

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет електронних технологій, автотранспорту та машинобудування

ВИЩА МАТЕМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для здобувачів освітнього ступеня “бакалавр” зі спеціальностей

161, 181, 183, 205

Черкаси

2025

УДК

В

*Затверджено Методичною радою ЧДТУ,
протокол № __/2024-2025 від __.__.20__ р.,
згідно з рішенням кафедри
фундаментальних дисциплін та прикладного
матеріалознавства,
протокол № __ від __.__.20__.*

Упорядники

Бутенко Т.І., к.т.н., доцент
Колінько С.О., к.ф.-м.н., доцент

Рецензент

Яценко І.В., д.т.н., професор

Вища математика: конспект лекцій для здобувачів освітнього ступеня “бакалавр” зі спеціальностей 161, 181, 183, 205.
В [Електронний ресурс] / [упоряд. : Т.І. Бутенко, С.О. Колінько; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси : ЧДТУ, 2025. – 82 с.

Конспект лекцій розроблено відповідно до навчальної програми дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальностей 161 Хімічні технології та інженерія, 181 Харчові технології, 183 Технології захисту навколишнього середовища та 205 Лісове господарство усіх форм навчання.

Подано теоретичні положення програмних питань лекційного курсу, наведено приклади розв’язування типових задач.

Для студентів та викладачів вищих технічних навчальних закладів.

Вища математика:
конспект лекцій для здобувачів
освітнього ступеня “бакалавр”
зі спеціальностей 161, 181, 183, 205.

Упорядники:

Бутенко Тетяна Іванівна,
Колінько Сергій Олександрович

В авторській редакції.

© Т.І.Бутенко, С.О.Колінько, упорядкування, 2025

Зміст

ВСТУП	4
Змістовий модуль 1. Лінійна та векторна алгебра	5
1.1. Матриці. Розв’язування систем лінійних рівнянь	5
1.1.1. Матриці	5
1.1.2. Визначники. Обернена матриця	8
1.1.3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	14
1.2. Векторна алгебра	18
1.2.1. Вектори. Лінійні операції над векторами	18
1.2.2. Добуток векторів у звичайному просторі	22
Змістовий модуль 2. Диференціальне числення функції однієї і багатьох змінних	28
2.1. Границя функції.	28
2.2. Диференціальне числення функції однієї змінної	37
2.3. Диференціальне числення функції багатьох змінних	49
Змістовий модуль 3. Інтегральне числення функції однієї змінної	52
3.1. Інтегральне числення функції однієї змінної. Невизначений інтеграл	52
3.2. Визначений інтеграл. Застосування визначеного інтеграла	60
Змістовий модуль 4 Диференціальні рівняння	71
4.1. Основні поняття і означення	71
4.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними	72
4.3. Однорідні диференціальні рівняння	74
4.4. Лінійні диференціальні рівняння. Рівняння Бернуллі	76
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	81

ВСТУП

Даний навчально-методичний посібник розроблено відповідно до навчальної програми дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальностей 161 Хімічні технології та інженерія, 181 Харчові технології 183 Технології захисту навколишнього середовища та 205 Лісове господарство першого року навчання.

До кожної з лекційних тем наведено теоретичний матеріал, який містить: означення понять, формулювання, приклади, що ілюструють або додатково пояснюють певні теоретичні положення. Матеріал лекцій добре структуровано, важливі моменти лекцій виділено, що дасть можливість студентам легко орієнтуватися у наданому навчальному матеріалі, швидко знаходити необхідну інформацію.

Матеріал посібника стане у нагоді студентам технічних спеціальностей у процесі підготовки до контрольних робіт та екзамену, виконанні розрахунково-графічних робіт, самопідготовки до лекційних та практичних занять, для виконання завдань по темах, що виносяться на самостійне опрацювання.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

1.1. Матриці. Розв'язування систем лінійних рівнянь

1.1.1. Матриці

Матрицею називається прямокутна таблиця чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

яка містить m рядків і n стовпців.

Матриця називається *квадратною*, якщо $m=n$. Число m , що дорівнює n , є її порядком. В загальному випадку матриця називається прямокутною (розмірів $m \times n$). Числа a_{ij} , що утворюють матрицю називаються її елементами.

В запису a_{ij} перший індекс i означає номер рядка, а другий індекс j - номер стовпця.

Поряд з позначенням (1.1) використовують позначення матриці

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|$$

або скорочено $\|a_{ij}\| (i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n)$. Часто матрицю (1.1) позначають однією великою буквою латинського алфавіту ($A, C, D \dots$).

Матриця, що складається з одного стовпця

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$$

називається матрицею-стовпцем.

Матриця, що складається з одного рядка $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$, називається матрицею-рядком.

Для квадратної матриці вводяться поняття головної та побічної діагоналей.

Головною діагоналлю називається діагональ, яку утворюють елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, побічною - діагональ, яку утворюють елементи $a_{n1}, a_{(n-1)2}, \dots, a_{1n}$.

Квадратна матриця, всі елементи якої, за винятком елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається діагональною:

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}.$$

Діагональна матриця, у якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, називається одиничною і позначається буквою E :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається нульовою і позначається буквою O :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Дві матриці називаються рівними, якщо вони мають однакові розміри і всі їх відповідні елементи збігаються.

Дії над матрицями

1) Додавання матриць

Сумою двох матриць A і B однакових розмірів $m \times n$ називається матриця $C=A+B$ тих же розмірів, елементи якої дорівнюють сумах відповідних елементів матриць A і B :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} (i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n).$$

Додавання матриць є операцією знаходження суми матриць.

Властивості операції додавання матриць:

1. комутативна: $A+B=B+A$;
2. асоціативна: $(A+B)+C=A+(B+C)$.

2) **Множення матриці на число, віднімання матриць**

Добутком матриці $A = \|a_{ij}\|$ розмірів $m \times n$ на число α називається матриця $C=\alpha A$ тих же розмірів, елементами якої є $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij} (i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n)$.

Множення матриці на число є операцією знаходження добутку матриці на число.

Властивості множення матриці на число:

1. дистрибутивна властивість числового множника відносно суми матриць: $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
2. дистрибутивна властивість матричного множника відносно суми чисел: $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;
3. асоціативна властивість: $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$.

Різниця двох матриць однакових розмірів знаходиться як $A-B=A+(-I)B$.

3) **Множення матриць**

Операція множення двох матриць може бути виконана лише для узгоджених матриць.

Узгодженими називають такі матриці A і B , для яких справджується умова - кількість стовпців матриці A рівна кількості рядків матриці B .

Добутком матриці A розмірів $m \times n$ та матриці B розмірів $n \times p$ називається матриця $C=AB$ розмірів $m \times p$, елементи якої c_{ij} визначаються як сума добутків відповідних елементів i -го рядка матриці A і елементів j -го стовпця матриці B , тобто:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, p).$$

Множення матриць є операцією знаходження добутку матриць A і B .

Властивості операції множення матриць:

1. *асоціативна властивість:* $(AB)C = A(BC)$;
2. *дистрибутивна властивість першого множника:* $A(B+C) = AB+AC$;
3. *дистрибутивна властивість другого множника:* $(A+B)C = AC+BC$.

В загальному випадку множення матриць не підлягає комутативній властивості.

Якщо $AB=BA$, то такі матриці є комутативними.

1.1.2. Визначники. Обернена матриця

Визначники другого та третього порядку та їх властивості

Розглянемо квадратну матрицю 2-го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Визначником (детермінантом) другого порядку, складеним з елементів цієї матриці A , називається число, що дорівнює $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, яке позначається

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Розглянемо квадратну матрицю 3-го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Детермінантом 3-го порядку, складеним із елементів цієї матриці A , називається число:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Вираз складений за таким правилом (правило трикутника): добуток елементів, розміщених вздовж головної діагоналі і два добутки елементів, що стоять у вершинах двох рівнобедрених трикутників із основами, паралельними головній діагоналі і з вершинами в протилежному куті, беруться із знаком плюс. Три добутки, що складені за тим же правилом, але відносно побічної діагоналі, беруться із знаком мінус:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Властивості детермінантів 2-го і 3-го порядку

Властивість 1. Величина детермінанта не зміниться, якщо замінити кожний його рядок стовпцем із тим же номером, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Властивість 2. Перестановка двох рядків (стовпців) детермінанта рівносильна множенню його на (-1):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Властивість 3. Детермінант, який має два однакових рядки (стовпці), дорівнює нулю.

Властивість 4. Множення всіх елементів одного стовпця (рядка) детермінанта на довільне число k рівносильне множенню детермінанта на це число:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Наслідок 1. Якщо всі елементи якогось рядка (стовпця) рівні нулю, то і детермінант дорівнює нулю.

Наслідок 2. Детермінант, в якому відповідні елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, дорівнює нулю.

Властивість 5. Якщо кожний елемент i -го рядка (i -го стовпця, де $i=1,2,3$) є сума двох доданків, то детермінант дорівнює сумі двох детермінантів, у першого з яких i -й рядок (i -й стовпець) складається з перших доданків, а у другого - з других; інші елементи усіх трьох детермінантів однакові.

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} + a'_{12} & a_{13} + a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{21} & a'_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Властивість 6. Величина детермінанта не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на один і той же множник.

Розклад визначника за елементами рядка або стовпця

Мінором елемента a_{ij} називається детермінант, порядок якого на одиницю менший порядку даного детермінанта, утворений з даного детермінанта викреслюванням i -го рядка і j -го стовпця, на перетині яких розміщений елемент a_{ij} . Мінор елемента a_{ij} позначається через Δ_{ij} .

Наприклад, для визначника

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ мінор елемента } a_{11} \text{ рівний } \Delta_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ мінор елемента } a_{22} \text{ рівний } \Delta_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається добуток мінора Δ_{ij} на величину $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}.$$

Наприклад, для визначника $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & -3 \end{vmatrix}$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \Delta_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-3 + 8) = -5.$$

Детермінант дорівнює сумі добутків елементів рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

Сума добутків елементів довільного рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

Обернена матриця

Нехай A – квадратна матриця порядку n .

Квадратна матриця A^{-1} порядку n називається **оберненою** до матриці A , якщо $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, де E – одинична матриця порядку n .

Квадратна матриця A порядку n називається **особливою (виродженою)**, якщо її детермінант дорівнює нулю. Якщо $A \neq 0$, то A називається **неособливою (не виродженою)**.

Особливі матриці обернених матриць не мають. Кожна неособлива матриця має єдину обернену матрицю.

Якщо $|A| \neq 0$, то обернена матриця A^{-1} має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

де A_{ij} ($i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n$) – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці A .

Матричні рівняння

Рівність, що містить невідому матрицю, яка позначена буквою, називається **матричним рівнянням**.

Коренем матричного рівняння називається таке значення невідомої матриці, при якому це матричне рівняння перетворюється на вірну рівність.

Розв'язати матричне рівняння означає знайти усі його корені, або довести, що їх не існує. При розв'язуванні матричних рівнянь використовують такі їх властивості:

1) одночасне множення обох частин матричного рівняння на неособливу матрицю можливе або тільки справа, або тільки зліва;

2) множення матричного рівняння на обернену матрицю до матриць, що входять у рівняння, можливе або тільки справа, або тільки зліва.

Якщо A, B, C - відомі квадратні матриці, а X – невідома матриця першого степеня, тобто, над невідомою матрицею не виконується арифметична дія піднесення до степеня, то матричне рівняння називають **лінійним**.

Лінійні матричні рівняння можуть:

- 1) не мати розв'язків;
- 2) мати обмежену кількість розв'язків;
- 3) мати безліч розв'язків.

Надалі розглядаємо лише лінійні матричні рівняння.

Приклад:

Знайти невідому матрицю X у рівнянні $X \cdot A = B$, якщо

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язок.

Якщо матриця A неособлива, то існує обернена A^{-1} . Помноживши обидві сторони рівняння справа на A^{-1} знайдемо невідому матрицю X .

Знайдемо визначник матриці A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0.$$

Матриця A особлива, тому не існує оберненої матриці A^{-1} і дане матричне рівняння не має розв'язку.

Приклад: Знайти невідому матрицю X із рівняння:

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок:

$$A \cdot X = B,$$

$$X = A^{-1} \cdot B \text{ (матриця } A \text{ неособлива)}.$$

Детермінант матриці A :

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Матриця, обернена до матриці A :

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1, \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = -1, \\ A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 3. \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

1.1.3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛР)

Системою m лінійних рівнянь з n невідомими називається система виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Сталі множники a_{ij} ($i=1,2,\dots,m$; $j=1,2,\dots,n$) біля невідомих називаються коефіцієнтами, а числа b_i – вільними членами системи.

Система рівнянь називається *однорідною*, якщо всі вільні члени системи дорівнюють нулю. Система рівнянь називається *неоднорідною*, якщо хоча б один із вільних членів не рівний нулю.

Упорядкований набір чисел називається *розв'язком* системи, якщо при підстановці цих чисел замість невідомих усі рівняння системи перетворюються на тотожності.

СЛР називають *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок і *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісна СЛР називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок і *невизначеною*, якщо вона має більше ніж один розв'язок.

Матричний запис СЛР та їх розв'язання

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Основна матриця СЛР:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Матриця стовпець невідомих СЛР:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

Матриця стовпець вільних членів СЛР:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$$

Матрична форма СЛР:

$$A \cdot X = B.$$

Отже:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Якщо $|A| \neq 0$, то СЛР розв'язується як матричне рівняння.

Приклад. Розв'язати СЛР матричним методом:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 36, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 13, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

Розв'язок:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 36 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 36 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -98 \\ -86 \\ -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24,5 \\ -21,5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Метод Крамера розв'язання СЛР

Визначник основної матриці можна записати як:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(j-1)} & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$x_1 = -24,5, \quad x_2 = -21,5, \quad x_3 = 10.$$

Стовпцем

вільних

членів

замінімо j-тий стовпець у визначнику:

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(j-1)} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(j-1)} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(j-1)} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Правило Крамера:

якщо визначник основної матриці СЛР відмінний від нуля, то ця система має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Приклад:

Розв'язати СЛР методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Розв'язок:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 1 - 1 - 1 + 4 = 5 \neq 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 6 - 4 - 4 - 5 + 12 = 15,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 8 + 5 - 6 - 4 - 20 = -5,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 10 - 6 - 5 - 6 + 8 = 5.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3, \quad x_2 = \frac{\Delta_{21}}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1.$$

1.2. Векторна алгебра

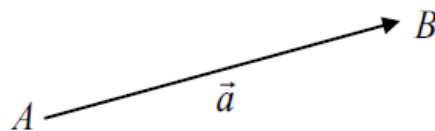
1.2.1. Вектори. Лінійні операції над векторами

Скалярні та векторні величини

Фізичні величини, які використовуються для кількісної характеристики фізичних явищ і об'єктів, поділяються на скалярні і векторні величини.

Скалярні величини визначаються лише числовим значенням (об'єм, густина, температура тощо). Деякі фізичні величини, крім числового значення, мають напрям (швидкість, імпульс, сила, напруженість електростатичного поля, індукція магнітного поля тощо). Такі величини називають *векторними*.

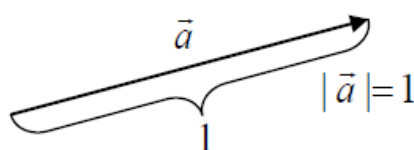
Вектором називається напрямлений відрізок AB , якщо т. A є початковою, а т. B – кінцевою і позначається $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$:



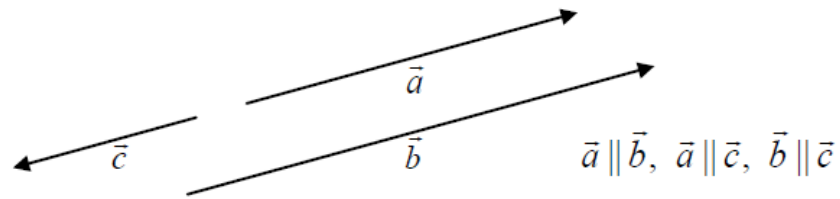
Довжина відрізка AB називається *модулем* або *довжиною* вектора $\overrightarrow{AB}$ і позначається $|\overrightarrow{AB}|$.

Якщо початок і кінець вектора збігаються, то вектор називається *нульовим* і позначається $\vec{0}$.

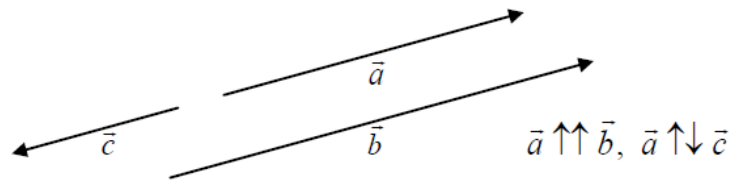
Вектор називається *одиничним*, якщо його довжина дорівнює одиниці.



Вектори називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій, або на паралельних прямих.

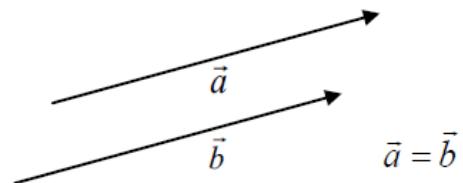


Вектори однакового напрямку називають *співнаправленими*, а протилежного напрямку – *протилежно напрямленими*.

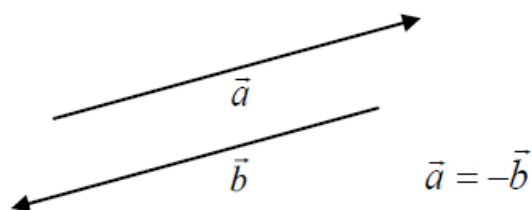


Колінеарні вектори є або співнаправленими, або протилежно напрямленими.

Співнаправлені вектори однакової довжини називаються *рівними*.



Протилежно напрямлені вектори однакової довжини називаються *протилежними*.

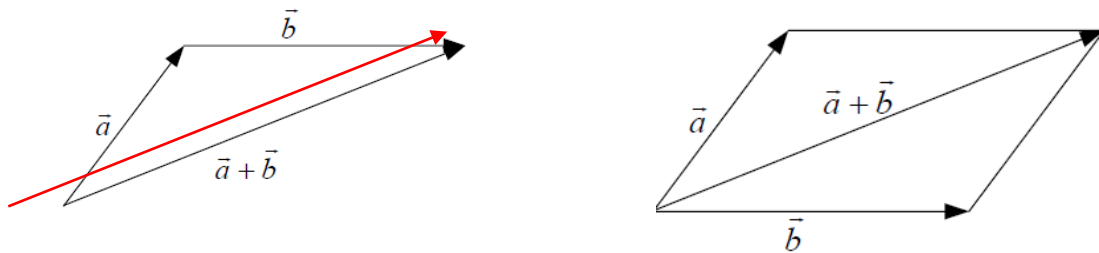


Вектори називаються *компланарними*, якщо вони лежать на одній площині, або на паралельних площинах.

Лінійні операції над векторами

У фізиці доволі часто використовується принцип суперпозиції і виникає потреба знаходити суму векторів. Вектори можна додавати та множити на дійсне число.

Додавання векторів. Вектори можна додавати за правилами геометричного (векторного) додавання. При додаванні векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ отримаємо вектор $\vec{c}$. Тобто, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. Для визначення напрямку і довжини вектора $\vec{c}$ користуються правилами трикутника чи паралелограма:

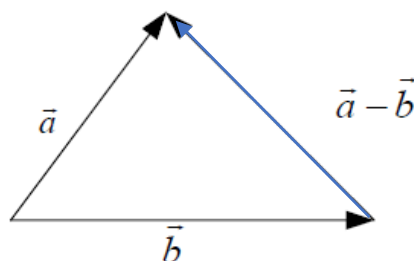


Якщо вектори мають спільний початок, то для їх додавання можна побудувати на цих векторах паралелограм, діагональ якого буде вектором суми векторів. Якщо ці вектори не мають спільного початку, то їх можна за допомогою паралельного перенесення привести до спільного початку.

Множення вектора на число. Добутком $\alpha\vec{a} = \vec{b}$ (або $\vec{a}\alpha$) ненульового вектора $\vec{a}$ на ненульове дійсне число α називається вектор $\vec{b}$, модуль якого дорівнює добутку модуля вектора $\vec{a}$ на модуль числа α , тобто $|\alpha\vec{a}| = |\vec{a}\alpha| = |\vec{a}||\alpha|$, і співнапрямлений з $\vec{a}$, якщо $\alpha > 0$, та протилежно напрямлений з $\vec{a}$, якщо $\alpha < 0$. Якщо $\alpha=0$ або $\vec{a} = 0$, то $\alpha\vec{a} = 0$.

Віднімання векторів. Різницею $\vec{a} - \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, перший із яких називається зменшуваним, а другий – від’ємником, називається вектор

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



Базис. Афінна система координат. Розкладення вектора по базису

Базисом простору називають систему векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n$, які є лінійно незалежними, за умови, що кожний вектор простору $\vec{a}$ можна розкласти в лінійну комбінацію векторів даної системи :

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n.$$

Коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ називають *координатами* вектора $\vec{a}$ в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n$, що записують так: $\vec{a} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ називають суму добутків цих векторів на довільні дійсні числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$:

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$$

Лінійно незалежними є вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ у випадку, коли їх лінійна комбінація з числами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ рівна нулю лише за умови, коли всі числа дорівнюють нулю.

Базис на площині утворюють два неколінеарні вектори, базис у просторі утворюють три некомпланарні вектори.

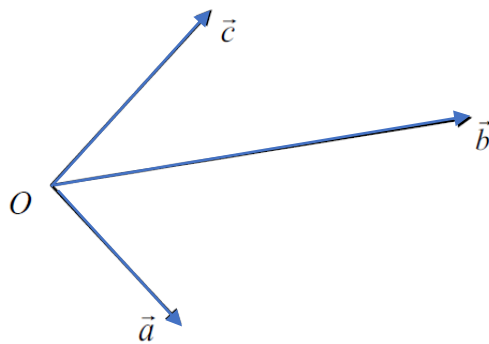
Розглянемо довільний базис у просторі – довільну трійку некомпланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. За визначенням базису для вектора $\vec{d}$ мають бути такі дійсні числа α, β, γ , що виконуватиметься рівність :

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$$

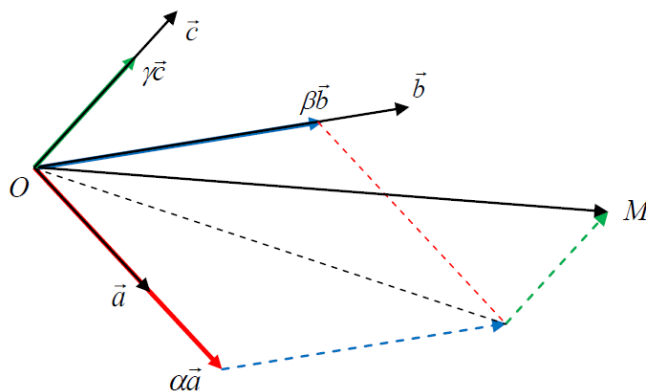
Ця рівність називається розкладом вектора $\vec{d}$ за базисом $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Числа α, β, γ є координатами вектора: $\vec{d} (\alpha, \beta, \gamma)$, які визначаються однозначно відносно даного базису.

При додаванні двох векторів їх координати (відносно базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$) додаються. При множенні вектора на будь-яке число α всі його координати помножуються на це число. У випадку площини мають місце аналогічні твердження.

Афінна система координат в просторі визначається заданням базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ і деякої точки O , яку називають початком координат.



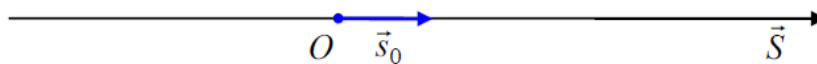
Афінними координатами довільної точки M називаються координати вектора $\overrightarrow{OM}$ у даному базисі $M(\alpha, \beta, \gamma)$. Вектор $\overrightarrow{OM}$ є радіус-вектором точки:



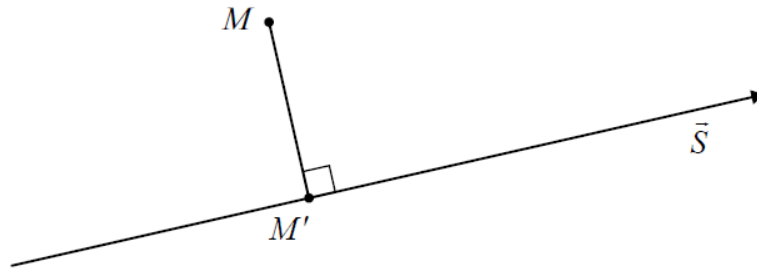
1.2.2. Добуток векторів у звичайному просторі

Складова вектора вздовж осі та проекція вектора на вісь

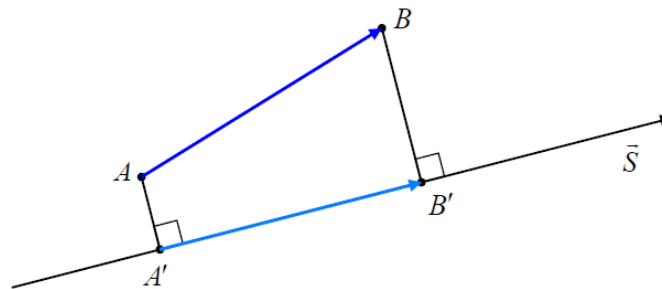
Пряма називається *віссю* $\vec{S}$, якщо на ній вибрано додатний напрям і одиницю довжини $\vec{S}_0$ (орт осі).



Проекцією точки M на вісь $\vec{S}$ називають основу перпендикуляра (точку M'), опущеного з точки M на дану вісь.



Складовою вектора $\overrightarrow{AB}$ вздовж даної осі називають вектор $\overrightarrow{A'B'}$, який утворений проекціями точок A і B на вісь.

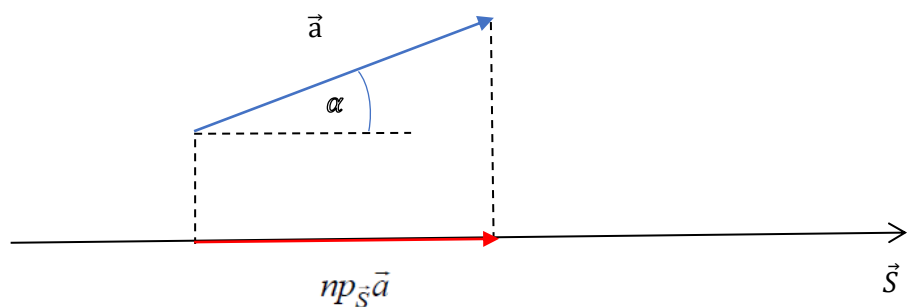


Довжина складової вектора $\overrightarrow{AB}$ вздовж даної осі $\vec{S}$ називається *проекцією вектора* на цю вісь:

$$np_{\vec{S}} \overrightarrow{AB} = \begin{cases} |\overrightarrow{A'B'}|, & \overrightarrow{A'B'} \uparrow \uparrow \vec{S}, \\ -|\overrightarrow{A'B'}|, & \overrightarrow{A'B'} \uparrow \downarrow \vec{S}. \end{cases}$$

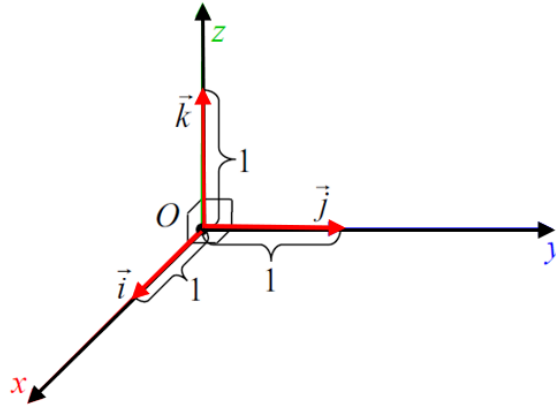
Значення проекції вектора:

$$np_{\vec{S}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha$$



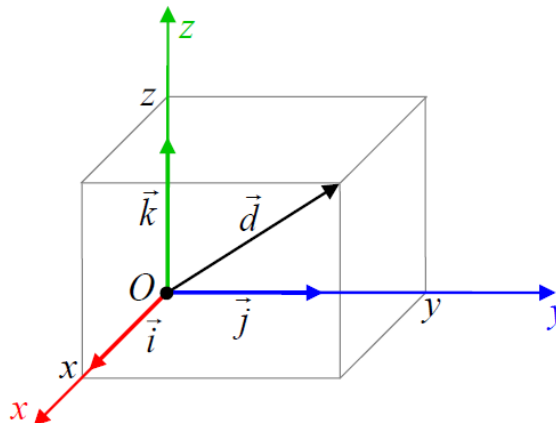
Декартова прямокутна система координат

Якщо базисні вектори афінної системи координат є одиничними і взаємно ортогональними, то така система координат називається *декартовою прямокутною системою координат*.



Вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ є базисними векторами декартової прямокутної системи координат, ортами осей Ox , Oy , Oz . Відповідно, будь-який вектор $\vec{d}$ може бути розкладеним за даним базисом:

$$\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z).$$



Проекції вектора $\vec{d}$ на координатні осі визначають його декартові прямокутні координати x , y , z , а вектори $x\vec{i}$, $y\vec{j}$, $z\vec{k}$ є складовими вектора $\vec{d}$ вздовж координатних осей.

Якщо α , β , γ – кути нахилу вектора $\vec{d}$ до осей Ox , Oy , Oz , можна визначити напрямні косинуси даного вектора: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Корисні співвідношення.

Проекції вектора $\vec{d}$ на осі: $x = |\vec{d}| \cos \alpha, y = |\vec{d}| \cos \beta, z = |\vec{d}| \cos \gamma$.

Довжина вектора $\vec{d}$: $|\vec{d}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Напрямні косинуси вектора $\vec{d}$:

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Сума квадратів напрямних косинусів будь-якого вектора дорівнює одиниці:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Для векторів $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1), \vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ справджуються залежності:

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2); \\ \vec{a} - \vec{b} &= (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2).\end{aligned}$$

Для вектора $\vec{a}(x, y, z)$ та довільного числа α :

$$\alpha \vec{a} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z).$$

Приклад.

Дано координати точок $A(0; -1; 2), B(-1; 1; 4)$. Визначити координати, довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$.

Розв'язок.

$$\overrightarrow{AB} = (-1 - 0; 1 - (-1); 4 - 2) = (-1; 2; 2);$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3;$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{1}{3}, \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{2}{3},$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{2}{3}.$$

Якщо визначені координати векторів $\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, то скалярний добуток буде розрахований як:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Корисні співвідношення.

Умова перпендикулярності векторів:

$$\vec{a}(x_1, y_1, z_1) \quad \text{і} \quad x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0. \quad \vec{b}(x_2, y_2, z_2):$$

Кут між векторами $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$:

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

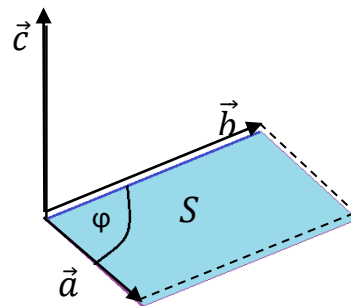
Векторний добуток векторів

Векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є вектором $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ або $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$,

модуль якого визначається як:

$$|\vec{c}| = |[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi.$$

Напрямок вектора $\vec{c}$:



Корисні співвідношення.

Необхідною і достатньою умовою колінеарності двох векторів є рівність нулю їх векторного добутку.

Модуль векторного добутку $[\vec{a}, \vec{b}]$ рівний площі S паралелограма, який побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}$, що мають спільний початок:

$$S = [\vec{a}, \vec{b}].$$

Якщо визначені координати векторів $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, то векторний добуток буде розрахований як:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Умова колінеарності векторів $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$:

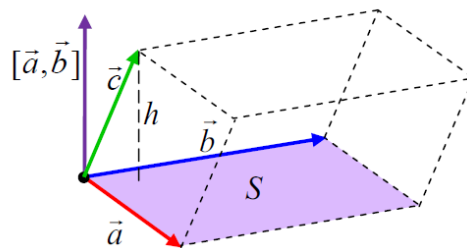
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ є число $\langle [\vec{a}, \vec{b}], \vec{c} \rangle$, яке одержується внаслідок векторного множення вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ та скалярного множення утвореного вектора на вектор $\vec{c}$.

Корисні співвідношення.

Об'єм паралелепіпеда, що побудований на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, які мають спільний початок, можна визначити як мішаний добуток цих векторів $\langle [\vec{a}, \vec{b}], \vec{c} \rangle$.



Справедливою є рівність - $\langle [\vec{a}, \vec{b}], \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}] \rangle$, тому векторний добуток позначають як $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Якщо визначені координати векторів $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c}(x_3, y_3, z_3)$, то векторний добуток буде розрахований як:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Необхідною і достатньою умовою *компланарності трьох векторів* $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c}(x_3, y_3, z_3)$ є рівність нулю визначника, рядками якого є координати цих векторів, тобто рівність:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ І БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

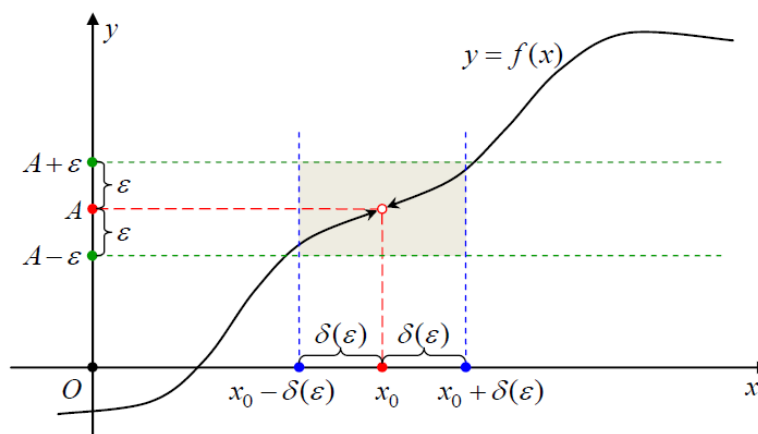
2.1. Границя функції

Границя функції в точці

Якщо функція $f(x)$ визначена в інтервалі $(x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1)$, $\delta_1 > 0$,

тобто в деякому околі x_0 , то **границею функції $f(x)$** в точці x_0 буде називатися число A за умови, що для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що

з нерівності $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ випливає нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.



Записують: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ або $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$

Односторонні границі

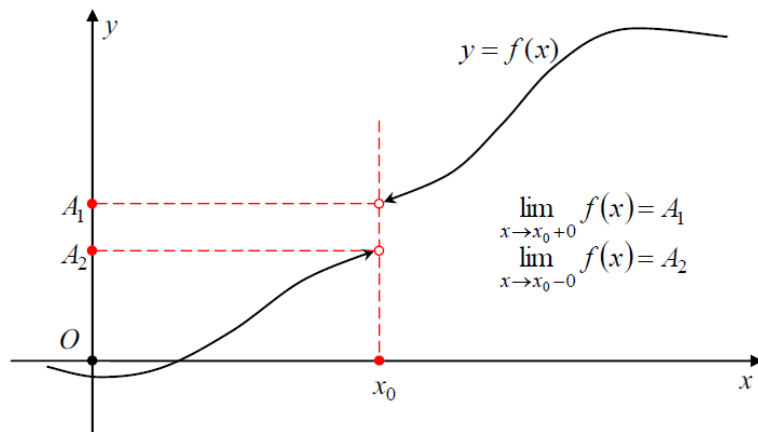
Нехай $f(x)$ визначена на проміжку $(x_0; x_0 + \delta)$ (на проміжку $x_0 - \delta; x_0$), $\delta > 0$.

Число A називається правою (лівою) границею $f(x)$ в точці x_0 , коли для будь-якого числа $\epsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що з нерівності $0 < x - x_0 < \delta$ ($0 < x_0 - x < \delta$) випливає нерівність $|f(x) - A| < \epsilon$.

Записують так:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A \quad - \quad \text{права границя,}$$

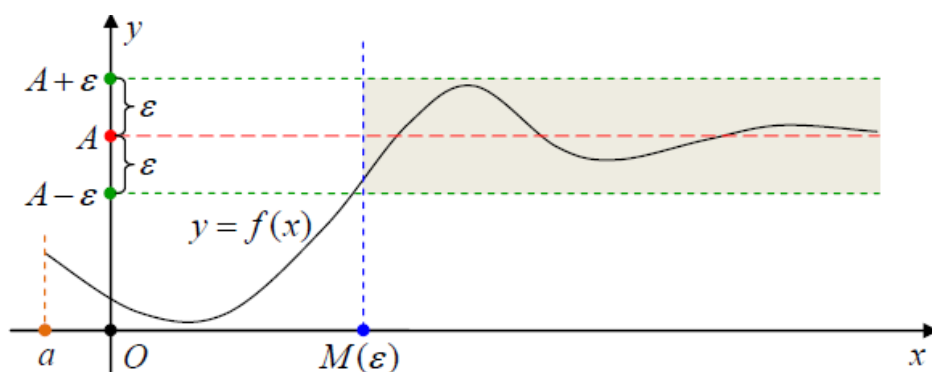
$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A \quad - \quad \text{ліва границя.}$$



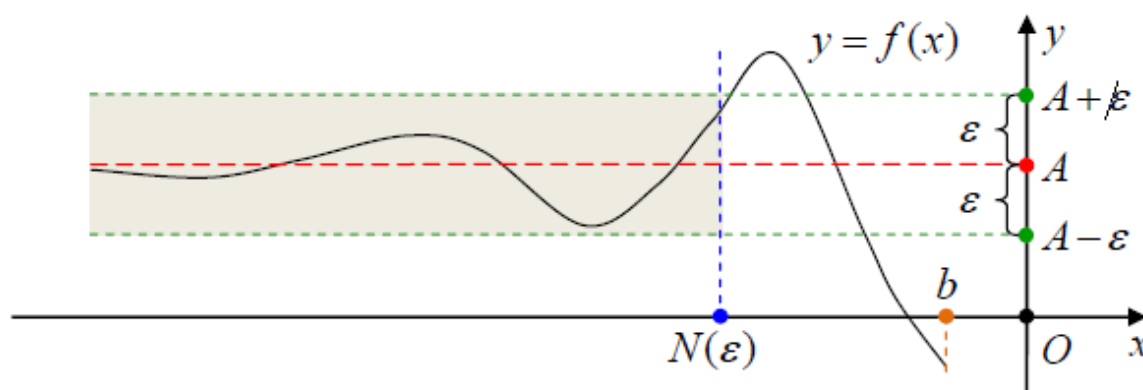
Для того щоб функція $f(x)$ в точці x_0 мала границю необхідно і достатньо, щоб у цій точці функція мала праву і ліву границі і щоб ці границі були рівні між собою.

Границя функції на нескінченності

Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(a; +\infty)$. Число A називається границею $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ (записують $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$), якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує $M(\varepsilon) \geq a$ таке, що нерівність $|f(x) - A| \leq \varepsilon$ виконується для всіх x , які задовольняють умову $x > M(\varepsilon)$.



Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(-\infty; b)$. Число B називається границею $f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$ (записують $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B$), якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує $N(\varepsilon) \leq b$ таке, що нерівність $|f(x) - B| < \varepsilon$ виконується для всіх x , які задовольняють умову $x < N(\varepsilon)$.



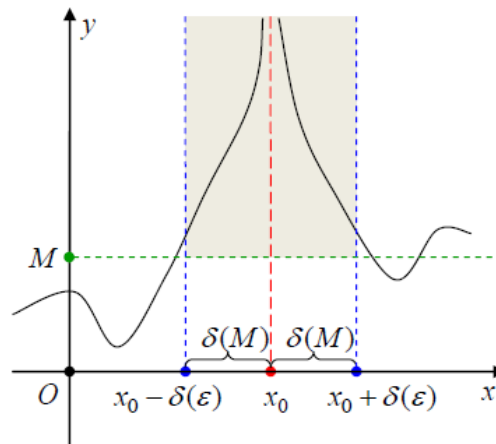
Нескінченні границі

Нехай функція $f(x)$ визначена в інтервалі $(x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1)$, $\delta_1 > 0$, за винятком, можливо, самої точки x_0 . Вважають, що функція $f(x)$ в точці x_0 має нескінченну границю, яка рівна: а) $+\infty$, б) $-\infty$, в) ∞ , якщо для будь-якого числа $M > 0$ існує число $\delta(M) > 0$ ($\delta(M) < \delta_1$) таке, що для всіх x , що задовольняють нерівності $0 < |x - x_0| < \delta(M)$, виконується, відповідно, нерівність:

$$\text{а) } f(x) > M, \text{ б) } f(x) < -M, \text{ в) } |f(x)| > M.$$

Ці положення можна представити наступним чином:

- а) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ або $f(x) \rightarrow +\infty (x \rightarrow x_0)$;
 б) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ або $f(x) \rightarrow -\infty (x \rightarrow x_0)$;
 в) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ або $f(x) \rightarrow \infty (x \rightarrow x_0)$.



Критерій існування границі. Властивості функцій, що мають границю в точці. Властивості границь функцій

Для того щоб функція $f(x)$, визначена на множині E , в граничній точці x_0 цієї множини, скінченно чи нескінченно віддаленій, мала границю A необхідно і достатньо, щоб для будь-якої послідовності точок $x_n \in E, x_n \neq x_0$ ($n=1,2,\dots$) і $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = x_0$ справджувалася рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = A .$$

Властивості функцій, що мають границю в точці

- 1) Функція не може мати двох різних границь в одній точці.

2) Якщо в деякому околі точки x_0 , крім можливо самої точки x_0 , виконується нерівність $f(x) \leq \varphi(x)$ і кожна з функцій має границю в точці x_0 , то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$.

3) Нехай в деякому околі точки x_0 окрім, можливо, самої точки x_0 , виконується нерівність $f(x) \leq \varphi(x) \leq \psi(x)$. Якщо функції $f(x)$ і $\psi(x)$ мають границю в точці x_0 , причому $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A$, то функція $\varphi(x)$ також має границю в точці x_0 і $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A$.

Властивості границь функцій

- 1) Границя сталої в довільній точці x_0 дорівнює цій сталій $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.
- 2) Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ мають в точці x_0 скінченні границі, то в цій точці мають також скінченні границі їх сума, різниця, добуток, частка і справедливими є наступні формули:

$$\begin{aligned} 1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x); \\ 2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x); \\ 3) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad (g(x) \neq 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0). \end{aligned}$$

Сталий множник можна виносити за знак границі:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (C \cdot f(x)) = C \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \text{ де } C = \text{const}.$$

Якщо існує $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, то для будь-якого натурального числа m справедлива рівність:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^m = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^m$$

При знаходженні границь функцій використовуються правила:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{c}{x} = \infty;$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{c} = \infty;$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x} = 0;$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} c^x = \begin{cases} 0, & 0 < c < 1; \\ +\infty, & c > 1; \end{cases}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} c^x = \begin{cases} +\infty, & 0 < c < 1; \\ 0, & c > 1. \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow x_0} (\log_c f(x)) = \log_c \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right), \quad c > 1;$ $\lim_{x \rightarrow 0} \log_c x = -\infty, \quad c > 1;$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_c x = +\infty, \quad c > 1.$
--	---

Приклади:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(3x - \frac{2x}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 3x - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 - 0 = 0.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-3}{x-2} = \frac{4}{3}.$$

Важливі границі. Невизначені вирази

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1} \text{ - перша важлива границя.}$$

Перша важлива границя розкриває невизначеність $\frac{0}{0}$.

Наслідки з першої важливої границі:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \text{ - друга важлива границя.}$$

Друга важлива границя розкриває невизначеність 1^∞ .

При $x = \frac{1}{y}$ при $y \rightarrow \infty$:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

Справедливі наступні формули:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha - 1}{x - 1} = \alpha;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a > 0.$$

Порівняння нескінченно малих

Для нескінченно малих в точці x_0 функцій $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ можна сформулювати наступні положення:

нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються нескінченно малими величинами одного порядку, якщо відношення $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ має скінченну і відмінну від нуля границю в точці x_0 ;

якщо відношення $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ є нескінченно малими в точці x_0 , то нескінченно мала $\beta(x)$ називається нескінченно малою величиною вищого порядку ніж $\alpha(x)$, а нескінченно мала $\alpha(x)$ називається нескінченно малою величиною нижчого порядку ніж $\beta(x)$;

якщо відношення $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ не має границі в точці x_0 , то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ вважають непорівняними між собою;

нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються еквівалентними нескінченно малими в точці x_0 , якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$. Пишуть: $\alpha(x) \cong \beta(x)$.

Для таких величин:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)\alpha(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)\beta(x)), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\beta(x)}.$$

Таблиця еквівалентних нескінченно малих в точці $x_0 = 0$:

- | | |
|---------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\sin x \cong x$, | 6) $a^x - 1 \cong x \ln a$, |
| 2) $\operatorname{tg} x \cong x$, | 7) $e^x - 1 \cong x$, |
| 3) $\arcsin x \cong x$, | 8) $\log_a(1+x) \cong x \log_a a$, |
| 4) $\operatorname{arctg} x \cong x$, | 9) $\ln(1+x) \cong x$, |

Приклади:

1. Знайдіть $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$.

Оскільки $\sin 3x \cong 3x$, $\operatorname{tg} 5x \cong 5x$ при $x \rightarrow 0$, то за твердженням 2 дістанемо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}.$$

2. Знайдіть $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\arcsin(x-3)}{x^2 - 5x + 6}$.

Оскільки $\arcsin(x-3) \cong x-3$ при $x \rightarrow 3$, то за твердженням 2 дістанемо:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\arcsin(x-3)}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-2} = 1.$$

3. Знайдіть $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 4x}{x^2}$.

Оскільки $\ln \cos 4x = \ln(1 + \cos 4x - 1) \cong \cos 4x - 1$ при $x \rightarrow 0$, то за твердженням 2 дістане-

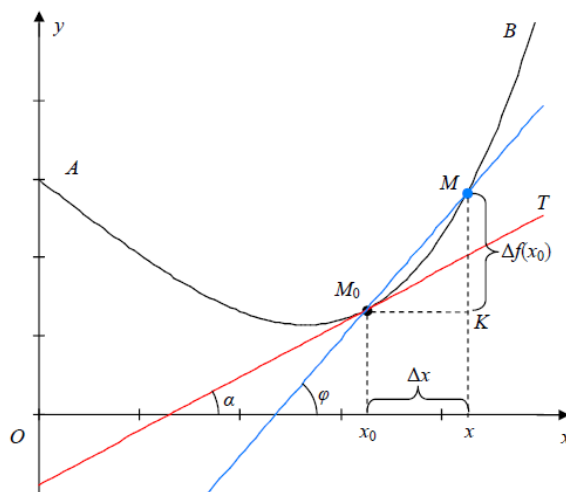
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 2x}{x^2} = -8.$$

2.2. Диференціальне числення функції однієї змінної

Задачі, що приводять до поняття похідної

1. Задача про дотичну

Пряма M_0T , яка є граничним положенням січної M_0M , коли точка M вздовж кривої AB наближається до точки M_0 , називається дотичною до кривої AB в точці M_0 .



$$\angle MM_0K = \varphi \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{MK}{M_0K} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо $M \rightarrow M_0$, то $x \rightarrow x_0$, $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta f(x_0) \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow \alpha$

Рівняння дотичної матиме вигляд $y=kx+b$, де кутовий коефіцієнт

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\varphi \rightarrow \alpha} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

2. Задача про швидкість рухомої точки

Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $S = S(t)$, де S – шлях, пройдений за час t .

Якщо M_0 – положення матеріальної точки в момент часу t , то в момент часу $t+\Delta t$ вона буде в точці M , пройдений шлях буде визначений як $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$. У механіці відношення $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ називається середньою швидкістю на даному шляху, тоді як миттєва швидкість матеріальної точки в момент часу t :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S(t)}{\Delta t}.$$

Означення похідної

Якщо функція $f(x)$ визначена в околі точки x_0 , точка x – точка цього околу ($x \neq x_0$), то похідною функції $f(x)$ в точці x_0 називається границя:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

В термінах приростів можна сформулювати це означення:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

Тобто, похідною функції $f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції $\Delta f(x_0)$ до приросту аргументу Δx в цій точці, за умови $\Delta x \rightarrow 0$.

Функція, яка має скінченну похідну в точці x_0 , називається диференційовною в цій точці.

Операцію знаходження похідної від функції $f(x)$ називають диференціюванням цієї функції.

Похідна суми, добутку і частки

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовані в точці x , то в цій точці

диференційовані

$$u(x) + v(x), u(x) - v(x), u(x) \cdot v(x), \frac{u(x)}{v(x)} \quad (v(x) \neq 0)$$

При цьому:

$$\begin{aligned} (u + v)' &= u' + v'; & (u - v)' &= u' - v'; \\ (u \cdot v)' &= u'v + uv'; & \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2}. \end{aligned}$$

Похідна складеної функції

Якщо функція $\varphi(x)$ диференційована в точці x , а функція $f(u)$ диференційована в точці u , то

$$(f(\varphi(x)))' = f'(u) \cdot \varphi'(x)$$

Похідна оберненої функції

Нехай функція $\varphi(x)$ строго монотонна і неперервна на відрізку $[a; b]$. Якщо в точці $x \in (a; b)$ існує похідна $f'(x) \neq 0$, то обернена функція $x = f'(y)$ в точці $y = f(x)$ має похідну:

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}.$$

Похідні основних елементарних функцій

- 1) $c' = 0, c = const$;
- 2) $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, (\alpha - \text{довільне число})$;
- 3) $(a^x)' = a^x \ln a, (a > 0, a \neq 1)$;
- 4) $(e^x)' = e^x$;
- 5) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, (x > 0, a > 0, a \neq 1)$;
- 6) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
- 7) $(\sin x)' = \cos x$;
- 8) $(\cos x)' = -\sin x$;
- 9) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi, n \in \mathbb{Z})$;
- 10) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, (x \neq \pi, n \in \mathbb{Z})$;
- 11) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (|x| < 1)$;
- 12) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (|x| < 1)$;
- 13) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

- 14) $(\operatorname{arccctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$
- 15) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$
- 16) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$
- 17) $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$
- 18) $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, (x \neq 0).$

Приклади:

1. $x' = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1.$

2. $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$

4. $y = 3x^4 - 2x + \sin x - \operatorname{tg} x;$

$$y' = (3x^4 - 2x + \sin x - \operatorname{tg} x)' = 3(x^4)' - 2 \cdot x' + (\sin x)' - (\operatorname{tg} x)' =$$

$$= 3 \cdot 4x^3 - 2 + \cos x - \frac{1}{\cos^2 x} = 12x^3 - 2 + \cos x - \frac{1}{\cos^2 x}.$$

5. $y = x^5 \operatorname{ctg} x;$

$$y' = (x^5 \operatorname{ctg} x)' = (x^5)' \operatorname{ctg} x + x^5 (\operatorname{ctg} x)' = 5x^4 \operatorname{ctg} x + x^5 \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) =$$

$$= x^4 \left(\frac{5 \cos x}{\sin x} - \frac{x}{\sin^2 x}\right) = x^4 \cdot \frac{5 \cos x \sin x - x}{\sin^2 x}.$$

6.

$$y = \frac{\sqrt{x} + \cos x}{e^x + \ln x};$$

$$y' = \left(\frac{\sqrt{x} + \cos x}{e^x + \ln x} \right)' = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x \right)(e^x + \ln x) - (\sqrt{x} + \cos x) \left(e^x + \frac{1}{x} \right)}{(e^x + \ln x)^2}.$$

7.

$$y = \sin(x^2 + x - 1);$$

$$y' = \left(\sin(x^2 + x - 1) \right)' = \cos(x^2 + x - 1) \cdot (x^2 + x - 1)' = \cos(x^2 + x - 1) \cdot (2x + 1)$$

8.

$$y = \cos^3(\sqrt{x} + 2x + 5);$$

$$\begin{aligned} y' &= \left(\cos^3(\sqrt{x} + 2x + 5) \right)' = 3 \cos^2(\sqrt{x} + 2x + 5) \cdot \left(\cos(\sqrt{x} + 2x + 5) \right)' = \\ &= 3 \cos^2(\sqrt{x} + 2x + 5) \cdot \sin(\sqrt{x} + 2x + 5) \cdot (\sqrt{x} + 2x + 5)' = \\ &= 3 \cos^2(\sqrt{x} + 2x + 5) \cdot \sin(\sqrt{x} + 2x + 5) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2 \right). \end{aligned}$$

Похідна функції, заданої параметрично

Функція називається заданою параметрично, якщо вона представлена залежністю величини y від величини x , кожна з яких визначається залежно від параметра t :

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Нехай функції $x = \varphi(t)$ і $y = \psi(t)$ визначені в деякому околі точки t_0 і диференційовані в цій точці, причому $\varphi'(t_0) \neq 0$. Якщо функція $x = \varphi(t)$ строго монотонна в цьому околі точки t_0 , то параметрично задана функція $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ в точці $x_0 = \varphi(t_0)$ має похідну:

$$y'_x(x_0) = \frac{\psi'_t(t_0)}{\varphi'_t(t_0)}.$$

Приклад:

Знайти похідну функції, заданої параметрично

$$\begin{cases} x = \ln(\operatorname{ctg} t), \\ y = 1 / \cos^2 t. \end{cases}$$

$$y'_t = \left(\frac{1}{\cos^2 t} \right)' = (\cos^{-2} t)' = -2 \cos^{-3} t \cdot (\cos t)' = -2 \cos^{-3} t \cdot (-\sin t) = \frac{2 \sin t}{\cos^3 t},$$

$$x'_t = (\ln(\operatorname{ctg} t))' = \frac{1}{\operatorname{ctg} t} \cdot (\operatorname{ctg} t)' = -\frac{1}{\operatorname{ctg} t \cdot \sin^2 t} = -\frac{1}{\cos t \cdot \sin t},$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2 \sin t \cdot \cos t \cdot \sin t}{\cos^3 t \cdot (-1)} = -2 \operatorname{tg}^2 t.$$

Похідна функції неявно заданої

Нехай задано рівняння виду $F(x, y) = 0$, де $F(x, y)$ – функція двох змінних x і y . Якщо при кожному фіксованому значенні x із деякої множини D , існує значення y таке, що пара чисел (x, y) задовольняє дане рівняння, то кажуть, що рівняння $F(x, y) = 0$ визначає на множині D неявну функцію $y = \Phi(x)$.

В деяких випадках рівняння $F(x, y) = 0$ можна розв'язати відносно змінної y і отримати залежність $y = \Phi(x)$ у явному вигляді.

Наприклад:

Нехай дано рівняння

$$xe^y + \ln(x) - 1 = 0.$$

З нього можна отримати залежність:

$$e^y = \frac{1 - \ln(x)}{x}$$

$$y = \ln\left(\frac{1 - \ln(x)}{x}\right)$$

Остаточно: $y = \ln(1 - \ln x) - \ln x$.

Однак такий явний вираз y через x з використанням лише елементарних функцій можна отримати далеко не з будь-якого рівняння $F(x, y) = 0$.

Для того щоб знайти похідну y'_x функції $y = \Phi(x)$ заданої неявно рівнянням $F(x, y) = 0$ необхідно знайти похідну лівої і правої частини рівності, вважаючи, що x – вільна змінна, а y – функція $y = \Phi(x)$ від x (проміжний аргумент). Після чого необхідно виразити y з отриманої рівності. Зауважимо, що y'_x буде виражатися як функція змінних x і y .

Наприклад:

Знайти похідну функції, яка задана неявно

$$y^2 + 2xy + 4 = 0.$$

$$(y^2 + 2xy + 4)' = (0)', \quad 2yy' + (2x)'y + 2xy' + (4)' = 0, \quad 2yy' + 2y + 2xy' = 0,$$

$$y'(2y + 2x) + 2y = 0, \quad y' = -\frac{2y}{2y + 2x}, \quad y' = -\frac{2y}{2(y + x)} = -\frac{y}{y + x}.$$

Логарифмічне диференціювання

Якщо функція визначена через операції множення, ділення та піднесення до степеня елементарних функцій, то при знаходженні похідної даної функції буває зручно перейти від явного виразу $y = f(x)$ залежності y від x до неявного у вигляді $\ln y = \ln f(x)$. Цей прийом диференціювання називають логарифмічним диференціюванням.

Наприклад:

$$y = \frac{x^3(x^2 + 1)e^x}{(x - 1)\sqrt{3x + 5}}$$

$$\ln y = \ln \frac{x^3(x^2 + 1)e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}};$$

$$\ln y = \ln x^3 + \ln(x^2 + 1) + \ln e^x - \ln(x-1) - \ln \sqrt{3x+5};$$

$$\ln y = 3 \ln x + \ln(x^2 + 1) + x - \ln(x-1) - \frac{1}{2} \ln(3x+5).$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 3 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x + 1 - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3x+5} \cdot 3;$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2+1} + 1 - \frac{1}{x-1} - \frac{3}{6x+10}.$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2+1} + 1 - \frac{1}{x-1} - \frac{3}{6x+10} \right);$$

$$y' = \frac{x^3(x^2+1)e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}} \cdot \left(\frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2+1} + 1 - \frac{1}{x-1} - \frac{3}{6x+10} \right).$$

Похідна степенево-показникового виразу

Прийом логарифмічного диференціювання зручно застосовувати до так званих степенево-показникових функцій виду

$$y = (u(x))^{v(x)}$$

Тобто

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln(u(x))^{v(x)} ; \\
\ln y &= v(x) \cdot \ln(u(x)) ; \\
\frac{1}{y} \cdot y' &= v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) ; \\
y' &= y \cdot \left(v'(x) \cdot \ln(u(x)) + \frac{v(x) \cdot u'(x)}{u(x)} \right) ; \\
y' &= (u(x))^{v(x)} \cdot \left(v'(x) \cdot \ln(u(x)) + \frac{v(x) \cdot u'(x)}{u(x)} \right) .
\end{aligned}$$

Наприклад:

Знайти похідну степенєво-показникової функції

$$y = (\ln x)^{e^x} .$$

$$\ln y = e^x \ln(\ln x) , \quad \frac{y'}{y} = (e^x)' \ln(\ln x) + e^x (\ln(\ln x))' ,$$

$$\frac{y'}{y} = e^x \ln(\ln x) + e^x \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} ,$$

$$y' = y \cdot e^x \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{x \ln x} \right) ,$$

$$y' = (\ln x)^{e^x} \cdot e^x \cdot \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{x \ln x} \right) .$$

Диференціал

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 . Надамо аргументу приросту Δx так, щоб точка $x = x_0 + \Delta x$ належала цьому околу. Розглянемо приріст функції

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Якщо приріст функції $\Delta f(x_0)$ в точці x_0 можна подати у вигляді

$$\Delta f(x_0) = A(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(x_0, \Delta x) \cdot \Delta x,$$

де $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(x_0, \Delta x) = 0$ і число $A(x_0)$ не залежить від Δx ,

то функцію називають диференційовною в точці x_0 .

Другий доданок цієї формули є нескінченно малою вищого порядку порівняно з першим доданком:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x_0, \Delta x) \cdot \Delta x}{A(x_0) \cdot \Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x_0, \Delta x)}{A(x_0)} = \frac{0}{A(x_0)} = 0,$$

тому перший доданок складає головну частину приросту функції.

Головна, лінійна відносно Δx частина приросту функції $f(x)$ в точці x_0 називається диференціалом цієї функції в точці x_0 і позначається $df(x_0)$. Таким чином:

$$df(x_0) = A(x_0) \cdot \Delta x.$$

Функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли в цій точці існує похідна $f'(x_0)$. Причому, якщо функція $f(x)$ диференційовна, то $A(x_0) = f'(x_0)$.

Отже, можна записати:

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Якщо диференціалом незалежної змінної x назвати за означенням диференціал функції $f(x) = x$, то

$$df(x_0) = f'(x_0)dx,$$

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx},$$

тобто похідна функції в точці x_0 дорівнює відношенню диференціала цієї функції в точці x_0 до диференціала аргументу.

Наближені обчислення за допомогою диференціала

Оскільки диференціал є головною частиною приросту функції $f(x)$ точці x_0 , то при досить малому Δx можна говорити про наближену рівність та її наслідок:

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x,$$

Останню формулу називають формулою наближених обчислень за допомогою диференціала.

Наприклад:

Обчислити наближено за допомогою диференціала:

$$\sqrt[3]{27,54}$$

Розв'язок:

$$y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 27,54, \quad x = x_0 + \Delta x = 27 + 0,54, \quad x_0 = 27, \quad \Delta x = 0,54.$$

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad y'(27) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27}, \quad y(27) = \sqrt[3]{27} = 3,$$

$$y(27,54) \approx 3 + \frac{1}{27} 0,54 = 3,02.$$

2.3. Диференціальне числення функції багатьох змінних

Нехай $z = f(x, y)$ функція двох змінних x та y . Будемо вважати, що змінна x набула приросту Δx , а змінна y при цьому залишається незмінною.

Тоді різницю:

$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = \Delta z_x$ – називають частинним приростом функції по змінній x .

Аналогічно різницю:

$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta z_y$ – називають частинним приростом функції по змінній y .

Складемо відношення $\frac{\Delta z_x}{\Delta x}$ та $\frac{\Delta z_y}{\Delta y}$, знайдемо їх границі за умови $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x} = z'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, f'_x \quad - \text{частинна похідна по змінній } x \text{ від функції } z = f(x, y);$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\Delta z_y}{\Delta y} = z'_y, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, f'_y \quad - \text{частинна похідна по змінній } y \text{ від функції } z = f(x, y).$$

Правила знаходження частинних похідних

Частинну похідну функції багатьох змінних знаходять як звичайну похідну функції однієї змінної, вважаючи іншу змінну константою.

Наприклад:

1. Знайти частинні z'_x, z'_y від функції $z = 3y^3 + 7xy + \cos y$.

Розв'язок:

$$z'_x \Big|_{y=\text{const}} = (3y^3 + 7xy + \cos y)'_x = (3y^3)'_x + (7xy)'_x + (\cos y)'_x = 0 + 7y + 0 = 7y;$$

$$z'_y \Big|_{x=\text{const}} = (3y^3 + 7xy + \cos y)'_y = (3y^3)'_y + (7xy)'_y + (\cos y)'_y = y^2 + 7x - \sin y.$$

2. Знайти частинні z'_x, z'_y від функції $z = \cos y \cdot (9x^4 + y^2)$.

Розв'язок:

$$z'_x \Big|_{y=\text{const}} = (\cos y \cdot (9x^4 + y^2))'_x = \cos y \cdot (9x^4 + y^2)'_x = \cos y (36x^2 + 0) = 36x^2 \cos y;$$

$$z'_y \Big|_{x=\text{const}} = (\cos y \cdot (9x^4 + y^2))'_y = (\cos y)'_y \cdot (9x^4 + y^2) + \cos y (9x^4 + y^2)'_y =$$

$$= -\sin y (9x^4 + y^2) + \cos y (0 + 2y) = -\sin y (9x^4 + y^2) + 2y \cos y.$$

Частинні диференціали

Частинний диференціал функції двох незалежних змінних $z = f(x, y)$ рівний добутку відповідної частинної похідної z'_x або z'_y на диференціал цієї змінної.

Позначають:

$$d_x z = z'_x dx, \quad d_y z = z'_y dy.$$

Повний диференціал функції двох змінних

Повний приріст функції двох незалежних змінних $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Функція $z = f(x, y)$ називається диференційованою в точці $M(x; y)$, якщо її повний приріст в цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y;$$

де A, B – дійсні числа, що не залежать від Δx , і Δy , α і β нескінченно малі функції від Δx , і Δy :

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0 \text{ і } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

Якщо $z = f(x, y)$ диференційована в точці $M(x; y)$, то вона має в цій точці частинні похідні і її приріст:

$$\Delta z = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y.$$

Щоб функція $z = f(x, y)$ була диференційованою в точці, необхідно, щоб вона мала в цій точці частинні похідні і достатньо, щоб вона була в цій точці неперервна.

Повним диференціалом dz диференційованої в точці $M(x; y)$ функції $z = f(x, y)$ називається лінійна відносно Δx і Δy частина повного приросту цієї функції в точці $M(x; y)$.

$$\begin{aligned} dz = A\Delta x + B\Delta y &= z'_x \Delta x + z'_y \Delta y = \left| \Delta x = dx, \Delta y = dy \right| = \\ &= z'_x dx + z'_y dy, \end{aligned}$$

$$\boxed{dz = z'_x dx + z'_y dy.}$$

Приклад:

Визначити повний диференціал функції:

$$z = 3axy - x^3 - y^3$$

Розв'язок:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = (3ay - 3x^2) dx + (3ax - 3y^2) dy.$$

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

3.1. Інтегральне числення функції однієї змінної. Невизначений інтеграл

Означення первісної функції та невизначеного інтеграла

Функція $F(x)$ називається *первісною функції* $f(x)$ на проміжку $[a, b]$, якщо $F(x)$ диференційовна на $[a, b]$ і для $x \in [a, b]$:

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Якщо функція має первісну, то вона має безліч первісних, будь-які дві з них відрізняються одна від одної постійним доданком.

Відповідно, для даної функції $f(x)$ достатньо знайти тільки яку-небудь одну первісну функцію $F(x)$, щоб знати всі її первісні, так як вони відрізняються одна від одної сталими доданками. Отже, вираз $F(x) + C$, де C – довільна стала, являє собою загальний вигляд функції, яка має своєю похідною функцію $f(x)$ або диференціал $f(x)dx$.

Операція визначення первісних називається *невизначеним інтегруванням*, а вираз, що охоплює сукупність всіх первісних функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ і позначається

$$\int f(x) dx,$$

де $f(x)$ – підінтегральна функція;

$f(x)dx$ – підінтегральний вираз;

x – змінна інтегрування.

З означення невизначеного інтеграла:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Властивості невизначеного інтеграла

1. $(\int f(x)dx)' = f(x).$
2. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, де k – стала;
5. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Таблиця основних невизначених інтегралів

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, ($n \neq -1$), зокрема:
 $\int dx = x + C$, $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$,
 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$

$$2. \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$3. \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1),$$

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

$$4. \quad \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$5. \quad \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$6. \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$7. \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$8. \quad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$9. \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$10. \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$11. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm A}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm A} \right| + C.$$

$$12. \quad \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Теорема (про інваріантність формул інтегрування).

Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ – диференційовна функція, то

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

Ця властивість невизначеного інтеграла означає, що та чи інша формула для невизначеного інтеграла залишається справедливою, незважаючи на те, якою є змінна інтегрування – незалежною змінною, чи функцією, що має неперервну похідну.

Приклади:

$$1. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 3} \right| + C.$$

$$2. \quad \int \sqrt{x+5} dx = \int \sqrt{x+5} d(x+5) = \frac{2}{3} \sqrt{(x+5)^3} + C.$$

$$3. \quad \int \frac{dx}{3+4x} = \frac{1}{4} \int \frac{d(3+4x)}{3+4x} = \frac{1}{4} \ln |3+4x| + C.$$

$$4. \quad \int \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C.$$

5.

$$\int \sin^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x \, dx = - \int (1 - \cos^2 x) \, d(\cos x) = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

$$\begin{aligned} 6. \quad \int (e^x + 1)^3 \, dx &= \int (e^{3x} + 3e^{2x} + 3e^x + 1) \, dx = \int e^{3x} \, dx + 3 \int e^{2x} \, dx + \\ &+ 3 \int e^x \, dx + \int dx = \frac{1}{3} e^{3x} + \frac{3}{2} e^{2x} + 3e^x + x + C. \end{aligned}$$

7.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} \, dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} \, d(\sin x) = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} - \int \sin x \, d(\sin x) = \ln|\sin x| - \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

8.

$$\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} \, dx = \int \frac{2 \cdot 2^x - \frac{1}{5} \cdot 5^x}{2^x \cdot 5^x} \, dx = 2 \int 5^{-x} \, dx - \frac{1}{5} \int 2^{-x} \, dx = -\frac{2}{\ln 5} \cdot 5^{-x} + \frac{1}{5 \ln 2} \cdot 2^{-x} + C.$$

9.

$$\int \frac{x \, dx}{5 + 7x^2} = \frac{1}{14} \int \frac{d(5 + 7x^2)}{5 + 7x^2} = \frac{1}{14} \ln(5 + 7x^2) + C.$$

Метод інтегрування частинами

Якщо функції $u=u(x)$ і $v(x)$ мають неперервні похідні $u'(x)$ і $v'(x)$. Тоді має місце формула:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

Ця формула називається формулою *інтегрування частинами*. Вона дає змогу від інтегрування виразу $u \, dv$ переходити до інтегрування виразу $v \, du$.

При застосуванні формули потрібно розкласти підінтегральний вираз на множники u і dv , з яких перший диференціюється, а другий інтегрується при переході до інтеграла у правій частині. Як правило, потрібно намагатися, щоб інтегрування диференціала dv було зручним і щоб $\int vdu$ був або табличним, або зводився до табличного відомими способами.

Під час знаходження функції v за диференціалом dv вважають, що стала $C=0$, оскільки на кінцевий результат ця стала не впливатиме.

Розглянемо деякі типи інтегралів, які зручно знаходити методом інтегрування частинами:

1) інтеграли вигляду $\int P_n(x)e^{kx} dx, \int P_n(x)\sin kx dx, \int P_n(x)\cos kx dx,$

де $P_n(x)$ – многочлен степеня n від x , k – дійсне число.

У таких інтегралах використовують: $u = P_n(x)$.

2) інтеграли вигляду $\int P_n(x)\ln x dx, \int P_n(x)\arcsin x dx, \int P_n(x)\arctg x dx$

де $P_n(x)$ – многочлен степеня n від x .

У таких інтегралах використовують: $dv = P_n(x)dx$.

3) інтеграли вигляду $\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx, \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx,$

де α, β – дійсні числа.

Після двократного застосування формули утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Розв'язуючи це рівняння, знаходять шуканий інтеграл.

Приклади:

1.

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cos 7x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2, \quad dv = \cos 7x \, dx, \\ du = 2x \, dx, \quad v = \frac{1}{7} \sin 7x \end{array} \right| = \frac{1}{7} x^2 \sin 7x - \frac{2}{7} \int x \sin 7x \, dx = \\
&= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \sin 7x \, dx, \\ du = dx, \quad v = -\frac{1}{7} \cos 7x \end{array} \right| = \frac{1}{7} x^2 \sin 7x - \frac{2}{7} \left(-\frac{1}{7} x \cos 7x - \frac{1}{7} \int \cos 7x \, dx \right) = \\
&= \frac{1}{7} x^2 \sin 7x - \frac{2}{49} x \cos 7x + \frac{2}{343} \sin 7x + C.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\int x \ln(x+5) \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln(x+5), \quad dv = x \, dx, \\ du = \frac{dx}{x+5}, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} x^2 \ln(x+5) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 \, dx}{x+5} = \\
&= \frac{1}{2} x^2 \ln(x+5) - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 - 25) + 25}{x+5} \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(x+5) - \\
&- \frac{1}{2} \int \left(x - 5 + \frac{25}{x+5} \right) dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(x+5) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{5}{2} x - \frac{25}{2} \ln|x+5| + C.
\end{aligned}$$

Метод заміни змінної або метод підстановки

Якщо $\int f(x) \, dx = F(x) + C, \quad x \in (a; b),$

і функція $x = \varphi(t)$ визначена та має неперервну похідну, то

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt = F(\varphi(t)) + C, \quad t \in (\alpha; \beta).$$

Дана теорема застосовується, як правило, одним із таких двох способів:

1)

$$\int g(x) dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = t, \\ \varphi'(x) dx = dt \end{array} \right| = \int f(t) dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C.$$

2)

$$\int g(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \psi(t), \\ dx = \psi'(t) dt, \\ t = \psi^{-1}(x). \end{array} \right| = \int g(\psi(t))\psi'(t) dt = G(t) + C = G(\psi^{-1}(x)) + C$$

Для функції $x = \psi(t)$ є обернена функція $t = \psi^{-1}(x)$.

Після обчислення невизначеного інтеграла методом підстановки потрібно від введеної змінної інтегрування перейти до заданої змінної.

Таким чином, при інтегруванні методом заміни змінної використовують підстановки двох видів:

$$t = \varphi(x) \text{ і } x = \psi(t)$$

Ці підстановки підбирають так, щоб нові інтеграли, які одержані після перетворень, були табличними, або зводились до табличних відомими методами.

Приклад:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}} &= \left| \begin{array}{l} \sqrt{2-x} = t, \\ 2-x = t^2, \\ x = 2-t^2, \\ dx = -2t dt \end{array} \right| = -\int \frac{(2-t^2)^2 2t dt}{t} = -2 \int (4-4t^2+t^4) dt = -2 \left(4t - 4\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right) + C = \\ &= -2 \left(4\sqrt{2-x} - 4\frac{\sqrt{(2-x)^3}}{3} + \frac{\sqrt{(2-x)^5}}{5} \right) + C. \end{aligned}$$

3.2. Визначений інтеграл. Застосування визначеного інтеграла

1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

Задача про площу криволінійної трапеції

Нехай на відрізку $[a, b]$ задано функцію $y = f(x) \geq 0$.

Фігура $aABb$, що обмежена графіком функції $y = f(x) \geq 0$ і відрізками прямих $y = 0$, $x = a$, $x = b$, називається *криволінійною трапецією*.

Площу криволінійної трапеції знаходять наступним чином:

Відрізок $[a, b]$ розбивають точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ на n відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$. В кожному з цих відрізків вибирають довільну точку ξ_i , $i = 1, \dots, n$. Отже, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Площа прямокутника з основою Δx_i висотою $f(\xi_i)$ буде рівна $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Сума площ таких прямокутників $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ складе площу ступінчатої фігури.

Отже, площа криволінійної трапеції S :

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

2. Задача про роботу змінної сили

Нехай на матеріальну точку діє сила $F(x)$, яка стала за напрямом і неперервно змінюється за величиною, і нехай під дією сили $F(x)$ точка перемістилася вдовж осі Ox з т. a в т. b ($a < b$). Обчислимо роботу A цієї сили на відрізку $[a, b]$.

Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ на n відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, \dots, n$.

Довжину кожного відрізка вибираємо настільки малою, щоб можна було знехтувати зміною сили. Тоді робота, виконана цією силою на відрізку, буде визначена як $F(\xi_i) \cdot \Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Отже,

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

3. Задача про шлях, що пройшла точка

Нехай точка рухається по прямій зі швидкістю $v = v(t)$ і v - неперервна функція. Шлях S , що пройшла точка за проміжок часу від моменту $t = a$ до моменту $t = b$ ($a < b$) можна визначити, можна визначити, розглядаючи такі малі проміжки часу $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, на які розбивається весь час руху t , на яких зміною швидкості можна знехтувати.

Шлях, який проходить матеріальна точка за такий проміжок часу, буде рівний:

$$v(\xi_i) \cdot \Delta t_i, \text{ де } \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

Отже,

$$S = \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(\xi_i) \cdot \Delta t_i$$

4. Задача про масу неоднорідного стержня

Нехай маємо прямолінійний стержень, який лежить на осі Ox в межах відрізка $[a, b]$.

Густина стержня $\rho = \rho(x)$ - неперервна функція від $x \in [a, b]$.
Знайдемо масу m стержня.

Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ на n відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, \dots, n$, настільки малих, що можна знехтувати зміною густини.

Тоді маса частини стержня довжиною $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ буде рівна $\rho(\xi_i) \cdot \Delta x_i$.

Враховуємо неоднорідність розподілу маси стержня по довжині:

$$m \sim \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Отже,:

$$m = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Означення та умови існування визначеного інтеграла

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a, b]$, $a < b$. Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ на n відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, \dots, n$. На кожному з відрізків візьмемо довільну точку ξ_i і побудуємо суму:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i, \text{ де } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Цей вираз називається інтегральною сумою функції $f(x)$, яка відповідає даному розбиттю відрізка $[a, b]$ і даному вибору точок ξ_i .

Нехай $\max \Delta x_i \rightarrow \lambda$.

Якщо існує скінченна границя сум при $\lambda \rightarrow 0$, яка не залежить ні від розбиття відрізка $[a, b]$ на частини, ні від вибору точок ξ_i , то ця границя

називається *визначеним інтегралом* функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і позначається:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

$f(x)$ називається інтегрованою функцією на відрізку $[a, b]$,

a і b – нижня і верхня межа інтегрування,

$[a, b]$ – відрізок інтегрування.

Відповідно:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Достатня умова інтегрованості: якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона інтегрована на цьому відрізку.

Якщо функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[a, b]$ і неперервна на ньому скрізь, крім скінченного числа точок, то вона інтегрована на цьому відрізку.

Таким чином:

– площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x) \geq 0$:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

– робота змінної сили $F(x)$:

$$A = \int_a^b F(x)dx$$

– шлях, який проходить матеріальна точка за час від $t_1 = a$ до $t_2 = b$:

$$S = \int_a^b v(t)dt$$

– маса неоднорідного стержня з густиною $\rho = \rho(x)$:

$$m = \int_a^b \rho(x) dx$$

Властивості визначеного інтеграла

1. Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz$$

2.
$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

3.
$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

4.
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

(за умови, що функція $f(x)$ інтегрована на максимальному з відрізків $[a, b]$, $[a, c]$, $[a, d]$)

5. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на проміжку $[a, b]$, то і $k \cdot f(x)$, де $k = \text{const}$, також інтегрована на цьому проміжку:

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

6. Якщо функція $f(x)$ і $g(x)$ інтегрована на проміжку $[a, b]$, то і $f(x) + g(x)$ також інтегрована на цьому проміжку:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

7. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на проміжку $[a, b]$, $f(x) \geq 0$ і $a < b$, то:

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

8. Якщо функція $f(x)$ і $g(x)$ інтегрована на проміжку $[a, b]$, $f(x) \leq g(x)$ і $a < b$, то:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

9. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на проміжку $[a, b]$ і $a < b$, то:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Формула Ньютона – Лейбніца

Якщо $F(x)$ є якою-небудь первісною для неперервної функції $f(x)$, коли $x \in [a, b]$, то справедлива формула:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбніца дає практично зручний спосіб обчислення визначеного інтеграла: визначений інтеграл від неперервної функції дорівнює різниці значень довільної її первісної, обчислених від верхньої і нижньої межі інтегрування.

Приклад: Обчислити інтеграли:

1.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1+x} \, dx &= \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \bigg|_0^1 = \frac{2}{3} \cdot (1+x)^{\frac{3}{2}} \bigg|_0^1 = \frac{2}{3} \cdot \left((1+1)^{\frac{3}{2}} - (1+0)^{\frac{3}{2}} \right) = \\ &= \frac{2}{3} \left(2^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2}{3} (\sqrt{8} - 1).\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}} &= \frac{1}{3} \int_{-1}^7 \frac{d(3x+4)}{\sqrt{3x+4}} = \frac{2}{3} \int_{-1}^7 \frac{d(3x+4)}{2\sqrt{3x+4}} = \frac{2}{3} \sqrt{3x+4} \bigg|_{-1}^7 = \frac{2}{3} \sqrt{25} - \frac{2}{3} \sqrt{1} = \\ &= \frac{10}{3} - \frac{2}{3} = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

3.

$$\int_0^4 (1 + e^{\frac{x}{4}}) \, dx = \int_0^4 dx + \int_0^4 e^{\frac{x}{4}} \, dx = x \bigg|_0^4 + 4 \cdot e^{\frac{x}{4}} \bigg|_0^4 = (4 - 0) + (4e - 4 \cdot 1) = 4e.$$

Інтегрування частинами та метод заміни змінної у визначеному інтегралі

Якщо функції $u=u(x)$, $v=v(x)$ мають на відрізку $[a,b]$ неперервну похідну,

то:

$$\boxed{\int_a^b u \, dv = uv \bigg|_a^b - \int_a^b v \, du}$$

Приклади:

1.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2a}} (x+3) \sin ax \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x+3 \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin ax \Rightarrow v = -\frac{1}{a} \cos ax \end{array} \right| =$$

$$-\frac{\frac{\pi}{2a}+3}{a} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{3}{a} \cos 0 + \frac{1}{a^2} \sin ax \Big|_0^{\frac{\pi}{2a}} =$$

$$= 0 + \frac{3}{a} + \frac{1}{a^2} \sin \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{1}{a^2} + \frac{3}{a} = \frac{1+3a}{a^2} \quad 2.$$

$$\int_0^{\pi/4} x \operatorname{tg}^2 x \, dx = \left| \begin{array}{l} x = u \Rightarrow du = (x)' dx \Rightarrow du = dx \\ \operatorname{tg}^2 x \, dx = dv \Rightarrow v = \int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \end{array} \right| = \quad 3.$$

$$= (x(\operatorname{tg} x - x)) \Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} (\operatorname{tg} x - x) \, dx = \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - \left(-\ln |\cos x| - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} - \left(-\ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{\pi^2}{32} + 0 + 0 \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} - \ln \sqrt{2} + \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} - \ln \sqrt{2}$$

$$\int_0^3 x \cdot \operatorname{arctg} x \, dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{arctg} x = u \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2} \\ x \, dx = dv \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \left(\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x \right) \Big|_0^3 - \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{x^2 \, dx}{x^2 + 1} =$$

$$= \left(\frac{9}{2} \operatorname{arctg} 3 - 0 \right) - \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{(x^2 + 1) - 1}{x^2 + 1} \, dx = \frac{9}{2} \operatorname{arctg} 3 - \frac{1}{2} \int_0^3 \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) \, dx =$$

$$= \frac{9}{2} \operatorname{arctg} 3 - \frac{1}{2} (x - \operatorname{arctg} x) \Big|_0^3 = \frac{9}{2} \operatorname{arctg} 3 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 3 = 5 \operatorname{arctg} 3 - \frac{3}{2}.$$

4.

$$\int_1^e (1 + \ln x)^2 \, dx = \left| \begin{array}{l} (1 + \ln x)^2 = u \Rightarrow du = 2(1 + \ln x) \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ dx = dv \Rightarrow v = x \end{array} \right| =$$

$$= (x(1 + \ln x)^2) \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot 2(1 + \ln x) \cdot \frac{1}{x} \, dx = \left(e(1+1)^2 - (1 + \ln 1)^2 \right) - \int_1^e 2(1 + \ln x) \, dx =$$

5.

$$\begin{aligned}
 &= \left| \begin{array}{l} 1 + \ln x = u \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ \int_1^e \frac{2x}{x} dx = \frac{1}{5} (e^5 - 2) \end{array} \right| = \left((2x(1 + \ln x)) \Big|_1^e - \int_1^e \frac{2x}{x} dx \right) = \\
 &= 4e - 1 - (4e - 2) + 2x \Big|_1^e = 4e - 1 - 4e + 2 + 2e - 2 = 2e - 1. \\
 \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x \, dx &= \left| \begin{array}{l} e^{2x} = u \Rightarrow du = 2e^{2x} dx \\ \cos x \, dx = dv \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right| = e^{2x} \sin x \Big|_0^{\pi/2} - 2 \int_0^{\pi/2} e^{2x} \sin x \, dx = \\
 &= \left| \begin{array}{l} e^{2x} = u \Rightarrow du = 2e^{2x} dx \\ \sin x \, dx = dv \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right| = e^\pi - 2 \left(-e^{2x} \cos x \Big|_0^{\pi/2} + 2 \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x \, dx \right) = \\
 &= e^\pi - 2(-e^\pi \cdot 0 + e^0 \cdot 1) - 4 \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x \, dx = e^\pi - 2 - 4 \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x \, dx.
 \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x \, dx = e^\pi - 2 - 4 \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x \, dx \Rightarrow 5 \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x \, dx = e^\pi - 2.$$

Якщо виконуються умови:

- 1) функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$;
- 2) $\psi(x)$ і $x' = \psi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$;
- 3) $\psi(\alpha) = a, \psi(\beta) = b, a < \psi(x) < b$, коли $t \in [\alpha, \beta]$, то
справджується рівність:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\psi(t)) \psi'(t) dt$$

Якщо при знаходженні невизначеного інтеграла за допомогою підстановки $x = \psi(t)$ у первісній функції необхідно було від змінної t повернутися до x , то при обчисленні визначеного інтеграла замість цього треба змінити межі інтегрування. Нижня межа α знаходиться як розв'язок рівняння $a = \psi(t)$, а верхня межа β як розв'язок рівняння $b = \psi(t)$.

Якщо $\psi(x)$ не монотонна, то може статися, що ці рівняння дадуть кілька різних пар значень α і β , у такому випадку можна взяти будь-яку пару.

Приклади: Обчислити інтеграл шляхом заміни змінної

1.

$$\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} \text{Нехай } \sqrt{x} = t, \text{ тоді} \\ x = t^2, \quad dx = 2t dt. \\ \text{При } x_1 = 0: t_1 = \sqrt{0} = 0; \\ \text{при } x_2 = 4: t_2 = \sqrt{4} = 2. \end{array} \right| = \int_0^2 \frac{2t dt}{1 + t} = 2 \int_0^2 \frac{(t+1) - 1}{t+1} dt = 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{t+1} \right) dt =$$

$$= 2(t - \ln |t+1|) \Big|_0^2 = 2(2 - \ln 3 - 0 + \ln 1) = 4 - 2 \ln 3.$$

2.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 4} dx &= \left| \begin{array}{l} \sqrt{e^x - 1} = t \Rightarrow e^x - 1 = t^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow e^x = t^2 + 1 \Rightarrow x = \ln |t^2 + 1| \Rightarrow dx = \frac{2t}{t^2 + 1} dt. \\ x_1 = 0: t_1 = \sqrt{e^0 - 1} = 0; \\ x_2 = \ln 5: t_2 = \sqrt{e^{\ln 5} - 1} = \sqrt{5 - 1} = 2. \end{array} \right| = \\
&= \int_0^2 \frac{(t^2 + 1) \cdot t \cdot \frac{2t}{t^2 + 1}}{t^2 + 1 + 4} dt = \int_0^2 \frac{2t^2 dt}{t^2 + 5} = 2 \int_0^2 \frac{(t^2 + 5) - 5}{t^2 + 5} dt = 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{5}{t^2 + 5} \right) dt = \\
&= 2 \left(t - 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} \right) \Big|_0^2 = 2 \left(2 - \sqrt{5} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} - 0 + 0 \right) = 4 - 2\sqrt{5} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt, \\ \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} = 2 |\cos t|, \\ x_1 = 0: t_1 = \arcsin \frac{x}{2} = \arcsin 0 = 0; \\ x_2 = 1: t_2 = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}. \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2 |\cos t| \cdot 2 \cos t dt = \\
& \quad | \text{при } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{6} \text{ } \cos t > 0, \text{ тому } |\cos t| = \cos t | \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2 \cos^2 t dt = \left| 2 \cos^2 t = 1 + \cos 2t \right| = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t) dt = 2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \\
&= 2 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} - 0 - 0 \right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

4.1. Основні поняття і означення

Диференціальними називаються рівняння, які пов'язують між собою незалежну змінну, шукану функцію і похідні або диференціали цієї функції.

Якщо невідома функція є функцією однієї змінної, то диференціальне рівняння називається *звичайним*. Надалі розглядатимемо тільки звичайні диференціальні рівняння.

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної, яка входить в дане рівняння.

Диференціальне рівняння n -го порядку, не розв'язане відносно найвищої похідної, в загальному вигляді подається так:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Якщо це рівняння можна розв'язати відносно найвищої похідної, то воно має вигляд:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд:

$$F(x, y, y') = 0$$

або

$$y' = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$dy = f(x, y)dx$$

Якщо функція $f(x, y)$ є дробом $f(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$, то рівняння можна переписати у симетричній формі:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Загальним розв'язком такого диференціального рівняння в області D називається функція $y = \varphi(x, C)$, яка в результаті підстановки в диференціальне рівняння перетворює його на тотожність по x при будь-яких допустимих значеннях сталої C .

Процес знаходження розв'язку називається інтегруванням диференціального рівняння.

Частинним називається будь-який розв'язок $y = \varphi(x, C)$, який одержується із загального розв'язку при певному значенні сталої $C = C_0$.

Задачею Коші називається задача знаходження частинного розв'язку $y = \varphi(x)$, диференціального рівняння, що задовольняє умову $y(x_0) = y_0$. Умова $y(x_0) = y_0$ називається початковою умовою диференціального рівняння.

Графік розв'язку диференціального рівняння називається *інтегральною кривою* цього рівняння.

Якщо функція $f(x, y)$ і її похідна f'_y неперервні в області D , то розв'язок диференціального рівняння з початковою умовою $y(x_0) = y_0$ існує і єдиний.

Точки, в яких не виконується ця умова, називаються особливими.

4.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння виду

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

називається диференціальним рівнянням з *відокремлюваними змінними*, якщо функції $M(x, y)$ та $N(x, y)$ можна подати у вигляді:

$$M(x, y) = M_1(x) \cdot N_1(y), \quad N(x, y) = M_2(x) \cdot N_2(y).$$

Аналогічно рівняння виду $y' = f(x, y)$, де $f(x, y) = M(x) \cdot N(y)$ є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Рівняння розв'язується шляхом відокремлення змінних. За допомогою алгебраїчних перетворень необхідно досягти того, щоб біля dx множником була функція, яка залежить тільки від змінної x , а біля dy – функція, яка залежить тільки від змінної y .

Рівняння можна подати у вигляді:

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

Отримаємо диференціальне рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0,$$

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C, C = const,$$

Приклад:
$$\int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = -\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + C.$$

Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$xy(1+x^2)y' = 1+y^2.$$

Розв'язання:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$xy(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 1+y^2.$$

$$\frac{y}{1+y^2}dy = \frac{dx}{x(1+x^2)} \Rightarrow \int \frac{y}{1+y^2}dy = \int \frac{dx}{x(1+x^2)}.$$

$$\int \frac{y}{1+y^2} dy = \frac{1}{2} \int \frac{d(y^2+1)}{1+y^2} = \frac{1}{2} \ln(y^2+1) + \ln|C_1|$$

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x dx}{1+x^2} = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + \ln|C_2|$$

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow A(x^2+1) + (Bx+C)x = 1 \Rightarrow A=1, B=-1, C=0$$

$$y^2+1 = \frac{C^2 x^2}{x^2+1} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{C^2 x^2}{x^2+1} - 1}$$

$$\ln(y^2+1) = \ln \frac{x^2}{x^2+1} + \ln C^2 \quad \left(\text{тут } \ln C^2 = 2 \ln |C_2| - 2 \ln |C_1| = \ln \frac{C_2^2}{C_1^2} \right)$$

4.3. Однорідні диференціальні рівняння

Рівняння виду

$$y' = f(x, y)$$

називається *однорідним* диференціальним рівнянням, якщо функція $f(x, y)$ – однорідна.

Функція називається *однорідною*, якщо при множенні аргументів на довільний параметр $t \neq 0$ значення функції не змінюється, тобто: $f(x, y) = f(tx, ty)$. Наприклад:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad f(tx, ty) = \frac{t^2 xy}{t^2(x^2 + y^2)} = \frac{xy}{x^2 + y^2} = f(x, y)$$

Однорідні диференціальні рівняння розв'язуються за допомогою підстановки $y = ux$, де $u = u(x)$.

Відповідно,

$$y' = x \frac{du}{dx} + u$$

зводиться до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад.

Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$xy' = \frac{xy - y^2}{2y - 2x}.$$

Розв'язання:

$$y' = \frac{xy - y^2}{2xy - 2x^2}$$

Так як права частина рівняння – однорідна функція, то це рівняння однорідне і інтегрується заміною:

$$y = ux$$

$$y' = x \frac{du}{dx} + u$$

$$x \frac{du}{dx} + u = \frac{x(ux) - (ux)^2}{2x(ux) - 2x^2}$$

$$x \frac{du}{dx} + u = \frac{ux^2 - u^2 x^2}{2ux^2 - 2x^2}$$

$$x \frac{du}{dx} + u = \frac{u - u^2}{2u - 2} \Rightarrow x \frac{du}{dx} + u = -\frac{1}{2}u$$

$$x \frac{du}{dx} = -\frac{3}{2}u$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{3}{2} \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{u} = -\frac{3}{2} \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|u| = -\frac{3}{2} \ln|x| + \ln|C|$$

$$u = \frac{C}{x\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{C}{x\sqrt{x}} \Rightarrow y = \frac{C}{\sqrt{x}}.$$

4.3. Лінійні диференціальні рівняння. Рівняння Бернуллі

Рівняння виду

$$y' + p(x)y = q(x),$$

де $p(x)$, $q(x)$ відомі функції, називається *лінійним* диференціальним рівнянням,

Якщо $q(x) = 0$, то рівняння називається *однорідним*. Якщо $q(x) \neq 0$, то рівняння називається *неоднорідним*.

Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді добутку двох функцій $v=v(x)$ та $u=u(x)$ (метод Бернуллі). Підставляємо

$$y = uv, \quad y' = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

і отримаємо

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + p(x)uv = q(x).$$

У лівій частині рівняння винесемо v за дужки:

$$u \frac{dv}{dx} + v \left(\frac{du}{dx} + p(x)u \right) = q(x).$$

Так як одну з функцій можна вибирати довільно, то виберемо таку функцію u , щоб вираз у дужках дорівнював нулю:

$$\frac{du}{dx} + p(x)u = 0.$$

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язавши його, знайдемо функцію $u = u(x)$ (обираємо найпростіший відмінний від нуля частинний розв'язок).

Підставивши знайдену функцію $u(x)$ у рівняння, знову одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$u(x) \cdot \frac{dv}{dx} = q(x).$$

Розв'язавши його, отримаємо функцію $v = v(x, C)$. Тоді

$$y = u(x) \cdot v(x, C).$$

Приклад:

Знайти розв'язок задачі Коші

$$y' + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}.$$

Розв'язання:

$$y = uv, \quad y' = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

$$\begin{aligned} u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + \frac{2xuv}{1+x^2} &= \frac{2x^2}{1+x^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow u \frac{dv}{dx} + v \left(\frac{du}{dx} + \frac{2xu}{1+x^2} \right) &= \frac{2x^2}{1+x^2}. \end{aligned}$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{2xu}{1+x^2} = 0$$

$$\int \frac{du}{u} = - \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$\ln|u| = -\ln(x^2 + 1)$$

$$u = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Підставляємо знайдену функцію $u(x)$ в рівняння і знайдемо функцію $v(x)$:

$$\frac{1}{x^2 + 1} \frac{dv}{dx} = \frac{2x^2}{1 + x^2} \Rightarrow dv = 2x^2 dx$$

$$v = \int 2x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 + C.$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння такий

$$y = uv = \frac{1}{x^2 + 1} \left(\frac{2}{3} x^3 + C \right).$$

Для знаходження частинного розв'язку підставимо задані значення змінних $x = 0, y = \frac{2}{3}$ (початкові умови) в знайдений загальний розв'язок рівняння, звідки знайдемо значення довільної сталої C :

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{0^2 + 1} \left(\frac{2}{3} \cdot 0^3 + C \right) \Rightarrow C = \frac{2}{3}.$$

Значення сталої C підставляємо у загальний розв'язок рівняння і записуємо шуканий частинний розв'язок:

$$y = \frac{1}{x^2 + 1} \left(\frac{2}{3} x^3 + \frac{2}{3} \right).$$

Рівняння Бернуллі

Диференціальне рівняння виду

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad n \in \mathbb{R}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1$$

називається рівнянням Бернуллі.

Розв'язок рівняння шукають, як і розв'язок лінійного диференціального рівняння, використовуючи метод Бернуллі: $y = u \cdot v$, де $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Приклад:

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' + \frac{y}{x} = \ln x \cdot y^2.$$

Розв'язання:

Задане рівняння є рівнянням Бернуллі, тому використаємо заміну

$$y = uv, \quad y' = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + \frac{uv}{x} = \ln x \cdot u^2 v^2$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = 0$$

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|u| = -\ln x \Rightarrow u = \frac{1}{x}.$$

$$\frac{1}{x} \frac{dv}{dx} = \ln x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot v^2$$

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{\ln x}{x} dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{\ln x}{x} dx$$

$$-\frac{1}{v} = \frac{\ln^2 x}{2} + C \Rightarrow v = -\frac{2}{\ln^2 x + 2C}.$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y = \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{2}{\ln^2 x + 2C} \right) = -\frac{2}{x(\ln^2 x + 2C)}.$$

Отже загальний розв'язок заданого диференціального рівняння такий:

$$y = -\frac{2}{x(\ln^2 x + 2C)}.$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Діскант В.І. / В.І. Діскант, Л.Р. Береза, О.П. Грижук, Л.М. Захаренко. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії – К.: Вища шк., 2001. – 303 с.
2. Навчально-методичний посібник до виконання контрольних робіт з вищої математики для студентів технічних спеціальностей заочної форми навчання / Укл.: Р.М. Дідковський, В.С. Ковтуненко, Н.В.

- Олексієнко, І.В. Синько; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси: ЧДТУ, 2014. – 174 с.
3. Клепо В.Ю., Голець В.Л. Вища математика в прикладах і задачах: Навчальний посібник. 2-ге видання. - К.: Центр учбової літератури, 2009. - 594 с.
 4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навч. посіб – К.: А.С.К., 2001. – 648 с.
 5. Конспект лекцій з вищої математики. Лінійна алгебра та аналітична геометрія /Укл.: Олексієнко Н.В., Дідковський Р.М., Кондратьєва О.М.; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси: ЧДТУ, 2016. –94с.
 6. Вступ до математичного аналізу. Навчально-методичний посібник з дисципліни «Вища математика» для здобувачів вищої освіти бакалаврського освітнього рівня технічних спеціальностей усіх форм навчання / [Електронний ресурс] / Упоряд.: Дідковський Р.М., Олексієнко Н.В., Кондратьєва О.М.; Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси: ЧДТУ, 2018. – 114с.
 7. Практикум з інтегрального числення: Частина І. Невизначений інтеграл / Укл.: Р.М. Дідковський, В.В. Сисоєнко, В.О. Щерба. – Черкаси: ЧДТУ, 2005. – 72 с.
 8. Практикум з інтегрального числення: Частина ІІ. Визначений інтеграл / Укл.: Р.М. Дідковський, В.В. Сисоєнко, В.О. Щерба. –Черкаси: ЧДТУ, 2005. – 66 с.
 9. Введення в математичний аналіз: Практикум для студентів технічних спеціальностей. / Укладачі Діскант В. І., Кондратьєва О. М. - Черкаси: ЧДТУ, 2010.- 60с.
 - 10.Методичні рекомендації до практичних занять з вищої математики «Аналітична геометрія на площині і в просторі» для здобувачів освітнього ступеня “бакалавр” для здобувачів освітнього ступеня “бакалавр” спеціальностей 161, 181, 192, 193. [Електронний ресурс] / [упоряд. :

Т.І.Бутенко, С.О.Колінько, В.А.Ващенко; М-во освіти і науки
України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси : ЧДТУ, 2023. – 48 с.