau)} = nk_{1v}^{2(\tau)} \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)}. \tag{3.6}$$

Невідомий коефіцієнт $k_{1v}^{(\tau)}$ РП (3.3) знаходиться відповідно до розв'язання системи рівнянь (2.40), яка отримає наступний вид

$$2k_{1v}^{(\tau)} \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)} = a, v, k = \overline{1,n}\,. \tag{3.7}$$

Систему рівнянь (3.7) можна розв'язати, наприклад, при застосуванні формул Крамера та вона має рішення, якщо її визначник Δ_1 з елементами $\chi_2 \cdot \rho^{(v,k)}$ не дорівнює нулю

$$\Delta_1 = det\left\|F_{(11)}^{(\tau)}\right\| = det\left\|\rho^{(\tau_{v,k})}\right\| = \begin{vmatrix} \rho^{(1,1)}, \rho^{(1,2)} & \cdots & \rho^{(1,n)} \\ \rho^{(2,1)}, \rho^{(2,2)} & & \rho^{(2,n)} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \rho^{(n,1)}, \rho^{(n,2)} & \cdots & \rho^{(n,n)} \end{vmatrix} \neq 0,$$

де $F_{(11)}^{(\tau)} = F_{(11)}^{(\tau)}(H_0) + F_{(11)}^{(\tau)}(H_1)$, $\rho^{(v,k)}$ – заданий коефіцєнт кореляції згідно (2.7).

В цьому випадку коефіцієнт $k_{1v}^{(\tau)}$ РП (3.3) знаходиться як

$$k_{1v}^{(\tau)} = \frac{a\Delta_{Av}}{\Delta_1}, \tag{3.8}$$

де визначник Δ_{Av} знаходиться з Δ_1 при заміні v стовбця на новий стовбець, який складається з одиниць.

Невідомий коефіцієнт $k_0^{(\tau)}$ РП (3.3) знаходиться відповідно до (2.24) та з врахуванням (3.5) має наступний вид

$$k_0^{(\tau)} = 0.5\left(E_{0(1n)}^{(\tau)} + E_{1(1n)}^{(\tau)}\right) = 0.5nk_{1v}^{(\tau)}a\,.$$

Тоді РП (3.3) прийме кінцеве значення

$$\sum_{v=1}^{n}\Delta_{Av}\left(x_v - \frac{a}{2}\right)\begin{matrix} H_1 \\ > \\ < \\ H_0 \end{matrix} 0. \tag{3.9}$$

Ефективність такого РП буде визначатися через значення самого критерію якості $Ku\left(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}\right)$ (2.39) перевірки статистичних гіпотез, який характеризує суму верхніх границь ймовірностей помилок першого та другого роду РП і прийме наступний вид

$$Ku_1\left(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}\right) = \left(2nk_{1v}^{2(\tau)}\,\chi_2 \cdot \rho^{(v,k)}\right)/\left(nk_{1v}^{(\tau)}a\right)^2$$

або

$$Ku_1\left(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}\right) = \frac{\Delta_1}{a^2\sum_{v=1}^{n}\Delta_{Av}}. \tag{3.10}$$

Відмітимо, що чим менше є значення критерію (3.10), тим менше значення суми верхніх границь ймовірностей помилок першого та другого роду синтезованого РП (3.9).

Окрім того, згідно з властивостями 2.1, 2.2 та визначенням 2.14, ще одним параметром, який є зручним для оцінювання ефективності синтезованого РП (3.9), є кількість інформації, яка отримана при розрізненні гіпотез H_0 та H_1 з вибірки розміру n. Ця величина є зворотною до значення критерія якості (3.10) і виражається наступним чином

$$I_{\ln}^{(\tau)} = a^2 \sum_{v=1}^{n} \Delta_{Av} / \Delta_1. \qquad (3.11)$$

Відмітимо, що чим більше значення виразу (3.11), тим більш ефективним є РП за модифікованим критерієм якості $Ku\left(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}\right)$ (3.10).

Можна показати, що при статистично незалежних вибіркових значеннях кореляційна функція дорівнює нулю ($\rho^{(\tau)} = 0$) для $v \neq k$, і дорівнює одиниці ($\rho^{(\tau)} = 1$) для $v = k$

$$\Delta_1 = det\left\|\rho^{(\tau_{v,k})}\right\| = \begin{vmatrix} 1,0,0, & \cdots & 0 \\ 0,1,0, & & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0,0,0, & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Тоді РП виду (3.9) вироджується в лінійне РП добре відомого виду

$$\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} x_v - \frac{a}{2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0, \qquad (3.12)$$

де відбувається порівняння усередненого результату обробки вибірки x_v за період спостереження з половинним значенням постійного досліджуваного сигналу a.

Відмітимо, що РП (3.12) повністю співпадає з РП, яке отримано з відношення правдоподібності (2.15) в припущенні гаусових моделей розподілу випадкових величин за критерієм ідеального спостерігача, або

Байєсівським критерієм в припущенні нульових значень функцій втрат і рівноймовірної появи гіпотези та альтернативи [4-6].

В цьому випадку, для РП виду (3.12) значення критерію якості (3.10) перетвориться до наступного виду

$$Ku_1(E,G) = \frac{2}{nq}, \tag{3.13}$$

де q – відношення сигнал/шум (SNR – signal-to-noise ratio).

З даного виразу видно, що чим більше значення n або q, тим менше значення критерію $Ku_1(E,G)$, а відповідно, і менші значення верхніх границь ймовірностей помилок першого та другого роду лінійного РП (3.12).

Величина, яка є зворотною до даного критерію $Ku_1(E,G)$, є кількість інформації, яка отримана при розрізненні гіпотез H_0 та H_1 з вибірки розміру n і має вид

$$I_{1\text{n}}(E,G) = \frac{nq}{2}, \tag{3.14}$$

Відповідно, чим більше n або q, тим більше значення $I_{1\text{n}}(E,G)$, що відповідає меншім значенням верхніх границь ймовірностей помилок першого та другого роду лінійного РП (3.12). Тобто, чим більше значення $I_{1\text{n}}(E,G)$, тим ефективнішим є РП.

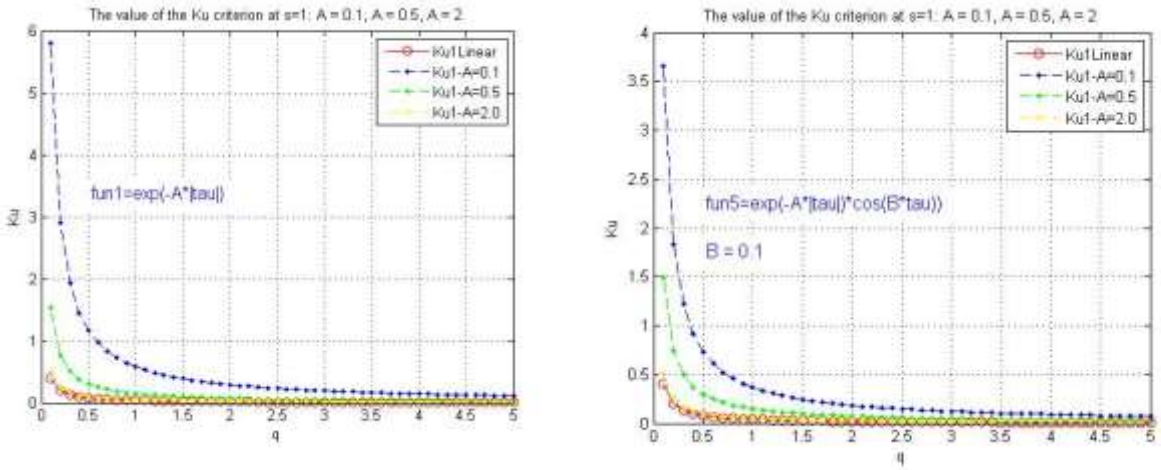
Синтезоване РП (3.9) будемо називати лінійним, оскільки вибіркові значення x_v, які ним обробляються, не підносяться до вищої степені, а є в першій степені.

На рисунку 3.2.-а наведені залежності значення критерію якості $Ku_1\left(E^{(\tau)},G^{(\tau)}\right)$ для РП при степені полінома s=1 від відношення сигнал/шум q при n=100 для різних кореляційних виду (2.7). Ku1Linear (червона лінія) характеризує виродження значення критерію $Ku_1\left(E^{(\tau)},G^{(\tau)}\right)$ (3.10) в значення $Ku_1(E,G)$ (3.13) для статистично незалежних вибіркових значень, коли масштабуючий коефіцієнт для кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$ достатньо великий (A>1). Криві Ku1-A=0.1, Ku1-A=0.5 та Ku1-A=2.0

демонструють значення критерію якості $Ku_1\left(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}\right)$ (3.10) при різних параметрах A=0.1, 0.5, 2.0 відповідно. З графіків видно, що при зростанні відношення сигнал/шум q значення критерію $Ku_1\left(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}\right)$ зменшується, що свідчить про зменшення ймовірностей помилок першого і другого роду лінійного РП (3.9) та (3.12). Необхідно відмітити, що наявність кореляційних зв'язків погіршує ефективність РП (рис.3.2 – а), для яких значення критерію якості Ku1-A=0.1, Ku1-A=0.5 та Ku1-A=2.0 отримується більшим у порівнянні з Ku1Linear (червона лінія). Про це свідчить синя крива Ku1-A=0.1 для сильних статистичних зв'язків, коли A=0.1, у порівнянні з відсутністю таких статистичних залежностей для Ku1Linear (червона лінія). Подібну ситуацію можна спостерігати для різних кореляційних функцій fun1 (а) та fun5 (б).

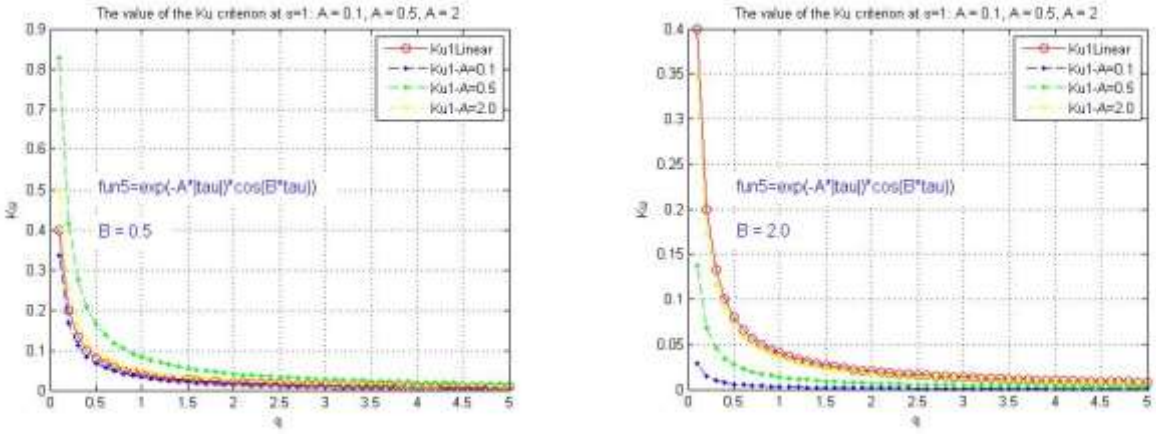
Разом з тими відмітимо, що можуть бути такі кореляційні функції (рисунок 3.3 – рисунок 3.4), коли наявність статистичних зв'язків зменшує значення критерію $Ku_1\left(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}\right)$, а відповідно, зменшує ймовірності помилок першого і другого роду РП. Наприклад, на рис.3.3-б синя та зелені криві кореляційної функції fun5, що відповідають Ku1-A=0.1, Ku1-A=0.5, мають менші значення у порівнянні з червоною кривою Ku1Linear, яка характеризує випадок для статистично незалежних вибіркових значеннях.

Аналогічну ситуацію по збільшенню ефективності лінійного РП при врахуванні статистичних зв'язків вибіркових значень у порівнянні з відсутністю такого врахування спостерігається і для інших кореляційних функцій, наприклад для функції виду fun7 на рисунку 3.4.



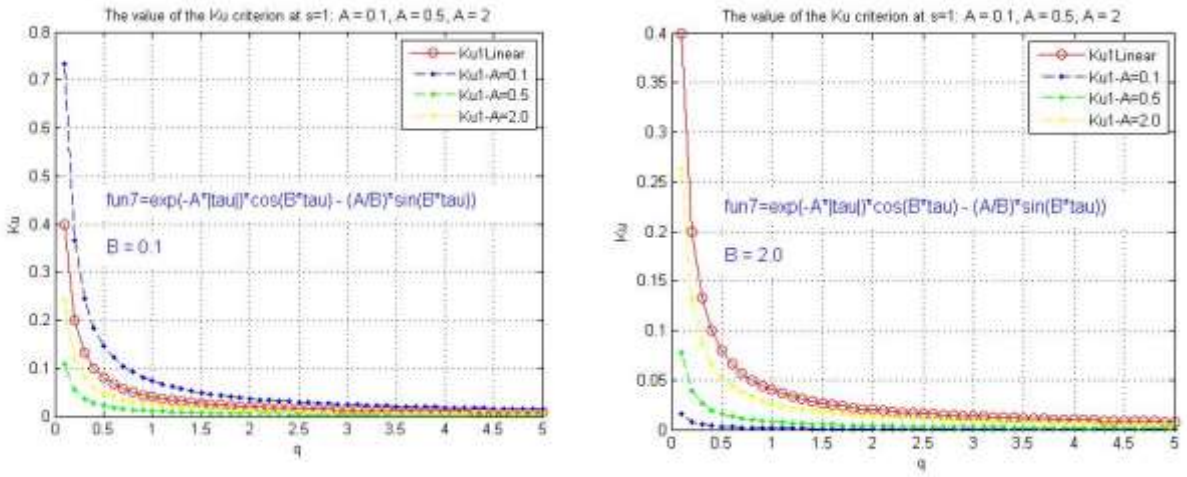
а) б)

Рисунок 3.2. Залежність значення критерію $Ku_1\left(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}\right)$ для лінійного РП при степені s=1 від відношення сигнал/шум q при n=100 та різних масштабуючих коефіцієнтах A (0.1; 0.5; 2.0) та B=0.1 кореляційних функцій fun1 (а) та fun5 (б).



а) б)

Рисунок 3.3. Залежність значення критерію $Ku_1\left(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}\right)$ для лінійного РП при степені s=1 від відношення сигнал/шум q при n=100 та різних масштабуючих коефіцієнтах A (0.1; 0.5; 2.0) та B=(а- 0.5; б - 2.0) кореляційної функції fun5.



а) б)

Рисунок 3.4. Залежність значення критерію $Ku_1\left(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}\right)$ для лінійного РП при степені s=1 від відношення сигнал/шум q при n=100 та різних масштабуючих коефіцієнтах A (0.1; 0.5; 2.0) та B=(а- 0.1; б - 2.0) кореляційної функції fun7.

Відмітимо, що отримане РП (3.9) не враховує негаусовий розподіл досліджуваних вибіркових значень, оскільки для його синтезу використовувалися лише початкові моменти першого та другого порядку, а саме математичне сподівання і дисперсія, які не мають властивостей для опису негаусових щільностей розподілу. Разом з тим, для побудови такого лінійного РП були застосовані сумісні моменти другого порядку ($u_{11}^{(v,k)}$ та $m_{11}^{(v,k)}$), що надало можливості для врахування кореляційних властивостей досліджувного процесу. Тому збільшимо степінь РП до s=2 таким чином, щоб з'явилася можливість врахувати негаусові властивості досліджуваного випадкового процесу через застосування статистик вищих порядків у вигляді коефіцієнтів асиметрії та ексцесу.

3.1.2. Синтез поліноміальних розв'язувальних правил при степені поліному s=2.

Розглянемо випадок збільшення степеня РП (2.34), при якому в якості апріорного опису досліджуваного випадкового процесу будуть

використовуватися початкові одномірні моменти до четвертого порядку (до 2*s*), а для опису статистичних зв'язків – сумісні моменти другого порядку. Такий підхід дозволяє врахувати асиметрію негаусового процесу у формі коефіцієнта асиметрії $\gamma_3 \neq 0$, при цьому для асиметричних негаусових процесів, згідно прийнятої класифікації [11, 12], коефіцієнт ексцесу приймемо за нульове значення ($\gamma_4 = 0$), що спростить математичні моделі та кінцеві вирази. В цьому випадку РП буде нелінійним, оскільки вибіркові значення будуть підноситися до квадрату (x_v^2) і, згідно загальної фори представлення РП (2.34), має наступний вид

$$\Lambda(\boldsymbol{X})_{(2n)}^{(\tau)} = k_0^{(\tau)} + \sum_{v=1}^{n} k_{1v}^{(\tau)} x_v + \sum_{v=1}^{n} k_{2v}^{(\tau)} x_v^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0. \tag{3.15}$$

Для знаходження оптимальних коефіцієнтів РП (3.15) наведемо апріорну інформацію про корельований асиметричний негаусовий процес, який досліджується.

Для цього випадку початкові моменти u_i досліджуваної випадкової величини при гіпотезі H_0 до 4-го порядку, згідно (2.8), отримають наступний вид

$$u_1 = 0, u_2 = \chi_2, u_3 = \chi_3 = \gamma_3 \chi_2^{\frac{3}{2}}, u_4 = 3\chi_2^2, \tag{3.16}$$

та m_i при гіпотезі H_1 запишуться як:

$$m_1 = a, m_2 = a^2 + \chi_2, m_3 = a^3 + 3a\chi_2 + \gamma_3 \chi_2^{\frac{3}{2}}, \tag{3.17}$$

$$m_4 = a^4 + 6a^2\chi_2 + 4a\gamma_3 \chi_2^{\frac{3}{2}} + 3\chi_2^2,$$

а сумісні моменти $u_{ij}^{(v,k)}$ при гіпотезі H_0 запишуться як:

$$u_{11}^{(v,k)} = \chi_{11} = \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)}, u_{12}^{(v,k)} = u_{21}^{(v,k)} = \gamma_3 \chi_2^{\frac{3}{2}} \rho^{(v,k)^{\frac{3}{2}}}, \tag{3.18}$$

$$u_{22}^{(v,k)} = \chi_2^2 + 2\chi_{11}^1 = \chi_2^2\left(1 + 2\rho^{(v,k)^2}\right),$$

та $m_{ij}^{(v,k)}$ при гіпотезі H_1:

$$m_{11}^{(v,k)} = a^2 + \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)},$$

$$m_{12}^{(v,k)} = m_{21}^{(v,k)} = a^3 + a\chi_2 + 2a\chi_2\rho^{(v,k)} + \gamma_3\chi_2^{\frac{3}{2}}\rho^{(v,k)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (3.19)$$

$$m_{22}^{(v,k)} = a^4 + 2a^2\chi_2 + \chi_2^2 + 4a^2\chi_2\rho^{(v,k)} + 4a\gamma_3\chi_2^{\frac{3}{2}}\rho^{(v,k)^{\frac{3}{2}}} + 2\chi_2^2\rho^{(v,k)^2},$$

де $\rho^{(v,k)}$ – кореляційна функція випадкового процесу, яка визначається з (2.7) і обирається згідно відповідної задачі дослідження.

Відповідно до (2.39), функції $F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_i)$, i=0,1 при гіпотезі H_0 запишуться як:

$$F_{(11)}^{(\tau)}(H_0) = \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)},$$

$$F_{(12)}^{(\tau)}(H_0) = F_{(21)}^{(\tau)}(H_0) = \gamma_3\chi_2^{\frac{3}{2}}\rho^{(v,k)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (3.20)$$

$$F_{(22)}^{(\tau)}(H_0) = 2\chi_2^2\rho^{(v,k)^2},$$

та при гіпотезі H_1:

$$F_{(11)}^{(\tau)}(H_1) =\cdot \chi_2\rho^{(v,k)},$$

$$F_{(12)}^{(\tau)}(H_1) = F_{(21)}^{(\tau)}(H_1) = 2a\chi_2\rho^{(v,k)} + \gamma_3\chi_2^{\frac{3}{2}}\rho^{(v,k)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (3.21)$$

$$F_{(22)}^{(\tau)}(H_1) = 4a^2\chi_2\rho^{(v,k)} + 4a\gamma_3\chi_2^{\frac{3}{2}}\rho^{(v,k)^{\frac{3}{2}}} + 2\chi_2^2\rho^{(v,k)^2}.$$

Оскільки РП (3.3) залежить від випадкових вибіркових значень x_v^i, то і результат обробки таких значень буде випадком. Отже, РП характеризується такими параметрами, як математичне сподівання $E_{i(sn)}^{(\tau)}$ та дисперсія $G_{i(sn)}^{(\tau)}$ при гіпотезі та альтернативі H_i, i=0,1, які в загальному випадку представлені в (2.35) – (2.38). Для даного РП ці вирази, з врахуванням (3.17) – (3.21), мають наступний вид:

$$E_{0(2n)}^{(\tau)} = nk_{2v}^{(\tau)}u_{2v},\ E_{1(2n)}^{(\tau)} = n(k_{1v}^{(\tau)}m_{1v} + k_{2v}^{(\tau)}m_{2v}),$$

$$G_{0(2n)}^{(\tau)} = n(k_{1v}^{(\tau)2}\ F_{(11)}^{(\tau)}(H_0) + 2k_{1v}^{(\tau)}\ k_{2v}^{(\tau)}F_{(12)}^{(\tau)}(H_0) + k_{2v}^{(\tau)2}\ F_{(22)}^{(\tau)}(H_0), \quad (3.22)$$

$$G_{1(2n)}^{(\tau)} = n(k_{1v}^{2(\tau)}\ F_{(11)}^{(\tau)}(H_1) + 2k_{1v}^{(\tau)}\ k_{2v}^{(\tau)}F_{(12)}^{(\tau)}(H_1) + k_{2v}^{2(\tau)}\ F_{(22)}^{(\tau)}(H_1).$$

Невідомі коефіцієнти нелінійного поліноміального РП (3.15) $k_{1v}^{(\tau)}$ та $k_{2v}^{(\tau)}$ знаходяться відповідно до розв'язання системи рівнянь (2.40), яка отримає наступний вид

$$\begin{cases} \sum_{v=1}^{n} k_{1v}^{(\tau)}\ F_{(11)}^{(\tau)} + \sum_{v=1}^{n} k_{2v}^{(\tau)}\ F_{(12)}^{(\tau)} = a \\ \sum_{v=1}^{n} k_{1v}^{(\tau)}\ F_{(21)}^{(\tau)} + \sum_{v=1}^{n} k_{2v}^{(\tau)}\ F_{(22)}^{(\tau)} = a^2 \end{cases}, \quad (3.23)$$

де $F_{(11)}^{(\tau)} = F_{(11)}^{(\tau)}(H_0) + F_{(11)}^{(\tau)}(H_1)$, $F_{(12)}^{(\tau)} = F_{(12)}^{(\tau)}(H_0) + F_{(12)}^{(\tau)}(H_1)$,

$F_{(21)}^{(\tau)} = F_{(21)}^{(\tau)}(H_0) + F_{(21)}^{(\tau)}(H_1)$, $F_{(22)}^{(\tau)} = F_{(22)}^{(\tau)}(H_0) + F_{(22)}^{(\tau)}(H_1)$.

Для розв'язання даної системи рівнянь (3.23) застосуємо метод Крамера та доповнення Шура для роботи з блоковими матрицями, тоді

$$k_{1v}^{(\tau)} = \Delta_{Bv}/\Delta_2,\ v = \overline{1,n},\ k_{2v}^{(\tau)} = \Delta_{Cv}/\Delta_2,\ v = \overline{n+1,\ 2n}, \quad (3.24)$$

де визначник Δ_2 системи рівнянь (3.23) має наступний вид

$$\Delta_2 = det\begin{vmatrix} \left\|F_{(11)}^{(\tau)}\right\| & \left\|F_{(12)}^{(\tau)}\right\| \\ \left\|F_{(21)}^{(\tau)}\right\| & \left\|F_{(22)}^{(\tau)}\right\| \end{vmatrix},\ v,k = \overline{1,n}, \quad (3.25)$$

де Δ_{Bv} – визначник, який отриманий з визначника Δ_2, коли v -й стовбець ($v = \overline{1,n}$) замінений на інший зі значеннями $(q^{0.5}, q^{0.5}, \dots, q^{0.5}\quad q, q, \dots, q)$, Δ_{Cv} – визначник, який визначається подібним чином для $v = \overline{n+1,\ 2n}$.

Показано, що в цьому випадку загальний вид порогового коефіцієнта $k_0^{(\tau)}$ РП (3.15) для отриманих коефіцієнтів $k_{1v}^{(\tau)}$ та $k_{2v}^{(\tau)}$ розраховується як

$$k_0^{(\tau)} = -\frac{1}{2\Delta_2}\sum_{v=1}^{n}\left(q^{0.5}\Delta_{Bv} + \Delta_{Cv}(q+1)\right). \quad (3.26)$$

Легко бачити, що запропоноване РП виду (3.15) є нелінійним і враховує характеристики як негаусового процесу через врахування коефіцієнта асиметрії γ_3, так і кореляційні зв'язки вибіркових значень через використання сумісних кумулянтів $\chi_{ij}^{(\tau)}$, $i,j=\overline{1,2}$ у виразах (3.16 – 3.21).

Ефективність отриманого нелінійного РП виду (3.15) у порівнянні з лінійним РП (3.9) можна виразити або через значення критерію якості $Ku\left(E^{(\tau)},G^{(\tau)}\right)$ (2.39) або кількості добутої інформації $I_{\text{sn}}^{(\tau)}$ з вибіркових значень про розрізнення гіпотез H_0, H_1 згідно виразу (2.43). Скористаємося значенням $I_{\text{sn}}^{(\tau)}$, оскільки це спрощує розрахункові вирази. Тоді для синтезованого поліноміального РП виду (3.15) отримаємо

$$I_{2\text{n}}^{(\tau)}=(1/\Delta_2)\sum_{v=1}^{n}(q^{0.5}\Delta_{Bv}+q\Delta_{Cv}). \qquad (3.27)$$

Відмітимо, що без врахування коефіцієнта асиметрії γ_3 синтезоване РП (3.15) перетворюється до лінійного виду (3.9), і відповідно, $I_{2\text{n}}^{(\tau)}$ буде дорівнювати $I_{1\text{n}}^{(\tau)}$ згідно (3.11).

Зауважимо, що за даним підходом можна синтезувати нелінійні поліноміальні РП більш високих степенів перетворення, де будуть враховані моменти та кумулянти вищих порядків. В цьому випадку потрібно знаходити компроміс між збільшенням ефективності синтезованих РП, ускладненням обчислювальних процесів та звуженням області допустимих значень для кумулянтних коефіцієнтів вищих порядків [1, 10, 112].

3.1.3. Аналіз поліноміальних розв'язувальних правил виявлення сигналів на фоні корельованих асиметричних негаусових завад

Проведемо аналіз синтезованих поліноміальних РП при степенях полінома *s*=1,2 та порівняємо їх ефективність в залежності від параметрів коефіцієнта асиметрії негаусової завади γ_3, відношення сигнал/шум q та параметрів кореляції різних кореляційних функцій $\rho_\xi(\tau)$, наведених в (2.7).

Ефективність РП порівнювалася по значенню критеріїв якості $Ku\left(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}\right)$ для степені полінома РП при *s*=1 та *s*=2, або кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез для лінійного РП $I_{1n}^{(\tau)}$ (3.11) та нелінійного РП $I_{2n}^{(\tau)}$ (3.27). Чим більше значення кількості добутої інформації $I_{1n}^{(\tau)}$ або $I_{2n}^{(\tau)}$, тим менше значення критерію якості для такого РП, і відповідно, менші ймовірності помилок першого та другого роду такого РП. Отже, РП з більшим показником кількості добутої інформації буде вважатися більш ефективним.

На рисунку 3.5 приведені залежність відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез I_1/I_2 РП при степені полінома *s*=1 та *s*=2 відповідно від коефіцієнта асиметрії негаусової завади gama3 (γ_3). Дослідження проводилися при різних значеннях відношення сигнал/шум (q=0.1; 1; 10) та параметрах кореляції для кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$. Така експоненційна автокореляційна функція широко застосовується для опису стаціонарних процесів з експоненційним згасанням кореляції, використовується в системах передбачення та обробки сигналів для моделювання швидко загасаючих сигналів, у радіофізиці ця функція відповідає фільтрації сигналів з білим шумом, де спектральна щільність обернено пропорційна квадрату частоти.

Кореляційна функція має масштабуючий коефіцієнт *A*, який відповідає за степінь статистичного зв'язку вибіркових значень. На рис.3.5.а масштабуючий коефіцієнт має мале значення *A*=0.1, що свідчить про сильні статистичні зв'язки вибіркових значень, а на рис.3.5.б - *A*=5.0, що свідчить фактично про відсутність таких статистичних залежностей.

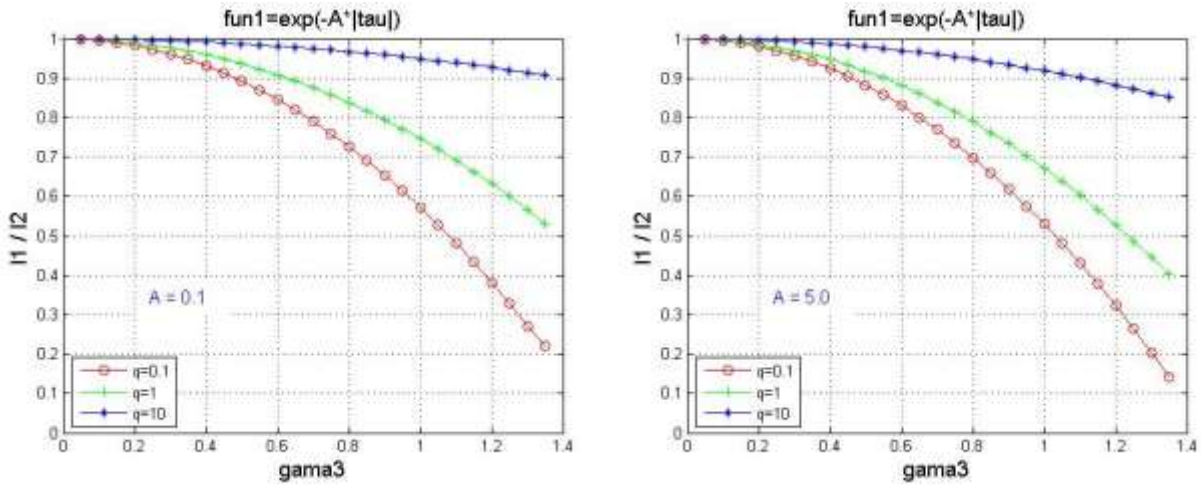
Для обох випадків характерна зростаюча залежність параметрів $I_{1n}^{(\tau)}$ для лінійного та $I_{2n}^{(\tau)}$ для нелінійного РП відповідно від коефіцієнта асиметрії негаусової завади gama3 (γ_3). При нульовому значенні gama3=0, що відповідає гаусовій моделі досліджуваного випадкового процесу, ці параметри є однаковими, про що свідчить їх відношення, яке дорівнює $I_{1n}^{(\tau)}/I_{2n}^{(\tau)} = 1$. При

зростанні параметра gama3 (γ_3) таке відношення стає менше одиниці, що свідчить про зростання кількості добутої інформації $I_{2n}^{(\tau)}$ у порівнянні з $I_{1n}^{(\tau)}$, і відповідно, зменшення ймовірностей помилок нелінійного РП у порівнянні з лінійним, яке є оптимальним для гаусової моделі випадкового процесу. Наприклад, для рисунку 3.5.а при gama3 = 1.1 і q=0.1 відношення $I_{1n}^{(\tau)}/I_{2n}^{(\tau)} = 0.5$, що свідчить про те, що ймовірності помилок синтезованого нелінійного РП при степені полінома s=2 (3.15) будуть вдвічі менші за аналогічний показник для лінійного РП при s=1 (3.9), яке є оптимальним для гаусової моделі завад. Таким чином, врахування параметрів, що описуються негаусовий розподіл досліджуваного випадкового процесу на прикладі коефіцієнта асиметрії збільшує ефективність РП у порівнянні з поширеними і добре відомими лінійними моделями РП, оптимальними за гаусовою щільністю розподілу досліджуваного процесу.

Відмітимо, що найбільша ефективність синтезованого нелінійного РП досягається при менших значеннях відношення сигнал/шум та граничних значеннях коефіцієнта асиметрії. При врахуванні області допустимих значень [10, 11], коли виконується наступна залежність $\gamma_3^2 \le \sqrt{\gamma_4 + 2}$, для асиметричних негаусових процесів, коли $\gamma_4 = 0$, значення коефіцієнта асиметрії не перевищують $\mp\sqrt{2}$, що і продемонстровано на рисунку 3.5. Враховуючи, що залежність відношення $I_{1n}^{(\tau)}/I_{2n}^{(\tau)}$ є симетричною відносно позитивних і негативних значень коефіцієнта асиметрії, для більшої наглядності наведений тільки позитивний діапазон зміни. Відмітимо, що позитивний ефект нелінійної обробки проявляється як при сильних (рис.3.5.а), так і при слабких (рисунок 3.5.б) статистичних зв'язках. Разом з тим, наявність статистичних зв'язків послаблює ефективність нелінійної обробки у порівнянні з лінійною, але таке послаблення є несуттєвим і компенсується за рахунок врахування коефіцієнта асиметрії.

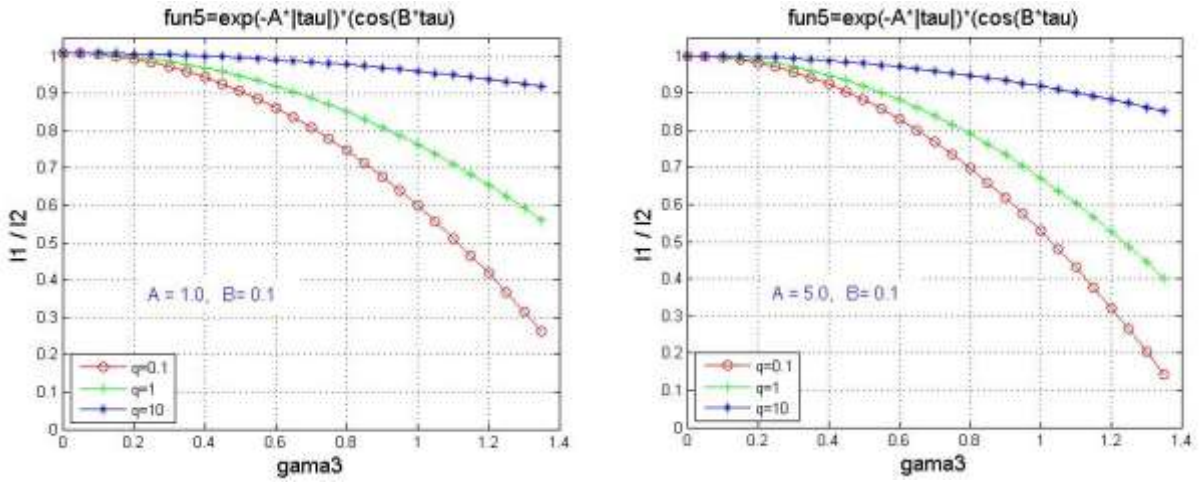
На рисунку 3.6. наведені аналогічні залежності відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез I_1/I_2 РП при степені полінома s=1

та *s*=2 відповідно від коефіцієнта асиметрії негаусової завади gama3 (γ_3). Дослідження проводилися при різних значеннях відношення сигнал/шум (q=0.1; 1; 10) та параметрах кореляції для кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}\, cos\, \text{В}\, \tau$, яка характеризує гармонічних процес з демпфуванням. Така статистична залежність характерна для слабкозатухаючих коливань, які часто спостерігаються у радіофізиці, оптиці та коливальних системах. Використовується для моделювання осциляторів і опису поведінки сигналів, які мають періодичні компоненти з експоненційним демпфуванням. Дослідження проводилися для параметрів кореляційної функції а)-*A*=1.0, *B*=0.1 та б) - *A*=5.0, *B*=0.1. Аналіз дослідження відношення I_1/I_2 так само підтверджує ефективність нелінійної обробки сигналів на фоні корельованої асиметричної завади у порівнянні з лінійним РП, яке є оптимальним для добре відомих і поширених гаусових моделей випадкових процесів. Посилення статистичних зв'язків (рисунок 3.6.а - *A*=0.1) характеризується несуттєвим зменшенням відношення I_1/I_2 у порівнянні з послабленням таких звязків (рисунок 3.6.б - *A*=5.0), що компенсується врахуванням параметра асиметрії досліджуваних негаусових випадкових величин.



а) б)

Рисунок 3.5. Залежність відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез I_1/I_2 для різних РП від коефіцієнта асиметрії негаусової завади gama3 при різних значеннях відношення сигнал/шум q і параметрах кореляції а)-A=0.1; б) - A=5.0 для кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$.



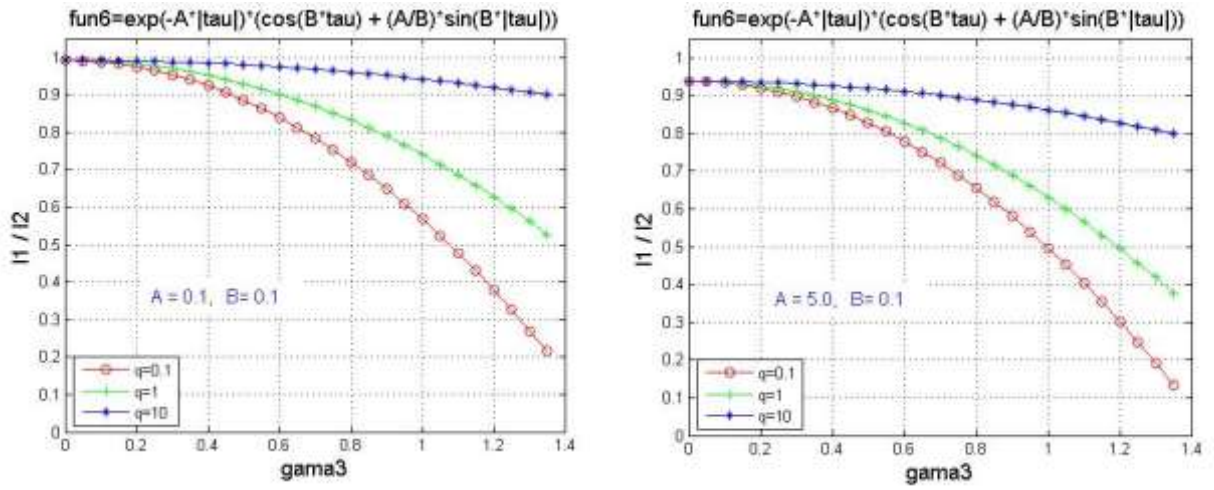
а) б)

Рисунок 3.6. Залежність відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез I_1/I_2 для різних РП від коефіцієнта асиметрії негаусової завади gama3 при різних значеннях відношення сигнал/шум q і параметрах кореляції а)-A=1.0, B=0.1; б) - A=5.0, B=0.1 для кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|} cos\,\mathrm{B}\,\tau$.

На рисунках 3.7. – 3.8 наведені залежності відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез I_1/I_2 РП при степені полінома *s*=1 та *s*=2 відповідно від коефіцієнта асиметрії негаусової завади gama3 (γ_3). Дослідження проводилися при різних значеннях відношення сигнал/шум (q=0.1; 1; 10) та параметрах кореляції для кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}\left(cos\,\text{В}\,\tau + \frac{A}{\text{В}} sin\,\text{В}\,|\tau|\right)$, яка характеризує автокореляцію з косинусним осцилятором. Використовується для моделювання гармонічних процесів з демпфуванням, таких як коливання в електричних чи механічних системах. Ефективна для опису модульованих сигналів, наприклад, у телекомунікаціях чи акустиці. Дослідження проводилися як для сильних статистичних зв'язків а)-*A*=0.1, *B*=0.1, так і для слабких б) - *A*=5.0, *B*=0.1.

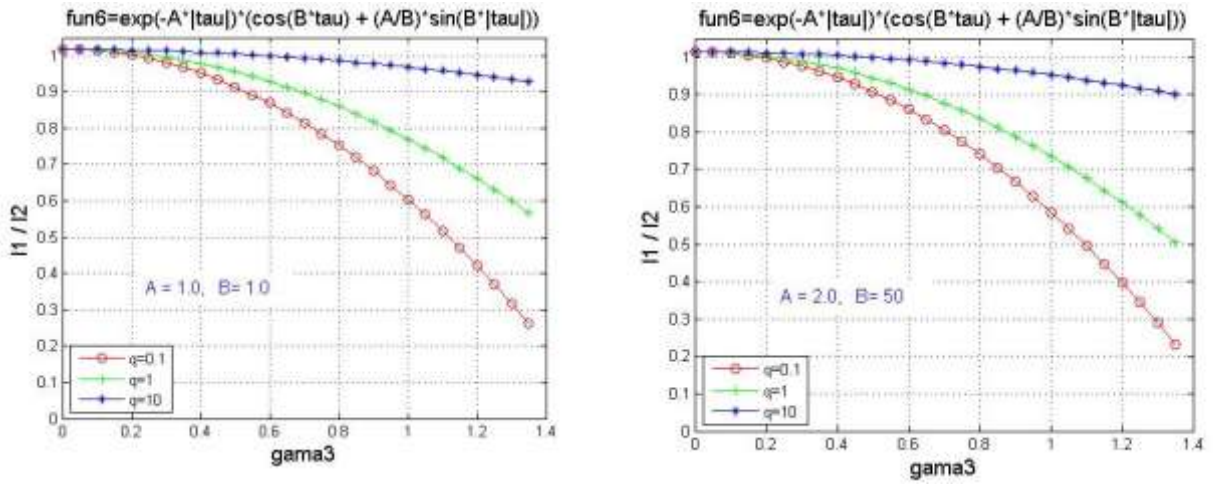
Великі значення *A* (наприклад, 1 або більше) характеризують процеси з швидким згасанням кореляцій (коротка пам'ять), а малі значення *A* (наприклад, 0.01-0.1) підходять для довгостроково корельованих процесів, де кореляція зберігається довше. Параметр *B* характеризує частоту осциляцій. Низькі значення *B* (наприклад, *B*≈0.1−1) відповідають повільним осциляціям, характерним для систем із низькочастотними флуктуаціями. Великі значення *B* (наприклад, *B*>10) підходять для високочастотних процесів, таких як електромагнітні хвилі або акустичні сигнали. У разі резонансних систем параметр *B* обирають близьким до резонансної частоти системи.

На рисунку 3.8. наведені аналогічні характеристики, які демонструють швидке згасання кореляції з повільними осциляціями а)-*A*=1.0, *B*=1.0, та характеризують високочастотні процеси б)-*A*=2.0, *B*=50.0. В обох випадках спостерігається тенденція до збільшення ефективності нелінійної обробки вибіркових значень поліноміальним РП (3.15) з урахуванням коефіцієнта асиметрії досліджуваного процесу у порівнянні з лінійною обробкою РП (3.9), яка є оптимальною для широко розповсюджених гаусових моделей випадкових процесів.



а) б)

Рисунок 3.7. Залежність відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез I_1/I_2 для різних РП від коефіцієнта асиметрії негаусової завади gama3 при різних значеннях відношення сигнал/шум q і параметрах кореляції а)-A=0.1, B=0.1; б) - A=5.0, B=0.1 для кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}\left(cos\,\mathrm{B}\,\tau + \frac{A}{\mathrm{B}} sin\,\mathrm{B}\,|\tau|\right)$.



а) б)

Рисунок 3.8. Залежність відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез I_1/I_2 для різних РП від коефіцієнта асиметрії негаусової завади gama3 при різних значеннях відношення сигнал/шум q і параметрах кореляції а)-A=1.0, B=1.0; б) - A=2.0, B=50.0 для кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}\left(cos\,\mathrm{B}\,\tau + \frac{A}{\mathrm{B}} sin\,\mathrm{B}\,|\tau|\right)$.

3.2. Синтез поліноміальних алгоритмів виявлення сигналів на фоні корельованих асиметрично-ексцесних негаусових завад

3.2.1. Синтез лінійних поліноміальних розв'язувальних правил при степені поліному s=1

Постановка задачі для даного типу завад буде збігатися з постановкою, представленою в п.3.1. Синтез лінійного РП при степені s=1 буде співпадати з РП, отриманим в (3.9) і базується на застосуванні одномірних та сумісних моментах та кумулянтах до 2-го порядку, які виявляються такими самими, як і для задачі в п.3.1, оскільки враховують тільки математичне сподівання, дисперсію та сумісний момент 2-го порядку. З цих причин очевидно, що всі висновки, які були отриманні в п.3.1 при побудові лінійного РП загального виду (3.3) та кінцевому представленні (3.9) будуть аналогічними і для корельованих асиметрично-ексцесних негаусових завад при синтезі лінійного РП для степені полінома s=1. Ефективність такого РП буде виражатися через значення критерію якості (3.10), або зворотної величини – через кількість добутої інформації про розрізнення гіпотез (3.11).

Очевидно, що так само можна зробити висновок про лінійну обробку статистично незалежних вибіркових значеннях, коли РП виду (3.9) вироджується в добре відомий вираз (3.12), який отриманий із відношення правдоподібності в припущенні гаусових моделей вибіркових значень для виявлення повністю відомого сигналу.

Для врахування параметрів досліджуваного випадкового процесу, які характеризують його відмінності від нормального розподілу, збільшимо степінь поліному РП s=2, що надасть можливість оперувати початковими моментами до 4-го порядку включно, і відповідно, характеризувати випадковий процес через значення коефіцієнтів асиметрії та ексцесу, які будуть відмінним від нуля.

3.2.2. Синтез нелінійних поліноміальних розв'язувальних правил при степені поліному s=2

При збільшенні степені полінома РП загального представлення в (2.34) до *s*=2 буде записаний аналогічно до виразу (3.15), де оптимальні коефіцієнти знаходяться з мінімуму модифікованого моментного критерію $Ku\left(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}\right)$ (2.39).

Для знаходження оптимальних коефіцієнтів РП (3.15) наведемо апріорну інформацію про досліджуваний корельований асиметрично-ексцесний негаусовий процес. Для цього випадку початкові моменти u_i досліджуваної випадкової величини при гіпотезі H_0 до 4-го порядку, згідно (2.12-2.13), будуть відрізнятися від наведених в п.3.1, п.3.2 та отримають наступний вид:

$$u_1 = 0, u_2 = \chi_2, u_3 = \chi_3 = \gamma_3 \chi_2^{\frac{3}{2}}, u_4 = \chi_4 + 3\chi_2^2 = \chi_2^2(\gamma_4 + 3), \quad (3.28)$$

та початкові моменти m_i при гіпотезі H_1 запишуться як:

$$m_1 = a, m_2 = a^2 + \chi_2, m_3 = a^3 + 3a\chi_2 + \gamma_3 \chi_2^{\frac{3}{2}}, \quad (3.29)$$

$$m_4 = a^4 + 6a^2\chi_2 + 4a\gamma_3 \chi_2^{\frac{3}{2}} + \chi_2^2(\gamma_4 + 3).$$

Сумісні моменти $u_{ij}^{(v,k)}$ при гіпотезі H_0 запишуться як:

$$u_{11}^{(v,k)} = \chi_{11} = \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)}, u_{12}^{(v,k)} = u_{21}^{(v,k)} = \gamma_3 \chi_2^{\frac{3}{2}} \rho^{(v,k)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.30)$$

$$u_{13}^{(v,k)} = u_{31}^{(v,k)} = \gamma_4 \chi_{11}^2 + 3\chi_2\chi_{11}, u_{22}^{(v,k)} = \chi_2^2\left(\gamma_4 \rho^{(v,k)^2} + 1 + 2\rho^{(v,k)^2}\right),$$

та відповідно $m_{ij}^{(v,k)}$ при гіпотезі H_1:

$$m_{11}^{(v,k)} = a^2 + \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)}, \quad (3.31)$$

$$m_{12}^{(v,k)} = m_{21}^{(v,k)} = a^3 + a\chi_2 + 2a\chi_2\rho^{(v,k)} + \gamma_3 \chi_2^{\frac{3}{2}} \rho^{(v,k)^{\frac{3}{2}}},$$

$$m_{22}^{(v,k)} = a^4 + 2a^2\chi_2 + 4a^2\chi_2\rho^{(v,k)} + 4a\gamma_3 \chi_2^{\frac{3}{2}} \rho^{(v,k)^{\frac{3}{2}}} +$$

$$+\chi_2^2(\gamma_4\rho^{(v,k)^2}+1+2\rho^{(v,k)^2}),$$

де $\rho^{(v,k)}$ – кореляційна функція випадкового процесу, яка визначається з (2.7) і обирається згідно відповідної задачі дослідження.

Відповідно до (2.39), функції $F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_i)$, i=0,1 при гіпотезі H_0 з врахуванням (3.28) – (3.31) запишуться як:

$$F_{(11)}^{(\tau)}(H_0)=\ \chi_2\cdot\rho^{(v,k)},\ F_{(12)}^{(\tau)}(H_0)=\ F_{(21)}^{(\tau)}(H_0)=\gamma_3\chi_2^{\frac{3}{2}}\rho^{(v,k)^{\frac{3}{2}}},$$

$$F_{(22)}^{(\tau)}(H_0)=\ \chi_2^2\left(\gamma_4\rho^{(v,k)^2}+2\rho^{(v,k)^2}\right), \qquad (3.32)$$

та при гіпотезі H_1:

$$F_{(11)}^{(\tau)}(H_1)=\cdot\ \chi_2\rho^{(v,k)},$$

$$F_{(12)}^{(\tau)}(H_1)=F_{(21)}^{(\tau)}(H_1)=2a\chi_2\rho^{(v,k)}+\gamma_3\chi_2^{\frac{3}{2}}\rho^{(v,k)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (3.33)$$

$$F_{(22)}^{(\tau)}(H_1)=4a^2\chi_2\rho^{(v,k)}+4a\gamma_3\chi_2^{\frac{3}{2}}\rho^{(v,k)^{\frac{3}{2}}}+\chi_2^2\rho^{(v,k)^2}(\gamma_4+2).$$

Для синтезу РП скористаємося виразом (3.15), який так само характеризується такими параметрами, як математичне сподівання $E_{i(sn)}^{(\tau)}$ та дисперсія $G_{i(sn)}^{(\tau)}$ при гіпотезі та альтернативі H_i, i=0,1, які в загальному випадку представлені в (2.35) – (2.38) і будуть відповідати виразам, наведеним в (3.22) з врахуванням отриманих початкових та сумісних моментів в (3.28 – 3.31) та функцій $F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_i)$, i=0,1 в (3.32), (3.33).

Невідомі коефіцієнти нелінійного поліноміального РП (3.15) $k_{1v}^{(\tau)}$ та $k_{2v}^{(\tau)}$ знаходяться відповідно до розв'язання загальної системи рівнянь (2.40), яка буде співпадати з наведеною системою рівнянь (3.23) і розв'язується при застосуванні методу Крамера та доповнення Шура для роботи з блоковими матрицями. В цьому випадку коефіцієнти $k_{1v}^{(\tau)}$ та $k_{2v}^{(\tau)}$ приймуть загальний вид

(3.24), (3.26), де відповідні визначники Δ_2, Δ_{Bv} та Δ_{Cv} будуть знаходитися з (3.23) з врахуванням апріорної інформації про асиметрично-ексцесний розподіл досліджуваних вибіркових значень (3.28 – 3.31).

Нагадаємо, що запропоноване РП виду (3.15) є нелінійним, оскільки вибіркові значення підводяться до другого степеня (x_v^2) і враховує характеристики як негаусового процесу через врахування коефіцієнтів асиметрії γ_3 та ексцесу γ_4, так і кореляційні зв'язки вибіркових значень через використання сумісних кумулянтів $\chi_{ij}^{(\tau)}$, $i,j = \overline{1,2}$ у виразах (3.28 – 3.31).

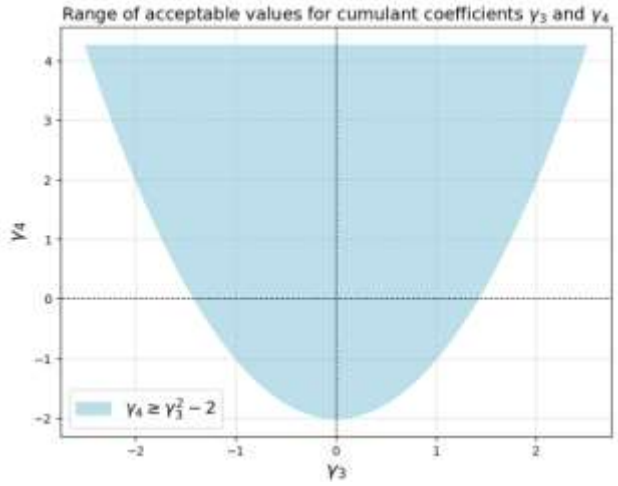
Для оцінювання ефективності отриманого нелінійного РП виду (3.15) виявлення постійних сигналів на фоні корельованих асиметрично-ексцесних негаусових завад у порівнянні з лінійним РП виду (3.9) так само використаємо значення критерію якості $Ku\left(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}\right)$ (2.39) або значення кількості добутої інформації $I_{\text{sn}}^{(\tau)}$ з вибіркових значень про розрізнення гіпотез H_0, H_1 згідно виразу (2.43). З точки зору скорочення обчислень використаємо показник $I_{\text{sn}}^{(\tau)}$, який буде співпадати з виразом (3.77) при врахуванні отриманих початкових та сумісних моментів в даному пункті при асиметрично-ексцесних завадах (3.28 – 3.31).

3.2.3. Аналіз поліноміальних розв'язувальних правил виявлення сигналів на фоні корельованих асиметрично-ексцесних негаусових завад

Аналіз ефективності синтезованих поліноміальних РП при степенях полінома *s*=1,2 буде проводитися по значенню кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез $I_{\text{sn}}^{(\tau)}$ (*s*=1,2) для лінійного РП $I_{1\text{n}}^{(\tau)}$ (3.11) та нелінійного РП $I_{2\text{n}}^{(\tau)}$ (3.27) в залежності від параметрів досліджуваних процесів, а саме від параметрів коефіцієнта асиметрії γ_3 та ексцесу γ_4 негаусової завади, відношення сигнал/шум q та параметрів кореляції різних кореляційних функцій $\rho_\xi(\tau)$, наведених в (2.7). Чим більше значення кількості добутої інформації $I_{1\text{n}}^{(\tau)}$ або $I_{2\text{n}}^{(\tau)}$, тим менше значення критерію якості для такого РП, і

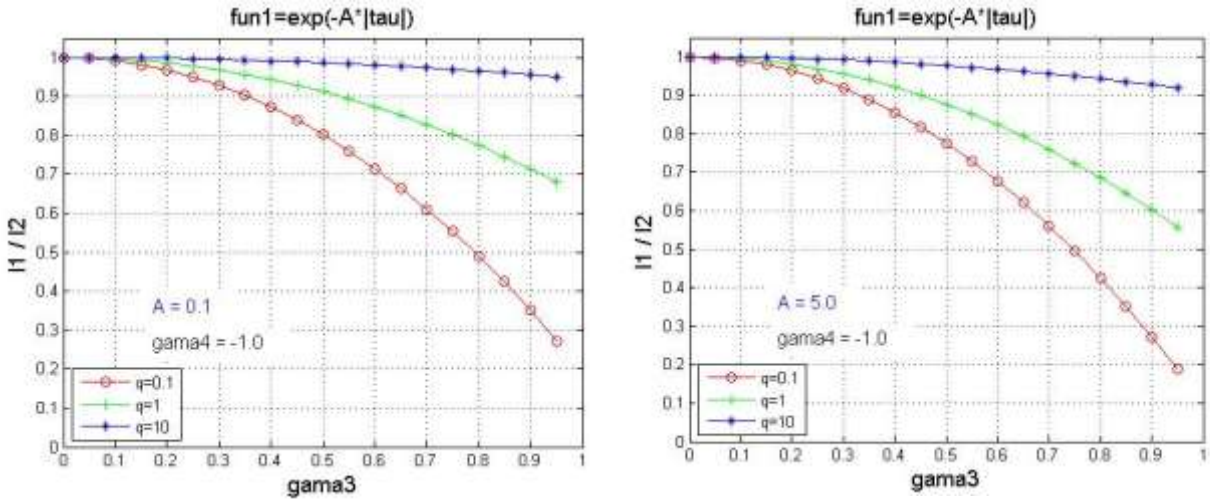
відповідно, менші ймовірності помилок першого та другого роду поліноміального РП. Отже, РП з більшим показником кількості добутої інформації будемо вважати більш ефективним з точки зору зменшення ймовірності помилок першого та другого роду РП.

На рисунку 3.9 приведені залежність відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез I_1/I_2 РП при степені полінома *s*=1 та *s*=2 відповідно від коефіцієнта асиметрії негаусової завади gama3 (γ_3). Дослідження проводилися при різних значеннях відношення сигнал/шум (*q*=0.1; 1; 10), коефіцієнт ексцесу $\gamma_4 = -1$ та параметрах кореляції для кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$. Зміна коефіцієнта асиметрії γ_3 визначається через область допустимих значень $\gamma_3 \leq \mp\sqrt{\gamma_4 + 2}$ [10, 11], і при $\gamma_4 = -1$ значення коефіцієнта асиметрії не перевищують ∓ 1:



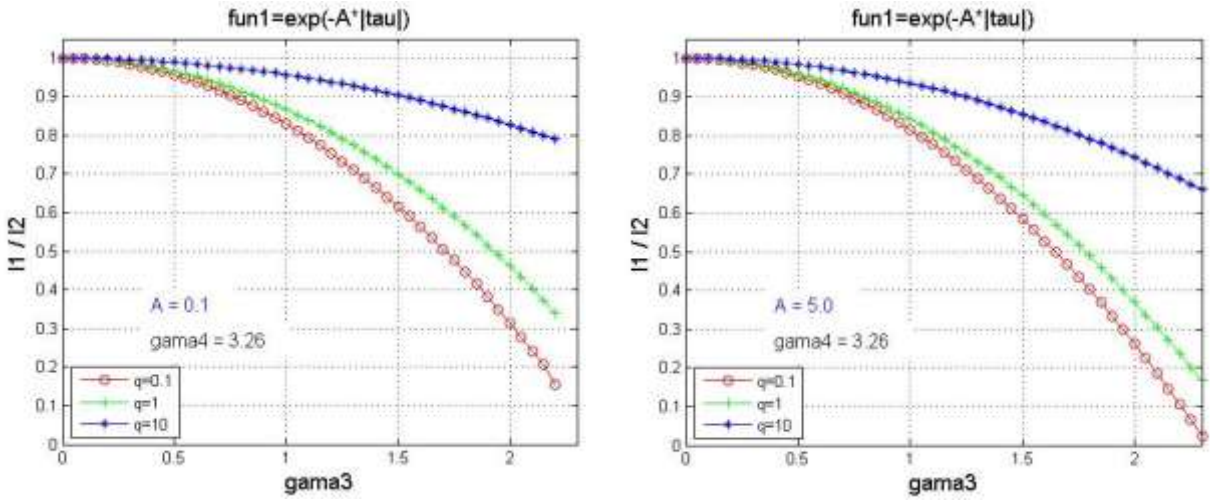
З врахуванням того, що відношення I_1/I_2 є симетрично відносно знака γ_3, на рисунках нижче наведено тільки позитивні значення γ_3.

Відмітимо, що позитивний ефект нелінійної обробки проявляється як при сильних (рисунок 3.9.а), так і при слабких (рисунок 3.9.б) статистичних зв'язках. Разом з тим, наявність статистичних зв'язків послаблює ефективність нелінійної обробки у порівнянні з лінійною, але таке послаблення є несуттєвим і компенсується за рахунок врахування коефіцієнта асиметрії.



а) б)

Рисунок 3.9. Залежність відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез I_1/I_2 для різних РП від коефіцієнта асиметрії негаусової завади gama3 при різних значеннях відношення сигнал/шум *q,* коефіцієнт ексцесу (γ_4) gama4 = -1 і параметрах кореляції а)-*A*=0.1; б) - *A*=5.0 для кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$.



а) б)

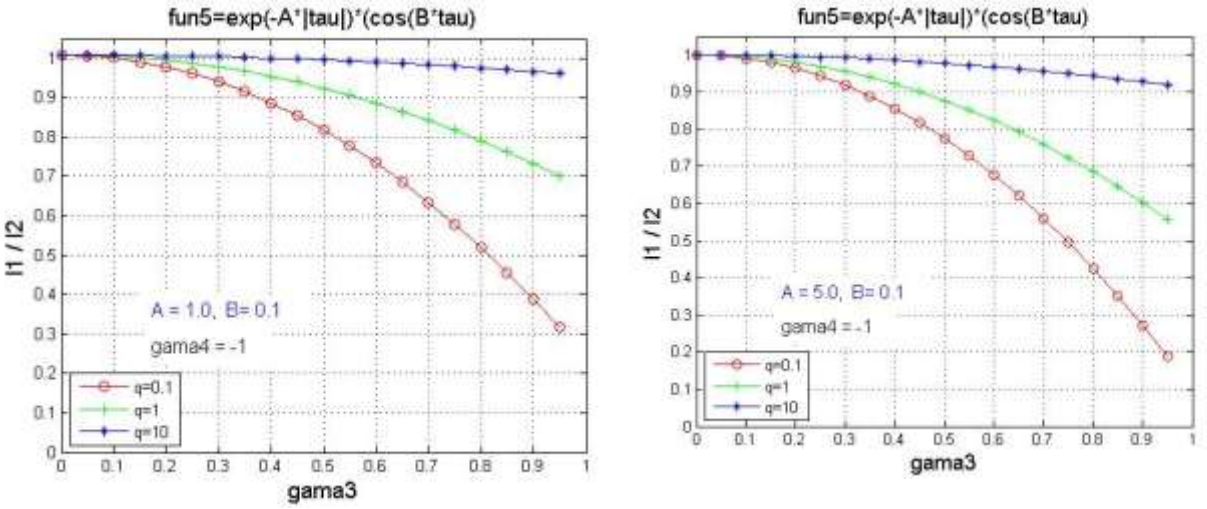
Рисунок 3.10. Залежність відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез I_1/I_2 для різних РП від коефіцієнта асиметрії негаусової завади gama3 при різних значеннях відношення сигнал/шум *q,* коефіцієнт ексцесу (γ_4) gama4 = 3.26 і параметрах кореляції а)-*A*=0.1; б) - *A*=5.0 для кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$.

Ефективність нелінійної обробки у порівнянні з лінійною при асиметрично-ексцесних негаусових завадах збільшується, якщо враховується коефіцієнт ексцесу і порівнювати із залежностями на рисунку 3.5 для асиметричних завад. Так, при $\gamma_3 = 0.8$ відношення становить $I_1/I_2 = 0.5$, а було при однакових умовах дослідження 0.7.

На рисунку 3.10. наведені аналогічні залежності відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез I_1/I_2 РП при степені полінома *s*=1 та *s*=2 відповідно від коефіцієнта асиметрії негаусової завади gama3 (γ_3) при коефіцієнті ексцесу $\gamma_4 = 3.26$. Таке значення обрано з міркувань дослідження одного з поширених представників асиметрично-ексцесного типу щільності розподілу - Релеєвська щільність розподілу, для якої характерні значення $\gamma_3 = 0{,}63$ та $\gamma_4 = 3.26$.

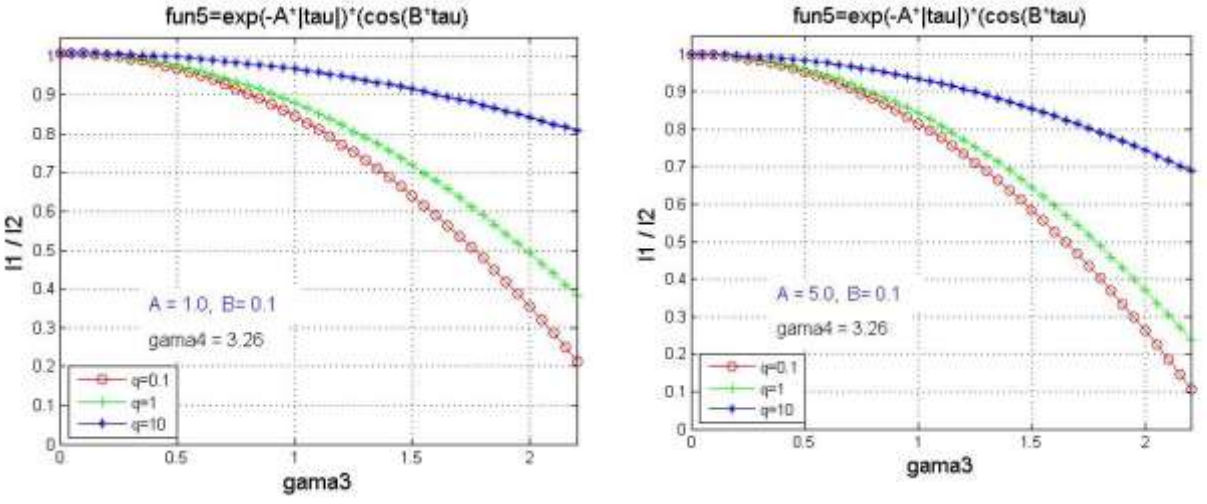
Застосування Релеєвського розподілу дозволяє технічним системам ефективніше моделювати і аналізувати їх роботу в складних завадових, наприклад, у багатошумових середовищах, багатопроміневому розповсюдженні сигналу і т. Дослідження проводилися при різних значеннях відношення сигнал/шум (q=0.1; 1; 10). При такому значенні коефіцієнта ексцесу $\gamma_4 = 3.26$ область допустимих значень розширюється і значення коефіцієнта асиметрії будуть змінюватися до $\gamma_3 = \mp\sqrt{(2 + 3.26)} = \mp 2.29$. Як видно з отриманих співвідношень, врахування параметрів негаусової завади дозволяє збільшити кількість вилученої інформації про розрізеннння гіпотез для нелінійної обробки у порівнянні з лінійною, що забезпечить зменшення ймовірності помилок першого та другого роду нелінійного РП при степені поліному s=2 у порівнянні з лінійним РП при s=1.

Проведені дослідження і для інших кореляційних функцій, які представлені в (2.7) та проаналізовані в п.3.1. (рисунок 3.11, 3.12.) Дослідження проводилися при різних значеннях відношення сигнал/шум (q=0.1; 1; 10) та параметрах кореляції для кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|} cos\, \text{В}\, \tau$, яка характеризує гармонічних процес з демпфуванням.



а) б)

Рисунок 3.11. Залежність відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез I_1/I_2 для різних РП від коефіцієнта асиметрії негаусової завади gama3 при різних значеннях відношення сигнал/шум q, коефіцієнт ексцесу (γ_4) gama4 = -1 і параметрах кореляції а)-A=1.0, B=0.1; б) - A=5.0, B=0.1 для кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}\, cos\, \mathrm{B}\,\tau$.



а) б)

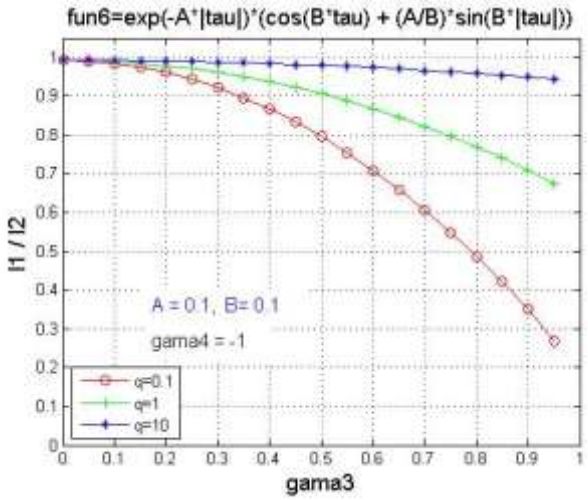
Рисунок 3.12. Залежність відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез I_1/I_2 для різних РП від коефіцієнта асиметрії негаусової завади gama3 при різних значеннях відношення сигнал/шум q, коефіцієнт ексцесу (γ_4) gama4 = 3.26 і параметрах кореляції а)-A=1.0, B=0.1; б) - A=5.0, B=0.1 для кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}\, cos\, \mathrm{B}\,\tau$.

Використовується для моделювання осциляторів і опису поведінки сигналів, які мають періодичні компоненти з експоненційним демпфуванням. Дослідження проводилися для параметрів кореляційної функції а)-*A*=0.1, *B*=0.1 та б) - *A*=5.0, *B*=0.1. та значенням коефіцієнту ексцесу $\gamma_4 = -1$ (рисунок 3.11) та $\gamma_4 = 3.26$ (рисунок 3.12).

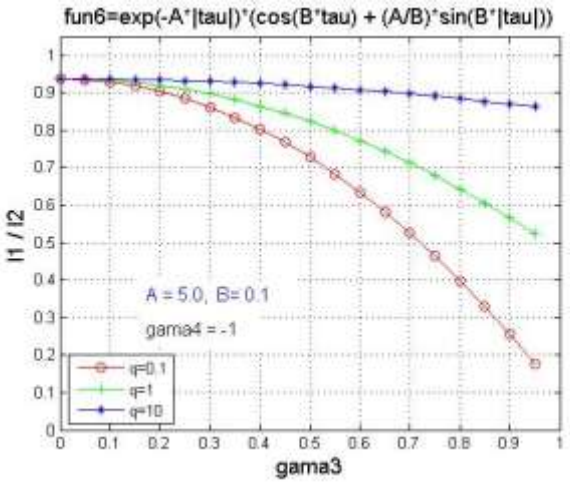
На рисунку 3.13, 3.14 наведені аналогічні характеристики для кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}\left(cos\,\text{В}\,\tau + \frac{A}{\text{В}} sin\,\text{В}\,|\tau|\right)$, яка характеризує автокореляцію з косинусним осцилятором. Використовується для моделювання гармонічних процесів з демпфуванням, таких як коливання в електричних чи механічних системах. Така кореляційна функція ефективна для опису модульованих сигналів, наприклад, в телекомунікаційних системах чи акустиці.

Дослідження проводилися як для сильних статистичних зв’язків (рисунок 3.13, 314. а)-*A*=0.1, *B*=0.1), так і для слабких (рисунок 3.13, 314. б) - *A*=5.0, *B*=0.1).

На рисунку 3.15 параметри кореляційної функції демонструють швидке згасання кореляції з повільними осциляціями а)-*A*=1.0, *B*=1.0, та характеризують високочастотні процеси б)-*A*=2.0, *B*=50.0. В обох випадках спостерігається тенденція до збільшення ефективності нелінійної обробки вибіркових значень поліноміальним РП (3.15) з урахуванням коефіцієнта асиметрії досліджуваного процесу у порівнянні з лінійною обробкою РП (3.9), яка є оптимальною для широко розповсюджених гаусових моделей випадкових процесів.

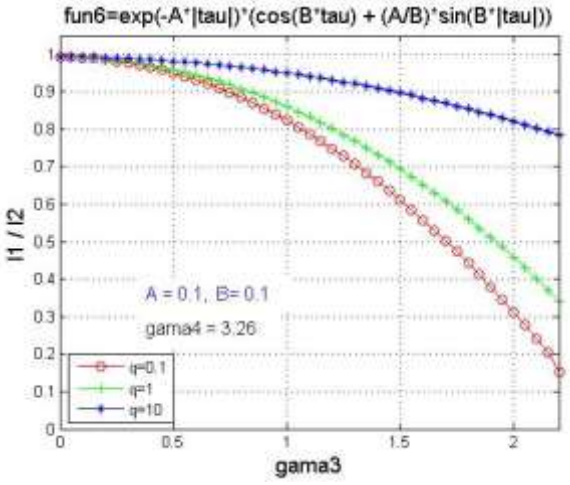


а)

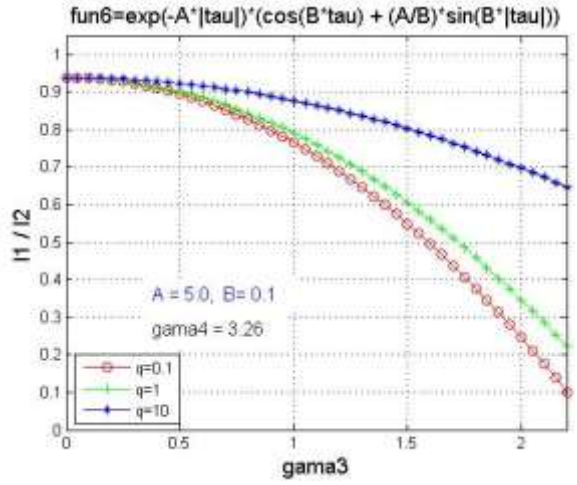


б)

Рисунок 3.13. Залежність відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез I_1/I_2 для різних РП від коефіцієнта асиметрії негаусової завади gama3 при різних значеннях відношення сигнал/шум q, коефіцієнт ексцесу (γ_4) gama4 = -1.0 і параметрах кореляції а)-A=0.1, B=0.1; б) - A=5.0, B=0.1 для кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}\left(cos\,\mathrm{B}\,\tau + \frac{A}{\mathrm{B}} sin\,\mathrm{B}\,|\tau|\right)$.

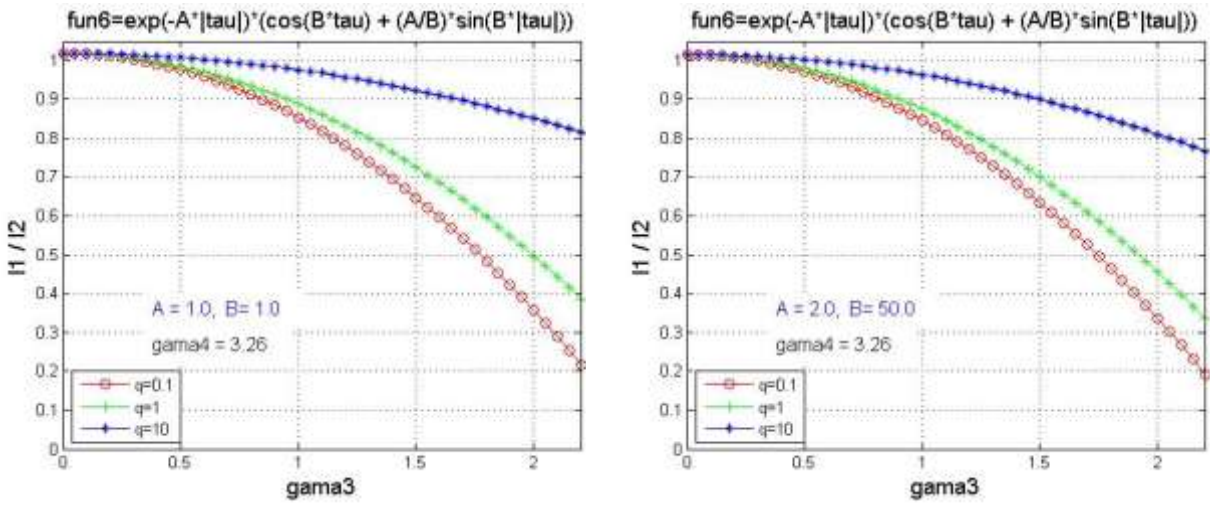


а)



б)

Рисунок 3.14. Залежність відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез I_1/I_2 для різних РП від коефіцієнта асиметрії негаусової завади gama3 при різних значеннях відношення сигнал/шум q, коефіцієнт ексцесу (γ_4) gama4 = 3.26 і параметрах кореляції а)-A=0.1, B=0.1; б) - A=5.0, B=0.1 для кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}\left(cos\,\mathrm{B}\,\tau + \frac{A}{\mathrm{B}} sin\,\mathrm{B}\,|\tau|\right)$.



а) б)

Рисунок 3.15. Залежність відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез I_1/I_2 для різних РП від коефіцієнта асиметрії негаусової завади gama3 при різних значеннях відношення сигнал/шум q, коефіцієнт ексцесу (γ_4) gama4 = 3.26 і параметрах кореляції а)-A=1.0, B=1.0; б) - A=2.0, B=50.0 для кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}\left(cos\,\mathrm{B}\,\tau + \frac{A}{\mathrm{B}} sin\,\mathrm{B}\,|\tau|\right)$.

3.3. Синтез поліноміальних алгоритмів виявлення сигналів на фоні корельованих ексцесних негаусових завад

3.3.1. Синтез поліноміальних розв'язувальних правил при степені поліному s=1, 2

Постановка задачі для даного типу завад буде збігатися з постановкою, представленою в п.3.1. Результат синтезу РП при степені s=1, 2 буде співпадати з РП, отриманим в (3.9) і базується на застосуванні одномірних та сумісних моментах та кумулянтах до 2-го порядку, які будуть такими самими, як і для задачі в п.3.1, оскільки враховують тільки математичне сподівання, дисперсію та сумісний момент 2-го порядку. Всі висновки, які були отриманні в п.3.1 при побудові лінійного РП в загальному виді (3.3) та кінцевому представленні (3.9) будуть аналогічними і для корельованих ексцесних негаусових завад при синтезі лінійного РП для степені полінома s=1, 2. Ефективність такого РП буде виражатися через значення критерію якості (3.10), або зворотної величини – через кількість добутої інформації про розрізнення гіпотез (3.11).

При обробці статистично незалежних вибіркових значеннях РП виду (3.9) вироджується в добре відомий вираз (3.12), який отриманий із відношення правдоподібності в припущенні гаусових моделей вибіркових значень для виявлення повністю відомого сигналу.

Для врахування параметрів досліджуваного випадкового процесу, які характеризують його відмінності від нормального розподілу, збільшимо степінь поліному РП s=3, що надасть можливість оперувати початковими моментами до 6-го порядку включно, і відповідно, характеризувати випадковий процес через значення коефіцієнтів асиметрії та ексцесу, які будуть відмінним від нуля.

3.3.2. Синтез поліноміальних розв'язувальних правил при степені поліному s=3

При збільшенні степені полінома РП загального представлення в (2.34) до *s*=3 буде записаний наступним чином

$$\Lambda(\boldsymbol{X})_{(3n)}^{(\tau)} = k_0^{(\tau)} + \sum_{v=1}^{n} k_{1v}^{(\tau)} x_v + \sum_{v=1}^{n} k_{2v}^{(\tau)} x_v^2 + \sum_{v=1}^{n} k_{3v}^{(\tau)} x_v^3 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0, \quad (3.34)$$

де оптимальні коефіцієнти знаходяться з мінімуму модифікованого моментного критерію $Ku\left(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}\right)$ (2.39).

Для знаходження оптимальних коефіцієнтів РП (3.34) наведемо апріорну інформацію про корельований ексцесний негаусовий процес, який досліджується. Для цього випадку початкові моменти u_i досліджуваної випадкової величини при гіпотезі H_0 до 6-го порядку, згідно (2.10-2.11), будуть відрізнятися від наведених в п.3.1 та п.3.2 і отримають наступний вид

$$u_1 = 0, u_2 = \chi_2, u_3 = 0, u_4 = \chi_4 + 3\chi_2^2 = \chi_2^2(\gamma_4 + 3), \quad (3.35)$$

$$u_5 = 0, u_6 = \chi_2^3(15 + 15\gamma_4^2),$$

та початкові моменти m_i при гіпотезі H_1 запишуться як:

$$m_1 = a, m_2 = a^2 + \chi_2, m_3 = a^3 + 3a\chi_2, \quad (3.36)$$

$$m_4 = a^4 + 6a^2\chi_2 + \gamma_4\chi_2^2 + 3\chi_2^2, \; m_5 = a^5 + 10a^3\chi_2 + 5a\chi_2^2(3 + \gamma_4),$$

$$m_6 = a^6 + 15a^4\chi_2 + 15a^2\chi_2^2(3 + \gamma_4) + 15\chi_2^3(1 + \gamma_4^2).$$

Сумісні моменти $u_{ij}^{(v,k)}$ при гіпотезі H_0 запишуться як:

$$u_{11}^{(v,k)} = \chi_{11} = \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)}, u_{12}^{(v,k)} = u_{21}^{(v,k)} = 0\,, \quad (3.37)$$

$$u_{13}^{(v,k)} = u_{31}^{(v,k)} = \gamma_4\chi_{11}^2 + 3\chi_2\chi_{11} = \chi_2^2(\gamma_4\rho^{(v,k)^2} + 3\rho^{(v,k)})\,,$$

$$u_{22}^{(v,k)} = \chi_2^2\left(\gamma_4\rho^{(v,k)^2} + 1 + 2\rho^{(v,k)^2}\right),$$

$$u_{23}^{(v,k)} = u_{32}^{(v,k)} = \chi_2^{5/2}\gamma_3 + 6\chi_2^{5/2}\rho^{(v,k)^{5/2}}\gamma_3 + 3\chi_2^{5/2}\rho^{(v,k)^{3/2}}\gamma_3,$$

$$u_{33}^{(v,k)} = 3\chi_2^3\gamma_4\rho^{(v,k)^2} + \chi_2^3\gamma_3^2 + 9\chi_2^3\rho^{(v,k)^3}\gamma_4 + 3\chi_2^3\rho^{(v,k)^2}\gamma_4 +$$

$$+9\chi_2^3\rho^{(v,k)} + 6\chi_2^3\rho^{(v,k)^3} + 9\chi_2^3\rho^{(v,k)^3}\gamma_3^2,$$

та відповідно $m_{ij}^{(v,k)}$ при гіпотезі H_1:

$$m_{11}^{(v,k)} = a^2 + \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)},$$

$$m_{12}^{(v,k)} = m_{21}^{(v,k)} = a^3 + a\chi_2 + 2a\chi_2\rho^{(v,k)}, \qquad (3.38)$$

$$m_{13}^{(v,k)} = a^4 + 3a^2\chi_2\rho^{(v,k)} + 3a^2\chi_2 + 4a\chi_2^{\frac{3}{2}}\gamma_3\rho^{(v,k)^{\frac{3}{2}}} +$$

$$+\chi_2^2\rho^{(v,k)^2}(\gamma_4 + 3),$$

$$m_{22}^{(v,k)} = a^4 + 2a^2\chi_2 + 4a^2\chi_2\rho^{(v,k)} + \chi_2^2(\gamma_4\rho^{(v,k)^2} + 1 + 2\rho^{(v,k)^2}),$$

$$m_{23}^{(v,k)} = m_{32}^{(v,k)} = a^5 + 4a^3\chi_2 + 6a^3\chi_2\rho^{(v,k)} + 5a\chi_2^2\rho^{(v,k)^2}(3 + \gamma_4),$$

$$m_{33}^{(v,k)} = a^6 + 6a^4\chi_2 + 9a^4\chi_2\rho^{(v,k)} + 15a^2\chi_2^2\rho^{(v,k)^2}(\gamma_4 + 3) +$$

$$+15\chi_2^3\rho^{(v,k)^3}(\gamma_4 + 1),$$

де $\rho^{(v,k)}$ – кореляційна функція випадкового процесу, яка визначається з (2.7) і обирається згідно відповідної задачі дослідження.

Відповідно до (2.39), функції $F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_i)$, *i*=0,1 при гіпотезі H_0 запишуться як

$$F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_0) = u_{(ij)}^{(\tau)} - u_i^{(v)}u_j^{(k)},\ F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_1) = m_{(ij)}^{(\tau)} - m_i^{(v)}m_j^{(k)}$$

і розраховуються з врахуванням апріорної інформації про досліджуваний корельований ексцесний негаусовий процес згідно (3.35-3.38).

Оскільки РП (3.34) залежить від випадкових вибіркових значень x_v^i, то і результат обробки таких значень буде випадком. Отже, нелінійне РП (3.34) характеризується такими параметрами, як математичне сподівання $E_{i(sn)}^{(\tau)}$ та

дисперсія $G_{i(sn)}^{(\tau)}$ при гіпотезі та альтернативі H_i, i=0,1, які в загальному випадку представлені в (2.35) – (2.38). Для даного РП ці вирази, з врахуванням (3.35-3.38), мають наступний вид:

$$E_{0(3n)}^{(\tau)} = n(k_{2v}^{(\tau)}u_{2v} + k_{3v}^{(\tau)}u_{3v}),\ E_{1(3n)}^{(\tau)} = n(k_{1v}^{(\tau)}m_{1v} + k_{2v}^{(\tau)}m_{2v} + k_{3v}^{(\tau)}m_{3v}), \quad (3.39)$$

$$G_{0(3n)}^{(\tau)} = n(k_{1v}^{(\tau)2}\,F_{(11)}^{(\tau)}(H_0) + 2k_{1v}^{(\tau)}\,k_{2v}^{(\tau)}F_{(12)}^{(\tau)}(H_0) + 2k_{1v}^{(\tau)}\,k_{3v}^{(\tau)}F_{(13)}^{(\tau)}(H_0) +$$

$$+2k_{2v}^{(\tau)}\,k_{3v}^{(\tau)}F_{(23)}^{(\tau)}(H_0) + k_{2v}^{(\tau)2}\,F_{(22)}^{(\tau)}(H_0) + k_{3v}^{(\tau)2}\,F_{(33)}^{(\tau)}(H_0),$$

$$G_{1(3n)}^{(\tau)} = n(k_{1v}^{(\tau)2}\,F_{(11)}^{(\tau)}(H_1) + 2k_{1v}^{(\tau)}\,k_{2v}^{(\tau)}F_{(12)}^{(\tau)}(H_1) + 2k_{1v}^{(\tau)}\,k_{3v}^{(\tau)}F_{(13)}^{(\tau)}(H_1) +$$

$$+2k_{2v}^{(\tau)}\,k_{3v}^{(\tau)}F_{(23)}^{(\tau)}(H_1) + k_{2v}^{(\tau)2}\,F_{(22)}^{(\tau)}(H_1) + k_{3v}^{(\tau)2}\,F_{(33)}^{(\tau)}(H_1).$$

Невідомі коефіцієнти нелінійного поліноміального РП (3.34) $k_{1v}^{(\tau)}$, $k_{2v}^{(\tau)}$ та $k_{3v}^{(\tau)}$ знаходяться відповідно до розв'язання системи рівнянь (2.40), яка отримає наступний вид

$$\begin{cases} \sum_{v=1}^{n} k_{1v}^{(\tau)}\,F_{(11)}^{(\tau)} + \sum_{v=1}^{n} k_{2v}^{(\tau)}\,F_{(12)}^{(\tau)} + \sum_{v=1}^{n} k_{3v}^{(\tau)}\,F_{(13)}^{(\tau)} = a \\ \sum_{v=1}^{n} k_{1v}^{(\tau)}\,F_{(21)}^{(\tau)} + \sum_{v=1}^{n} k_{2v}^{(\tau)}\,F_{(22)}^{(\tau)} + \sum_{v=1}^{n} k_{3v}^{(\tau)}\,F_{(23)}^{(\tau)} = a^2 \\ \sum_{v=1}^{n} k_{1v}^{(\tau)}\,F_{(31)}^{(\tau)} + \sum_{v=1}^{n} k_{2v}^{(\tau)}\,F_{(32)}^{(\tau)} + \sum_{v=1}^{n} k_{3v}^{(\tau)}\,F_{(33)}^{(\tau)} = a^3 + 3a\chi_2 \end{cases}, \quad (3.40)$$

де $F_{(11)}^{(\tau)} = F_{(11)}^{(\tau)}(H_0) + F_{(11)}^{(\tau)}(H_1)$, $F_{(12)}^{(\tau)} = F_{(21)}^{(\tau)} = F_{(12)}^{(\tau)}(H_0) + F_{(12)}^{(\tau)}(H_1)$,

$F_{(13)}^{(\tau)} = F_{(31)}^{(\tau)} = F_{(13)}^{(\tau)}(H_0) + F_{(13)}^{(\tau)}(H_1)$, $F_{(23)}^{(\tau)} = F_{(32)}^{(\tau)} = F_{(23)}^{(\tau)}(H_0) + F_{(23)}^{(\tau)}(H_1)$,

$F_{(22)}^{(\tau)} = F_{(22)}^{(\tau)}(H_0) + F_{(22)}^{(\tau)}(H_1)$, $F_{(33)}^{(\tau)} = F_{(33)}^{(\tau)}(H_0) + F_{(33)}^{(\tau)}(H_1)$.

Для розв'язання даної системи рівнянь (3.40) застосуємо метод Крамера та доповнення Шура для роботи з блоковими матрицями, тоді

$$k_{1v}^{(\tau)} = \Delta_{Bv}/\Delta_3,\ v = \overline{1,n},\quad k_{2v}^{(\tau)} = \Delta_{Cv}/\Delta_3,\ v = \overline{n+1,\ 2n},\quad (3.41)$$

$$k_{3v}^{(\tau)} = \Delta_{Dv}/\Delta_3,\ v = \overline{2n+1,\ 3n},$$

де визначник Δ_2 системи рівнянь (3.40) має наступний вид

$$\Delta_3 = det\begin{Vmatrix} \left\|F_{(11)}^{(\tau)}\right\| & \left\|F_{(12)}^{(\tau)}\right\| & \left\|F_{(13)}^{(\tau)}\right\| \\ \left\|F_{(21)}^{(\tau)}\right\| & \left\|F_{(22)}^{(\tau)}\right\| & \left\|F_{(23)}^{(\tau)}\right\| \\ \left\|F_{(31)}^{(\tau)}\right\| & \left\|F_{(32)}^{(\tau)}\right\| & \left\|F_{(33)}^{(\tau)}\right\| \end{Vmatrix}, \quad (3.42)$$

де Δ_{Bv} – визначник, який отриманий з визначника Δ_3, коли v -й стовбець ($v = \overline{1,n}$) замінений на інший зі значеннями $(q^{0.5}, q^{0.5}, \dots, q^{0.5} \quad q, q, \dots, q \quad q^{1.5} + 3q^{0.5}, q^{1.5} + 3q^{0.5}, \dots, q^{1.5} + 3q^{0.5})$, Δ_{Cv} – визначник, який визначається подібним чином для $v = \overline{n+1,\ 2n}$, Δ_{Dv} – визначник, який визначається подібним чином для $v = \overline{2n+1,\ 3n}$.

Показано, що в цьому випадку загальний вид порогового коефіцієнта $k_0^{(\tau)}$ РП (3.34) для отриманих коефіцієнтів $k_{1v}^{(\tau)}$, $k_{2v}^{(\tau)}$ та $k_{3v}^{(\tau)}$ розраховується як

$$k_0^{(\tau)} = -\frac{1}{2\Delta_2}\sum_{v=1}^{n}\left(q^{0.5}\Delta_{Bv} + \Delta_{Cv}(q+2) + \Delta_{Dv}(q^{1.5} + 3q^{0.5})\right). \quad (3.43)$$

Легко бачити, що запропоноване РП виду (3.34) є нелінійним і враховує характеристики як негаусового процесу через врахування коефіцієнта ексцесу γ_4, так і кореляційні зв'язки вибіркових значень через використання сумісних кумулянтів $\chi_{ij}^{(\tau)}$, $i,j = \overline{1,2}$ у виразах (3.35 – 3.38).

Ефективність отриманого нелінійного РП виду (3.34) у порівнянні з лінійним РП (3.9) можна виразити або через значення критерію якості $Ku\left(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}\right)$ (2.39), який буде виражатися через значення математичного сподівання $E_{i(sn)}^{(\tau)}$ та дисперсії $G_{i(sn)}^{(\tau)}$ при гіпотезі та альтернативі H_i, i=0,1 згідно виразів, наведених в (3.39), або кількості добутої інформації $I_{\text{sn}}^{(\tau)}$ з вибіркових значень про розрізнення гіпотез H_0, H_1 згідно виразу (2.43). Скористаємося значенням $I_{\text{sn}}^{(\tau)}$, оскільки це спрощує розрахункові вирази. Тоді для синтезованого поліноміального РП виду (3.34) отримаємо

$$I_{\text{3n}}^{(\tau)} = (1/\Delta_3)\sum_{v=1}^{n}\left(q^{0.5}\Delta_{Bv} + q\Delta_{Cv} + \Delta_{Dv}(q^{1.5} + 3q^{0.5})\right). \quad (3.44)$$

Відмітимо, що без врахування коефіцієнта ексцесу γ_4, тобто коли $\gamma_4 = 0$, синтезоване РП (3.34) перетворюється на нелінійне РП для обробки статистично залежних гаусових вибіркових значень. Разом з тим, таке РП буде відрізнятися від лінійного РП, отриманого в п.3.1 (3.9).

При проведенні досліджень ефективності синтезованого РП (3.34) необхідно враховувати область допустимих значень (ОДЗ) для досліджуваних параметрів коефіцієнтів асиметрії, ексцесу та ін. При аналізі табл.3.1, яка демонструє класифікацію близьких до гаусових випадкових величин [10, 11] видно, що для спрощення аналізу складних негаусових процесів, їх можна розглядати як окремі категорії, а саме різні типи і види. Оскільки в даному пункті розглядаються лише ексцесні негаусові випадкові величини з відмінним від нуля коефіцієнтом ексцесу γ_4, то їх можна віднести до випадкових ексцесних величин I типу і I виду. Всі інші кумулянтні коефіцієнти будуть дорівнювати нулю. Таке припущення дозволяє спростити обчислювальні розрахунки і виявити позитивний ефект нелінійної обробки поліноміального РП (3.34) у порівнянні з відомими лінійними результатами обробки РП.

Таблиця 3.1. Класифікація близьких до гаусових випадкових величин

Клас випадкових величин	Тип / Вид	I	II	III	IV
Асиметричні	1	$\gamma_3 \neq 0$	$\gamma_3 \neq 0, \gamma_5 \neq 0$		
	2	$\gamma_5 \neq 0$			
Ексцесні	1	$\gamma_4 \neq 0$	$\gamma_4 \neq 0, \gamma_6 \neq 0$		
	2	$\gamma_6 \neq 0$			
Асиметрично-ексцесні	1		$\gamma_3 \neq 0, \gamma_4 \neq 0$	$\gamma_3 \neq 0, \gamma_4 \neq 0, \gamma_5 \neq 0$	$\gamma_3 \neq 0, \gamma_4 \neq 0, \gamma_5 \neq 0, \gamma_6 \neq 0$
	2		$\gamma_3 \neq 0, \gamma_6 \neq 0$	$\gamma_3 \neq 0, \gamma_4 \neq 0, \gamma_6 \neq 0$	
	3		$\gamma_4 \neq 0, \gamma_5 \neq 0$	$\gamma_3 \neq 0, \gamma_5 \neq 0, \gamma_6 \neq 0$	
	4		$\gamma_5 \neq 0, \gamma_6 \neq 0$	$\gamma_4 \neq 0, \gamma_5 \neq 0, \gamma_6 \neq 0$	

В цьому випаду скористаємося нерівністю, яка описує залежність між коефіцієнтами асиметрії та ексцесу при рівних нулю наступних коефіцієнтів вищих порядків $\gamma_5 = \gamma_6 = 0$, які з'являються при застосуванні моментно-кумулянтного опису до шостого порядку [10, 11]. В цьому випадку отримаємо наступний вираз

$$4 - 8\gamma_3^2 - 3\gamma_3^4 + 8\gamma_4 + \frac{7}{3}\gamma_4^2 - \frac{1}{3}\gamma_4^3 + 4\gamma_3^2\gamma_4 > 0,$$

і для ексцесного випадкового процесу, коли $\gamma_3 = 0$, отримує кінцевий вираз залежності ОДЗ для γ_4:

$$4 - 8\gamma_4 + \frac{7}{3}\gamma_4^2 - \frac{1}{3}\gamma_4^3 > 0. \qquad (3.45)$$

Для визначення ОДЗ коефіцієнта ексцесу γ_4 побудуємо графік функції (3.45), який зображений на рисунок 3.16

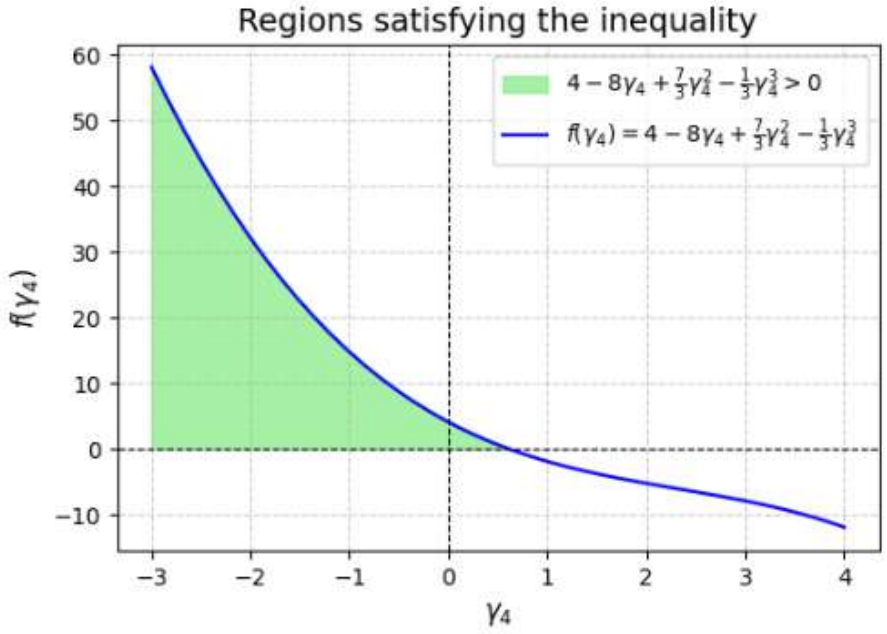


Рисунок 3.16. Залежність функції від значення коефіцієнта ексцесу

З графіку видно, що позитивне значення функції досягається для $\gamma_4 \in [0.59, -\infty\{$, де коренем є значення 0.59. Таким чином видно, що основні значення для коефіцієнта ексцесу будуть у від'ємній області, що буде характеризувати більшу "плоскість" розподілу порівняно з нормальним, а

також меншу концентрацію значень навколо середнього для таких досліджуваних випадкових процесів.

3.3.3. Аналіз поліноміальних розв'язувальних правил виявлення сигналів на фоні корельованих ексцесних негаусових завад

На рисунку 3.17 приведені залежності відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез I_1/I_3 РП при степені полінома *s*=1 та *s*=3 відповідно від коефіцієнта ексцесу негаусової завади gama4 (γ_4). Дослідження проводилися при різних значеннях відношення сигнал/шум (q=0.1; 1; 10) та параметрах кореляції для кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$.

На рисунку 3.17.а масштабуючий коефіцієнт має мале значення A=0.5, що свідчить про сильні статистичні зв'язки вибіркових значень, а на рис.3.17.б - A=5.0, що свідчить фактично про відсутність таких статистичних залежностей. Для обох випадків характерна зростаюча залежність параметрів $I_{1n}^{(\tau)}$ для лінійного та $I_{3n}^{(\tau)}$ для нелінійного РП відповідно від коефіцієнта ексцесу негаусової завади gama4 (γ_4). При нульовому значенні gama4=0, що відповідає гаусовій моделі досліджуваного випадкового процесу, ці параметри є однаковими, про що свідчить їх відношення, яке дорівнює $I_{1n}^{(\tau)}/I_{3n}^{(\tau)} = 1$. При зростанні параметра gama4 (γ_4) таке відношення стає менше одиниці, що свідчить про зростання кількості добутої інформації $I_{3n}^{(\tau)}$ у порівнянні з $I_{1n}^{(\tau)}$, і відповідно, зменшення ймовірностей помилок нелінійного РП у порівнянні з лінійним, яке є оптимальним для гаусової моделі випадкового процесу.

Разом з цим необхідно відмітити, що позитивний ефект від нелінійної обробки у порівнянні з лінійною буде спостерігатися для слабких сигналів, коли відношення сигнал/шум є менше одиниці, зокрема для q=0.1. При зростанні цього параметра ефективність такої обробки зменшується. Це пояснюється тим, що при великих значеннях параметра q лінійне і нелінійне РП слабо залежать від параметрів розподілу вибірок і фактично суттєво збільшують ймовірність правильного виявлення сигналів.

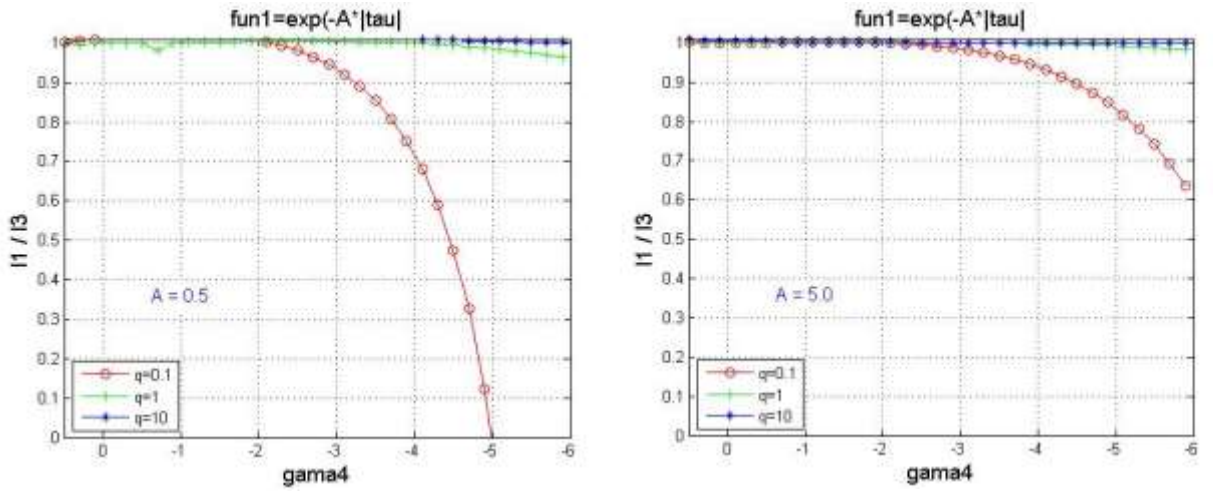
На рисунку 3.18. наведені аналогічні залежності відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез I_1/I_3 РП при степені полінома *s*=1 та *s*=3 відповідно від коефіцієнта ексцесу негаусової завади gama4 (γ_4). Дослідження проводилися при різних значеннях відношення сигнал/шум (q=0.1; 1; 10) та параметрах кореляції для кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|} cos\,\text{В}\,\tau$, яка характеризує гармонічних процес з демпфуванням. Дослідження проводилися для параметрів кореляційної функції а)-*A*=0.5, *B*=0.1 та б) - *A*=5.0, *B*=0.1.

Отримані залежності відношення I_1/I_3 від gama4 (γ_4) дозволяють зробити такі самі висновки, які були зроблені і для залежностей на рис.3.17.

На рисунках 3.19, 3.20 наведені залежності відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез I_1/I_3 РП при степені полінома *s*=1 та *s*=3 відповідно від коефіцієнта ексцесу негаусової завади gama4 (γ_4).

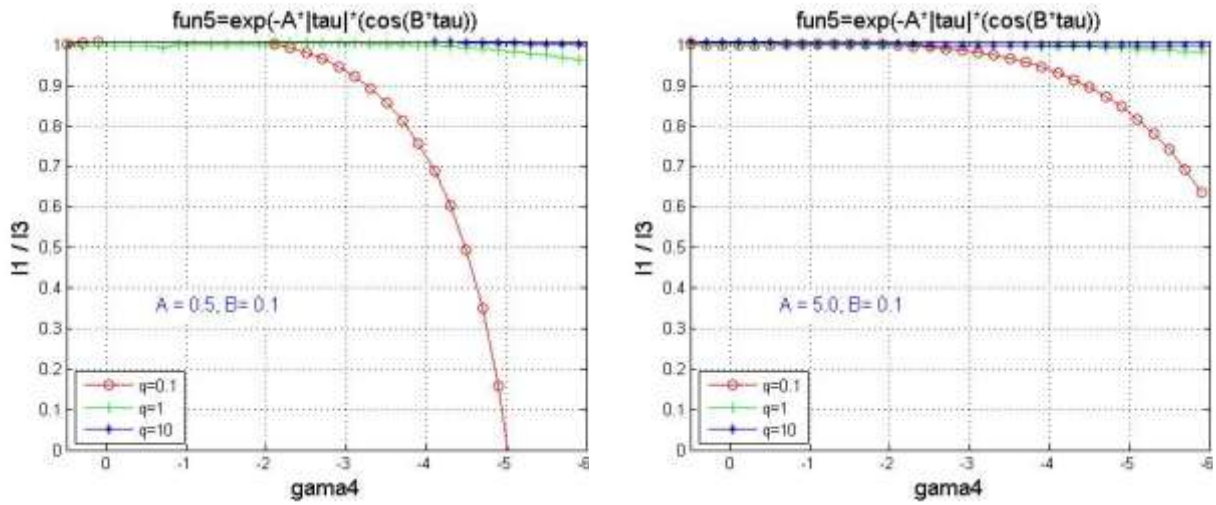
Дослідження проводилися при різних значеннях відношення сигнал/шум (q=0.1; 1; 10) та параметрах кореляції для кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}\left(cos\,\text{В}\,\tau + \frac{A}{\text{В}} sin\,\text{В}\,|\tau|\right)$, яка характеризує автокореляцію з косинусним осцилятором. Дослідження проводилися як для сильних статистичних зв'язків рисунок 3.19 - а) *A*=0.5, *B*=0.1, так і для слабких рисунок 3.20 б)- *A*=5.0, *B*=50. Великі значення *A* (наприклад, 1 або більше) характеризують процеси з швидким згасанням кореляцій (коротка пам'ять), а малі значення *A* (наприклад, 0.5) підходять для довгостроково корельованих процесів, де кореляція зберігається довше. Параметр *B* характеризує частоту осциляцій. Низькі значення *B* (наприклад, $B \approx 0.1-1$) відповідають повільним осциляціям, характерним для систем із низькочастотними флуктуаціями. Великі значення *B* (наприклад, *B*>10) підходять для високочастотних процесів, таких як електромагнітні хвилі або акустичні сигнали.

Отримані результати представлені в роботах [12-24].



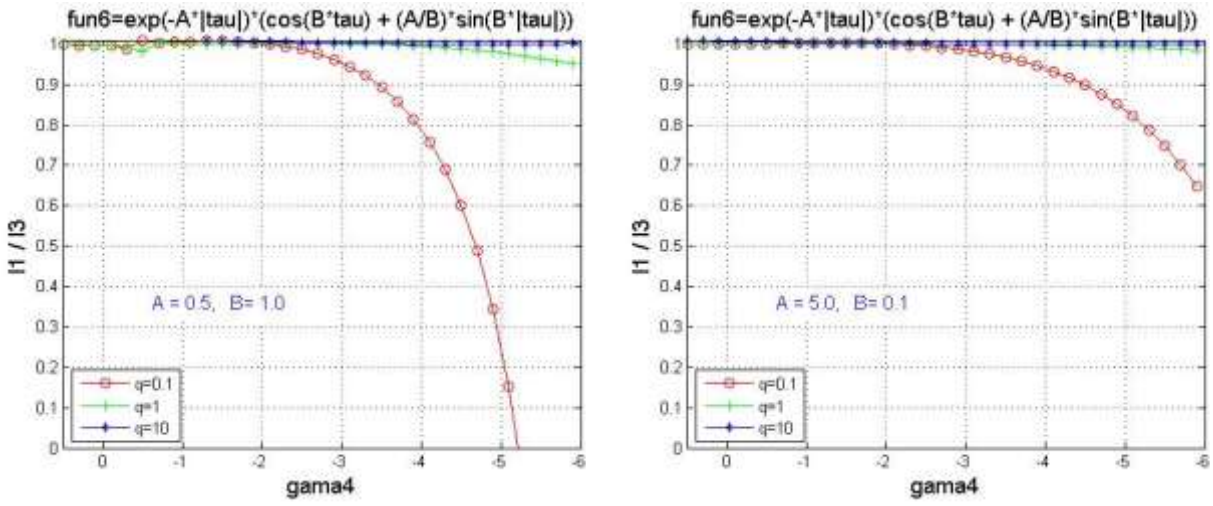
а) б)

Рисунок 3.17. Залежність відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез I_1/I_3 для різних РП від коефіцієнта ексцесу негаусової завади gama4 при різних значеннях відношення сигнал/шум q параметрах кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$ а)-A=0.5; б) - A=5.0.



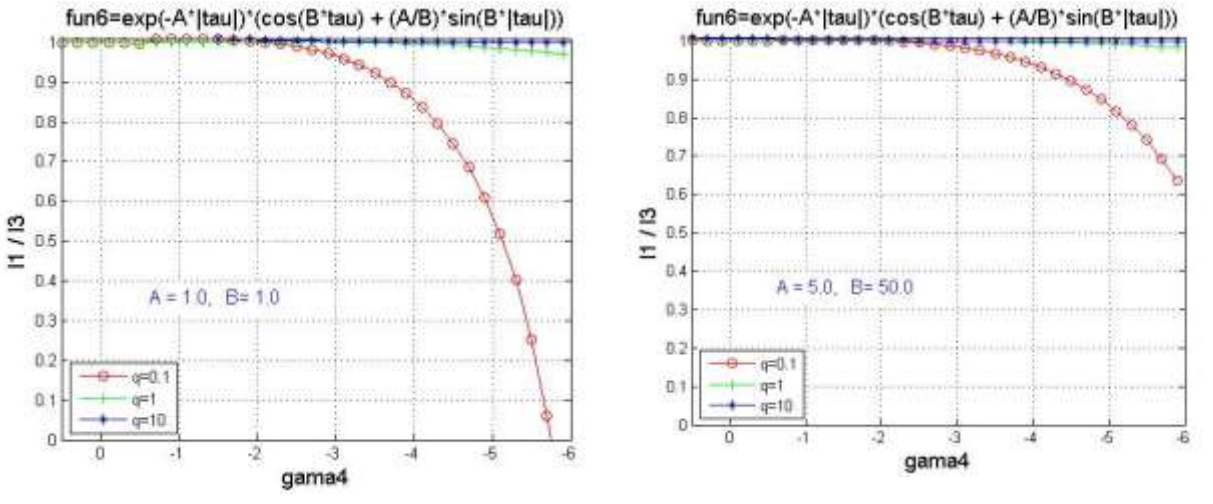
а) б)

Рисунок 3.18. Залежність відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез I_1/I_3 для різних РП від коефіцієнта ексцесу негаусової завади gama4 при різних значеннях відношення сигнал/шум q параметрах кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|} cos\, B\tau$ а)-A=0.5, B=0.1; б) - A=5.0, B=0.1.



а) б)

Рисунок 3.19. Залежність відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез I_1/I_3 для різних РП від коефіцієнта ексцесу негаусової завади gama4 при різних значеннях відношення сигнал/шум q параметрах кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}\left(cos\,\mathrm{B}\,\tau + \frac{A}{\mathrm{B}} sin\,\mathrm{B}\,|\tau|\right)$ а)-A=0.5, B=1.0; б) - A=5.0, B=0.1.



а) б)

Рисунок 3.20. Залежність відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез I_1/I_3 для різних РП від коефіцієнта ексцесу негаусової завади gama4 при різних значеннях відношення сигнал/шум q параметрах кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}\left(cos\,\mathrm{B}\,\tau + \frac{A}{\mathrm{B}} sin\,\mathrm{B}\,|\tau|\right)$ а)-A=1.0, B=1.0; б) - A=5.0, B=50.

3.4. Висновки до 3 розділу

Обробка зашумлених сигналів є значною статистичною проблемою для багатьох практичних застосувань. Основою для вирішення подібних проблем оптимального виявлення сигналів є використання відношення правдоподібності, яке порівнюється з певним порогом, який обирається по заданому критерію якості відповідно до обраного критерію якості. Однак, застосування цього підходу до корельованих негаусових моделей випадкових процесів представляє практичні труднощі, пов’язані з визначенням типу щільності розподілу, його параметрів, а також синтезом і аналізом алгоритмів обробки сигналів. В даному розділі роботи запропоновано альтернативний підхід до опису випадкових процесів, який заснований на використанні моментів і кумулянтів, нескінченна послідовність яких дозволяє точно наблизити запропонований опис випадкових величин до повного імовірнісного опису.

В роботі розроблені нові математичні моделі корельованих асиметричних, ексцесних та асиметрично-ексцесних негаусових процесів, які використано для синтезу поліноміальних стохастичних РП, оптимальні коефіцієнти яких визначаються згідно нового модифікованого моментного критерію якості верхніх границь ймовірностей помилок для перевірки статистичних гіпотез.

На основі запропонованого підходу були синтезовані лінійні та нелінійні РП, досліджені їх властивості та отримані характеристики, які показують їх ефективність при впливі корельованих негаусових завад різних типів. Показано, що лінійні РП не враховують негаусовий розподіл випадкових величин. Це пояснюється тим, що для їх опису використовуються лише перші два моменти, що представляють середнє значення та дисперсію випадкових процесів. Разом з тим, синтезовані лінійні РП збігаються з добре відомими РП, що отримані з відношення правдоподібності для гаусових моделей випадкових величин.

Нелінійна обробка вибіркових значень та врахування статистик вищих порядків негаусових процесів у вигляді коефіцієнтів асиметрії та ексцесу призводить до покращення ефективності виявлення сигналів, що проявляється у зменшенні значення критерію якості РП, і відповідно, зменшенні ймовірностей помилок першого та другого роду таких РП. Дослідження проводилися по порівнянню таких величин, як кількість добутої інформації з вибіркових значень при гіпотезі і альтернативі для різних степеней поліному РП і цей показник є оберненою величиною до критерію якості РП.

Показано, що вплив таких параметрів негаусових процесів, як асиметрія та ексцес, дозволяють покращити нелінійну обробку вибіркових значень у порівнянні з лінійною. Разом з тим, врахування кореляційних зв'язків вибіркових значень зменшує ефективність нелінійної обробки, яка зменшується як для лінійних, так і нелінійних РП. Але врахування тонкої структури негаусових процесів у вигляді коефіцієнтів асиметрії та ексцесу в цілому покращує роботу нелінійної обробки РП у порівнянні з лінійною, яка є оптимальною для добре поширених гаусових моделей випадкових процесів.

Чисельна ефективність статистичної обробки сигналів на фоні завад залежить не лише від степені стохастичного полінома РП, але і від багатьох факторів, таких як відношення сигнал/шум (q), кореляційних функцій та їх масштабучих коефіцієнтів ($A,\ B$), значень коефіцієнтів асиметрії (γ_3) та ексцесу (γ_4). Наприклад, при адитивній взаємодії корисного сигналу з асиметричною негаусовою завадою, яка характеризується сильним експоненційним кореляційним зв'язком з масштабуючим коефіцієнтом A=0.1 (рис.3.5) при значенні коефіцієнта асиметрії gama3=1.1 і відношенні сигнал/шум q=0.1 відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез при різних степенях полінома РП буде дорівнювати 0.5. Таке значення свідчить про те, що ймовірності помилок першого та другого роду синтезованого нелінійного РП при степені полінома s=2 будуть вдвічі менші за аналогічний показник для лінійного РП при s=1, яке є оптимальним для гаусової моделі завад. Таким чином, врахування параметрів, що описуються

негаусовий розподіл досліджуваного випадкового процесу на прикладі коефіцієнта асиметрії збільшує у двічі ефективність РП у порівнянні з поширеними і добре відомими лінійними моделями РП, оптимальними для гаусових щільностей розподілу досліджуваних процесів.

На прикладі аналізу отриманих результатів при синтезі нелінійних РП виявлення постійних сигналів при взаємодії з корельованими ексцесними або асиметрично-ексцесними негаусовмими завадами можна спостерігати аналогічну тенденцію. Наприклад, при взаємодії постійного сигналу з релеєвською завадою, яка відноситься до асиметрично-ексцесного типу і характеризується значеннями коефіцієнтів асиметрії $\gamma_3 = 0{,}63$ та ексцесу $\gamma_4 = 3.26$ при експоненційному кореляційному зв'язку з масштабуючим коефіцієнтом A=0.1 та відношенням сигнал/шум q=0.1 (рис.3.10), підвищення ефективності нелінійної обробки виявлення сигналів у порівнянні з лінійною складає 13%, що характеризує зменшення ймовірностей помилок першого та другого роду запропонованих нелінійних РП у порівнянні з відомими лінійними результатами.

Необхідно відмітити, що найбільша ефективність синтезованих поліноміальних РП досягається при менших значеннях відношення сигнал/шум та граничних значеннях коефіцієнтів асиметрії та ексцесу для заданої області допустимих значень.

Зазначимо, що збільшення степеня стохастичних поліноміальних РП в цілому збільшує ефективність обробки сигналів, але разом з тим звужує область допустимих значень для параметрів кумулянтних коефіцієнтів. Одночасно з цим ускладняються обчислювальні алгоритми для побудови таких РП. Таким чином такий підхід потребує знаходження компромісу між бажаною ефективністю нелінійної обробки і ускладненням обчислювальних алгоритмів поліноміальних РП. Таким компромісом може бути застосування нелінійних РП при степені поліному s=2,3, для яких спостерігається висока ефективність виявлення сигналів у порівнянні з відомими результатами при нескладній практичній реалізації.

Список використаних джерел до розділу 3

1. Палагін В.В. Математичні моделі, методи та засоби виявлення і розрізнення сигналів на фоні негаусових завад: дис. д-ра техн. наук : 01.05.02. Київ, 2013. 552 с.
2. Самборський І.І., Шолохов С.М., Юрченко О.В., Ніколаєнко Б.А., Основи цифрової обробки сигналів: навчальний посібник. Київ: ІСЗЗІ КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 171 с.
3. D.Sundararajan. Digital Signal Processing. Springer Cham. (2024) DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-56740-7.
4. Van Trees, H., Bell, K., Tiany, Z. Detection Estimation and Modulation Theory. Wiley; 2nd edition, New Jersey (2013).
5. Kay S.M. Fundamentals of Statistical Signal Processing. Prentice Hall PTR, NJ (2008).
6. Hautus, M.J., Macmillan, N.A., & Creelman, C.D.: Detection Theory: A User's Guide (3rd ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003203636 , 2021 (2021)
7. Безрук В.М. Теоретические основы проектирования систем распознавания сигналов для автоматизированного радиоконтроля: монография / В.М. Безрук, Г.М. Певцов - Х.: Коллегиум, 2007 - 430 с.
8. Яновський Ф.Й. Радіолокаційні системи повітряних суден: підруч. / Ф.Й.Яновський. - К. : НАУ, 2012. - 688 с.
9. R. A. Wildhaber, N. Zalmai, M. Jacomet and H. -A. Loeliger. Signal detection and discrimination for medical devices using windowed state space filters. 2017 13th IASTED International Conference on Biomedical Engineering (BioMed), Innsbruck, Austria, 2017, pp. 125-133, doi: 10.2316/P.2017.852-020.
10. Kunchenko Y. Polynomial Parameter Estimations of Close to Gaussian Random Variables. Shaker Verlag, Aachen (2002).
11. Kunchenko Y. Stochastic Polynomials, Naukova Dumka (2006).
12. В.В.Палагін., Д.О.Смірнов. Статистики вищих порядків в задачах вивлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад// Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць – Кам.-

Подільський: Кам.-Подільський нац. ун-т ім. Івана Огієнка, 2025. – Вип. 22. – С. 106-118. DOI: https://doi.org/10.15276/imms.v14.no1-2.56

13. В.В.Палагін, Д.О.Смірнов. Моделі та методи обробки сигналів на фоні корельованих асиметричних процесів // Інформатика та математичні методи в моделюванні, Національний університет «Одеська політехніка, Vol. 14 (2024), No. 1-2, pp. 56-69. DOI: https://doi.org/10.15276/imms.v14.no1-2.56
14. Д.О.Смірнов, Д.А.Ведерников, О.А.Палагіна, В.В.Палагін. Методи статистичного оцінювання параметрів сигналу на фоні негаусових корельованих завад. // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць – Кам.-Подільський: Кам.-Подільський нац. ун-т ім. Івана Огієнка, 2021. – Вип. 22. – С. 106-118. DOI: https://doi.org/10.32626/2308-5916.2021-22.106-118
15. D.Smirnov, E.Palahina, V.Palahin. Mathematical Modeling of Signal Detection in Non-Gaussian Correlated Noise // International Conference on Smart Technologies in Urban Engineering - Proceedings of STUE-2022, Lecture Notes in Networks and Systems - LNNS, volume 536, pp.65-74, DOI:https://doi.org/10.1007/978-3-031-20141-7
16. Smirnov, D., Zorin, O., Palahina, E., Ivchenko, O., Palahin, V. (2024). Development of Moment Quality Criterion and Polynomial Methods for Signals Detection and Distinction in Non-Gaussian Noise. In: Faure, E., et al. Information Technology for Education, Science, and Technics. ITEST 2024. Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies, vol 221., pp.368–381, Springer, Cham. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-71801-4_27
17. D.Smirnov, V.Chepynoha, O.Zorin, A.Honcharov, E.Palahina, V.Palahin. The Methods of Joint Signal Discrimination and Parameters Estimation in non-Gaussian Noise // IEEE 4-th International Conference on Advanced Trends in Information Theory – 2022, Kyiv, Ukraine, 2022, pp. 23-27, DOI: https://doi.org/10.1109/ATIT58178.2022.10024190
18. Daniil Smirnov, Oleksandr Zorin, Elena Palahina, Volodymyr Palahin. Development o f Moment Quality Criterion and Polynomial Methods for Signals Detection and Distinction in Non-Gaussian Noise // VII Міжнародна науково-

практична конференція “Інформаційні технології в освіті, науці й техніці” ІТОНТ-2024, с.195-196.

19. Д.О.Смірнов, О.А.Палагіна, В.В.Палагін. Методи виявлення сигналів на фоні статистичнозалежних негаусових процесів // Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси (ІІРТК-2024), сімнадцята міжнародна науково-практична конференція, 21-22 травня 2024 р., Київ, Україна, - с.466-468.
20. Д.О.Смірнов, В.В.Палагін. Моделі та методи виявлення сигналів на фоні негаусових корельованих завад // 28-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка і молодь у XXI столітті», 16 – 18 квітня 2024 р., Конференція «Електронна, лазерна та біомедична інженерія» – с.5-7
21. Volodymyr Palahin, Olena Palahina, Daniil Smirnov, Oleksandr Zorin. Polynomial Methods and Algorithms for Signals Detection and Distinction in Non-Gaussian Noise // «Modern Problems of Mathematical Modelling, Forecasting, and Optimization» in memory of the Honorary Professor of the Kamianets-Podilskyi National University, Dr. Sc., Prof., Cor. member NAPSU Anatoliy Fedorovich VERLAN, с.66-68.
22. Д.О.Смірнов, О.А.Палагіна, В.В.Палагін. Математичне моделювання задач виявлення сигналів на фоні негаусових корельованих завад // Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси (ІІРТК-2022), п’ятнадцята міжнародна науково-практична конференція, 17-18 травня 2022р., Київ, Україна, - с.224-225.
23. Palahina E., Kunchenko-Kharchenko V., Tonkopriad S., Push I., Smirnov D., Palahin V. Signal detection in additive-multiplicative non-Gaussian noise // Праці VII Міжнародної науково-практичної конференції «Обробка сигналів і негауссівських процесів», присвяченої пам’яті професора Ю.П.Кунченка: Тези доповідей. – Черкаси: ЧДТУ, 2021. – с.123-124.
24. Палагін В.В., Зорін О.С., Палагіна О.А., Смірнов Д.О. Моделі та методи передачі даних на фоні негаусових завад // "Наукоємні технології в інфокомунікаціях", НІСТ’2023, 1–3 червня 2023.р, с.56-58.

РОЗДІЛ 4
ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ВИЯВЛЕННЯ СИГНАЛІВ НА ФОНІ КОРЕЛЬОВАНИХ НЕГАУСОВИХ ЗАВАД

4.1. Створення програмних засобів комп'ютерного моделювання процесів виявлення сигналів

Створення програмних засобів для комп'ютерного моделювання процесів виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад є актуальним завданням. У сучасних технічних системах, таких як радіолокація, телекомунікації, системи безпеки й управління, дедалі частіше виникає потреба у виявленні слабких сигналів, які спотворюються завадами [1-6]. Особливість корельованих негаусових завад полягає в тому, що їх статистичні характеристики не відповідають традиційним нормальним моделям, що ускладнює застосування класичних методів обробки сигналів [7, 8].

Використання моментно-кумулянтних моделей дозволяє враховувати високі порядки статистичних характеристик, які є ключовими для опису складних кореляційних структур і аномалій у завадах. Це відкриває можливості для побудови більш точних алгоритмів аналізу та обробки сигналів [9-14]. Однак для перевірки таких підходів необхідно використовувати спеціалізовані програмні засоби, здатні моделювати як характеристики сигналів, так і завад, що відображають реальні умови функціонування систем.

Розробка програмного забезпечення для комп'ютерного моделювання таких процесів сприяє не лише теоретичному дослідженню властивостей алгоритмів, а й їхній практичній реалізації. Такі засоби дозволяють проводити експерименти з різними параметрами моделі, оцінювати ефективність методів виявлення та адаптувати алгоритми до конкретних умов експлуатації. Вони також забезпечують основу для навчання систем штучного інтелекту, які дедалі частіше використовуються у складних технічних завданнях.

Необхідність подібних програмних засобів зумовлена також зростаючими вимогами до точності та швидкості аналізу сигналів. У реальних умовах, де швидкість і точність ухвалення рішення мають критичне значення, можливість тестування різних алгоритмів у віртуальному середовищі значно підвищує шанси на успішне впровадження ефективних систем. Комп'ютерне моделювання дозволяє імітувати широкий спектр умов експлуатації, від низьких рівнів шуму до складних випадкових впливів, характерних для корельованих негаусових процесів.

Таким чином, створення програмних засобів для моделювання процесів виявлення сигналів є ключовим етапом у розвитку сучасних систем аналізу даних і прийняття рішень, забезпечуючи інтеграцію новітніх наукових досягнень у реальні технологічні рішення.

В дисертаційній роботі, на основі синтезованих поліноміальних РП виявлення повністю відомого сигналу при адитивній взаємодії з корельованими негаусовими завадами, створені інструментальні засоби, які дозволяють провести дослідження отриманих результатів і проаналізувати їх ефективність при розв’язанні прикладних задач. Для створення ефективних програмних засобів комп'ютерного моделювання в роботі використовувалися такі програмні пакети, як Wolfram Mathematica, MATLAB та мова програмування Python для формування програмних модулів.

Wolfram Mathematica пропонує багатий набір функцій для моделювання статистичних та сигнальних процесів, що особливо корисно при аналізі моментно-кумулянтних характеристик. Його унікальна особливість — символьні обчислення, які дозволяють аналітично виводити поліноміальні розв’язувальні правила, а також працювати зі складними математичними моделями без необхідності числових апроксимацій. Це може бути критично важливо для розробки теоретичних моделей і перевірки точності обчислень.

MATLAB є одним із найпоширеніших інструментів для моделювання та аналізу сигналів завдяки його розвиненому математичному апарату та спеціалізованим бібліотекам. Для задачі моделювання процесів виявлення

сигналів на фоні корельованих негаусових завад MATLAB пропонує широкі можливості роботи з масивами даних, обчислення моментів і кумулянтів, а також побудови поліноміальних РП. Інструменти, як-от *Signal Processing Toolbox* і *Statistics* дозволяють зручно обчислювати автокореляційні функції та моделювати процеси випадкових сигналів із заданими статистиками. Крім того, MATLAB має інструменти для візуалізації даних, що забезпечує зручний спосіб аналізу та перевірки синтезованих РП.

У дисертаційній роботі була сформульована задача перевірки статистичних гіпотез щодо виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад, для розв'язку якої були запропоновані нові моментно-кумулянтні 1D та 2D математичні моделі на основі статистик вищих порядків для опису статистичних зв'язків досліджуваних процесів, та поліноміальні РП, оптимальні коефіцієнти яких знайдені за модифікованим моментним критерієм верхньої границі ймовірностей помилок.

На рисунку 4.1. приведена загальна структура програмного комплексу, призначеного для моделювання процесів виявлення сигналів на фоні завад різних типів та видів. Програмний комплекс представляє собою набір програм, які складаються з двох частин. Перша частина (1) призначена для генерування випадкових процесів з різними статистичним зв'язками та параметрами, які характеризують негаусовий характер досліджуваних випадкових процесів. Друга частина (2) програмного комплексу представляє собою набір поліноміальних алгоритмів виявлення сигналів, синтезованих в 3 розділі, які складаються з лінійного та нелінійних РП для відповідних типів негаусових завад.

На рисунку 4.1. представлені окремі модулі (Мод.Х.Х.Х), які призначені для виконання наступних функцій:

- **М.1.1** – модуль генерації гаусових некорельованих процесів, які характеризуються параметрами математичного сподівання α та дисперсії χ_2 - $\vartheta = \{\alpha,\ \chi_2\}$ і реалізується в блоці **М.1.1.1** для тестового порівняння результатів дослідження;

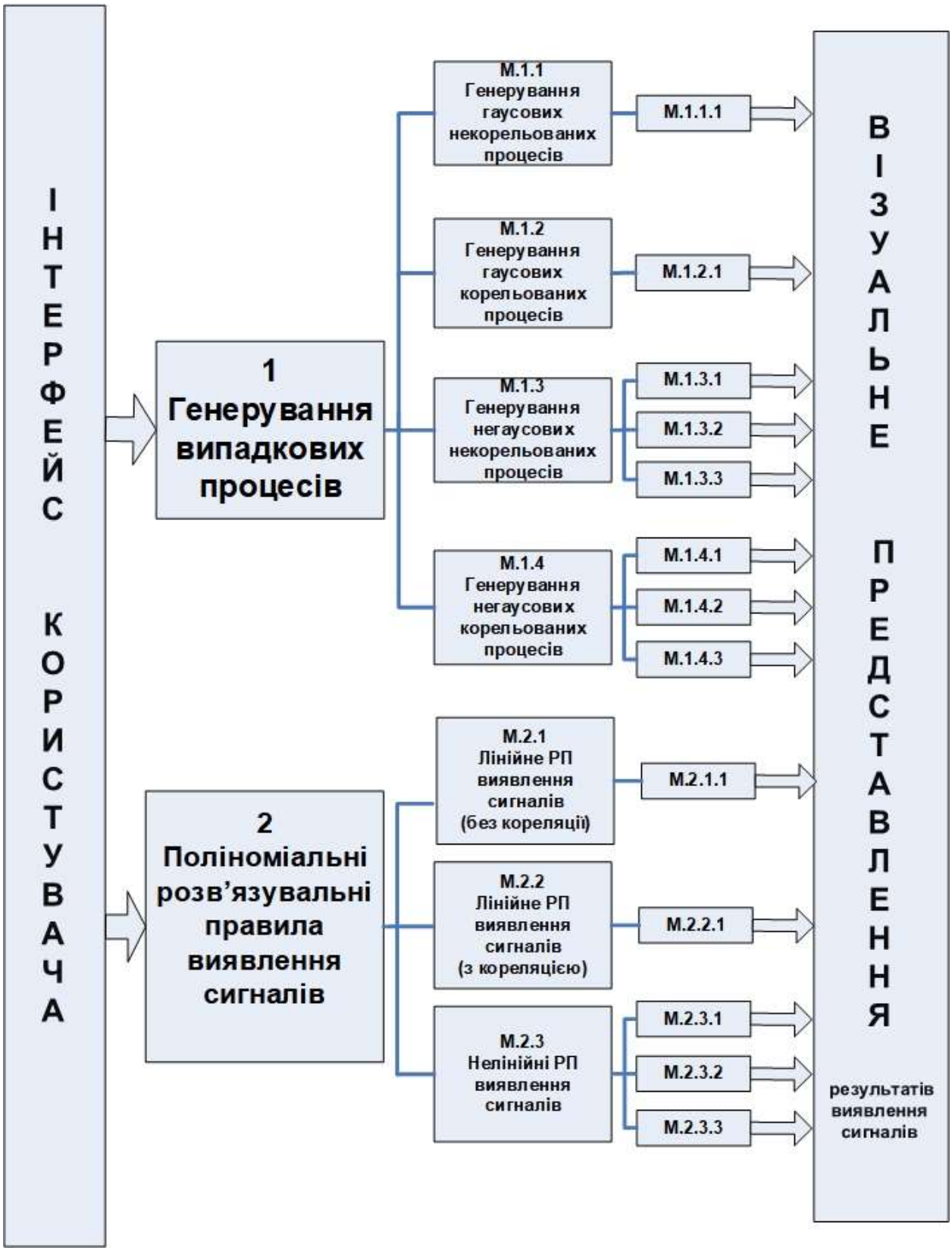


Рисунок 4.1. Структура програмного комплексу, призначеного для моделювання процесів виявлення сигналів на фоні завад різних типів та видів

- **М.1.2** – модуль генерації гаусових корельованих процесів, які характеризуються параметрами математичного сподівання α, дисперсії χ_2 та заданої кореляційної функції $r_\xi(\tau)$ - $\vartheta = \{r_\xi(\tau), \alpha, \chi_2, \}$ і реалізується в блоці **М.1.2.1** для тестового порівняння результатів дослідження;
- **М.1.3** – модуль генерації негаусових некорельованих процесів, які характеризуються параметрами математичного сподівання α, дисперсії χ_2 та заданими кумулянтними коефіцієнтами γ_3 та γ_4, які визначають асиметрію та ексцес негаусового розподілу у вигляді набору параметрів $\vartheta = \{\alpha, \chi_2, \gamma_3\}$, $\vartheta = \{\alpha, \chi_2, \gamma_4\}$ і $\vartheta = \{\alpha, \chi_2, \gamma_3, \gamma_4\}$ і реалізується в блоках М.1.3.1), (М.1.3.2) та (М.1.3.3) відповідно;
- **М.1.4** – модуль генерації негаусових корельованих процесів, які характеризуються параметрами математичного сподівання α, дисперсії χ_2, заданої кореляційної функції $r_\xi(\tau)$ кумулянтними коефіцієнтами γ_3 та γ_4 у вигляді набору $\vartheta = \{r_\xi(\tau), \alpha, \chi_2, \gamma_3\}$, $\vartheta = \{r_\xi(\tau), \alpha, \chi_2, \gamma_4\}$ та $\vartheta = \{r_\xi(\tau), \alpha, \chi_2, \gamma_3, \gamma_4\}$ і реалізується в блоках М.1.4.1), (М.1.4.2) та (М.1.4.3) відповідно;
- **М.2.1** – модуль реалізації лінійного РП при степені полінома s=1 згідно виразу (3.12), яке отримане для обробки постійного сигналу на фоні гаусових статистично незалежних вибіркових значеннях і реалізується в блоці М.2.1.1;
- **М.2.2** – модуль реалізації лінійного РП при степені полінома s=1 згідно виразу (3.9), яке отримане для обробки постійного сигналу на фоні гаусових статистично залежних вибіркових значеннях при заданій кореляційній функції $r_\xi(\tau)$ і реалізується в в блоці М.2.2.1;
- **М.2.3** – модуль реалізації нелінійних РП при степені полінома s=2 для обробки постійного сигналу на фоні корельованих асиметричних, асиметрично-ексцесних та ексцесних негаусових вибіркових значеннях при заданій кореляційній функції $r_\xi(\tau)$ і реалізується в блоках М.2.3.1,

М.2.3.2 та М.2.3.3 для синтезованих нелінійних РП виду (3.15) та (3.34) для відповідних типів негаусових завад.

Результати обробки поліноміальних РП оцінювалися по значенню кількості видобутої інформації $I_{1n}^{(\tau)}$ з вибіркових значень для лінійних РП при степені полінома s=1 та нелінійних РП при степені полінома s=2, 3 - $I_{2n}^{(\tau)}$, $I_{3n}^{(\tau)}$ з візуальним їх представленнм . Нагадаємо, що більше значення кількості добутої інформації є оберненою величиною до значення критерію якості. Більше значення $I_{sn}^{(\tau)}$ відповідає меншим значенням критерію якості, а отже і меншим ймовірностям помилок першого та другого роду відповідних РП.

На рисунку 4.2. представлена структурна схема процесів виявлення постійного сигналу при застосуванні поліноміальних РП при степені полінома s=1, 2, 3, оптимальних за модифікованим моментним критерієм якості, де для опису статистичних характеристик досліджуваних процесів застосовані нові моментно-кумулянтні 1D та 2D математичні моделі на основі статистик вищих порядків для опису статистичних зв’язків досліджуваних процесів та негаусового характеру випадкових величин.

Для опису статистичних характеристик досліджуваних процесів використано моментно-кумулянтні моделі вищих порядків, які враховують складні статистичні зв’язки між величинами та описують негаусовий характер завад. На першому етапі роботи система визначає початкові параметри моделювання, такі як співвідношення сигнал/шум (SNR), кореляційну функцію завад, типи та параметри завад, а також степінь полінома розв’язувального правила. Блок формування сигналів генерує постійні (повністю відомі) сигнали, які мають бути виявлені, а блок формування кореляційної функції забезпечує врахування властивостей завад, які можуть мати асиметричний, ексцесний або асиметрично-ексцесний характер. Параметри завад розраховуються з урахуванням заданої кореляційної функції, що дозволяє моделювати реальні умови впливу завад.

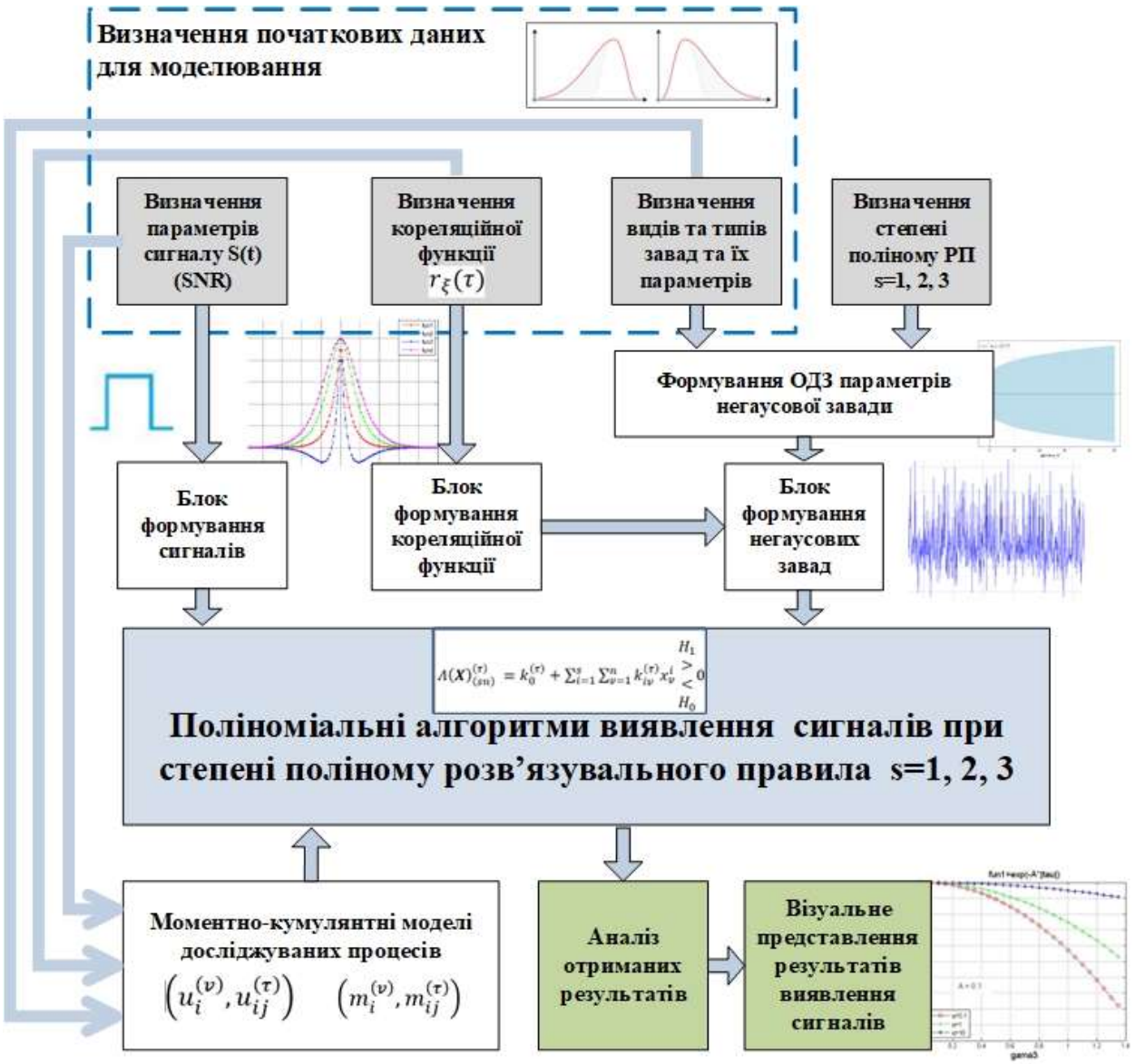


Рисунок 4.2. Структурна схема процесів виявлення постійного сигналу на фоні корельованих негаусових завад при застосуванні поліноміальних РП

При цьому визначається область допустимих значень параметрів завад залежно від ступеня полінома.

Центральним елементом системи є модуль, який реалізує поліноміальні алгоритми виявлення сигналів. Використовуючи моментно-кумулянтні моделі випадкових процесів, він реалізує обчислювальні алгоритми виявлення сигналів та оцінює їхню ефективність у різних умовах завад. Це дозволяє

забезпечити гнучкість і адаптивність алгоритмів до реальних сценаріїв. Результати обчислень проходять етап аналізу, після чого здійснюється їх візуалізація. Візуальне представлення включає графічне відображення ефективності виявлення, таких як ймовірність правильного виявлення та помилки, що дозволяє оцінити якість роботи системи та прийняти рішення про її оптимізацію.

4.2. Програмна реалізація стаціонарних корельованих негаусових процесів з визначеними характеристиками

Одним із важливих етапів проведення моделювання процесів виявлення сигналів на фоні завад є якісна реалізація генератора випадкових процесів із заданими характеристиками. Наведемо опис декількох відомих методів, які дозволяють отримувати вибіркові значення [15-20].

Метод інверсії кумулятивної функції розподілу (CDF). Метод інверсії кумулятивної функції розподілу є одним із найпоширеніших підходів до генерації випадкових величин із заданою функцією розподілу ймовірності. Він базується на властивості, що будь-який розподіл можна отримати за допомогою інверсної кумулятивної функції, застосованої до рівномірно розподілених випадкових чисел.

Основна ідея методу полягає в наступному. Кумулятивна функція розподілу $F_{\boldsymbol{X}}(x)$ визначає ймовірність того, що випадкова величина X приймає значення, менше або рівне x:

$$F_{\boldsymbol{X}}(x) = P(\boldsymbol{X} \leq x).$$

Вона монотонно зростає від 0 до 1. Якщо обернена функція $F_X^{-1}(U)$ існує, то випадкова величина X може бути отримана за формулою:

$$X = F_X^{-1}(U),$$

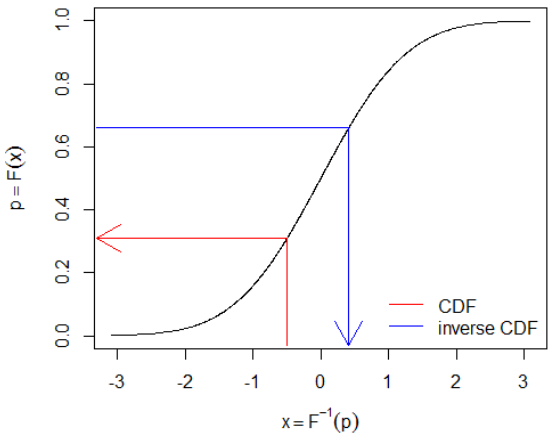
де U – це рівномірно розподілена випадкова величина на інтервалі [0,1].

Етапи реалізації даного методу складаються з наступних дій:

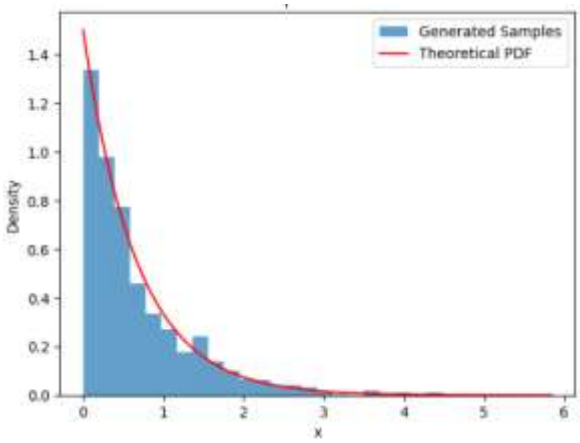
- генерують випадкове число u із рівномірного розподілу $U(0,1)$. Це можна зробити за допомогою стандартного генератора випадкових чисел (рисунок 4.3.);
- обчислення інверсної функції, для чого для знайденого значення u обчислюють $X = F_X^{-1}(U)$, використовуючи обернену функцію розподілу;
- отримане значення x є вибіркою з розподілу $F_X(x)$.

Переваги даного методу полягають у його простій реалізації для одновимірних розподілів, підходить для будь-якого типу розподілу, якщо обернена функція $F_X^{-1}(U)$ доступна (у вигляді аналітичної форми або чисельного розв'язку). Окрім того, забезпечується точність формування розподілу, оскільки безпосередньо використовує кумулятивну функцію.

Разом з тим при такому підході не завжди можливо отримати аналітичну форму оберненої функції, а для складних або багатовимірних розподілів метод стає обчислювально складним, що вимагає чисельного знаходження $F_X^{-1}(U)$. Такий підхід залежить від точності чисельного обчислення оберненої функції в багатьох реальних застосуваннях.



а)



б)

Рисунок 4.3. Ілюстрація методу інверсії кумулятивної функції розподілу а) та приклад реалізації за даним методом випадкових величин для експоненційного розподілу.

Метод широко використовується для моделювання різноманітних випадкових процесів у задачах статистичної обробки сигналів, де потрібно генерувати випадкові величини з відомим розподілом.

Метод кумулянтної функції. Метод кумулянтної функції є ефективним інструментом для аналізу і синтезу випадкових процесів, особливо негаусових, з урахуванням їхніх високих статистичних моментів і характеристик. Кумулянти забезпечують більш компактний і зручний опис багатовимірних розподілів та статистичних зв'язків між випадковими величинами. Цей метод знаходить широке застосування у задачах моделювання сигналів на фоні корельованих негаусових завад.

Кумулянти є математичними характеристиками випадкових процесів, які розширюють стандартні моменти розподілу. Вони мають низку унікальних властивостей:

- перший кумулянт χ_1 відповідає математичному сподіванню;
- другий кумулянтχ_2 відповідає дисперсії;
- вищі кумулянти (третього та четвертого порядків χ_3 та χ_4) характеризують асиметрію та ексцесність розподілу, що є важливим для негаусових процесів.

Кумулянтна функція визначається через логарифм характеристичної функції випадкової величини ξ:

$$ln\, f_\xi\left(u/\vec{\vartheta}\right) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\chi_r(\vec{\vartheta})}{r!}(ju)^r,$$

де $ln\, f_\xi\left(u/\vec{\vartheta}\right)$ – логарифм характеристичної функція випадкової величини ξ, а кумулянти порядку i розподілу випадкової величини визначаються як коефіцієнти розкладу $\chi_i(\vec{\vartheta})$ логарифма характеристичної функції в степеневий ряд.

Етапи реалізації методу полягають в наступному:

- знаходять характеристичну функцію $f_\xi\left(u/\vec{\vartheta}\right)$ для заданого розподілу випадкової величини ξ;
- застосовують похідні *n*-го порядку до кумулянтної функції, щоб отримати числові значення кумулянтів для заданого процесу або розподілу.
- на основі отриманих кумулянтів високих порядків синтезують розподіл або формують його апроксимацію.

Переваги даного методу полягають в наступному: кумулянти третього і четвертого порядків ефективно описують асиметрію та ексцес, що дозволяє моделювати негаусові розподіли; для незалежних випадкових величин кумулянти адитивні, що полегшує аналіз систем із великою кількістю компонент.

До недоліків відноситься те, що обчислення характеристичної функції та її логарифма може бути складним для деяких розподілів, для високих порядків точність обчислень залежить від аналітичного або чисельного розрахунку похідних.

Практичне формування розподілу на основі заданих кумулянтів високих порядків є завданням, яке зазвичай вирішується шляхом використання методів апроксимації або відновлення розподілу. Основна ідея полягає у відновленні щільності ймовірності *f(x)*, яка відповідає заданим моментам або кумулянтам.

Один із підходів до реалізації цього процесу є *застосування поліноміальної апроксимації.* Цей метод використовує кумулянти для побудови аналітичного виразу щільності ймовірності у вигляді полінома, який представляється у вигляді ряду:

$$f(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\chi_2}} \exp\left(-\frac{(x-\chi_1)^2}{2\chi_2}\right)\left[1 + \sum_{n=3}^{N} \frac{\chi_n H_n(x)}{n!}\right],$$

де χ_n – кумулянти *n*-го порядка, $H_n(x)$ – поліном Ерміта.

Припустимо, що нам вже відомі характеристики щільності розподілу випадкової величини, яку потрібно згенерувати. Наприклад, нехай це буде асиметрично-ексцесний негаусовий процес з Релеєвською щільністю

розподілу, для якої дійсні параметри коефіцієнтів асиметрії та ексцесу $\gamma_3 = 0.63$ та $\gamma_4 = 3.26$.

На рисунку 4.4. наведено ілюстрація теоретичної кривої і експериментальних даних для Релеєвської щільності розподілу випадкових величин при масштабуючому коефіцієнті $\sigma = 1$ та кількості вибіркових значень n=1000. Як видно з графіка, теоретична крива щільності розподілу досить чітко апроксимує гістограму вибіркових значень, а теоретичні характеристики розподілу збігаються з експериментальними.

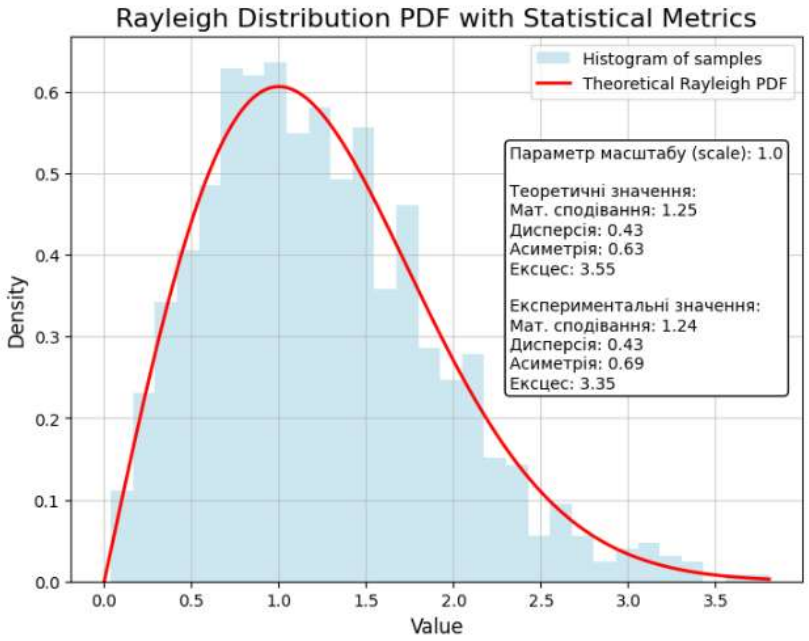


Рисунок 4.4. Ілюстрація теоретичної кривої і експериментальних даних для Релеєвської щільності розподілу випадкових величин

Поліноми Ерміта працюють добре для наближення розподілів, схожих на нормальний, але можуть неадекватно апроксимувати щільності, що мають форму, значно відмінну від нормального розподілу, як, наприклад, у випадку Релеєвського розподілу (рисунок 4.5.), де спостерігаються розбіжності апроксимації з теоретичною кривою.

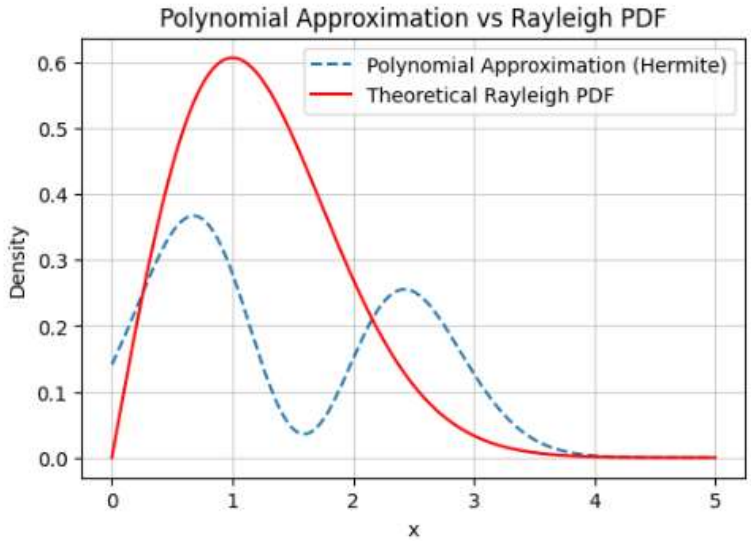


Рисунок 4.5. Апроксимація Релеєвської щільності розподілу поліномом Ерміта

Апроксимації щільності розподілу за допомогою поліномів. Апроксимація щільності ймовірності є важливим завданням статистики та моделювання, особливо коли аналітична форма розподілу невідома або складна. Один із популярних підходів — використання *поліномів заданого ступеня* для наближення функції щільності розподілу. Цей метод ґрунтується на припущенні, що будь-яку гладку функцію можна наблизити поліномом, якщо вибрати його ступінь і коефіцієнти відповідним чином.

Поліноміальна апроксимація починається зі створення набору даних, що представляють функцію щільності (наприклад, теоретичну щільність розподілу або гістограму вибіркових даних). Поліном задається у вигляді:

$$f(x) \approx a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n ,$$

де $a_0, a_1, a_2 \ldots$ — коефіцієнти полінома, а n — ступінь полінома. Основна задача — знайти такі коефіцієнти, які мінімізують різницю між апроксимованою функцією $f(x)$і фактичною функцією щільності.

Для цього використовують методи оптимізації, такі як *метод найменших квадратів*. У цьому підході сума квадратів відхилень апроксимованої щільності від цільової функції мінімізується, що дозволяє знайти оптимальні значення a_i.

Поліноми Ерміта використовуються для модифікації форми нормального розподілу через введення додаткових членів, що враховують асиметрію та ексцес. Це ефективний спосіб моделювання розподілів, які близькі до нормального, але мають додаткові особливості.

Однак у підході з використанням поліномів заданого ступеня (кубічних або вищих) апроксимація орієнтована на безпосереднє наближення форми щільності, без обов'язкового врахування кумулянтів. Цей підхід є більш універсальним і може застосовуватись до широкого спектра розподілів, зокрема тих, які не є симетричними або близькими до нормального. Результат поліноміальної апроксимації Релеєвської щільності розподілу та з використанням поліномів Ерміта наведений на рисунку 4.6.

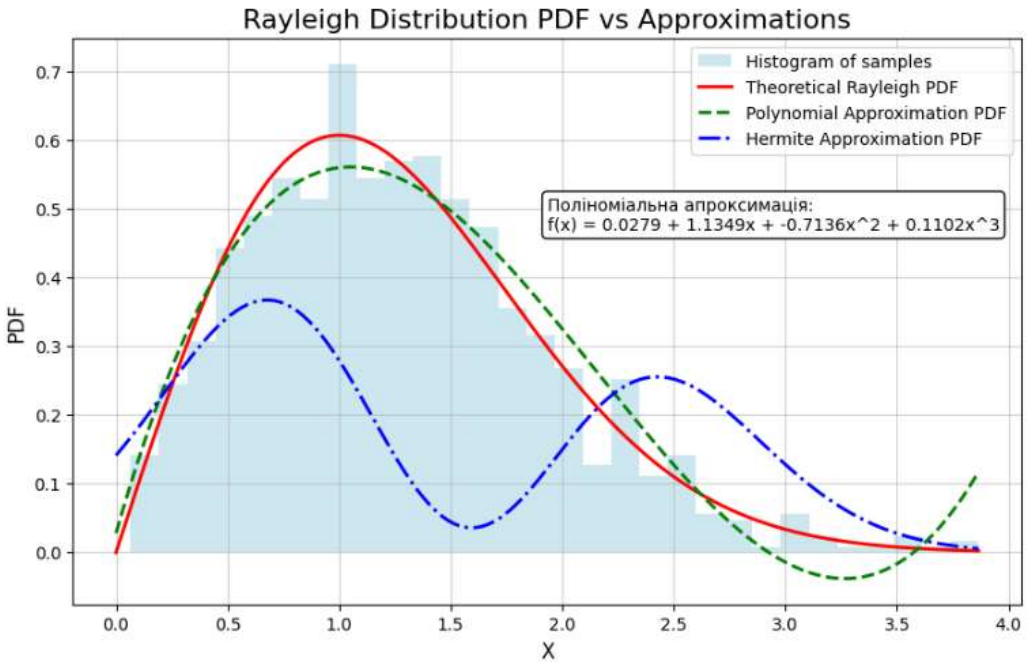


Рисунок 4.6. Апроксимація Релеєвської щільності розподілу кубічним поліномом та поліномом Ерміта

Не дивлячись на привабливість і відносну простоту реалізації описаних методів генерації випадкових величин, є певні труднощі і особливості їх практичної реалізації саме для тої задачі, яка стоїть в дисертаційні роботі.

Метод інверсії CDF часто використовується для генерації випадкових величин із заданим розподілом. Однак, при створенні корельованих негаусових процесів, він має *певні труднощі*:

- *складність обчислення інверсії CDF* - для складних розподілів, таких як асиметричні або ексцесні негаусові розподіли, CDF не має аналітичної форми. У таких випадках обчислення інверсії потребує чисельних методів, таких як інтерполяція або використання спеціальних алгоритмів, що збільшує обчислювальну складність. Наприклад, для розподілу з високою асиметрією функція CDF може бути надто крутою в певних ділянках, що ускладнює точну побудову інверсії;
- *вимога незалежності початкових випадкових величин* - метод інверсії базується на генерації незалежних випадкових чисел з рівномірного розподілу, але побудова корельованих процесів вимагає накладення додаткових залежностей між величинами. Це ускладнює застосування стандартної інверсії CDF;
- *розширення на багатовимірні розподіли* - у випадку корельованих процесів потрібно моделювати багатовимірні розподіли. Інверсія CDF у багатовимірному випадку є надзвичайно складною, оскільки потрібно враховувати залежності між компонентами векторів;
- *обмеження на види розподілів* - метод добре працює для стандартних розподілів (нормального, експоненціального), але для складних, як-от спеціалізовані негаусові розподіли, необхідне попереднє моделювання або апроксимація CDF, що може внести похибки в результати.

Метод кумулянтної функції базується на використанні характеристичної функції для побудови процесів із заданими моментами чи кумулянтами. Незважаючи на свою універсальність, він також *має труднощі*:

- *розбіжність рядів при високих порядках кумулянтів* - для процесів із сильними негаусовими характеристиками (великі значення кумулянтів 3-го і вищих порядків) апроксимація через ряди моментів або кумулянтів може

бути нестійкою. Це призводить до чисельних помилок або до розбіжності рядів, що унеможливлює точне відновлення розподілу;

- *проблема корельованості* - для побудови корельованих процесів необхідно забезпечити, щоб кожен набір значень мав необхідну статистичну залежність. Однак характеристики кореляції важко вбудувати у генерацію сигналу через кумулянти, оскільки кумулянтна функція враховує тільки глобальні властивості розподілу;
- *реалізація у багатовимірних процесах* - для корельованих негаусових процесів багатовимірна характеристична функція має складну структуру. Побудова такої функції із заданими кумулянтами потребує спеціалізованих алгоритмів, а також може бути неможливою для деяких розподілів, якщо вони суперечать обмеженням теорії.

Полігаусові моделі є ефективною альтернативою для генерації корельованих негаусових процесів, особливо коли задачі вимагають збереження як кореляційних, так і розподільчих властивостей випадкових процесів. Основна ідея полігаусових моделей полягає в тому, що негаусовий процес представляється як сума або суперпозиція декількох незалежних чи залежних гаусових процесів, кожен з яких має власні параметри (середнє, дисперсію, кореляційні властивості).

Основні аспекти полігаусових моделей - полігаусові процеси створюються шляхом лінійного чи нелінійного комбінування декількох гаусових процесів. Цей підхід дозволяє імітувати негаусовість, оскільки результуючий процес відхиляється від нормального розподілу через нерівномірний внесок різних компонентів.

Переваги такого підходу полягають у наступному:

- можливість точно задавати кореляційні властивості;
- легкість обчислення завдяки аналітичним властивостям гаусових процесів;
- гнучкість у моделюванні розподілів різних форм шляхом налаштування вагових коефіцієнтів та параметрів складових процесів.

Приклад побудови таких моделей можна проілюструвати наступним чином. Припустимо, що маємо два гаусові процеси $X_1(t)$ та $X_2(t)$, які мають середні значення *μ1, μ2*, дисперсії σ_1^2, σ_2^2 та кореляційні функції $r_1(\tau)$, $r_2(\tau)$. Полігаусовий процес $Y(t)$ може бути створений як:

$$Y(t) = \alpha X_1(t) + \beta X_2(t),$$

де α та β – вагові коефіцієнти розподілів.

Такий підхід формування гаусових вибіркових значень $X' \approx N(\mu,\sigma^2)$ є добре відомим, тому сформулюємо задачу для багатомірних гаусових випадкових величин, які мають обмежене застосування в практичних додатках.

Визначимо щільність багатомірного нормального розподілу у вигляді наступного виразу:

$$P_n(\xi(t_1),\dots,\xi(t_n)) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n D}} exp[-\frac{1}{2\sigma^2 D}\sum_{\mu,v=1}^{n} D_{\mu v}(\xi_\mu - m)(\xi_v - m)], \quad (4.1)$$

де m - математичне сподівання, σ^2 - дисперсія, D - визначник *n*-го порядку, який включає в собі коефіцієнти кореляції $R_{\mu v}$.

Формування заданої послідовності $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ з нормальним багатомірним розподілом базується на представленні умовних розподілів випадкових величин. В цьому випадку для визначеної функції сумісного розподілу $F_n(\xi(t_1),\dots,\xi(t_n))$, розподіли випадкового процесу X генеруються як:

1. створюємо x_1 з функцією розподілу $F_1(\xi(t_1))$;
2. створюємо x_2 з функцією розподілу $F_2(|\xi(t_1))$;
3. створюємо x_3 з функцією розподілу $F_3(|\xi(t_1),\xi(t_2))$;

……

4. створюємо x_n з функцією розподілу $F_n(|\xi(t_1),\xi(t_2),\dots,\xi(t_{n-1}))$.

Оскільки матриця коваріації багатомірної гаусової послідовності Z є симетричною і позитивно визначеною, її можна розкласти в розклад Холецького

як $Z = CC^T$. Оскільки кореляційні функції R_{ij} є (i,j) елементом в матриці C, тоді дії для формування послідовностей $\vec{x} = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ з нормальним багатомірним розподілом запишуться як:

a) формуються одномірні незалежні і однаково розподілені випадкові величини $z_1, z_2, \ldots z_n$ з розподілом *N(a , σ);*

b) визначаються випадкові величини як:

$$x_i = m_i + \sum_{j=1}^{n} R_{ij} z_j \; i = 1,2,\ldots,n; \tag{4.2}$$

c) транспонується вектор послідовностей $\vec{x} = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}^T$.

На основі такого підходу буде продемонстровано отримання негаусової багатомірної послідовності із заданими статистично залежними властивостями вибіркових значень.

З врахуванням наведеного матеріалу, розглянемо підхід для генерування багатомірних корельованих негаусових випадкових величин, який базується на застосуванні бігаусових моделей [15], де в якості параметрів двох гаусових розподілів використовуються математичні сподівання, дисперсії та коефіцієнт пропорційності цих розподілів наступного виду:

$$p_1(x/a1, \sigma_1, \delta) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{-(x-a1)^2}{2\sigma_1^2}}, p_2(x/a2, \sigma_2, \delta) = \frac{1-\delta}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{-(x-a2)^2}{2\sigma_2^2}},$$

де $a1$, $a2$, σ_1, σ_2 - - математичні сподівання та дисперсії двох випадкових процесів відповідно, δ — коефіцієнт, значення якого змінюється від 0 до 1 і який характеризує частку випадкових величин відповідного розподілу у результуючий вибірці.

Таким чином, бігаусова модель випадкової негаусової послідовності запишеться як:

$$p(x/\vartheta) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{-(x-a1)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{1-\delta}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{-(x-a2)^2}{2\sigma_2^2}}. \tag{4.3}$$

Таким чином, змінюючи за певними правилами вище наведені параметри гаусових компонент, можна отримати негаусові вибіркові значення з заданими коефіцієнтами асиметрії і ексцесу. Правила знаходження параметрів гаусових складових визначаються наступною системою нелінійних рівнянь:

$$
\begin{aligned}
a &= \delta(a1 - a2) + a2, \\
\sigma &= \delta(1-\delta)(a1-a2)^2 + \delta(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + \sigma_2^2, \\
\gamma_3 &= \delta(1-\delta)(1-2\delta)(a1-a2)^3 + 3\delta(1-\delta)(a1-a2)(\sigma_1^2 - \sigma_2^2), \\
\gamma_4 &= \delta(1-\delta)(1-6\delta+6\delta^2)(a1-a2)^4 + 6\delta(1-\delta)(1-2\delta)(a1-a2)^2 * \\
&\quad * (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + 3\delta(1-\delta)(\sigma_1^2 - \sigma_2^2),
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

де a – математичне сподівання негаусового процесу, як правило a=0; σ - дисперсія негаусового процесу, як правило $\sigma = 1$; γ_3, γ_4 - задані коефіцієнти асиметрії і ексцесу результуючого негаусового процесу.

Даний підхід можна розповсюдити для отримання корельованих багатомірних негаусових випадкових послідовностей на основі застосування бігаусових моделей.

При розв'язанні системи рівнянь (4.4) визначаються параметри одномоментних гаусових розподілів $a1$, $a2$, і σ_1, σ_2, які за вище наведеним методом формують два гаусові кореляційні процеси з заданою кореляційною функцією $\mathrm{R_{ij}}$:

$$
P_{n1}(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n)) = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi\sigma_1^2)^n D}} exp[-\frac{1}{2\sigma_1^2 D}\sum_{\mu,v=1}^{n} D_{\mu v}(\xi_\mu - a1)(\xi_v - a1)],
$$

$$
P_{n2}(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n)) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma_2^2)^n D}} exp[-\frac{1-\delta}{2\sigma_2^2 D}\sum_{\mu,v=1}^{n} D_{\mu v}(\xi_\mu - a2)(\xi_v - a2),
$$

де D - визначник n-го порядку, що складений з коефіцієнтів кореляції, $D_{\mu v}$- алгебраїчне доповнення елемента $R_{\mathrm{i,j}}$ до визначника D.

На основі запропонованої бігаусової моделі формується результуюча модель корельованого негаусового процесу, як об'єднання двох корельованих гаусових в заданих пропорціях δ та $(1-\delta)$ відповідно:

$$P_n\big(\xi(t_1),\dots,\xi(t_n)\big)=\frac{\delta}{\sqrt{(2\pi\sigma_1^2)^n D}}exp[-\frac{1}{2\sigma_1^2 D}\sum_{\mu,v=1}^{n}D_{\mu v}\big(\xi_\mu-a1\big)(\xi_v-a1)]+$$

$$+\ \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma_2^2)^n D}}exp[\frac{1-\delta}{2\sigma_2^2 D}\sum_{\mu,v=1}^{n}D_{\mu v}(\xi_\mu-a2)(\xi_v-a2)].$$

На основі запропонованих нових моментно-кумулянтних моделей на основі статистик вищих порядків та поліноміальних методів виявлення сигналів, що приймається на фоні корельованих негаусових завад, проведено імітаційне моделювання. Результати моделювання демонструють ефективність отриманих результатів і наведені в.п.4.3.

На рисунку 4.7. представлені: графіки часової залежності корельованих негаусових асиметрично-ексцесних вибіркових значень при *n*=1000 з релеєвською щільністю розподілу для експоненційної досліджуваної кореляційної функції $\rho_\xi(\tau)=\sigma^2e^{-A|\tau|}$ з масштабуючим коефіцієнтом *A*=10; щільність розподілу корельованої вибірки (PDF); кореляційне поле, яке будується як набір координат (x_v, x_{v+1}) вибіркових значень; графік бокс-плот (*boxplot* - для наочного відображення статистичних характеристик вибірки, ідентифікації можливих викидів); теплова карти кореляції. При такому параметрі масштабуючого коефіцієнта *A*=10 спостерігається виродження вибіркових значень у некорельовані, тобто статистично незалежні вибірки, про що свідчить рівномірний розкид точок на площині такого кореляційного поля і теплова карта, для якої найбільша кореляційна залежність вибіркових значень спостерігаються тільки на головній діагоналі.

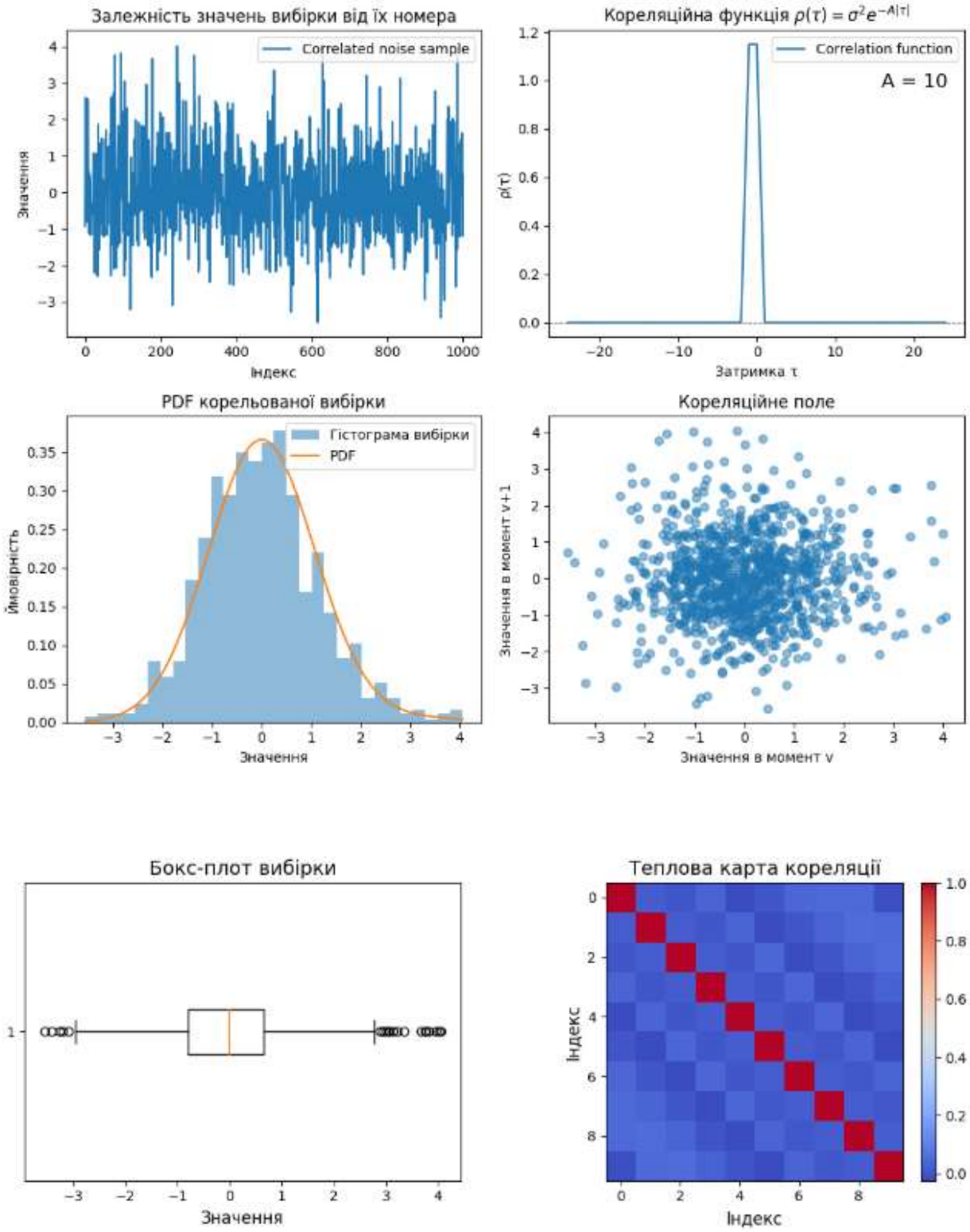


Рисунок 4.7 Представлення корельованих негаусових вибіркових значень, досліджуваної кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$, щільності розподілу корельованої вибірки (PDF), кореляційного поля, бокс-плот вибірки та теплової карти кореляції при n=1000, A=10.

При підсиленні кореляційних зв’язків (рисунок 4.8), коли масштабуючий коефіцієнт експоненційної кореляційної функції має мале значення, наприклад A=0.1, вибіркові значення стають менш хаотичними і кореляційне поле витягується вздовж діагоналі, а теплова карта кореляції характеризується певними залежностями вибіркових значень одне від одного, про що свідчить червоне розфарбування не лише вздовж головної діагоналі, а також поблизу такої діагоналі.

Аналогічні залежності можна спостерігати і для інших вибіркових значеннях, сформованих для різних кореляційних функцій, наприклад для $\rho_{\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}\left(cos\,\mathrm{B}\,\tau - \frac{A}{\mathrm{B}} sin\,\mathrm{B}\,|\tau|\right)$ (рисунок 4.9-4.11) при різних значеннях масштабуючих коефіцієнтів A і B. На рисунках представлені різні комбінації таких масштабуючих коефіцієнтів, наприклад, *A=10* і *B=0.1* (рисунок 4.9), що характеризує повільні осциляції і виродження кореляційних зв’язків, та *A=0.1* та *B=10* (рисунок 4.11), що характеризує високочастотні процеси.

На основі запропонованих генераторів корельованих негаусових вибіркових значень проведені дослідження по моделюванню ефективності розроблених поліноміальних РП, результати досліджень яких представлені в п.4.3.

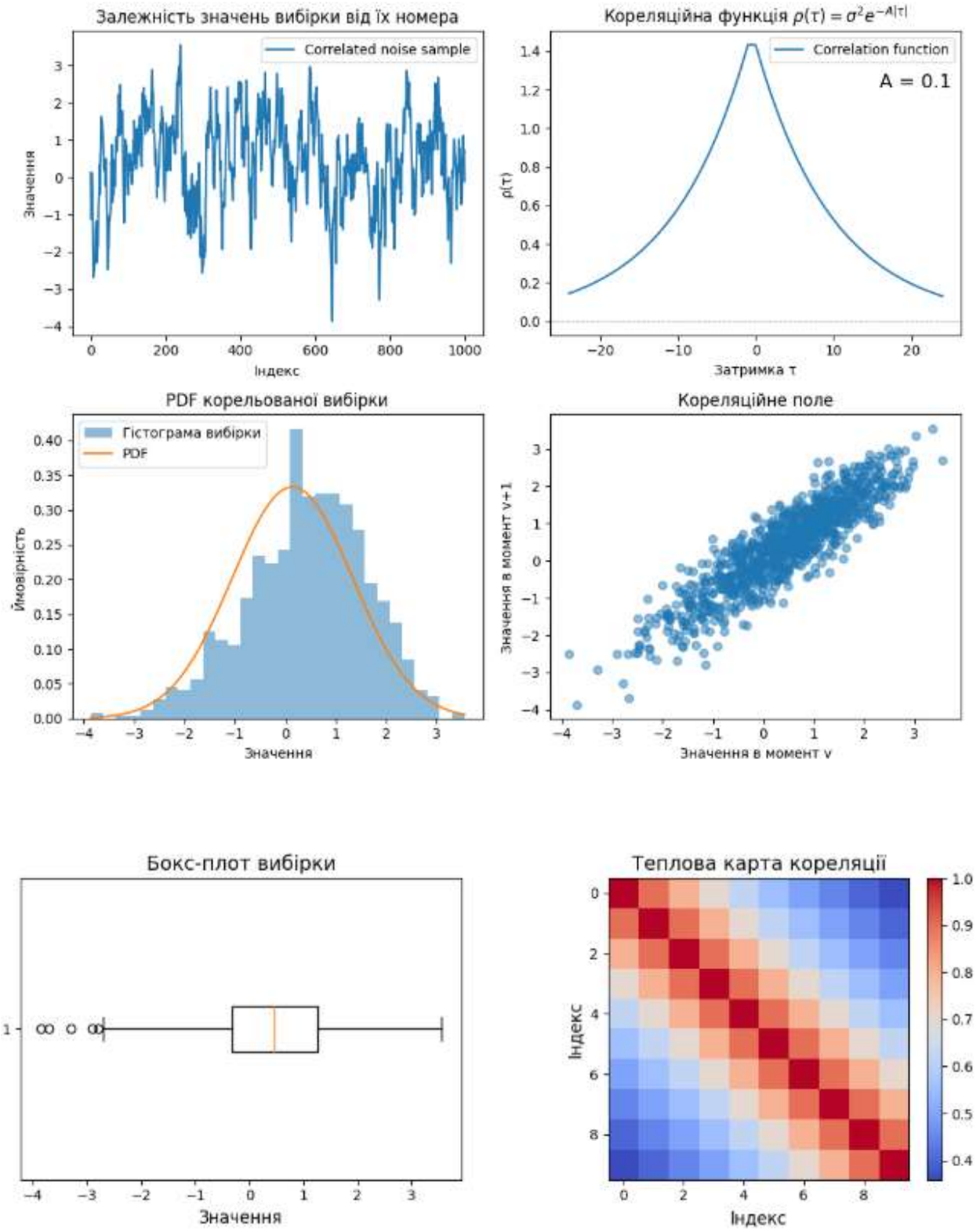


Рисунок 4.8 Представлення корельованих негаусових вибіркових значень, досліджуваної кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$, щільності розподілу корельованої вибірки (PDF), кореляційного поля, бокс-плот вибірки та теплової карти кореляції при n=1000, A=0.1.

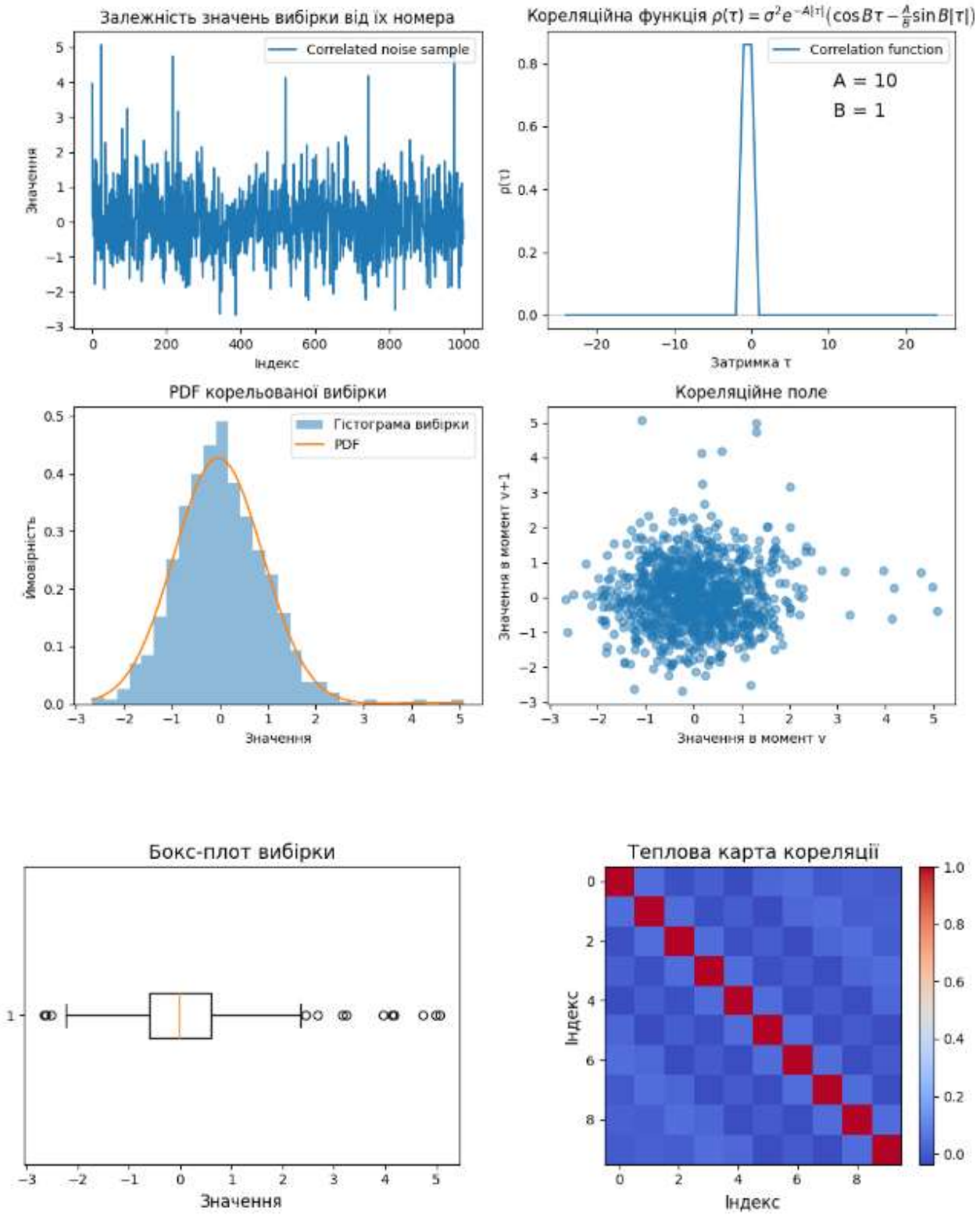


Рисунок 4.9 Представлення корельованих негаусових вибіркових значень, досліджуваної кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}\left(cos\,\mathrm{B}\,\tau - \frac{A}{\mathrm{B}} sin\,\mathrm{B}\,|\tau|\right)$, щільності розподілу корельованої вибірки (PDF), кореляційного поля, бокс-плот вибірки та теплової карти кореляції при n=1000, A=10, B=1.

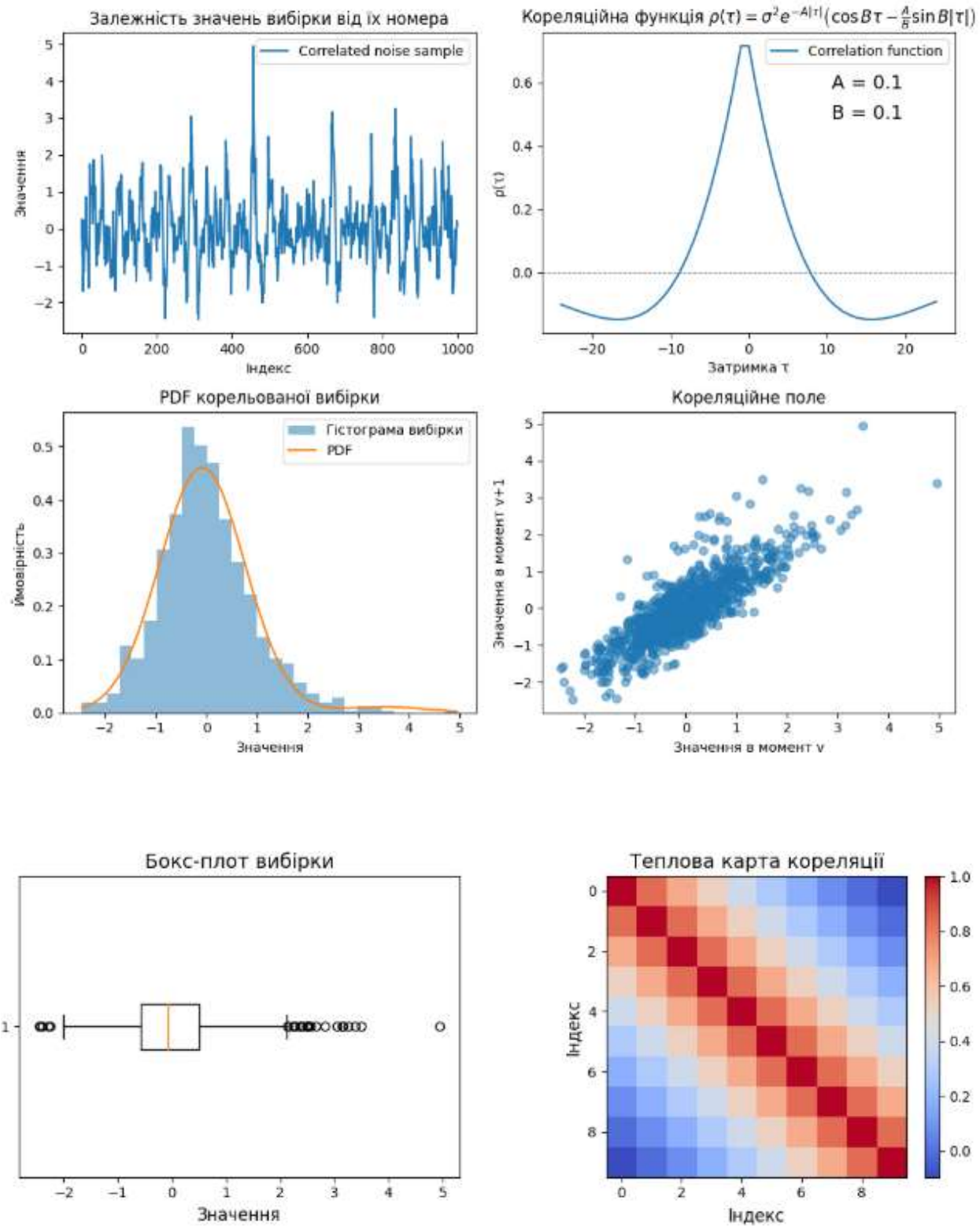


Рисунок 4.10 Представлення корельованих негаусових вибіркових значень, досліджуваної кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}\left(cos\,\mathrm{B}\,\tau - \frac{A}{\mathrm{B}} sin\,\mathrm{B}\,|\tau|\right)$, щільності розподілу корельованої вибірки (PDF), кореляційного поля, бокс-плот вибірки та теплової карти кореляції при n=1000, A=0.1, B=0.1.

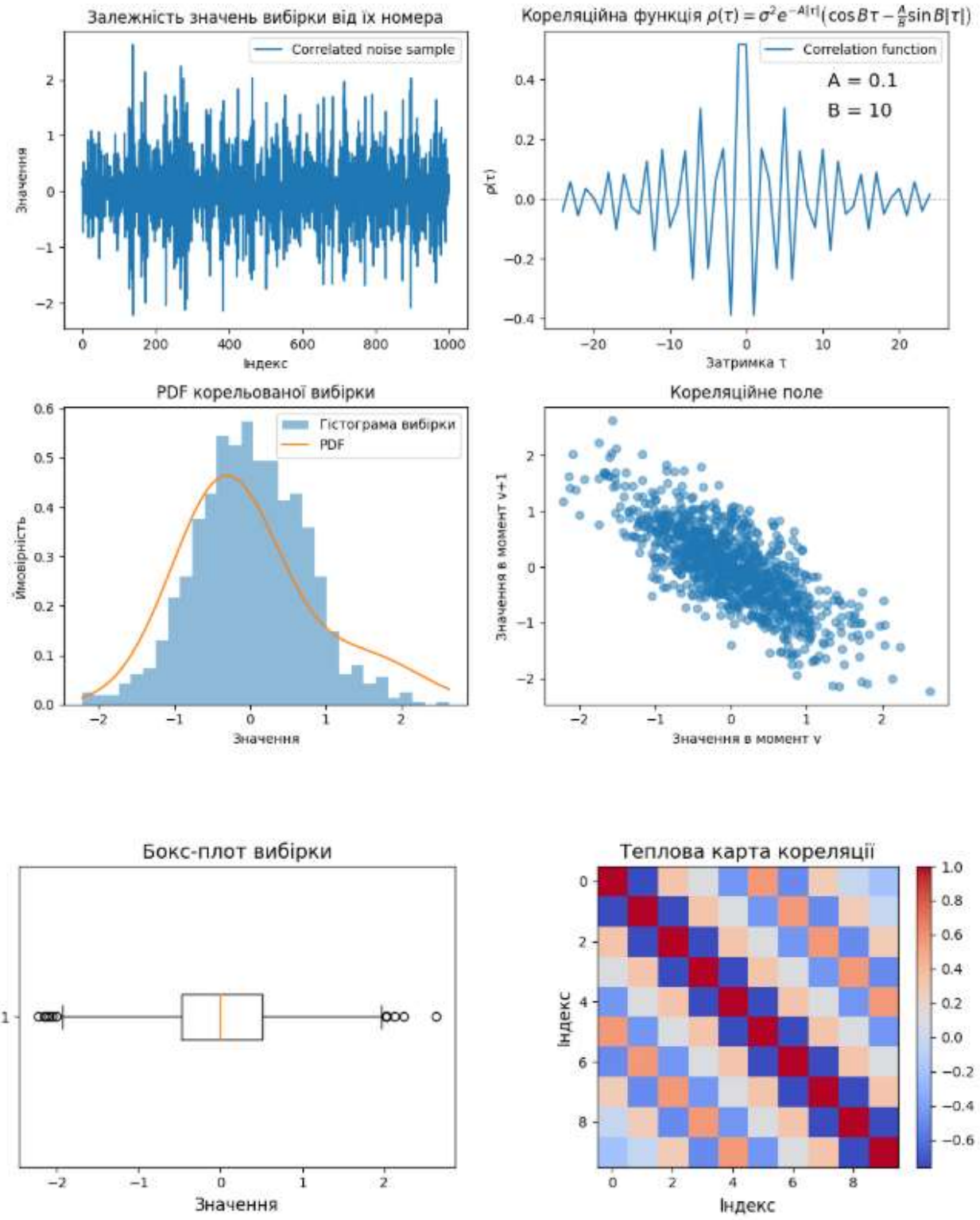


Рисунок 4.11 Представлення корельованих негаусових вибіркових значень, досліджуваної кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}\left(cos\,\mathrm{B}\,\tau - \frac{A}{\mathrm{B}} sin\,\mathrm{B}\,|\tau|\right)$, щільності розподілу корельованої вибірки (PDF), кореляційного поля, бокс-плот вибірки та теплової карти кореляції при n=1000, A=0.1, B=10.

4.3. Комп'ютерне моделювання поліноміальних алгоритмів виявлення постійних сигналів при адитивній взаємодії зі статистично залежними негусовими процесами

Комп'ютерне моделювання є важливим інструментом для вивчення складних процесів, зокрема у сфері статистичного виявлення сигналів. Це дозволяє відтворювати сценарії, які важко або неможливо змоделювати аналітично через складність взаємодії компонентів або невизначеність умов середовища. Використання імітаційного підходу забезпечує можливість тестування та верифікації математичних моделей у наближених до реальних умовах, що сприяє отриманню більш достовірних результатів.

Порівняння експериментальних даних з теоретичними розрахунками є ключовим етапом для перевірки валідності та адекватності розроблених моделей. Цей підхід дозволяє оцінити точність теоретичних висновків, виявити можливі розбіжності та внести необхідні корективи у модель.

Проведення імітаційних експериментів, таких як тестування розроблених поліноміальних алгоритмів виявлення сигналі на фоні корельованих негаусових завад є важливим етапом підтвердження отриманих теоретичних досліджень.

Для проведення комп'ютерного моделювання процесів виявлення постійного сигналу на фоні корельованих негаусових завад були сформовані послідовності таких сигналів при адитивній взаємодії із завадою, графічне представлення яких наведено на рисунку 4.12 при слабких кореляційних зв’язках (а, б – A=10) та сильних кореляційних зв’язках (в, г – A=0.1) для різних рівнів сигналу q=0.1, q=1 та експоненційній кореляційній функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$ для асиметричної негаусової завади з нульовим математичним сподіванням, одиничною дисперсією та з параметрами кумулянтних коефіцієнтів $\gamma_3 = 1.2, \gamma_4 = 0$.

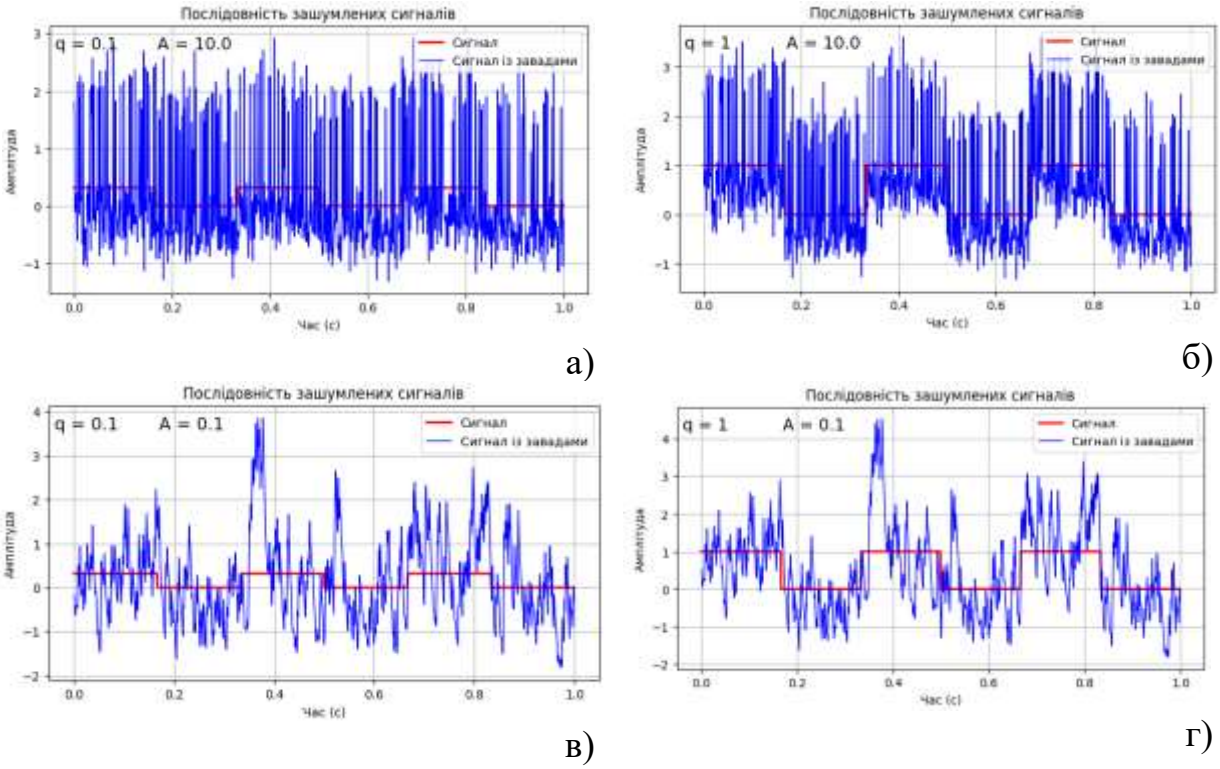


Рисунок 4.12. Часове представлення послідовності адитивної суміші постійних сигналів та корельованої негаусової завади: при слабких кореляційних зв'язках (а, б – A=10) та сильних кореляційних зв'язках (в, г – A=0.1) для різних рівнів сигналу q=0.1, q=1.

Комп'ютерне моделювання полягало у обробці послідовності таких зашумлених сигналів різними розробленими поліноміальними РП для аналізу якості їх роботи та виявлення хибних спрацювань для накопичення статистики для формування ймовірностей помилок першого та другого роду таких РП.

На рисунках 4.12-4.14 представлені результати обробки послідовностей постійного сигналу при адитивній взаємодії з негаусовою завадою при слабких кореляційних зв'язках (практично вироджених при такому масштабуючому коефіцієнті A=10) для експоненційної кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$ при $\gamma_3 = 1.2, \gamma_4 = 0$, q = 1, розмір ковзного вікна n=50, що відповідає кількості вибіркових значень для одночасної обробки РП. Як видно із отриманих графіків, лінійне РП при s=1 (рисунок 4.12) має деякі хибні результати щодо винесення рішення про реалізацію гіпотези H_0 чи H_1. Нелінійна обробка поліноміальних РП при s=2, коли *не враховуються статистичні зв'язки*

(рисунок 4.13), при таких рівнях відношення сигнал/шум усуває хибні рішення, так само як і нелінійне РП при *врахуванні кореляційних зв'язків* (рисунок 4.14).

Разом з тим відмітимо, що поява статистичних зв'язків у вибіркових значеннях погіршує роботу РП, про що було відмічено при теоретичних дослідженнях. Так, при збільшенні кореляційних зв'язків, коли A=0.5, лінійне РП при *s*=1 збільшує кількість хибних рішень відносно оригінальної послідовності постійних сигналів (рисунок 4.15). Так само погіршується робота і нелінійного РП при *s*=2, яке не розраховано на обробку корельованих процесів (рисунок 4.16). Але при застосуванні запропонованого в роботі спеціально для цих випадків нелінійного РП при *s*=2, яке розраховано на обробку корельованих негаусових вибіркових значень, результат суттєво покращується і хибні рішення про виявлення досліджуваного зашумленого постійного сигналу на цьому фрагменті досліджень відсутні (рисунок 4.17).

При зменшенні відношення сигнал/шум (параметр - q) частота помилкових рішень про прийняття відповідної гіпотези поліноміальними правилами збільшується, що є логічним наслідком для їх роботи. Але в цілому, спостерігається чітка тенденція покращення обробки вибіркових значень такими поліноміальними РП, які враховують тонку структуру негаусових вибіркових значень та їх статистичні зв'язки.

На основі проведених експериментів була зібрані статистичні дані щодо хибних рішень розглянутих поліноміальних РП при степені s=1 та s=2. На рисунку 4.18 наведено теоретичне відношення значень критеріїв якості $Ku_2\left(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}\right) / Ku_1\left(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}\right)$ при степенях поліноміальних РП s=2 та s=1 відповідно (синя крива) та експериментальні значення хибних рішень відповідних РП, що еквівалентно ймовірностям помилок РП (червона крапки), від значення коефіцієнта асиметрії негаусової завади gama3 (γ_3) для експоненціальної кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$ при A=0.5 і значенні відношення сигнал/шум q=0.1.

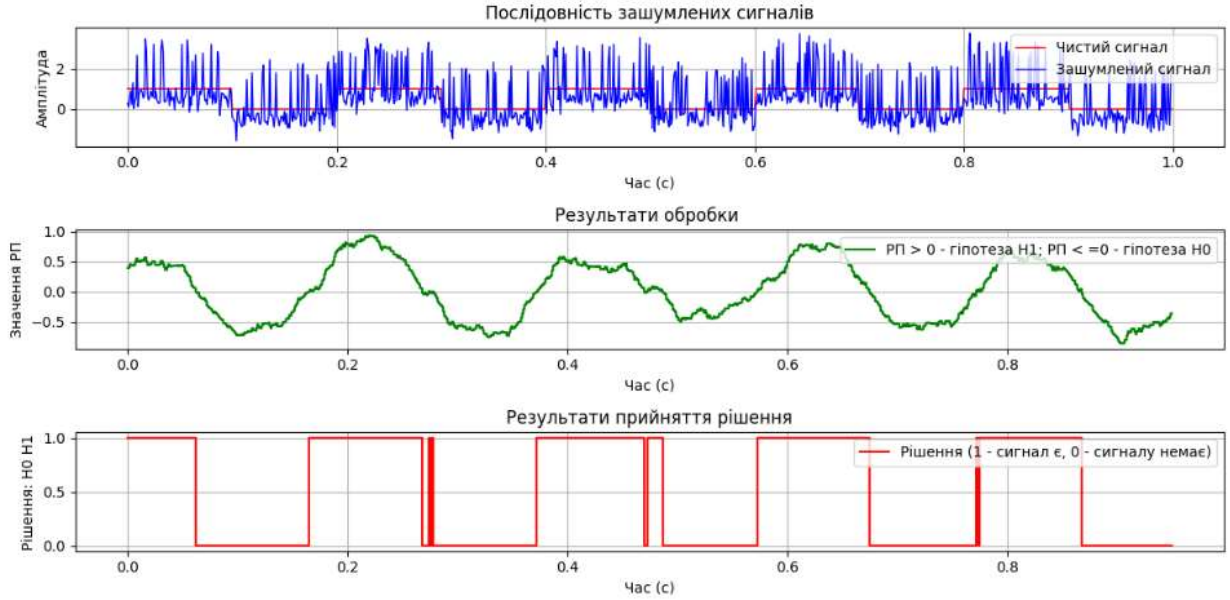


Рисунок 4.12. Часове представлення послідовності зашумлених постійних сигналів (зверху), результат обробки лінійним РП при степені поліному s=1 (посередині), прийняття рішення про реалізацію гіпотези H_0 чи H_1 (знизу) при $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$, $\gamma_3 = 1.2$, A=10, q = 1.

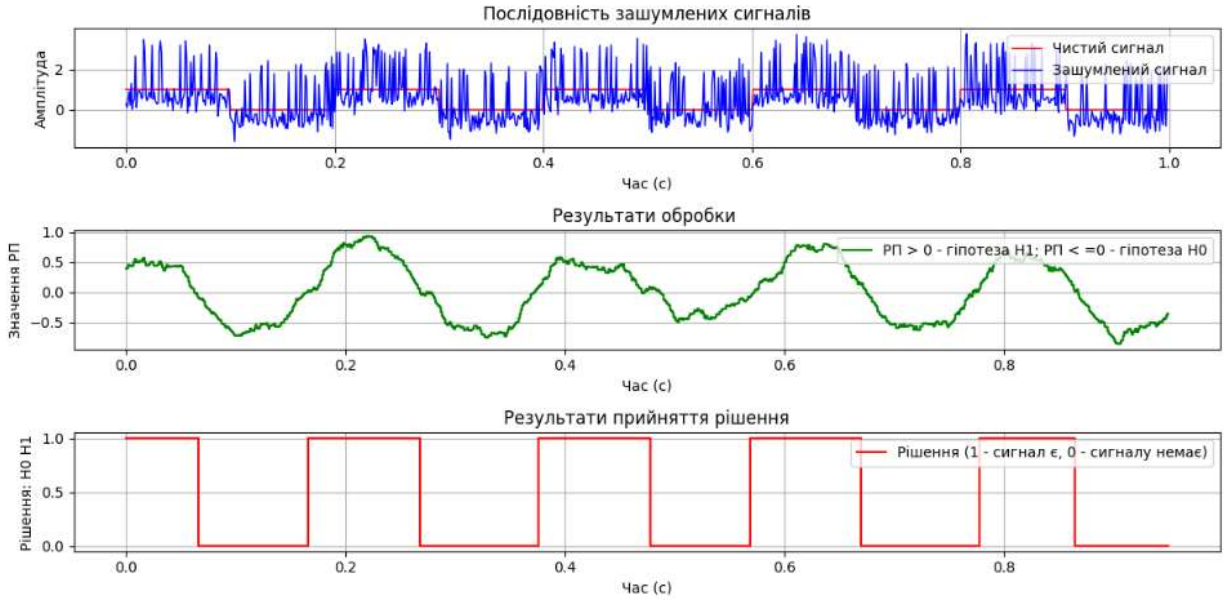


Рисунок 4.13. Часове представлення послідовності зашумлених постійних сигналів (зверху), результат обробки нелінійним (*без врахування кореляції*) РП при степені поліному s=2 (посередині), прийняття рішення про реалізацію гіпотези H_0 чи H_1 (знизу) при $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$, $\gamma_3 = 1.2$, A=10, q = 1.

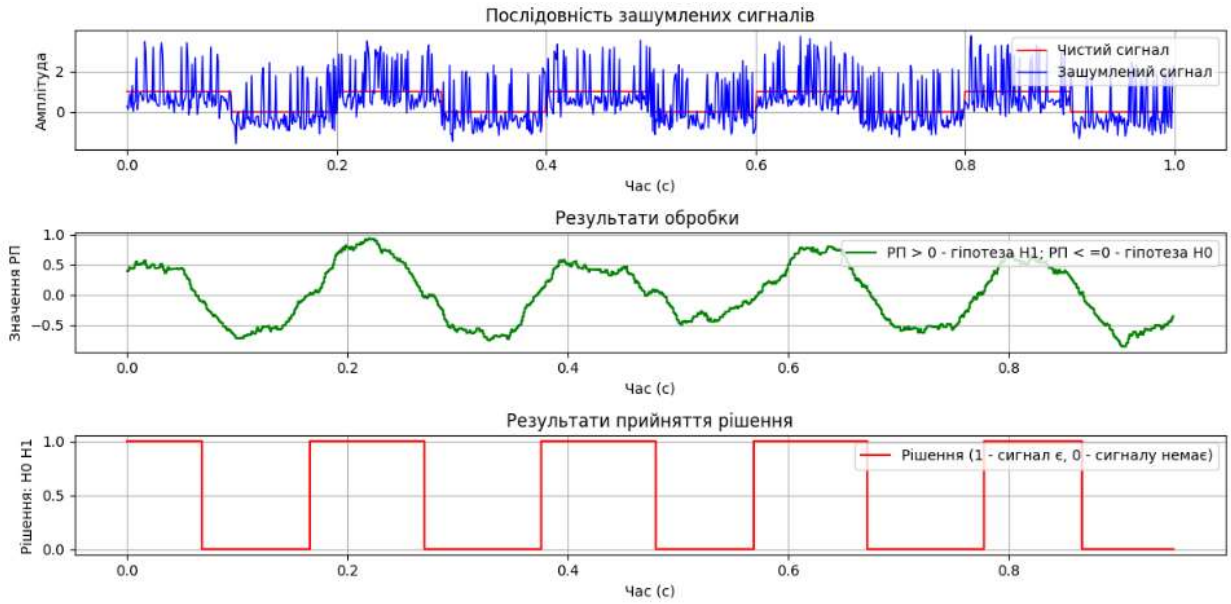


Рисунок 4.14. Часове представлення послідовності зашумлених постійних сигналів (зверху), результат обробки нелінійним (*з врахуванням кореляції*) РП при степені поліному *s*=2 (посередині), прийняття рішення про реалізацію гіпотези H_0 чи H_1 (знизу) при $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$, $\gamma_3 = 1.2$, A=10, q = 1.

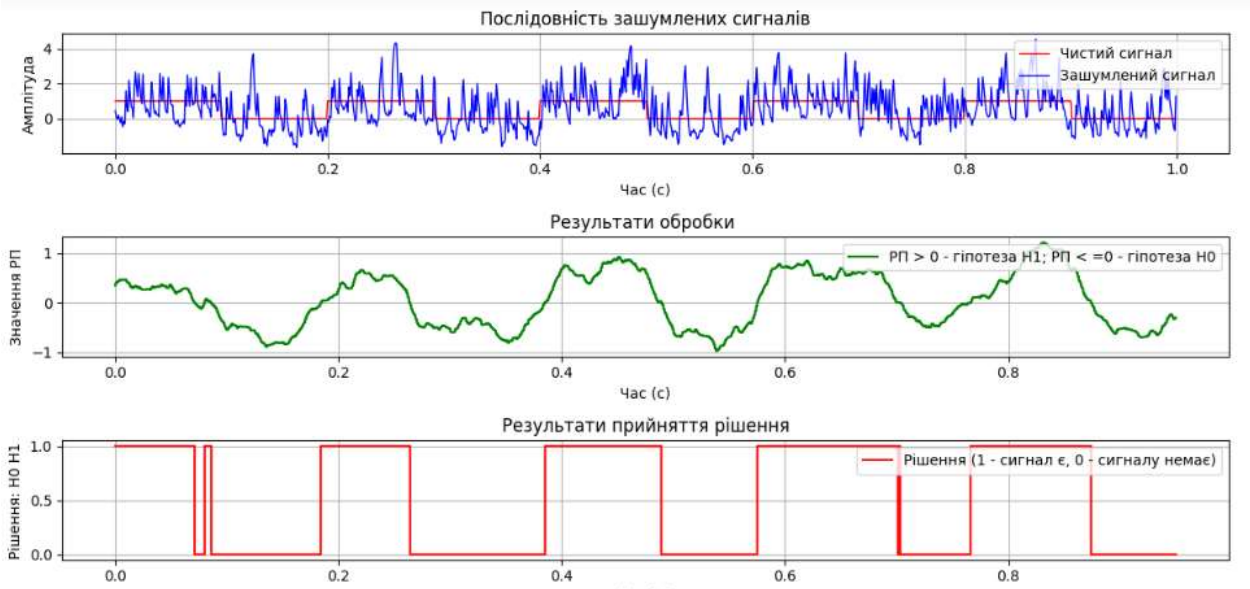


Рисунок 4.15. Часове представлення послідовності зашумлених постійних сигналів (зверху), результат обробки лінійним РП при степені поліному *s*=1 (посередині), прийняття рішення про реалізацію гіпотези H_0 чи H_1 (знизу) при $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$, $\gamma_3 = 0.8$, A=0.5, q = 1.

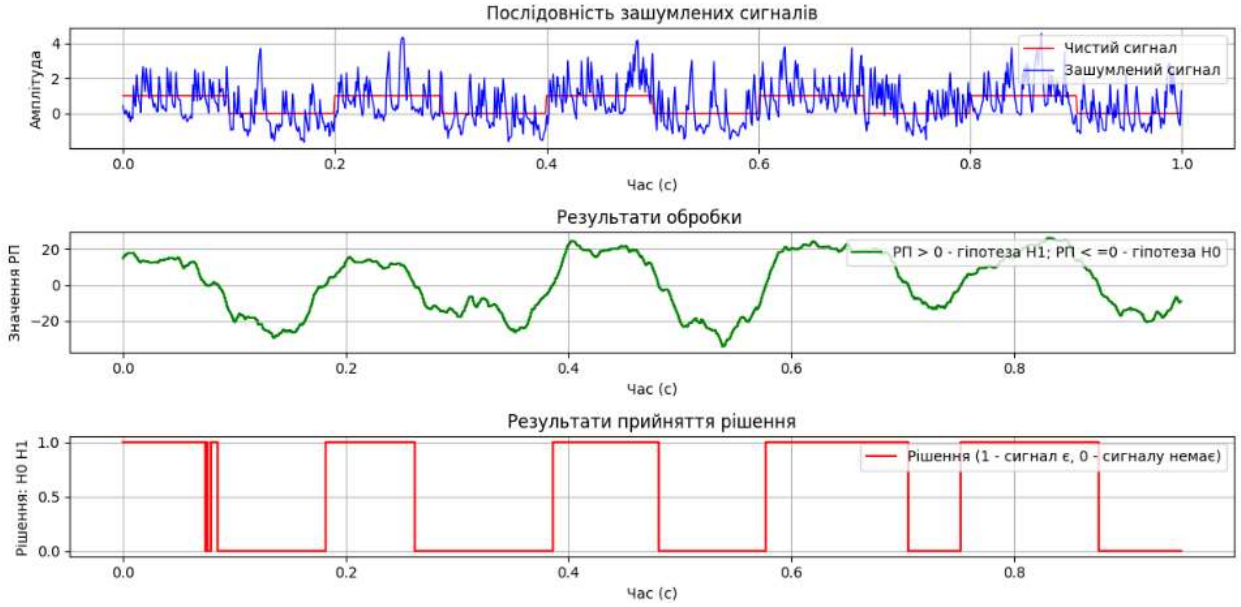


Рисунок 4.16. Часове представлення послідовності зашумлених постійних сигналів (зверху), результат обробки нелінійним (*без врахування кореляції*) РП при степені поліному *s*=2 (посередині), прийняття рішення про реалізацію гіпотези H_0 чи H_1 (знизу) при $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$, $\gamma_3 = 0.8$, A=0.5, q = 1.

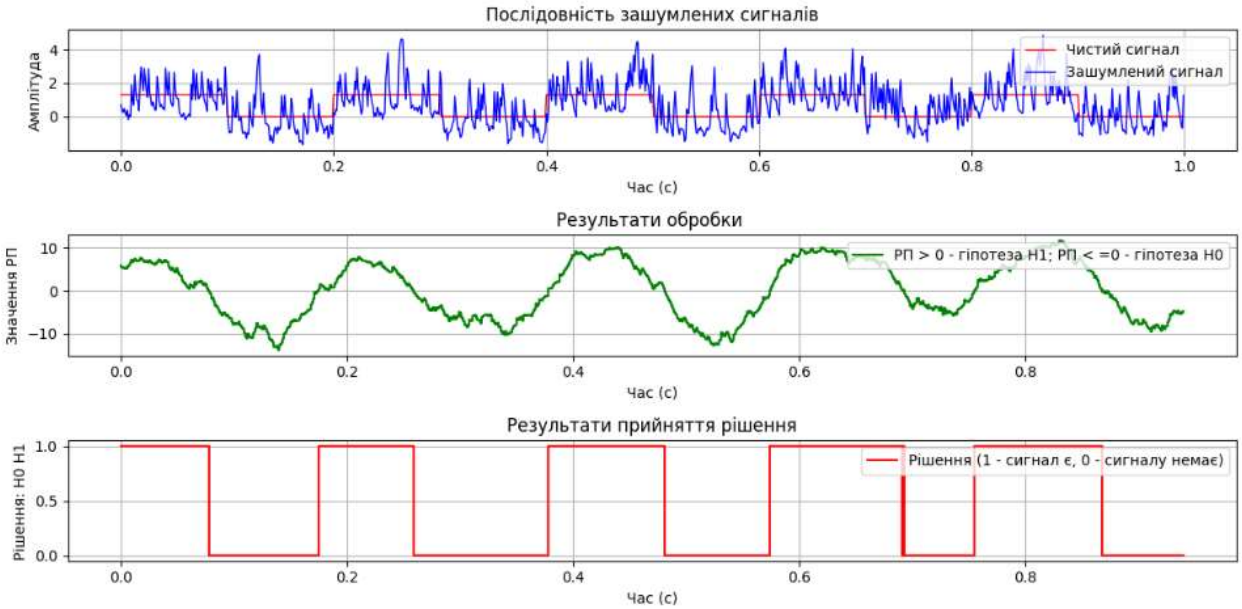


Рисунок 4.17. Часове представлення послідовності зашумлених постійних сигналів (зверху), результат обробки нелінійним (*з врахуванням кореляції*) РП при степені поліному *s*=2 (посередині), прийняття рішення про реалізацію гіпотези H_0 чи H_1 (знизу) при $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$, $\gamma_3 = 0.8$, A=0.5, q = 1.

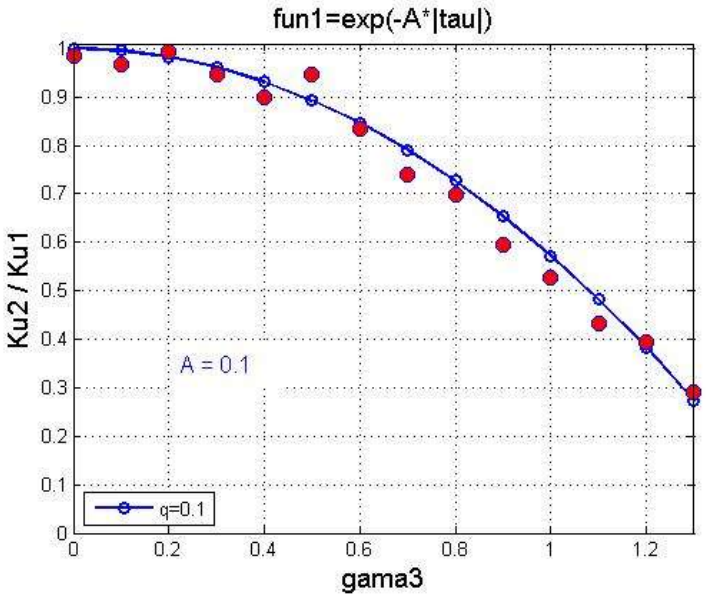


Рисунок 4.18. Залежність експериментальних значень відношення критеріїв якості Ku_2/Ku_1 при степені полінома РП s=2 та s=1 відповідно (червоні крапки) від коефіцієнта асиметрії негаусової завади gama3 у порівнянні з теоретичними дослідженнями (синя крива) для експоненціальної кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$ при A=0.1, значенні відношення сигнал/шум q=0.1.

Як видно з графіків, проведені експерименти демонструють високу збіжність з теоретичними дослідженнями, проведеними в роботі. Таким чином можна зробити висновок про підтвердження теоретичних досліджень експериментальними даними, отриманими при комп'ютерному моделюванні процесів виявлення постійних сигналів поліноміальними РП на фоні корельованих негаусових завад.

4.4. Практична реалізація поліноміальної системи виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових процесів

На основі розроблених моментно-кумулянтних моделей корельованих негаусових процесів та синтезованих алгоритмів поліноміальної обробки вибіркових значень, оптимальних за модифікованим критерієм якості прийняття рішень, наведена узагальнена структурна схема алгоритмів

виявлення постійних (повністю відомих) сигналів з використанням поліноміальних РП при різних степенях *i* стохастичних поліномів (рисунок 4.19).

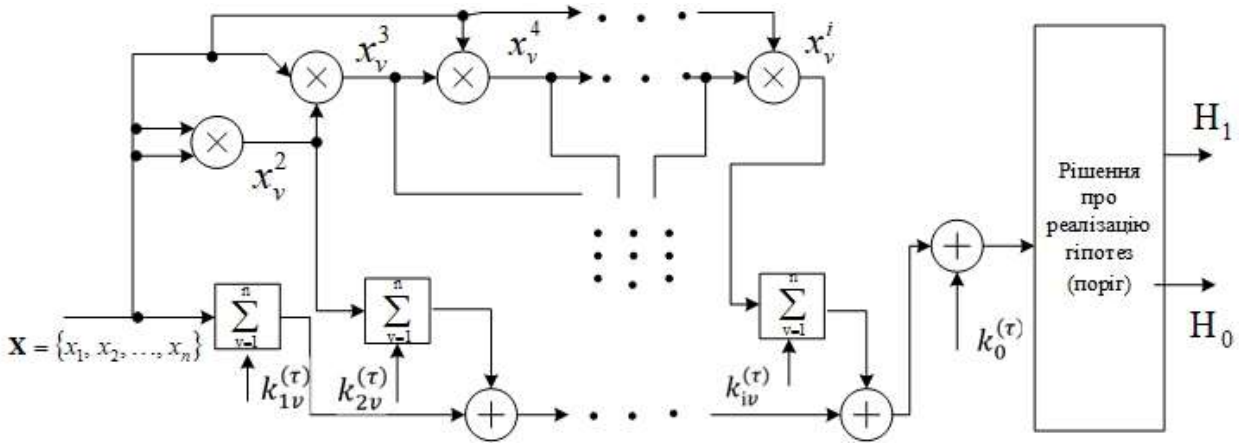


Рисунок 4.19. Узагальнена структурна схема поліноміальних розв'язувальних правил виявлення постійних сигналів на фоні завад

Структурна схема складається із послідовних степеневих блоків перетворення, де у кожному блоці вибіркові значення сигналу підносяться до певного степеня та множаться на відповідні коефіцієнти $k_1^{(\tau)}$ та $k_2^{(\tau)}$ РП. Після множення результати накопичуються, створюючи вихідні значення для кожного блоку.

Отримані результати із усіх степеневих блоків додаються загальним чином, після чого додається пороговий коефіцієнт $k_0^{(\tau)}$. Сумарне значення передається на пристрій прийняття рішень, який перевіряє отриманий результат з пороговим значенням і виноситься рішення про виконання відповідної гіпотези: сигнал виявлено (реалізувалася гіпотеза H_1) або сигнал не виявлено (реалізувалася гіпотеза H_0).

Структура цієї схеми є загальною та універсальною, оскільки вона не залежить від конкретного виду завад, як гаусових, так і негаусових, а також від обраного моментного критерію якості. При зміні критерію якості або

параметрів корельованої негаусової завади, таких як коефіцієнти асиметрії чи ексцесу, параметрів кореляції, структурна схеми і порядок обчислень залишаються незмінними, змінюються лише значення знайдених коефіцієнтів, що значно спрощує її адаптацію до конкретних умов обробки сигналів.

В роботі розглянуто синтез поліноміального РП до максимальної степені полінома s=3. У той же час, подальше збільшення степеня стохастичного полінома для нелінійної обробки потребує пошуку компромісу між збільшенням точності обробки та ускладненням практичної реалізації. Це обумовлено ускладненням алгоритму обробки вибіркових значень, звуженням області допустимих значень для параметрів негаусових випадкових величин.

Практична реалізація даної структури не представляється складним і може бути реалізована програмним чи апаратним чином на сучасній елементній базі. Для реалізації нелінійних операцій та обробки вибіркових значень доцільно використовувати сучасні програмно-апаратні платформи, такі як:

- FPGA (Field-Programmable Gate Array), які дозволяють реалізувати паралельну обробку даних та виконання арифметичних операцій з високою швидкістю, що є ключовим у реальному часі;
- DSP-процесори (Digital Signal Processors) - спеціалізовані процесори для обробки сигналів, здатні виконувати складні математичні операції, такі як піднесення до степеня, множення та сумування.

Арифметичні блоки можна реалізувати за допомогою апаратних множників та суматорів. Сучасні FPGA та DSP-процесори мають вбудовані блоки для швидкого множення та накопичення. Для підвищення швидкодії кожен степеневий блок можна обробляти паралельно, що суттєво скоротить час обробки. Для оптимізованої роботи РП значення коефіцієнтів можуть бути заздалегідь розраховані та збережені у пам’яті для швидкого доступу під час обчислень.

Порогові значення $k_0^{(\tau)}$ можна зберігати у швидкій пам’яті або регістрах процесора. Порівняння отриманих результатів із порогом можна реалізувати

на програмному рівні або апаратно за допомогою компараторів. За даною структурою для поліноміальних РП забезпечується гнучка можливість динамічної зміни порогу залежно від критерію якості або параметрів сигналу.

У випадку обробки великих обсягів даних доцільно використовувати паралельне обчислення із розподілом завдань між кількома блоками або ядрами процесора. Для цього можна застосувати багатоядерні процесори або графічні процесори (GPU). Окрім цього, можлива паралельна обробка в FPGA, де кожен степеневий блок працює незалежно.

Верифікація та тестування працездатності схеми проводилася на основі розробленого програмного комплексу в середовищі MATLAB/ Simulink та отримані експериментальні дані порівнювалися з теоретичними значеннями.

Таким чином, синтезована структурна схема є ефективним та універсальним рішенням для задач виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад.

4.5. Висновки до 4 розділу

В даному розділі дисертаційної роботи продемонстровано застосування комп’ютерного моделювання процесів виявлення постійних сигналів на фоні корельованих негаусових завад. Розроблений програмний комплекс, який дозволяє на основі запропонованих моделей для генерування бігаусових корельованих процесів із заданими характеристиками, провести експериментальні дослідження щодо ефективності синтезованих поліноміальних РП.

Проведені експерименти підтвердили теоретичні положення, викладені в роботі, зокрема щодо розробки нових моментно-кумулянтних моделей на основі статистик вищих порядків та застосуванні сумісних моментів та кумулянтів для врахування статистичних зв’язків, та побудови поліноміальних РП, оптимальних за модифікованим моментним критерієм якості перевірки статистичних гіпотез. Синтезовані нелінійні РП

продемонстрували суттєве зниження ймовірностей помилок першого та другого роду при обробці випадкових сигналів на фоні корельованих негаусових завад. Запропоновані нелінійні РП показали свою високу ефективність і при дії випадкових процесів із сильними статистичним зв'язками, при яких традиційні рішення без врахування кореляційних зв'язків суттєво знижують свою ефективність і збільшують ймовірності помилок першого та другого роду таким РП.

Як показують результати експериментів, чисельна ефективність статистичної обробки сигналів на фоні завад залежить не лише від степені стохастичного полінома РП, але і від багатьох факторів, таких як відношення сигнал/шум (q), кореляційних функцій та їх масштабучих коефіцієнтів (A, B), значень коефіцієнтів асиметрії (γ_3) та ексцесу (γ_4). Наприклад, при адитивній взаємодії корисного сигналу з асиметричною негаусовою завадою, яка характеризується сильним експоненційним кореляційним зв'язком з масштабуючим коефіцієнтом A=0.1 (рис.4.18) при значенні коефіцієнта асиметрії gama3=1.1 і відношенні сигнал/шум q=0.1 експериментальне значення відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез при різних степенях полінома РП дорівнює 0.5. Таке значення свідчить про те, що ймовірності помилок першого та другого роду синтезованого нелінійного РП при степені полінома s=2 будуть вдвічі менші за аналогічний показник для лінійного РП при s=1, яке є оптимальним для гаусової моделі завад.

Таким чином, за результатами проведених експериментальних досліджень можна зробити висновки, що врахування параметрів, що описуються негаусовий розподіл досліджуваного випадкового процесу на прикладі коефіцієнта асиметрії, збільшує у двічі ефективність РП у порівнянні з поширеними і добре відомими лінійними моделями РП, оптимальними для гаусових щільностей розподілу досліджуваних процесів.

Таким чином, отримані в даному розділі експериментальні результати підтверджують достовірність отриманих теоретичних висновків про ефективність статистичної обробки досліджуваних процесів синтезованими

нелінійними поліноміальними алгоритмами виявлення постійних (повністю відомих) сигналів на фоні корельованих негаусових завад у порівнянні з добре відомими лінійними алгоритмами, які є оптимальними для гаусових моделей випадкових процесів.

Список використаних джерел до розділу 4

1. Яновський Ф.Й. Радіолокаційні системи повітряних суден: підруч. / Ф.Й.Яновський. - К. : НАУ, 2012. - 688 с.
2. Свид І.В. Обробка радіолокаційної інформації систем спостереження повітряного простору: монографія. / І. В. Свид. Дніпро : ЛІРА ЛТД, 2022. 224с.
3. Ніколаєнко Б.А., Пелешок Є.В. Сучасні супутникові системи зв’язку: навч. посібник. К.: ІСЗЗІ КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 146 с.
4. Van Trees, H., Bell, K., Tiany, Z.: Detection Estimation and Modulation Theory. Wiley; 2nd edition, New Jersey (2013).
5. Kay S.M.: Fundamentals of Statistical Signal Processing. Prentice Hall PTR, NJ (2008).
6. Hautus, M.J., Macmillan, N.A., & Creelman, C.D.: Detection Theory: A User's Guide (3rd ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003203636 , 2021 (2021)
7. Kassam S. Signal Detection in Non-Gaussian Noise. Springer Verlag, New York (2011).
8. D.Middleton: Non-Gaussian Statistical Communication Theory, a Jonn Willey & Sons, 2012.
9. Kunchenko Y. Polynomial Parameter Estimations of Close to Gaussian Random Variables. Shaker Verlag, Aachen (2002).
10. Korzhenkov A., & Kuznetsov D. (2015). Application of Third-Order Cumulants for Signal Processing in Non-Gaussian Noise Conditions. *Metallurgical and Mining Industry*, 7(3), 45-52.
11. Jwo D.-J. (2024). A Cumulant-Based Method for Acquiring GNSS Signals. *Sensors*, 24(19), 6234. https://doi.org/10.3390/s24196234.

12. Huang C., & Wang Z. (2022). Blind Two Complex Signals Separation Method Based on Fourth Order Cumulants. *IEEE Access*, 10, 112345-112358. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2022.3149387.
13. Meng X., & Zhang, Y. (2023). Adaptive Time Delay Estimation Using Fourth-Order Cumulants for Non-Gaussian Environments. *Springer Signal Processing*, 185, 1-15. https://doi.org/10.1007/s11049-023-09678-1.
14. Wei T., & Chen J. (2019). Harmonic Retrieval Using High-Order Cumulants Under Correlated Noise. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 67(10), 2658
15. Кунченко Ю.П. Генерація псевдовипадкових послідовностей на основі бігаусового розподілу / Ю.П. Кунченко, С.В. Заболотній, О.С. Гавриш, А.Ю. Іванченко // Комп'ютерні технології друкарства. – Львів, 2000. — №4. — С. 343 — 351
16. Jiang Y., Zhang L., and Liu W. Simulation of Non-Gaussian Stochastic Processes by Amplitude Modulation of Gaussian Processes. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 62, no. 7, pp. 1755–1768, Apr. 2014. DOI: 10.1109/TSP.2014.2308086.
17. Davies R., Random Variate Generation: Methods and Applications, 2nd ed. New York, NY, USA: Springer, (2012).
18. Wang M. and Chen K. Non-Gaussian Random Processes: Theory and Applications in Simulation and Analysis. in Proceedings of the 10th International Conference on Signal Processing and Communication Systems (ICSPCS), 2017, pp. 15–20. DOI: 10.1109/ICSPCS.2017.8270304.
19. Taniguchi T. and Amari S. Modern Techniques for Non-Gaussian Signal Processing. IEEE Signal Processing Magazine, vol. 25, no. 6, pp. 22–32, Nov. 2015. DOI: 10.1109/MSP.2015.2476625.
20. Stoica P. and Moses R. Spectral Analysis of Signals, Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, (2005).

ВИСНОВКИ

У дисертаційному дослідженні вирішено актуальне науково-прикладне завдання розробки та реалізації моделей процесів виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад на основі статистик вищих порядків для моментно-кумулянтного представлення випадкових процесів з формуванням модифікованого моментного критерію якості перевірки статистичних гіпотез і розробки поліноміальних розв'язувальних правил для побудови ефективних методів і комп'ютерних засобів функціонування систем обробки даних відповідного класу. У тому числі отримано такі теоретичні та практичні результати:

1. На основі аналізу задач вдосконалення методів обробки сигналів на фоні корельованих негаусових завад для автоматизованих систем спостереження, управління, контролю обґрунтовано підхід по створенню методів та комп'ютеризованих засобів математичного моделювання процесів виявлення сигналів, що базується на застосуванні моментно-кумулянтного представлення випадкових величин та моментного критерію якості для розв'язання задач виявлення сигналів та створення алгоритмічних основ процесів моделювання і побудови програмних засобів їх реалізації.

2. Розроблені математичні моделі корельованих негаусових асиметричних, ексцесних та асиметрично-ексцесних випадкових величин на основі статистик вищих порядків, що описують адитивну взаємодію сигналів і завад на основі одновимірного та двовимірного моментно-кумулянтного представлення досліджуваних процесів, що надало можливість не тільки описати негаусові характеристики досліджуваних випадкових процесів, але і їх статистичні зв'язки та розширити спектр розв'язуваних задач виявлення сигналів на фоні завад.

3. Запропонована модифікація моментного критерію якості верхньої границі ймовірностей помилок перевірки статистичних гіпотез із врахуванням сумісних моментів та кумулянтів вищих порядків, що дозволило створити основи для побудови поліноміального методу виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад.

4. Розроблений метод побудови поліноміальних стохастичних розв'язувальних правил виявлення постійних сигналів на фоні корельованих негаусових асиметричних, ексцесних та асиметрично-ексцесних завад, оптимальних за модифікованим моментним критерієм якості перевірки статистичних гіпотез, що дозволило підвищити точність виявлення сигналів на фоні завад в системах контролю, діагностики та моніторингу у порівнянні з відомими результатами.

В роботі показано, що чисельна ефективність синтезованих стохастичних поліноміальних алгоритмів статистичної обробки сигналів на фоні завад залежить не лише від степені стохастичного полінома РП, але і від багатьох факторів, таких як відношення сигнал/шум (q), виду кореляційних функцій та їх масштабучих коефіцієнтів (A, B), значень коефіцієнтів асиметрії (γ_3) та ексцесу (γ_4). Наприклад, при адитивній взаємодії постійного сигналу з асиметричною негаусовою завадою, яка характеризується сильними експоненційними кореляційними зв’язками вибіркових значень з масштабуючим коефіцієнтом A=0.1, при значенні коефіцієнта асиметрії $\gamma_3 = 1.1$ і відношенні сигнал/шум q=0.1 відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез при різних степенях полінома РП дорівнює 0.5, що свідчить про те, що ймовірності помилок першого та другого роду синтезованого нелінійного РП при степені полінома s=2 будуть вдвічі менші за аналогічний показник для лінійного РП при s=1, яке є оптимальним для гаусової моделі завад.

5. Розроблено програмний комплекс та набір програмних модулів для забезпечення проведення комп'ютерного моделювання процесів виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад.

Запропоновано метод генерації корельованих негаусових випадкових величин на основі полігаусових моделей та застосуванні сумісних моментів та кумулянтів для представлення статистичних зв’язків досліджуваних процесів, що дозволило провести аналіз впливу параметрів кореляції та статистик вищих порядків на точність поліноміальної обробки сигналів на фоні завад.

Проведені експерименти підтвердили теоретичні положення, викладені в роботі, зокрема щодо ефективності запропонованих нових моментно-кумулянтних моделей на основі статистик вищих порядків та застосуванні сумісних моментів та кумулянтів для врахування статистичних зв’язків, та синтезованих стохастичних нелінійних РП, оптимальних за модифікованим моментним критерієм якості перевірки статистичних гіпотез.

Практична реалізація поліноміальних алгоритмів не викликає труднощів і може бути реалізована програмним чи апаратним чином на сучасній елементній базі.

.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Довідка про впровадження результатів роботи

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Ректор
Черкаського державного
технологічного університету
Олег ГРИГОРЯК

«10» 2025 р.

ДОВІДКА
про впровадження в навчальний процес
результатів дисертаційної роботи СМІРНОВА Даніїла Олексійовича

У дисертаційному дослідженні Смірнова Д.О. вирішено актуальне науково-прикладне завдання розробки та реалізації моделей процесів виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад на основі статистик вищих порядків для моментно-кумулянтного представлення випадкових процесів з формуванням модифікованого моментного критерію якості перевірки статистичних гіпотез і розробки поліноміальних розв'язувальних правил для побудови ефективних методів і комп'ютерних засобів функціонування систем обробки даних відповідного класу.

Основні результати дисертаційної роботи застосовуються при викладанні спеціалізованого курсу на кафедрі робототехнічних і телекомунікаційних систем та кібербезпеки «Нелінійні методи обробки сигналів» для студентів освітнього ступеня магістр спеціальності 172 «Електронні комунікації та радіотехніка» в Черкаському державному технологічному університеті.

До розроблено лекційного курсу включено такі результати, отримані автором:

1. Математичні моделі корельованих негаусових випадкових величин різних типів та видів, що описують адитивну взаємодію сигналів і завад на основі одновимірного та двовимірного моментно-кумулянтного представлення досліджуваних процесів, що дозволило розширити спектр розв'язуваних задач та модифікувати моментний критерій якості перевірки статистичних гіпотез для побудови поліноміальних розв'язувальних правил виявлення сигналів в складних завадових умовах.
2. Запропонована структурна схема поліноміальної системи обробки досліджуваного корельованого негаусового процесу та методи її реалізації, що дозволяє модернізувати існуючі системи контролю, діагностики, моніторингу з кращими точністними характеристиками.

Результати наукового дослідження були використані в підготовці методичних вказівок до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Нелінійні методи обробки сигналів» для студентів освітнього ступеня магістр спеціальності 172 «Електронні комунікації та радіотехніка» усіх форм навчання [Електронний ресурс] / [упоряд. В.В.Палагін, Д.О.Смірнов]; – ; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси : ЧДТУ, РВЦ, 2024. – с. 50 - Назва з титульного екрана.

Виконання лабораторних робіт знайомить з новими методами та алгоритмами опрацювання сигналів. Розроблено програмний комплекс та набір програмних модулів для забезпечення проведення комп'ютерного моделювання процесів виявлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад.

Декан факультету
електронних технологій, автотранспорту
та машинобудування
к.т.н., доцент Андрій ЧОРНИЙ

Завідувач кафедри робототехнічних і
телекомунікаційних систем та кібербезпеки,
д.т.н., професор Володимир ПАЛАГІН

ДОДАТОК Б

Список опублікованих праць за темою дисертації:

– статті у наукових фахових виданнях України, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. В.В.Палагін., Д.О.Смірнов. Статистики вищих порядків в задачах вивлення сигналів на фоні корельованих негаусових завад// Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць – Кам.-Подільський: Кам.-Подільський нац. ун-т ім. Івана Огієнка, 2024. – Вип. 22. – С. 106-118. DOI: https://doi.org/10.32626/2308-5916.2024-26.19-42 URL: http://mcm-tech.kpnu.edu.ua/article/view/316544/310180. ISSN 2308-5916. Фахове видання категорії Б (включене до Index Copernicus, WorldCat, Citefactor, Google Академія, Crossref, OpenAIRE, Наукова періодика України).

   Особистий внесок автора полягає у побудові методів поліноміального виявлення сигналів на фоні корельованих асиметрично-ексцесних негаусових завад та проведенні комп'ютерного моделювання результатів дослідження, становить 0,3 друк. арк

2. В.В.Палагін, Д.О.Смірнов. Моделі та методи обробки сигналів на фоні корельованих асиметричних процесів // Інформатика та математичні методи в моделюванні, Національний університет «Одеська політехніка, Vol. 14 (2024), No. 1-2, pp. 56-69. DOI: https://doi.org/10.15276/imms.v14.no1-2.56 URL: http://immm.op.edu.ua/files/archive/n1-2_v14_2024/immm_n1-2_v14_2024.pdf. ISSN: 2223-5744. Фахове видання категорії Б (включене до Index Copernicus, Google Академія, Наукова періодика України).

Особистий внесок автора полягає у у формуванні математичних моделей та їх реалізації при побудові методів виявлення сигналів на фоні корельованих асиметричних негаусових завад та становить 0,3 друк. арк.

3. Д.О.Смірнов, Д.А.Ведерников, О.А.Палагіна, В.В.Палагін. Методи статистичного оцінювання параметрів сигналу на фоні негаусових корельованих завад. // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць – Кам.-Подільський: Кам.-Подільський нац. ун-т ім. Івана Огієнка, 2021. – Вип. 22. – С. 106-118. DOI: https://doi.org/10.32626/2308-5916.2021-22.106-118 URL: http://mcm-tech.kpnu.edu.ua/article/view/251088. ISSN 2308-5916. Фахове видання категорії Б (включене до Index Copernicus, WorldCat, Citefactor, Google Академія, Crossref, OpenAIRE, Наукова періодика України).

   Особистий внесок автора полягає у формування математичних моделей двовимірних кореляційних функцій для опису випадкових корельованих негаусових процесів та становить 0,3 друк. арк.

   – статті у іноземних виданнях, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

4. D.Smirnov, E.Palahina, V.Palahin. Mathematical Modeling of Signal Detection in Non-Gaussian Correlated Noise // International Conference on Smart Technologies in Urban Engineering - Proceedings of STUE-2022, Lecture Notes in Networks and Systems - LNNS, volume 536, pp.65-74, DOI:https://doi.org/10.1007/978-3-031-20141-7, URL: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-031-20141-7, ISSN 2367-3370. **Видання індексується в наукометричній базі Scopus**.

   Особистий внесок автора полягає у створенні моделей та методів математичного та комп'ютерного моделювання процесів виявлення сигналів на фоні корельованих асиметричних негаусових завад та становить 0,3 друк. арк

5. Smirnov, D., Zorin, O., Palahina, E., Ivchenko, O., Palahin, V. (2024). Development of Moment Quality Criterion and Polynomial Methods for Signals Detection and

Distinction in Non-Gaussian Noise. In: Faure, E., et al. Information Technology for Education, Science, and Technics. ITEST 2024. Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies, vol 221., pp.368–381, Springer, Cham. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-71801-4_27 URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-031-71801-4_27 ISSN 2367-4512. **Видання індексується в наукометричній базі Scopus**.

Особистий внесок автора полягає у застосуванні інформаційних технологій в задачах перевірки статистичних гіпотез та становить 0,3 друк. арк.

– наукові праці, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

6. D.Smirnov, V.Chepynoha, O.Zorin, A.Honcharov, E.Palahina, V.Palahin. The Methods of Joint Signal Discrimination and Parameters Estimation in non-Gaussian Noise // IEEE 4-th International Conference on Advanced Trends in Information Theory – 2022, Kyiv, Ukraine, 2022, pp. 23-27, DOI: https://doi.org/10.1109/ATIT58178.2022.10024190. URL: https://ieeexplore.ieee.org/document/10024190. ISBN:979-8-3503-3262-9. **Видання індексується в наукометричній базі Scopus**.

   Особистий внесок автора полягає у проведенні аналізу впливу статистик вищих порядків на ефективність алгоритмів виявлення сигналів в негаусових завадах та становить 0,3друк. арк

7. Daniil Smirnov, Oleksandr Zorin, Elena Palahina, Volodymyr Palahin. Development o f Moment Quality Criterion and Polynomial Methods for Signals Detection and Distinction in Non-Gaussian Noise // VII Міжнародна науково-практична конференція “Інформаційні технології в освіті, науці й техніці” ІТОНТ-2024, с.195-196. URL: https://knsa.chdtu.edu.ua/wp-content/uploads/2024/06/Conference-Proceedings-ITEST-2024_25_06.pdf

   Особистий внесок автора полягає у застосуванні моментного критерію якості перевірки статистичних гіпотез та оцінювання його

ефективності в задачах виявлення сигналів на фоні негаусових завад та становить 0,1 друк. арк.

8. Д.О.Смірнов, О.А.Палагіна, В.В.Палагін. Методи виявлення сигналів на фоні статистичнозалежних негаусових процесів // Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси (ІІРТК-2024), сімнадцята міжнародна науково-практична конференція, 21-22 травня 2024 р., Київ, Україна, - с.466-468.

   Особистий внесок автора полягає у проведені аналізу застосування сумісних моментно-кумулянтних функцій для опису випадкових процесів в задачах виявлення сигналів та становить 0,1 друк. арк

9. Д.О.Смірнов, В.В.Палагін. Моделі та методи виявлення сигналів на фоні негаусових корельованих завад // 28-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка і молодь у XXI столітті», 16 – 18 квітня 2024 р., Конференція «Електронна, лазерна та біомедична інженерія» – с.5-7

   Особистий внесок автора полягає у побудові нелінійних розв'язувальних правил виявлення сигналів та становить 0,1 друк. арк

10. Volodymyr Palahin, Olena Palahina, Daniil Smirnov, Oleksandr Zorin. Polynomial Methods and Algorithms for Signals Detection and Distinction in Non-Gaussian Noise // «Modern Problems of Mathematical Modelling, Forecasting, and Optimization» in memory of the Honorary Professor of the Kamianets-Podilskyi National University, Dr. Sc., Prof., Cor. member NAPSU Anatoliy Fedorovich VERLAN, с.66-68. URL: https://cs.kpnu.edu.ua/wp-content/uploads/2024/07/optima_2024-tezdop_1.pdf

    Особистий внесок автора полягає у проведенні математичного та комп'ютерного моделювання поліноміальних правил виявлення сигналів та становить 0,1 друк. арк

11. Д.О.Смірнов, О.А.Палагіна, В.В.Палагін. Математичне моделювання задач виявлення сигналів на фоні негаусових корельованих завад // Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси (ІІРТК-2022), п’ятнадцята міжнародна науково-практична конференція, 17-18 травня 2022р., Київ, Україна, - с.224-225.

Особистий внесок автора полягає у проведенні математичного моделювання систем виявлення сигналів при впливі корельованих завад та становить 0,1 друк. арк

12. Palahina E., Kunchenko-Kharchenko V., Tonkopriad S., Push I., Smirnov D., Palahin V. Signal detection in additive-multiplicative non-Gaussian noise // Праці VII Міжнародної науково-практичної конференції «Обробка сигналів і негауссівських процесів», присвяченої пам’яті професора Ю.П.Кунченка: Тези доповідей. – Черкаси: ЧДТУ, 2021. – с.123-124. URL:https://er.chdtu.edu.ua/handle/ChSTU/789

Особистий внесок автора полягає у побудові математичних моделей та їх дослідження в задачах виявлення сигналів при адитивно-мультиплікативній взаємодії з негаусовими завадами та становить 0,15 друк. арк

ДОДАТОК В

Опис випадкових величин

за допомогою початкових моментів та кумулянтів

Вирази для початкових моментів до шостого порядку, виражені через кумулянти:

$$\alpha_1(\vec{\vartheta}) = \chi_1(\vec{\vartheta});$$

$$\alpha_2(\vec{\vartheta}) = \chi_2(\vec{\vartheta}) + \chi_1^2(\vec{\vartheta});$$

$$\alpha_3(\vec{\vartheta}) = \chi_3(\vec{\vartheta}) + 3\chi_1(\vec{\vartheta})\chi_2(\vec{\vartheta}) + \chi_1^3(\vec{\vartheta});$$

$$\alpha_4(\vec{\vartheta}) = \chi_4(\vec{\vartheta}) + 3\chi_2^2(\vec{\vartheta}) + 4\chi_1(\vec{\vartheta})\chi_3(\vec{\vartheta}) + 6\chi_1^2(\vec{\vartheta})\chi_2(\vec{\vartheta}) + \chi_1^4(\vec{\vartheta})$$

$$\alpha_5(\vec{\vartheta}) = \chi_5(\vec{\vartheta}) + 10\chi_2(\vec{\vartheta})\chi_3(\vec{\vartheta}) + 5\chi_1(\vec{\vartheta})\chi_4(\vec{\vartheta}) + 15\chi_1(\vec{\vartheta})\chi_2^2(\vec{\vartheta}) +$$

$$+10\chi_1^2(\vec{\vartheta})\chi_3(\vec{\vartheta}) + 10\chi_1^3(\vec{\vartheta})\chi_2(\vec{\vartheta}) + \chi_1^5(\vec{\vartheta});$$

$$\alpha_6(\vec{\vartheta}) = \chi_6(\vec{\vartheta}) + 15\chi_2(\vec{\vartheta})\chi_4(\vec{\vartheta}) + 10\chi_3^2(\vec{\vartheta}) + 15\chi_2^3(\vec{\vartheta}) + 6\chi_1(\vec{\vartheta}) \times$$
$$\times [\chi_5(\vec{\vartheta}) + 10\chi_2(\vec{\vartheta})\chi_3(\vec{\vartheta})] + 15\chi_1^2(\vec{\vartheta})[\chi_4(\vec{\vartheta}) + 3\chi_2^2(\vec{\vartheta})] +$$
$$+20\chi_1^3(\vec{\vartheta})\chi_3(\vec{\vartheta}) + 15\chi_1^4(\vec{\vartheta})\chi_2(\vec{\vartheta}) + \chi_1^6(\vec{\vartheta}).$$

Наведено перші шість початкових моментів випадкової величини ξ, виражені через кумулянтні параметри $\vec{\gamma}$

$$\alpha_1(\vec{\gamma}) = \chi_1;\ \alpha_2(\vec{\gamma}) = \chi_2 + {\chi_1}^2;$$

$$\alpha_3(\vec{\gamma}) = \chi_2^{1,5}\gamma_3 + 3\chi_2\chi_1 + {\chi_1}^3;$$

$$\alpha_4(\vec{\gamma}) = \chi_2^2(\gamma_4 + 3) + 4\chi_2^{1,5}\gamma_3\chi_1 + 6\alpha^2\chi_2 + {\chi_1}^4;$$

$$\alpha_5(\vec{\gamma}) = \chi_2^{2,5}(\gamma_5 + 10\gamma_3) + 5\chi_1\chi_2^2(\gamma_4 + 3) + 10{\chi_1}^2\chi_2^{1,5}\gamma_3 + 10{\chi_1}^3\chi_2 + {\chi_1}^5;$$

$$\alpha_6(\vec{\gamma}) = \chi_2^3(\gamma_6 + 15\gamma_4 + 10\gamma_3^2 + 15) + \chi_1 6\chi_2^{2,5}(\gamma_5 + 10\gamma_3) +$$
$$+{\chi_1}^2 15\chi_2^2(\gamma_4 + 3) + 20{\chi_1}^3\chi_2^{1,5}\gamma_3 + 15{\chi_1}^4\chi_2 + {\chi_1}^6.$$

Наведено послідовність кумулянтів до 6-го порядку, виражену через початкові моменти:

$$\chi_1 = \alpha_1,\ \chi_2 = \alpha_2 - {\alpha_1}^2,$$

$$\chi_3 = \alpha_3 + \alpha_1(-3\alpha_2 + 2{\alpha_1}^2),$$

$$\chi_4 = \alpha_4 - 3\alpha_2^2 + \alpha_1(-4\alpha_3 + 12\alpha_1\alpha_2 - 6{\alpha_1}^3),$$

$$\chi_5 = \alpha_5 - 10\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1[(-5\alpha_4 + 30\alpha_2^2) + 20\alpha_1\alpha_3 - 60{\alpha_1}^2\alpha_2 + 24\alpha^4],$$

$$\chi_6 = \alpha_6 - 10\alpha_3^2 + 30\alpha_2^3 - 15\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1[(-6\alpha_5 + 120\alpha_2\alpha_3) +$$
$$+\alpha_1(30\alpha_4 - 270\alpha_2^2) - {\alpha_1}^2(120\alpha_3 - 360\alpha_1\alpha_2 + 120\alpha^3)],$$

ДОДАТОК Г

Псевдокод для генерації корельованих негаусових процесів на основі бігаусової моделі

Algorithm GenerateCorrelatedNonGaussianProcess(n, gam3, gam4, hhi2, A)

Input:

n — обсяг вибірки;
gam3 — коефіцієнт асиметрії;
gam4 — коефіцієнт ексцесу;
hhi2 — дисперсія;
A — масштаб кореляції.

Output:

correlated_noise — корельований негаусовий процес.

1. correlation_param ← 1 / A

2. Compute initial moments:
alfa1 ← 0
alfa2 ← hhi2 - alfa1²
alfa3 ← -2 * alfa1³ + 3 * alfa1 * alfa2 - alfa1² * √(alfa2 - alfa1²) * gam3 + alfa2 * √(alfa2 - alfa1²) * gam3
alfa4 ← 6 * alfa1⁴ - 12 * alfa1² * alfa2 + 3 * alfa2² + 4 * alfa1 * alfa3 + gam4 * (alfa2 - alfa1²)²

3. Define system of equations for bi-Gaussian model parameters:
eq1: delta * m1 + (1 - delta) * m2 = alfa1
eq2: delta * (sigma2 + m1²) + (1 - delta) * (m2² + sigma2) = alfa2
eq3: delta * (3 * sigma2 * m1 + m1³) + (1 - delta) * (3 * sigma2 * m2 + m2³) = alfa3
eq4: delta * (3 * sigma2² + 6 * sigma2 * m1² + m1⁴) + (1 - delta) * (3 * sigma2² + 6 * sigma2 * m2² + m2⁴) = alfa4

4. Solve equations using initial guess [0.55, 0, 1, 1.0]:
[delta, m1, m2, sigma2] ← fsolve([eq1, eq2, eq3, eq4])

5. Generate uncorrelated bi-Gaussian sample:
x1 ← GenerateNormal(m1, √sigma2, round(delta * n))
x2 ← GenerateNormal(m2, √sigma2, round((1 - delta) * n))
noise ← Shuffle(Concatenate(x1, x2))

6. Generate correlated sample:
correlation_matrix ← exp(-|i - j| / correlation_param) for all i, j in [1, n]
L ← CholeskyDecomposition(correlation_matrix)
correlated_noise ← L * noise[:n]

7. Compute statistical characteristics:
mean ← Mean(correlated_noise)
variance ← Variance(correlated_noise)
skewness ← Skewness(correlated_noise)
kurtosis ← Kurtosis(correlated_noise) - 3

8. Output correlated_noise

Псевдокод реалізації лінійного розв’язувального правила

Input:
q — відношення сигнал/шум (SNR);
frequency — частота імпульсів (Гц);
duration — тривалість сигналу (сек);
duty_cycle — робочий цикл (% часу імпульс активний, 0-100);
sampling_rate — частота дискретизації (Гц);
window_size — розмір ковзного вікна;
correlated_noise — корельований шум.

Output:
results — масив рішень (1 — сигнал є, 0 — сигналу немає);
decision_all — масив значень рішення для кожного вікна.

1. Display SNR (q): "SNR (q):", q

2. Generate rectangular pulse signal:
t ← linspace(0, duration, sampling_rate * duration, endpoint=False)
period ← 1 / frequency
pulse_width ← duty_cycle / 100 * period
signal ← (t % period < pulse_width)

3. Scale signal:
signal ← sqrt(q) * signal

4. Add correlated noise:
signal_noise ← signal + correlated_noise

5. Initialize sliding window detection:
a ← 1
results ← []
decision_all ← []

6. For i from 0 to len(signal_noise) - window_size:
6.1 window ← signal_noise[i:i + window_size]
6.2 avg_window ← mean(window)
6.3 decision ← avg_window - a / 2
6.4 decision_all.append(decision)
6.5 results.append(1 if decision > 0 else 0)

7. Convert results to arrays:
results ← array(results)
decision_all ← array(decision_all)

8. Visualize results:
8.1 Plot signal and signal_noise over time (t).
8.2 Plot decision_all with step function (t[:len(results)]).
8.3 Plot results with step function (t[:len(results)]).
8.4 Configure plots: titles, labels, legends, and grids.
8.5 Display plots.

Псевдокод реалізації нелінійного розв'язувального правила

Input:
q — відношення сигнал/шум (SNR);
frequency — частота імпульсів (Гц);
duration — тривалість сигналу (сек);
duty_cycle — робочий цикл (% часу імпульс активний, 0-100);
sampling_rate — частота дискретизації (Гц);
window_size — розмір ковзного вікна;
correlated_noise — корельований шум;
A — параметр кореляції.

Output:
results_cor — масив рішень (1 — сигнал є, 0 — сигналу немає);
decision_all_cor — масив значень рішення для кожного вікна.

1. Generate rectangular pulse signal:
t ← linspace(0, duration, sampling_rate * duration, endpoint=False)
period ← 1 / frequency
pulse_width ← duty_cycle / 100 * period
signal ← (t % period < pulse_width)
signal ← sqrt(q) * signal

2. Add correlated noise:
signal_noise ← signal + correlated_noise

3. Calculate statistical coefficients:
experimental_skewness ← skewness of correlated_noise
experimental_kurtosis ← kurtosis of correlated_noise - 3
k1v_cor, k2v_cor, k0_cor ← calculate_coefficients_cor(window_size, q, experimental_skewness, experimental_kurtosis, A)

4. Initialize nonlinear processing:
results_cor ← []
decision_all_cor ← []

5. For i from 0 to len(signal_noise) - window_size:
5.1 window ← signal_noise[i:i + window_size]
5.2 linear_term_cor ← sum(window * k1v_cor)
5.3 quadratic_term_cor ← sum(window^2 * k2v_cor)
5.4 decision_cor ← k0_cor + linear_term_cor + quadratic_term_cor
5.5 decision_all_cor.append(decision_cor)

6. Apply smoothing and decision rule:
For i from 0 to len(signal_noise) - window_size:
results_cor.append(1 if all(decision_all_cor[i + j] > 0 for j in range(1)) else 0)

7. Convert results to arrays:
results_cor ← array(results_cor)
decision_all_cor ← array(decision_all_cor)

8. Visualize results:
8.1 Plot signal and signal_noise over time (t).
8.2 Plot decision_all_cor with step function (t[:len(results_cor)]).
8.3 Plot results_cor with step function (t[:len(results_cor)]).
8.4 Configure plots: titles, labels, legends, and grids.
8.5 Display plots.
```
```