

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ЕЛЕКТРОННИХ ТЕХНОЛОГІЙ, АВТОТРАНСПОРТУ ТА  
МАШИНОБУДУВАННЯ

**КОМП'ЮТЕРНА НЕЧІТКА БАГАТОЦІЛЬОВА  
ОПТИМІЗАЦІЯ В MathCAD**

Навчально-методичний посібник  
для здобувачів галузі знань  
G «Інженерія, виробництво та будівництво»  
(15 «Автоматизація та приладобудування»  
17 «Електроніка, автоматизація та електронні комунікації»)  
усіх форм навчання

Черкаси 2025

УДК 004.942 (075.8)  
К63

*Затверджено вченою радою ФЕТАМ,  
протокол №1 від 18.02.2025 р.,  
згідно з рішенням кафедри приладобудування,  
мехатроніки та комп'ютеризованих технологій  
протокол № 6 від 23.01.2025 р.*

Упорядники: Гальченко В.Я., *д.т.н., професор*, Трембовецька Р.В., *д.т.н., професор*, Тичков В.В., *к.т.н., доцент*  
Рецензент: Федоров Є.Є., *д.т.н., професор*.

**КОМП'ЮТЕРНА НЕЧІТКА БАГАТОЦІЛЬОВА  
ОПТИМІЗАЦІЯ В MathCAD.** Навчально-методичний посібник для  
здобувачів галузі знань G «Інженерія, виробництво та будівництво»  
(15 «Автоматизація та приладобудування», 17 «Електроніка,  
автоматизація та електронні комунікації») усіх форм навчання.  
[Електронний ресурс] / [Упоряд. В.Я. Гальченко, Р.В.  
Трембовецька, В.В. Тичков]; М-во освіти и науки України, Черкас.  
держ. технол. ун-т. - Черкаси: ЧДТУ, 2025. - 49 с.

У навчальному посібнику викладено коротко основні теоретичні положення математичних методів та докладний практичний матеріал щодо розв'язку задач нечіткої багатоцільової оптимізації у середовищі універсального математичного пакета MathCAD. Істотну увагу приділено комп'ютерній реалізації аналізованих методів, містяться комплекти завдань для самостійної роботи та велика кількість прикладів, що сприяють кращому розумінню та засвоєнню матеріалу.

Навчальне електронне видання  
мережного використання

**КОМП'ЮТЕРНА БАГАТОЦІЛЬОВА НЕЧІТКА  
ОПТИМІЗАЦІЯ В MathCAD.**

Навчально-методичний посібник  
для здобувачів освітнього ступенів для здобувачів галузі знань  
галузі знань G «Інженерія, виробництво та будівництво» (15 «Автоматизація  
та приладобудування», 17 «Електроніка, автоматизація та електронні  
комунікації») усіх форм навчання

упорядники: Гальченко Володимир Якович  
Трембовецька Руслана Володимирівна  
Тичков Володимир Володимирович  
*В авторській редакції.*

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b>	4
<b>1 НЕЧІТКА БАГАТОЦІЛЬОВА ОПТИМІЗАЦІЯ</b>	6
1.1 Побудова функції належності нечітких множин	6
1.2 Операції над нечіткими множинами	17
1.3 Оптимізація на нечітких множинах	30
<b>2 ЗАВДАННЯ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ</b>	39
<b>СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ</b>	46
<b>ТЕРМІНИ ТА ВИЗНАЧЕННЯ</b>	48

## ВСТУП

Сучасні задачі прийняття рішень у науці та техніці дедалі частіше характеризуються множинністю цілей, недостатньою визначеністю інформації та конфліктними критеріями. У реальному світі точні значення параметрів часто недоступні, а оцінки переваг, ризиків або витрат носять нечіткий, суб'єктивний або лінгвістичний характер. Саме тому виникає необхідність у потужному математичному апараті, здатному поєднати багатокритеріальну оптимізацію з методами нечіткої логіки.

Нечітка багатокритеріальна оптимізація (НБКО) — це міждисциплінарна галузь, що об'єднує класичну теорію оптимізації, елементи штучного інтелекту та нечітке моделювання. Такий підхід дозволяє формалізувати ситуації, в яких:

- цілі не можна виразити однозначно;
- обмеження представлені приблизно;
- рішення мають враховувати суб'єктивні уподобання експерта чи користувача.

Основу цього підходу складають такі поняття, як нечіткі множини, функції належності, нечіткі обмеження, нечіткі цільові функції та агрегаційні функції для об'єднання критеріїв. Крім того, важливу роль відіграють методи Парето-оптимальності, інтервальні оцінки, а також евристичні й еволюційні алгоритми, пристосовані до роботи в умовах нечіткості.

Мета цієї книги — надати цілісне й водночас практично орієнтоване уявлення про теоретичні основи, моделі та алгоритми нечіткої багатокритеріальної оптимізації. У ній розглянуто:

- формальні постановки задач у нечіткому середовищі;
- методи трансформації нечітких задач у еквівалентні детерміновані моделі;
- сучасні алгоритмічні підходи до знаходження компромісних (Парето-оптимальних) рішень.

Це видання буде корисним для науковців, аспірантів, студентів технічних та інших спеціальностей, а також практиків, які займаються аналізом і прийняттям рішень у складних умовах невизначеності та конфлікту інтересів

В посібнику детально розглядаються окремі теоретичні положення навчальних дисциплін «Оптимізація прийняття рішень у техніці», «Математичне моделювання процесів і систем та методи їх оптимізації» та формуються у здобувачів вміння та навички їх практичного застосування шляхом індивідуального виконання завдань.

Завдання розраховані для здобувачів галузі знань G, які опановують навчальні компоненти.

В системі дистанційної освіти ЧДТУ з дисциплін «Оптимізація прийняття рішень у техніці» <https://moodle.chdtu.edu.ua/course/view.php?id=53>, «Математичне моделювання процесів і систем та методи їх оптимізації» <http://fet.moodle.chdtu.edu.ua/course/view.php?id=18> є електронна версія цього посібника. Також наведені тестові завдання для самоконтролю до кожної теми

відповідного змістового модулю. Після вивчення відповідного теоретичного лекційного матеріалу здобувач самостійно проходить тест-самоконтроль, отримує відповідну кількість балів, та аналізує свій рівень знань і може виконувати тестування необмежену кількість разів.

# 1 НЕЧІТКА БАГАТОЦІЛЬОВА ОПТИМІЗАЦІЯ

Багато сучасних завдань оптимізації характеризуються наявністю недостовірних чи невизначених чинників. Такі ситуації відображають об'єктивну недостатню поінформованість про можливі кількісні значення цих факторів. Подібні задачі називаються *задачами оптимізації при нечіткій інформації*, і моделі їх рішень у цих умовах базуються на апараті нечітких множин Заде.

Класифікація моделей оптимізації при нечіткій інформації щодо характеру опису переваг наступна:

- Моделі нечіткого математичного програмування (НМП);
- Моделі нечітких відносин переваги на множині допустимих альтернатив;
- Моделі нечіткої очікуваної корисності;
- Лінгвістичні моделі оптимізації, що базуються на нечіткій логіці з лінгвістичними значеннями істинності.

Залежно від форми задання нечіткості, яка може виявлятися в нечіткості самих обмежень та цільової функції, існують різні типи задач НМП:

- Оптимізація заданої звичайної функції  $f(x)$  на заданій нечіткій множині допустимих альтернатив  $X$ .

• Нечіткий варіант стандартної задачі математичного програмування. Нечіткий варіант цієї задачі виходить, наприклад, якщо пом'якшити обмеження, тобто, допустити можливість їх порушення з тим чи іншим ступенем або внаслідок формулювання вихідної задачі у формі задачі виконання нечітко визначеної мети.

- Нечітко описана оптимізована функція.
- Задано звичайну оптимізовану функцію  $f(x)$  та систему обмежень  $\varphi_i(x) \leq b_i, i = 1, \dots, m$ , причому параметри в описах функцій  $\varphi_i(x)$  задані у формі нечітких множин.
- Функції  $f(x), \varphi_i(x)$  визначено з точністю до нечітко визначених параметрів цих функцій, які є елементами нечітких множин.

## 1.1. Побудова функції приналежності нечітких множин

*Нечітка множина* – є сукупність елементів довільної природи, щодо яких не можна з певністю стверджувати – належить той чи інший елемент аналізованої сукупності цій множині чи ні.

Формально нечітка множина  $A$  визначається як множина упорядкованих пар або кортежів виду  $\langle x, \mu_A(x) \rangle$ , де  $x$  є елементом деякої універсальної множини або *універсуму*  $X$ ,  $\mu_A(x)$  - *функція приналежності*, яка ставить у відповідність

кожному з елементів  $x \in X$  деяке дійсне число з інтервалу  $[0, 1]$ , тобто, ця функція визначається у формі відображення:

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1].$$

**Носієм нечіткої множини  $A$**  називається звичайна множина  $A_s$ , яка містить ті й лише ті елементи універсуму, для яких значення функції приналежності відповідної нечіткої множини відмінні від нуля. Математично носій нечіткої множини визначається такою умовою:

$$A_s = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\} \quad \forall x \in X.$$

Залежно від кількості елементів у нечіткій множині можна визначити кінцеві та нескінченні нечіткі множини.

Нечітка множина називається **кінцевою** якщо її носій є кінцевою множиною. Така кінцева множина має кінцеву потужність, яка чисельно дорівнює кількості елементів її носія як звичайної множини. Для позначення потужності довільної нечіткої множини  $A$  використовують символ  $card(A)$ . Потужність порожньої множини вважають рівною 0.

**Нескінченні нечіткі множини** – це такі нечіткі множини, носій яких не є кінцевою множиною. У цьому рахунковою нечіткою множиною називають нечітку множину з рахунковим носієм, тобто носій якого має *рахункову* потужність  $S_0$  у звичному значенні. *Нерахункова* нечітка множина – це нечітка множина з *нерахунковим* носієм, тобто носій якого має *нерахункову* потужність чи потужність континууму у звичному значенні.

Нечіткі множини можуть бути задані двома основними способами:

1. У формі списку з явним перерахуванням всіх елементів і відповідних їм значень функції приналежності, що утворюють розглядувану нечітку множину. При цьому часто елементи з нульовими значеннями функції приналежності не вказуються в цьому списку. Це спосіб підходить для задання нечітких множин з кінцевим дискретним носієм та невеликим числом елементів. У цьому випадку нечітку множину зручно записувати у вигляді:

$$A = \{ \langle x_1, \mu_A(x_1) \rangle, \langle x_2, \mu_A(x_2) \rangle, \dots, \langle x_n, \mu_A(x_n) \rangle \},$$

або

$$A = \left\{ \frac{\mu_A(x_1)}{x_1}, \frac{\mu_A(x_2)}{x_2}, \dots, \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} \right\},$$

де  $n$  – розглядуване число елементів нечіткої множини  $A$  (його носія).

Наприклад, маємо як універсум  $X = \{1, 2, 3, \dots\}$  - множини натуральних чисел. Тоді нечітка множина  $A$ , яка представляє в деякому контексті «невелике натуральне число», можна задати так:

$$A = \left\{ \langle 1, 1.0 \rangle, \langle 2, 1.0 \rangle, \langle 3, 0.9 \rangle, \langle 4, 0.8 \rangle, \langle 5, 0.6 \rangle, \langle 6, 0.5 \rangle, \right. \\ \left. \langle 7, 0.4 \rangle, \langle 8, 0.2 \rangle, \langle 9, 0.1 \rangle \right\},$$

або

$$A = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{0,9}{3}, \frac{0,8}{4}, \frac{0,6}{5}, \frac{0,5}{6}, \frac{0,4}{7}, \frac{0,2}{8}, \frac{0,1}{9} \right\}.$$

При цьому елементи для яких  $\mu_A(x) = 0$ , відсутні у списку.

2. Аналітично у вигляді математичного виразу для відповідної функції приналежності. Цей спосіб може бути використаний для задання довільних нечітких множин як з кінцевим, так і з нескінченним носієм. У цьому випадку нечітку множину зручно записати у вигляді:  $A = \{ \langle x, \mu_A(x) \rangle \}$  або  $A = \{ x, \mu_A(x) \}$ , де  $\mu_A(x)$  - деяка функція, задана аналітично у формі математичного виразу  $f(x)$  або графічно у формі деякої кривої.

**Ядром нечіткої множини  $A$**  називається така звичайна множина  $A_1$ , елементи якої задовольняють умові:

$$A_1 = \{ x \in X \mid \mu_A(x) = 1 \}.$$

Наприклад, ядро нечіткої множини  $A$  «невелике натуральне число» дорівнює двоелементній множині  $A_1 = \{1, 2\}$ . Ядро нечіткої множини  $B$  «дійсне число, приблизно рівне нулю» дорівнює одноелементній множині  $B_1 = \{0\}$ . Нечітка множина  $C$  «велике дійсне число» має порожнє ядро.

Визначення нечіткої множини не накладає жодних обмежень на вибір конкретної функції приналежності для його представлення. На практиці зручно використовувати ті з них, які допускають аналітичне представлення у вигляді деякої простої математичної функції.

Як перший тип функцій приналежності розглянемо функції, які складаються з відрізків прямих ліній, утворюючи безперервну або кусково-безперервну функцію. Найбільш характерним прикладом таких функцій є трикутна та трапецієподібна функції приналежності.

**Трикутна функція приналежності** у загальному випадку може бути задана аналітично наступним виразом:

$$f_{\Delta}(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & c \leq x \end{cases}, \quad (1.1)$$

де  $a, b, c$  - деякі числові параметри, що набувають довільних дійсних значень і впорядковані співвідношенням  $a \leq b \leq c$ . Параметри  $a, c$  характеризують основу трикутника, а параметр  $b$  - його вершину. Ця функція приналежності породжує нормальну опуклу унімодальну нечітку множину з носієм – інтервалом  $(a, c)$ , кордонами  $(a, c) / \{b\}$ , ядром  $\{b\}$  та модою  $b$ .

**Трапецієподібна функція приналежності** у загальному випадку може бути задана наступним виразом:

$$f_T(x, a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & d \leq x \end{cases}. \quad (1.2)$$

де  $a, b, c, d$  - деякі параметри, що набувають довільних дійсних значень і впорядковані співвідношенням  $a \leq b \leq c \leq d$ .

Параметри  $a, d$  характеризують нижню основу трапеції, параметри  $b, c$  - верхню основу трапеції. Ця функція приналежності породжує нормальну опуклу нечітку множину з носієм – інтервалом  $(a, d)$ , кордонами  $(a, b) \cup (c, d)$ , ядром  $[b, c]$ .

Ці функції використовуються для задання таких властивостей множин, які характеризують невизначеність типу: «приблизно дорівнює», «середнє значення», «розташований в інтервалі», «подібний до об'єкту», «схожий на предмет».

**Z – подібна крива** або **сплайн-функція** у загальному випадку може бути задана аналітично наступним виразом:

$$f_{z_1}(x, a, b) = \begin{cases} 1, & x < a \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{x-a}{b-a} \cdot \pi\right), & a \leq x \leq b, \\ 0, & x > b \end{cases} \quad (1.3)$$

де  $a, b$  - деякі числові параметри, що набувають довільних дійсних значень і впорядковані співвідношенням  $a < b$ .

Сплайн – функція може бути задана виразом:

$$f_{z_2}(x, a, b) = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ 1 - 2 \cdot \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2, & a < x \leq \frac{a+b}{2} \\ 2 \cdot \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2, & \frac{a+b}{2} < x < b \\ 0, & b \leq x \end{cases} \quad (1.4)$$

Ці функції приналежності породжують нормальні опуклі нечіткі множини з ядром  $(-\infty, a]$  та носієм  $(-\infty, b)$ .

Ці функції використовуються для представлення таких властивостей типу: "мала кількість", "невелике значення", "незначна величина", "низька собівартість продукції", "низький рівень цін", "низька відсоткова ставка" та багатьох інших. Спільним для всіх таких ситуацій є слабкий ступінь прояву тієї чи іншої якісної чи кількісної ознаки.

**S - подібна крива** або **сплайн-функція** у загальному вигляді може бути задана таким виразом:

$$f_{s_1}(x, a, b) = \begin{cases} 1, & x < a \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{x-b}{b-a} \cdot \pi\right), & a \leq x \leq b, \\ 0, & x > b \end{cases} \quad (1.5)$$

де  $a, b$  - деякі числові параметри, що набувають довільних дійсних значень і впорядковані співвідношенням  $a < b$ .

Сплайн – функція також може бути задана виразом:

$$f_{S_2}(x, a, b) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ 2 \cdot \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2, & a < x \leq \frac{a+b}{2} \\ 1 - 2 \cdot \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2, & \frac{a+b}{2} < x < b \\ 1, & b \leq x \end{cases}, \quad (1.6)$$

де  $a, b$  - деякі числові параметри, що набувають довільних дійсних значень і впорядковані співвідношенням  $a < b$ .

Ці функції приналежності породжують нормальні опуклі нечіткі множини з ядром  $[b, +\infty)$  та носієм  $(a, +\infty)$ .

Розглянуті  $S$  – подібні функції використовуються для представлення таких нечітких множин, що характеризуються невизначеністю типу: «велика кількість», «велике значення», «значна величина», «високий рівень доходів та цін», «висока норма прибутку», «висока якість послуг», «високий сервіс обслуговування». Спільним для всіх таких ситуацій є високий ступінь прояву тієї чи іншої якісної чи кількісної ознаки.

До типу  $S$  - подібних і одночасно  $Z$  - подібних функцій приналежності може бути віднесена так звана **сигмоїдальна функція**, яка в загальному випадку задається аналітично наступним виразом:

$$f_{S_3}(x, a, b) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-b)}}, \quad (1.7)$$

де  $a, b$  - деякі числові параметри, що набувають довільних дійсних значень і впорядковані співвідношенням  $a < b$ .

При цьому у випадку  $a > 0$  може бути отримана  $S$  – подібна функція приналежності, а у разі  $a < 0$  -  $Z$  – подібна функція приналежності.

Як окремі випадки  $Z$ - і  $S$ -подібних кривих також розглядають так звану лінійну  $Z$ -подібну функцію та лінійну  $S$ -подібну функцію.

**Лінійна  $Z$ -подібна функція** у загальному вигляді може бути задана аналітично наступним виразом:

$$f_{\downarrow}(x; a, b) = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ \frac{b-x}{b-a}, & a < x < b. \\ 0, & b \leq x \end{cases} \quad (1.8)$$

**Лінійна S-подібна функція** у загальному вигляді може бути задана аналітично наступним виразом:

$$f_{\uparrow}(x; a, b) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b, \\ 1, & b \leq x \end{cases} \quad (1.9)$$

де  $a, b$  - деякі числові параметри, що набувають довільних дійсних значень і впорядковані співвідношенням  $a < b$ .

Ці функції приналежності породжують нормальні опуклі нечіткі множини з границями  $(a, b)$ .

До  $\Pi$ -подібного типу функцій приналежності можна віднести цілий клас кривих, які за своєю формою нагадують дзвін, згладжену трапецію або букву «П».

**$\Pi$ -подібна функція** у загальному вигляді задається аналітично наступним виразом:

$$f_{\Pi_1}(x; a, b, c, d) = f_s(x; a, b) \cdot f_z(x; c, d), \quad (1.10)$$

де  $a, b, c, d$  - деякі параметри, що набувають довільних дійсних значень і впорядковані співвідношенням  $a \leq b \leq c \leq d$ .

Наступна функція типу  $\Pi$ -подібних функцій визначається як добуток двох сигмоїдальних функцій і в загальному вигляді може бути задана аналітично:

$$f_{\Pi_2}(x; a, b, c, d) = f_{s_3}(x; a, b) \cdot f_{s_3}(x; c, d) \quad (1.11)$$

де  $a, b, c, d$  - деякі параметри, що набувають довільних дійсних значень, причому  $a > 0, c < 0$  та упорядковані співвідношенням  $a \leq b \leq |c| \leq d$ .

До  $\Pi$ -подібних функцій відноситься також так звана дзвоноподібна функція, яка в загальному випадку задається аналітично виразом:

$$f_{\Pi_3}(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-c}{a} \right|^{2b}}, \quad (1.12)$$

де  $a, b, c$  - деякі параметри, що набувають довільних дійсних значень і впорядковані співвідношенням  $a < b < c$ , причому  $b > 0$ .

Останньою з розглянутих функцій цього типу є функція щільності **нормального розподілу** в припущенні, що  $\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma = 1$ , яка задається аналітично наступним виразом:

$$f_{\mu_4}(x; \sigma, c) = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}}, \quad (1.13)$$

де  $\sigma$  - коефіцієнт концентрації функції перетворення;

$c$  - координата максимуму функції перетворення.

Ці останні типи функцій приналежності породжують нормально опуклі нечіткі множини, причому щільність нормального розподілу забезпечує унімодальність відповідної нечіткої множини.

Розглянемо також приклади побудови нечітких множин засобами пакета MathCAD.

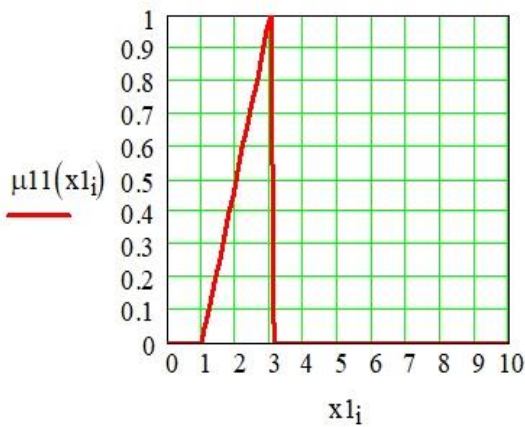
Для задання функцій приналежності MathCAD використовується функція *if* (умова; функція приналежності, якщо умова виконується; функція приналежності у разі невиконання умови) (див.рис.1.1).

Якщо є дискретні значення по ряду параметрів, для побудови можна використовувати таблиці або матриці. При побудові множини як матриці: перший стовпчик матриці – елементи множини, другий стовпчик значення функції приналежності. Одним з методів побудови функцій приналежності є методи експертних оцінок.

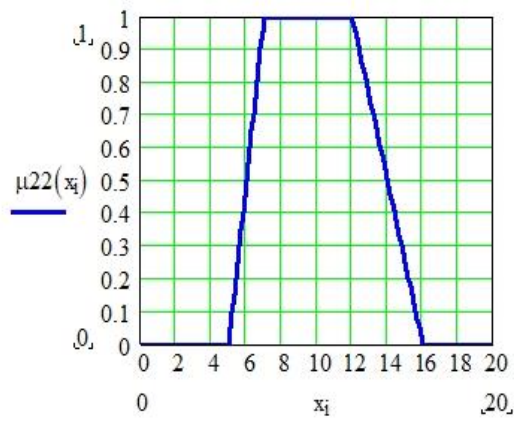
```

i := 0..100      x1i := 0.1·i          i := 0..200      xi := 0.1·i
μ1(x1) := if[x1 ≤ 1, 0, 0.5·(x1 - 1)]  μ22(x) := if[5 > x, 0, if[7 > x, 0.5·(x - 5), A]
μ11(x1) := if(μ1(x1) ≤ 1, μ1(x1), 0)  A := if[12 > x, 1, if[16 > x, 1 - 0.25·(x - 12), 0]]]

```



а)



б)

Рис.1.1 – Побудова функцій приналежності в MathCAD

**Приклад 1.** Задати функції приналежності безперервних множин типу

$$f_{I_3}(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-c}{a} \right|^{2b}} \quad \text{і} \quad f_{S_2}(x; a, b) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ 2 \cdot \left( \frac{x-a}{b-a} \right)^2, & a < x \leq \frac{a+b}{2} \\ 1 - 2 \cdot \left( \frac{b-x}{b-a} \right)^2, & \frac{a+b}{2} < x < b \\ 1, & b \leq x \end{cases} .$$

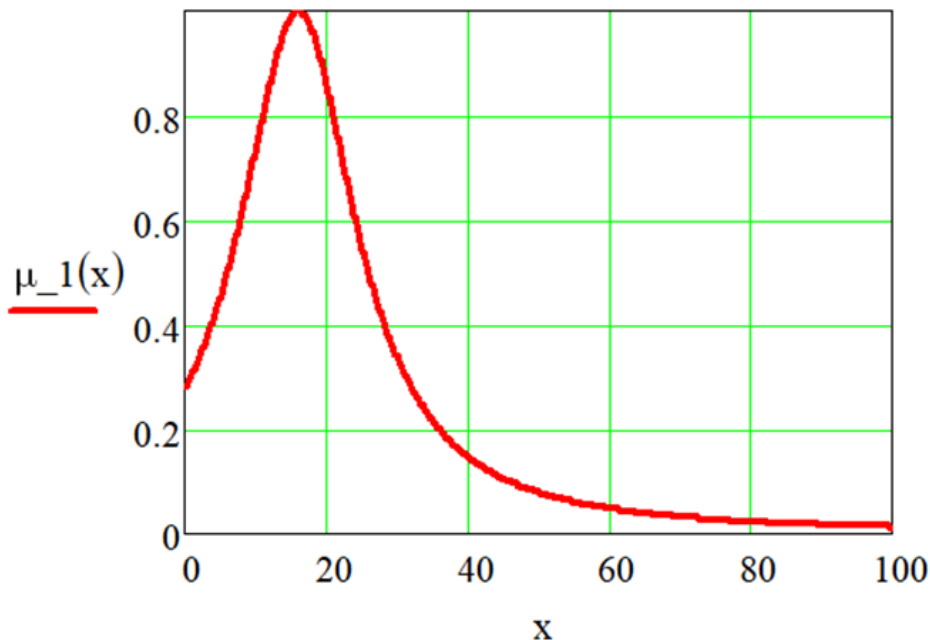
**Приклад виконання в MathCAD**

ФУНКЦІЯ ПРИНАЛЕЖНОСТІ БЕЗПЕРЕРВНІЙ МНОЖИНИ

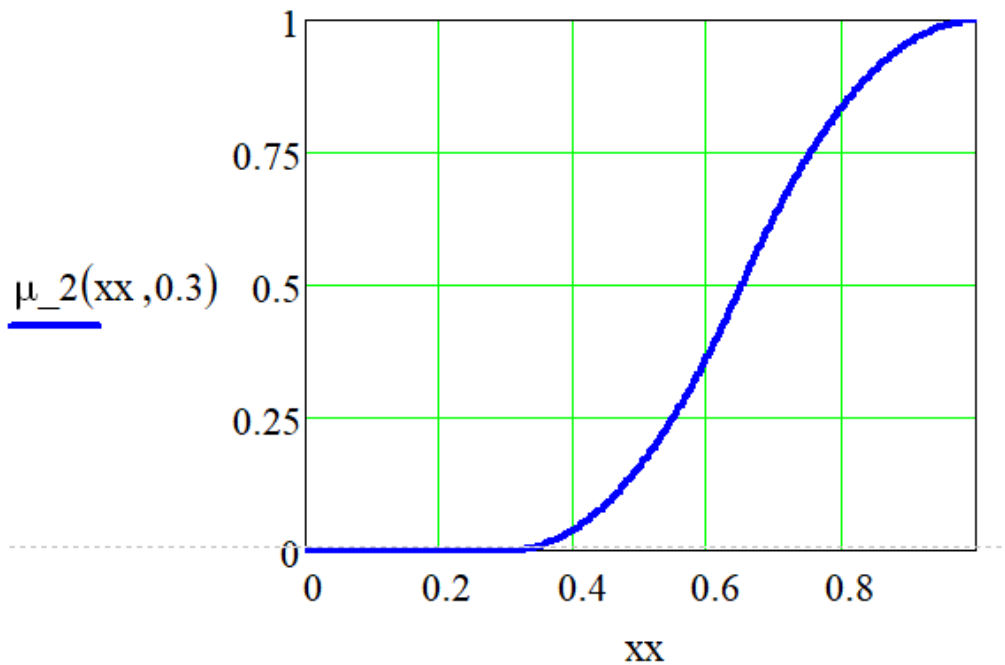
**Приклад 1.** Задати функції приналежності безперервних множин типу  $f_{I_3}(x; a, b, c)$  та  $f_{S_2}(x; a, b)$

$i := 0..1000$        $x_i := 0.1 \cdot i$

$$\mu\_1(x) := \frac{1}{1 + \left( \frac{x-16}{10} \right)^2} \quad - \text{ визначення функції приналежності}$$



$$\mu_2(xx, a) := \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq xx \leq a \\ 2 \cdot \left( \frac{xx - a}{1 - a} \right)^2 & \text{if } a < xx \leq \frac{a + 1}{2} \\ 1 - 2 \cdot \left( \frac{xx - 1}{1 - a} \right)^2 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{- визначення функції} \\ \text{приналежності} \end{array}$$



**Приклад 2.** Задати функцію приналежності кінцевої множини для  $n=8$ . Функція приналежності – випадкові числа на відрізку  $[0, 1]$ .

Порядок виконання завдання:

1. Задати перший стовпчик матриці - елементи множини, другий стовпчик - значення функції приналежності. Функцію приналежності промодельємо за допомогою датчика випадкових чисел, використовуючи вбудовану функцію  $round(x, n)$ , яка округляє дійсне число до знаків  $n$  праворуч від десяткової точки.

## Приклад виконання в MathCAD

### ФУНКЦІЯ ПРИНАЛЕЖНОСТІ КІНЦЕВОЇ МНОЖИНИ

**Приклад 2.** Задати функцію приналежності кінцевої множини для  $n=8$ . Функція приналежності – випадкові числа на відрізку  $[0, 1]$ .

ORIGIN := 1

i := 1..8

A<sub>i,1</sub> := 0.2·i

- стовпчик матриці A, який задає універсальну множину U

A<sub>i,2</sub> := round(rnd(1), 1)

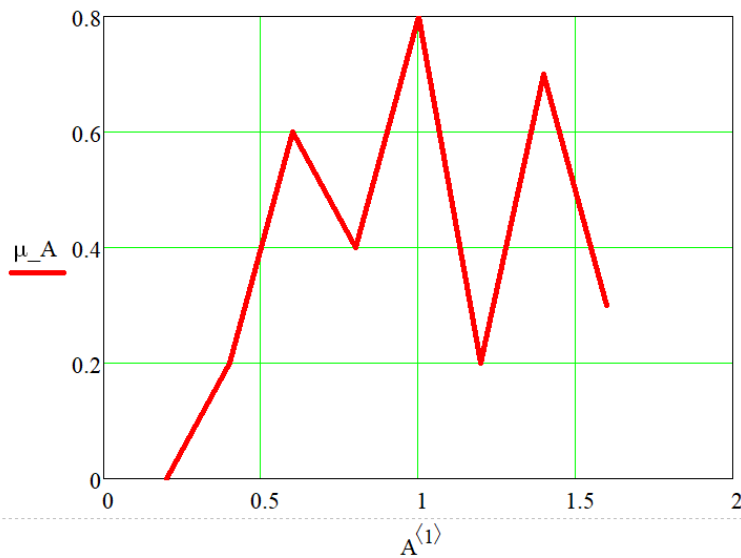
- стовпчик матриці A, який визначає оцінку функції приналежності

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.6 \\ 0.8 & 0.4 \\ 1 & 0.8 \\ 1.2 & 0.2 \\ 1.4 & 0.7 \\ 1.6 & 0.3 \end{pmatrix}$$

- матриця, яка визначає нечітку змінну A

$\mu_A := A^{(2)}$

- виділення з матриці A оцінки функції приналежності



$$V_{i,1} := 0.2 \cdot i$$

- формування матриці  
змінної  $V$

$$V_{i,2} := \text{round}(\text{rnd}(1), 0)$$

$$V = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.4 & 0 \\ 0.6 & 1 \\ 0.8 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1.2 & 1 \\ 1.4 & 1 \\ 1.6 & 0 \end{pmatrix}$$

- матриця, яка визначає чітку  
змінну  $V$ , так як функція  
приналежності приймає тільки  
два значення: 0 та 1

## 1.2. Операції над нечіткими множинами

Нехай  $A$  і  $B$  довільні (кінцеві або нескінченні) нечіткі множини, задані на одному й тому ж самому універсумі  $X$ .

*Перетином двох нечітких множин  $A$  і  $B$*  будемо називати деяку третю нечітку множину  $C$ , задану на цьому ж універсумі  $X$ , функція принадлежности якої визначається за формулою:

$$\mu_C(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad \forall x \in X \quad (1.14)$$

Операція перетину нечітких множин за аналогією зі звичайними множинами позначається знаком " $\cap$ ". У цьому випадку результат перетину двох нечітких множин записується у вигляді:

$$C = A \cap B.$$

В цьому випадку  $C = \{x | \mu_C(x)\}$  - нечітка множина з функцією принадлежности  $\mu_C(x)$ .

Перетин  $A \cap B$  є найбільша нечітка підмножина  $C$ , яка міститься одночасно в нечітких множинах  $A$  і  $B$ .

Операцію перетину нечітких множин іноді називають  $\min$  – перетином або  $\wedge$  - перетином. Останнє позначення пов'язане із визначенням логічної операції «І». Відповідно функція принадлежности перетину  $\mu_C(x)$  у цьому випадку записується у вигляді:

$$\mu_C(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \quad \forall x \in X. \quad (1.15)$$

При цьому знак « $\wedge$ » використовується як синонім операції знаходження мінімального значення.

Результат операції перетину двох і більше нечітких множин, заданих на одному й тому ж універсумі  $X$ , можна зобразити графічно в декартовій системі координат на площині. Це спосіб зручний для візуалізації операцій з нескінченними нечіткими множинами. В цьому випадку кожна з нечітких множин зображується відповідною функцією приналежності, а функція приналежності результату операції перетину зображується потовщеною лінією.

Для випадку перетину двох нечітких множин  $A \cap B$ , заданих різними функціями приналежності, результат зображений на рис.1.2 а, б.

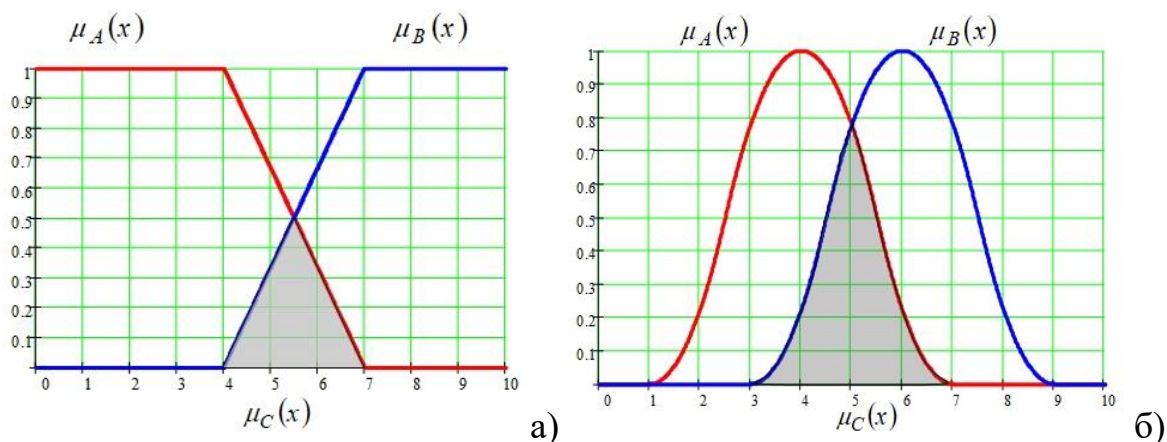


Рис.1.2 – Графічне подання операції перетину двох нечітких множин  $A$  і  $B$ : а) лінійні  $Z$  – подібна та  $S$  – подібна функції приналежності з наступними параметрами  $a = 4, b = 7$ ; б) з  $II$ -подібними функціями приналежності з наступними параметрами  $a = 1, b = 4, c = 4, d = 7$  і  $a = 3, b = 6, c = 6, d = 9$  відповідно

*Об'єднанням двох нечітких множин  $A$  і  $B$*  будемо називати деяку третю нечітку множину  $D$ , задану на цьому ж універсумі  $X$ , функція приналежності якої визначається за формулою:

$$\mu_D(x) = \max \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \quad \forall x \in X \quad (1.16)$$

Операція об'єднання нечітких множин за аналогією зі звичайними множинами позначається знаком " $\cup$ ". У цьому випадку результат перетину двох нечітких множин записується у вигляді:

$$D = A \cup B$$

В цьому випадку  $D\{x|\mu_c(x)\}$  - нечітка множина з функцією приналежності  $\mu_D(x)$ .

Об'єднання  $A \cup B$  є найменша нечітка множина  $D$ , яка домінує одночасно як  $A$ , так і  $B$ .

Операцію об'єднання нечітких множин іноді називають  $\max$  – перетином або  $\vee$ -перетином. Останнє позначення пов'язане з визначенням логічної операції «АБО». Відповідно функція приналежності об'єднання  $\mu_D(x)$  у цьому випадку записується у вигляді:

$$\mu_D(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \quad \forall x \in X \quad (1.17)$$

При цьому знак « $\vee$ » використовується як синонім операції знаходження максимального значення.

Результат операції об'єднання двох і більше нечітких множин, заданих на одному й тому ж універсумі  $X$ , можна зобразити графічно у декартовій системі координат на площині. Для випадку об'єднання двох нечітких множин  $A \cup B$ , заданих різними функціями приналежності, результат зображений на рис.1.3 а, б.

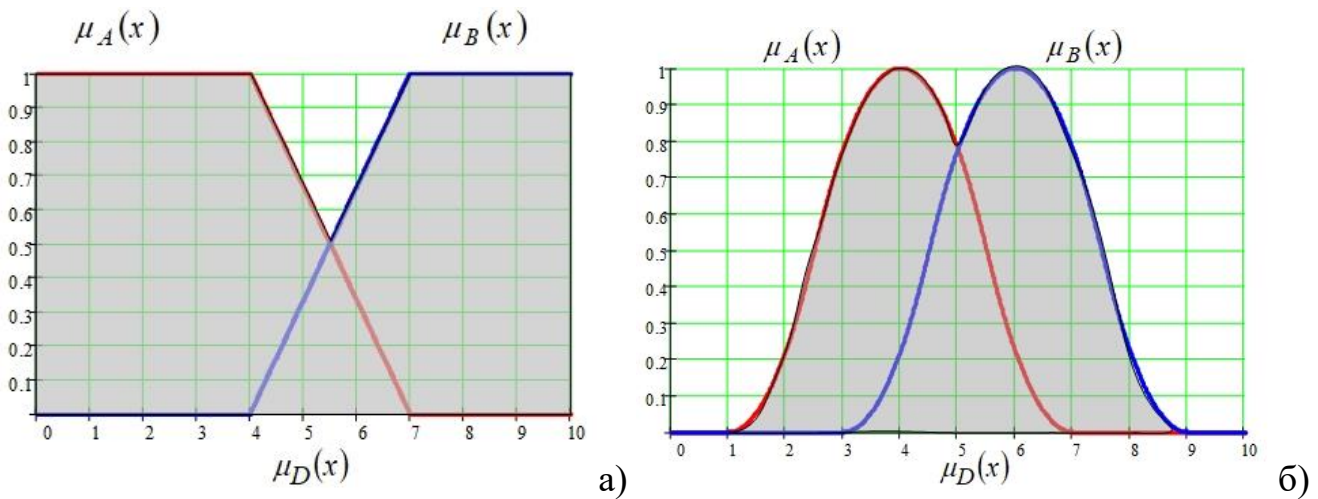


Рис.1.3 - Графічне подання операції об'єднання двох нечітких множин  $A$  і  $B$ : а) лінійні Z-подібна та S-подібна функції приналежності з наступними параметрами  $a = 4, b = 7$ ; б) з П-подібними функціями приналежності з наступними параметрами  $a = 1, b = 4, c = 4, d = 7$  і  $a = 3, b = 6, c = 6, d = 9$  відповідно

**Доповнення** нечіткої множини  $A$  позначається  $\bar{A}$  і визначається як нечітка множина  $\bar{A} = \{x \mid \mu_{\bar{A}}(x)\}$ , функція приналежності якого  $\mu_{\bar{A}}(x)$  визначається за такою формулою:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad \forall x \in X \quad (1.18)$$

Операція доповнення нечіткої множини  $A$  може бути проілюстрована графічно рис.1.4. При цьому результат операції доповнення  $\bar{A}$  відповідає темній області графіку. Графік функції приналежності доповнення нечіткої множини симетричний графіку функції приналежності вихідної нечіткої множини відносно лінії:  $y = 0.5$ .

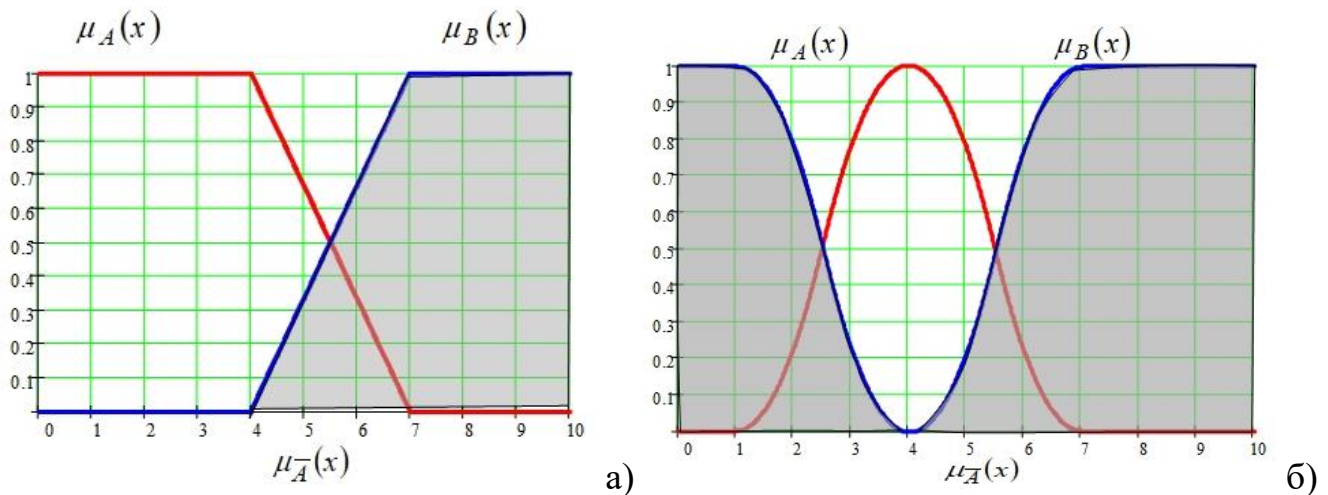


Рис.1.4 - Графічне представлення операції доповнення нечіткої множини  $A$ , яке задано: а) лінійною Z-подібною функцією приналежності; б) П-подібною функцією приналежності

Для розглянутих операцій над нечіткими множинами мають місце наступні фундаментальні властивості, аналогічні властивостям звичайних теоретико-множинних операцій.

Нехай  $A, B, C$  - довільні (кінцеві або нескінченні) нечіткі множини, задані на одному й тому ж універсумі  $X$ . Справедливі наступні твердження:

- *Комунікативність* операцій об'єднання та перетину нечітких множин:

$$A \cup B = B \cup A;$$

$$A \cap B = B \cap A;$$

- *Асоціативність* операцій об'єднання та перетину нечітких множин:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C;$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C;$$

- *Дистрибутивність* операцій об'єднання та перетину нечітких множин відносно один одного:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

- *Ідемпоентність* операцій об'єднання та перетину нечітких множин

$$A \cup A = A;$$

$$A \cap A = A;$$

- *Поглинання* однієї з нечітких множин при операціях об'єднання та перетину:

$$A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A.$$

**Приклад 3.** Функції приналежності мають вигляд:

$$\mu_1(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-16}{10}\right)^2}, \quad \mu_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \leq 1 \\ -0.4 \cdot (x-7) + 1 & \text{інакше} \end{cases}.$$

Виконати операції перетину, об'єднання та доповнення двох безперервних нечітких множин.

Порядок виконання завдання

1. Задати функції приналежності  $\mu_1(x)$ ,  $\mu_2(x)$ .
2. Виконати операцію перетину двох нечітких множин, використовуючи функцію  $\mu_c(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ ,  $\forall x \in X$ .
3. Виконати операцію об'єднання двох нечітких множин, використовуючи функцію  $\mu_d(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ ,  $\forall x \in X$ .
4. Виконати операцію доповнення двох нечітких множин, використовуючи функцію  $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$ ,  $\forall x \in X$ .

**Приклад виконання в MathCAD**

## ОПЕРАЦІЇ НАД НЕЧІТКИМИ БЕЗПЕРЕРВНИМИ МНОЖИНАМИ

**Приклад 3.** Функції приналежності мають вигляд:

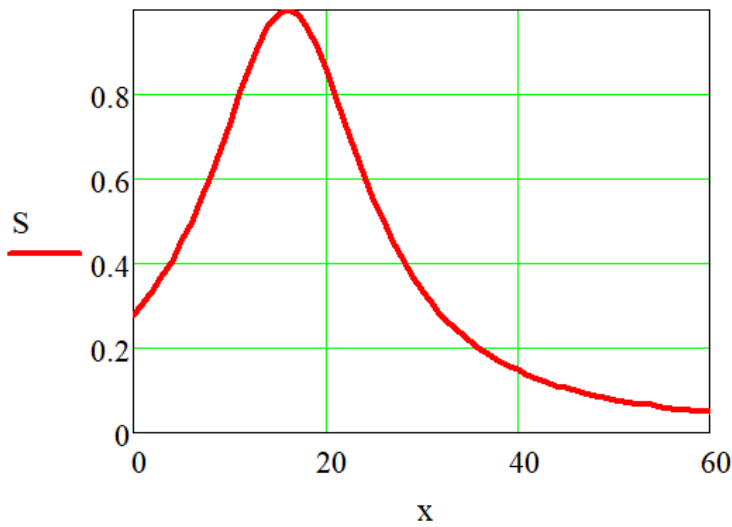
$$\mu_1(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-16}{10}\right)^2}, \quad \mu_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \leq 7 \\ -0.4 \cdot (x-7) + 1 & \text{інакше} \end{cases}$$

Виконати операції перетину, об'єднання і доповнення двох безперервних нечітких множин.

$i := 0..100$     $x_i := i$

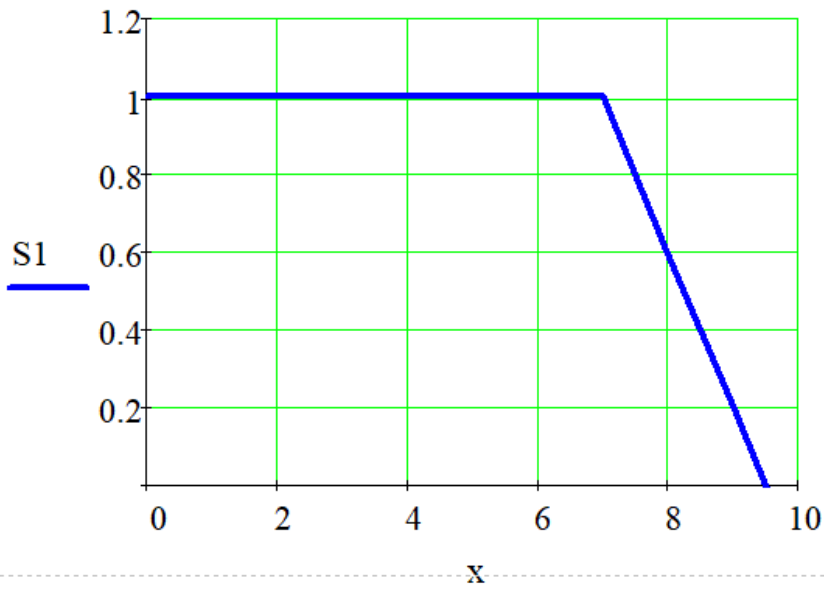
$$\mu_{_1}(x) := \frac{1}{1 + \left(\frac{x-16}{10}\right)^2} \quad \text{- визначення функції приналежності 1}$$

$S_i := \mu_{_1}(x_i)$



$\mu_{_2}(x) := \text{if}[x \leq 7, 1, -0.4 \cdot (x-7) + 1]$    - визначення функції приналежності 2

$S1_i := \mu_{_2}(x_i)$

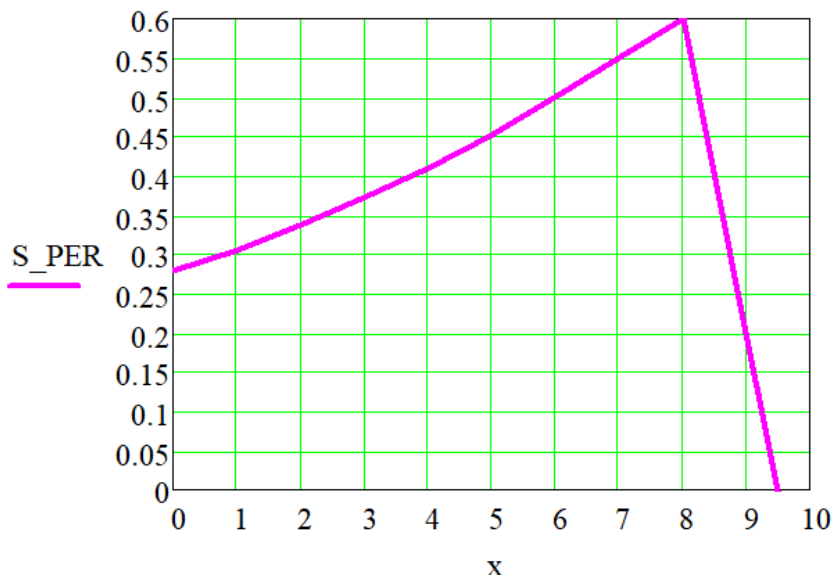


### ОПЕРАЦІЯ ПЕРЕТИНУ ДВОХ НЕЧІТКИХ МНОЖИН

$$\mu_{\text{PER}}(x) := \min(\mu_1(x), \mu_2(x))$$

- функція приналежності результуючої множини будується як мінімум із функцій приналежності кожної з початкових множин

$$S_{\text{PER}_i} := \mu_{\text{PER}}(x_i)$$

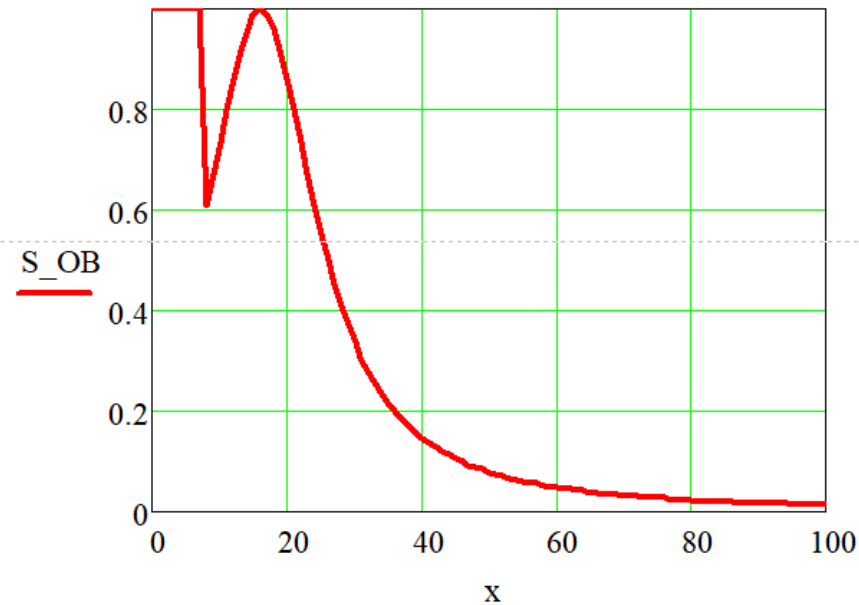


## ОПЕРАЦІЯ ОБ'ЄДНАННЯ ДВОХ НЕЧІТКИХ МНОЖИН

$$\mu_{OB}(x) := \max(\mu_1(x), \mu_2(x))$$

- функція приналежності результуючої множини будується як максимум із функцій приналежності кожної з початкових множин

$$S_{OB_i} := \mu_{OB}(x_i)$$

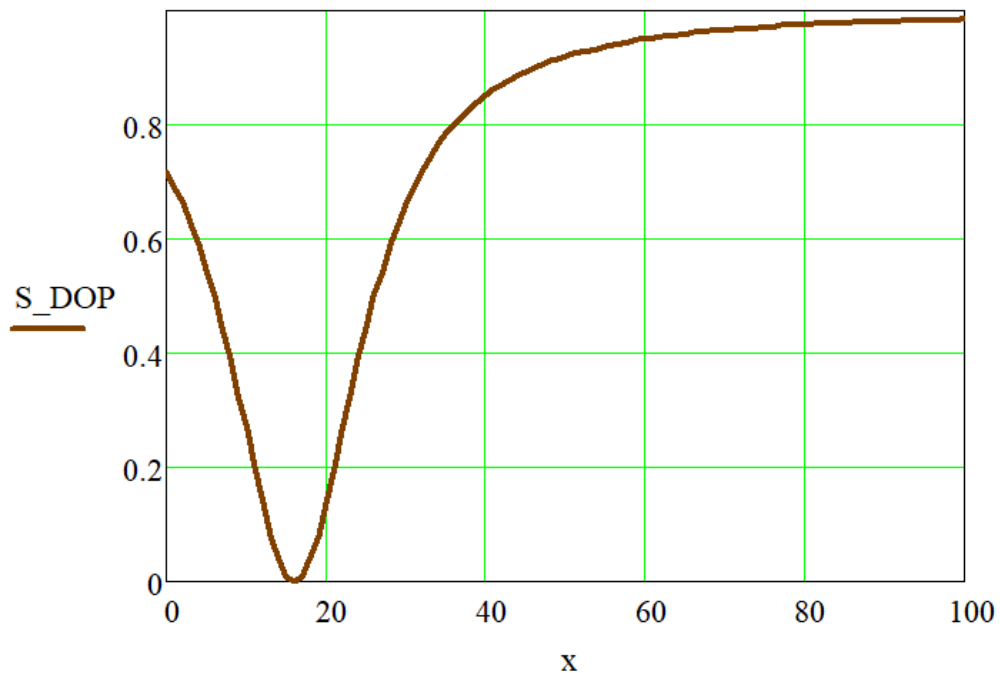


## ОПЕРАЦІЯ ДОПОВНЕННЯ НЕЧІТКОЇ МНОЖИНИ

$$\mu_{DOP}(x) := 1 - \mu_1(x)$$

- функція приналежності результуючої множини будується як доповнення функції приналежності до універсальної множини

$$S_{DOP_i} := \mu_{DOP}(x_i)$$



**Приклад 4.** Виконати операції перетину, об'єднання та доповнення двох кінцевих нечітких множин. Функція приналежності – випадкові числа на відрізку  $[0, 1]$  при  $n=8$ .

Порядок виконання завдання

1. Задати функції приналежності кінцевих множин  $A$  та  $B$ ,  $n=8$ . Функція приналежності – випадкові числа на відрізку  $[0, 1]$  (див. приклад 2).
2. Виконати операцію перетину двох нечітких множин, використовуючи функцію  $\mu_c(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ ,  $\forall x \in X$ .
3. Виконати операцію об'єднання двох нечітких множин, використовуючи функцію  $\mu_d(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ ,  $\forall x \in X$ .
4. Виконати операцію доповнення двох нечітких множин, використовуючи функцію  $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$ ,  $\forall x \in X$ .

**Приклад виконання в MathCAD**

## ОПЕРАЦІЇ НАД НЕЧІТКИМИ КІНЦЕВИМИ МНОЖИНАМИ

**Приклад 4.** Виконати операції перетину, об'єднання і доповнення двох кінцевих нечітких множин. Функція приналежності - випадкові числа на відрізку  $[0, 1]$ ,  $n=8$ .

ORIGIN := 1     $i := 1..8$

$A_{i,1}$  :=  $0.2 \cdot i$                     - стовпчик матриці A, який задає універсальну множину U

$A_{i,2}$  := round(rnd(1), 1)            - стовпчик матриці A, який визначає оцінку функції приналежності

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.6 \\ 0.8 & 0.4 \\ 1 & 0.8 \\ 1.2 & 0.2 \\ 1.4 & 0.7 \\ 1.6 & 0.3 \end{pmatrix}$$

- матриця, яка визначає нечітку змінну A

$B_{i,1}$  :=  $0.2 \cdot i$

- формування матриці змінної B

$B_{i,2}$  := round(rnd(1), 1)

$$B = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 \\ 0.6 & 1 \\ 0.8 & 0.1 \\ 1 & 0 \\ 1.2 & 0.5 \\ 1.4 & 0.6 \\ 1.6 & 0.2 \end{pmatrix}$$

- матриця, яка визначає нечітку змінну B

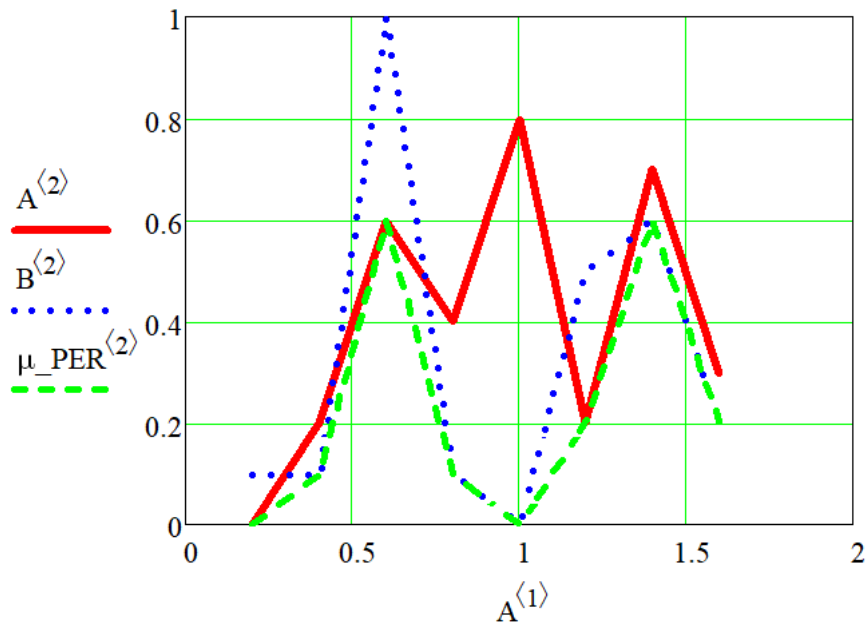
### ОПЕРАЦІЯ ПЕРЕТИНУ ДВОХ НЕЧІТКИХ МНОЖИН

$\mu_{PER_{i,1}}$  :=  $0.2 \cdot i$

$\mu_{PER_{i,2}}$  := min( $A_{i,2}, B_{i,2}$ )            - операція перетину множин

$$\mu_{\text{PER}} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.4 & 0.1 \\ 0.6 & 0.6 \\ 0.8 & 0.1 \\ 1 & 0 \\ 1.2 & 0.2 \\ 1.4 & 0.6 \\ 1.6 & 0.2 \end{pmatrix} \quad \text{- результуюча матриця}$$

- функція приналежності результуючої множини будується як мінімум із функцій приналежності кожної з початкових множин



ОПЕРАЦІЯ ОБ'ЄДНАННЯ ДВОХ НЕЧІТКИХ МНОЖИН

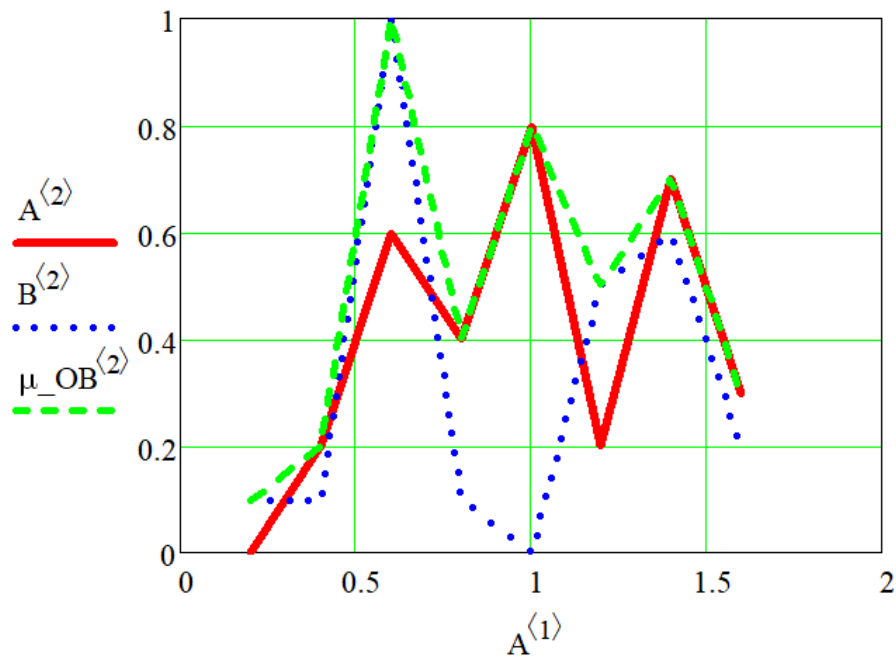
$$\mu_{\text{OB}_{i,1}} := 0.2 \cdot i$$

$$\mu_{\text{OB}_{i,2}} := \max(A_{i,2}, B_{i,2})$$

- операція об'єднання множин

$$\mu_{OB} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 1 \\ 0.8 & 0.4 \\ 1 & 0.8 \\ 1.2 & 0.5 \\ 1.4 & 0.7 \\ 1.6 & 0.3 \end{pmatrix} \quad \text{- результуюча матриця}$$

- функція приналежності результуючої множини будується як максимум із функцій приналежності кожної з початкових множин



### ОПЕРАЦІЯ ДОПОВНЕННЯ НЕЧІТКОЇ МНОЖИНИ

$E := A \quad E_{i,1} := 2 \cdot E_{i,1} \quad E_{i,2} := 1$  - формування допоміжної матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.6 \\ 0.8 & 0.4 \\ 1 & 0.8 \\ 1.2 & 0.2 \\ 1.4 & 0.7 \\ 1.6 & 0.3 \end{pmatrix}$$

- вихідна нечітка змінна A

$$E = \begin{pmatrix} 0.4 & 1 \\ 0.8 & 1 \\ 1.2 & 1 \\ 1.6 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2.4 & 1 \\ 2.8 & 1 \\ 3.2 & 1 \end{pmatrix}$$

- сформована допоміжна матриця

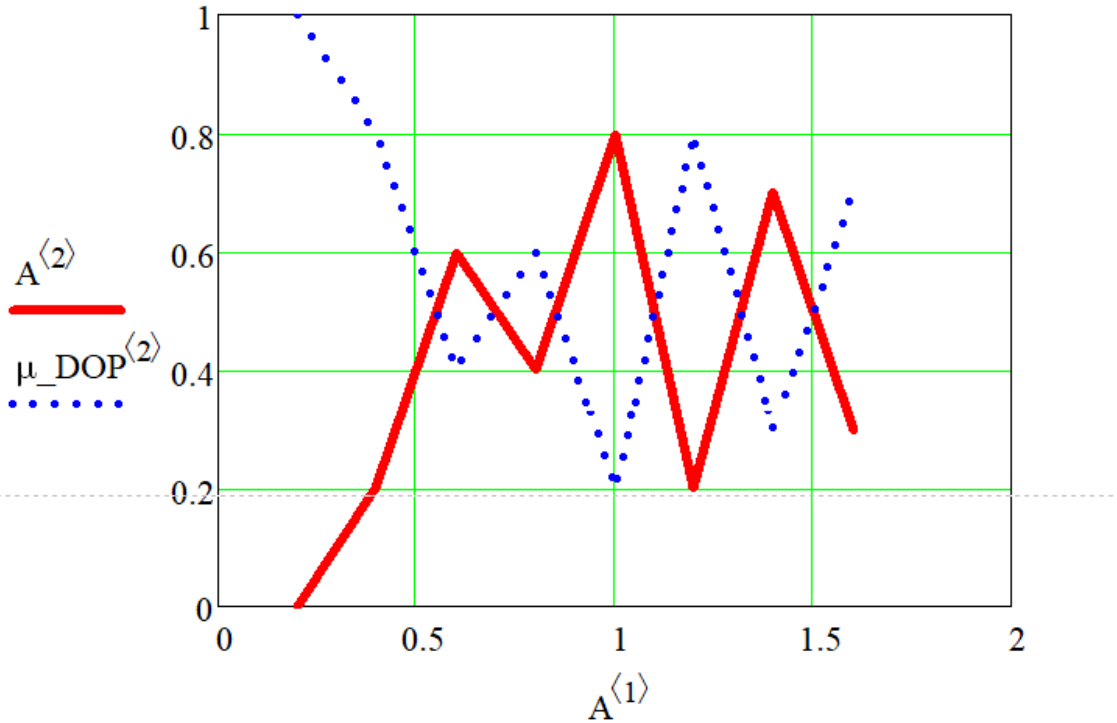
$$\mu_{DOP} := E - A$$

- операція доповнення множини

$$\mu_{DOP} = \begin{pmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.4 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.6 \\ 1 & 0.2 \\ 1.2 & 0.8 \\ 1.4 & 0.3 \\ 1.6 & 0.7 \end{pmatrix}$$

- результуюча матриця

- функція приналежності результуючої множини будується як доповнення функції приналежності до універсальної множини



### 1.3. Оптимізація на нечітких множинах

Нехай є множина з  $k$  альтернатив  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ . Тоді для критерію  $C$  може бути розглянута нечітка множина:

$$C = \left\{ \frac{\mu_c(a_1)}{a_1}, \frac{\mu_c(a_2)}{a_2}, \dots, \frac{\mu_c(a_m)}{a_m} \right\}, \quad (1.19)$$

де  $\mu_c(a_i)$  - це  $[0, 1]$  оцінка альтернативи  $a_i$  за критерієм, характеризує ступінь відповідності альтернативи поняттю, що визначається критерієм  $C$ .

Якщо існує  $n$  критеріїв:  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , то найкращою вважається альтернатива, що задовольняє всім критеріям:  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Тоді правило для вибору найкращої альтернативи може бути записане у вигляді перетину відповідних нечітких множин:

$$D = C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_n$$

Операції перетину нечітких множин відповідає операція  $\min$  -, виконуваної над їх функціями приналежності. Як найкраща вибирається альтернатива  $a^*$ , яка має найбільше значення функції приналежності.

**Приклад 5. Вибір автомобіля**

Розглянемо приклад вибору варіанта за рівної важливості вимог. Потрібно вибрати автомобіль для покупця. Вимоги до авто, такі:  $C_1$  – вартість,  $C_2$  – дорожній просвіт (кліренс),  $C_3$  – витрата палива,  $C_4$  – безпека. Нехай є 3 автомобілі:  $a_1, a_2, a_3$ .

В результаті експертної оцінки отримані такі дані, що характеризують ступінь належності авто заданим вимогам:

$$C_1 = \left\{ \frac{0,9}{a_1}; \frac{0,7}{a_2}; \frac{0,8}{a_3} \right\} \quad C_2 = \left\{ \frac{0,8}{a_1}; \frac{0,9}{a_2}; \frac{0,6}{a_3} \right\}$$

$$C_3 = \left\{ \frac{0,7}{a_1}; \frac{0,8}{a_2}; \frac{0,9}{a_3} \right\} \quad C_4 = \left\{ \frac{0,8}{a_1}; \frac{0,6}{a_2}; \frac{0,7}{a_3} \right\}$$

Вибір здійснюється згідно правила: спочатку знаходять відповідні мінімальні значення, з яких потім вибирають максимальне, що вказує на результат.

$$D = \max \left\{ \min \left( \frac{0,9}{a_1}; \frac{0,8}{a_1}; \frac{0,7}{a_1}; \frac{0,8}{a_1} \right); \min \left( \frac{0,7}{a_2}; \frac{0,9}{a_2}; \frac{0,8}{a_2}; \frac{0,6}{a_2} \right); \min \left( \frac{0,8}{a_3}; \frac{0,6}{a_3}; \frac{0,9}{a_3}; \frac{0,7}{a_3} \right) \right\} =$$

$$= \max \left\{ \frac{0,7}{a_1}; \frac{0,6}{a_2}; \frac{0,6}{a_3} \right\}$$

Отже, найкращим є перший автомобіль,  $a_1 = \{0,9; 0,8; 0,7; 0,8\}$ .

По суті, приклад ілюструє розв'язання задачі багатоцільової оптимізації, в якій використовується чотири критерії.

**Приклад 6.** Дві нечіткі множини, що визначають властивості об'єкта оптимізації, задані функціями приналежності  $\mu_1, \mu_2$ . Необхідно визначити оптимальні значення факторів, заданих вихідними нечіткими множинами, що забезпечують найкраще поєднання властивостей об'єкта.

Порядок виконання завдання

1. Задати функції приналежності першій і другій нечітким множинам.
2. Виконати операцію перетину двох нечітких множин.

Побудувати просторовий графік функції приналежності нової множини.

3. Визначити максимум функції приналежності нової нечіткої множини, використовуючи алгоритм стохастичної оптимізації імітацією відпалу:

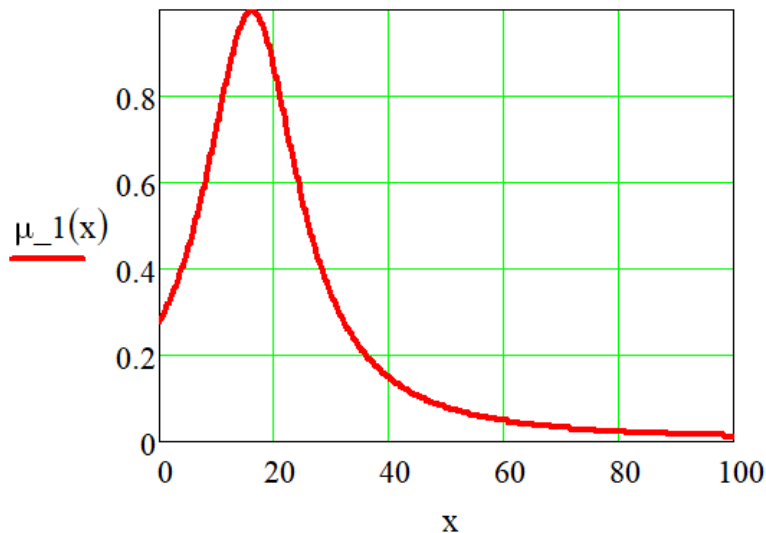
- Задати процедуру **Prob()** визначення ймовірності прийнятності рішення;
- Задати функцію **Candidate()**, що визначає новий варіант рішення кожної ітерації;
- Задати функцію **Anneal()** штучної імітації відпалу;
- Задати фактичні параметри функції імітації відпалу;
- Отримати рішення: глобальний максимум та поточне рішення;
- Отримати значення цільової функції у точці поточного та найкращого рішення.

### Приклад виконання в MathCAD

**Приклад 6.** Дві нечіткі множини, які визначають властивості об'єкта оптимізації, задано функціями приналежності  $\mu_1, \mu_2$ . Необхідно визначити оптимальні значення факторів, заданих вихідними нечіткими множинами, які забезпечують найкраще поєднання властивостей об'єкту.

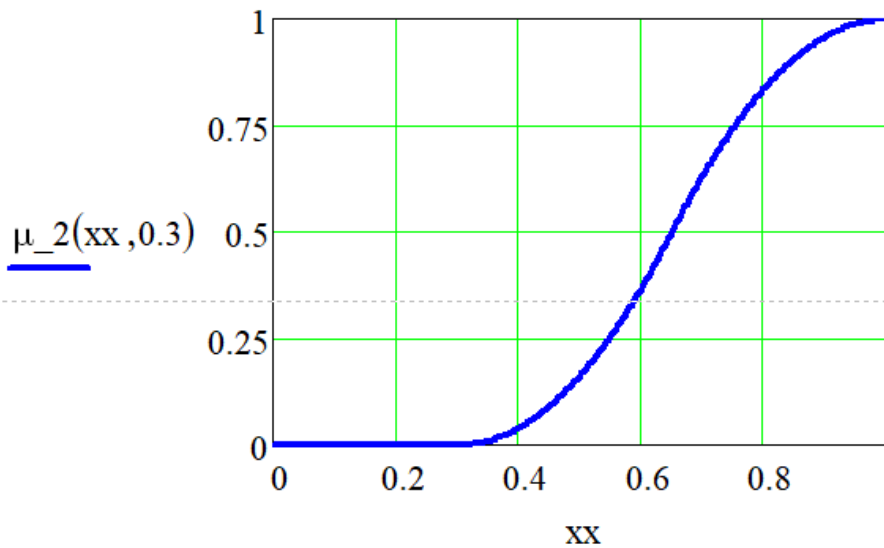
#### НЕЧІТКА ОПТИМІЗАЦІЯ

$$\mu_1(x) := \frac{1}{1 + \left(\frac{x - 16}{10}\right)^2} \quad \text{- визначення функції приналежності, яке характеризує ступінь відповідності першій множині}$$



$$\mu_2(xx, a) := \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq xx \leq a \\ 2 \cdot \left( \frac{xx - a}{1 - a} \right)^2 & \text{if } a < xx \leq \frac{a + 1}{2} \\ 1 - 2 \cdot \left( \frac{xx - 1}{1 - a} \right)^2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- визначення функції приналежності, що характеризує ступінь відповідності другій множині



#### ОПЕРАЦІЯ ПЕРЕТИНУ ДВОХ НЕЧІТКИХ МНОЖИН

$a := 0.3$

$\mu_{PER}(x, y) := \min(\mu_1(x), \mu_2(y, a))$

- перетин множин шукається у вигляді функції двох змінних

$N := 100$        $M := 100$       - число вузлів сітки в площині xOy

$h_x := 0.5$        $h_y := 0.01$       - кроки за змінними x і y відповідно

$x_n := 0$        $y_n := 0$

- початкові значення змінних  $x$  і  $y$  відповідно при побудові сітки

$i := 1..N$        $j := 1..M$

- визначення діапазону зміни цілих індексів вузлів сітки

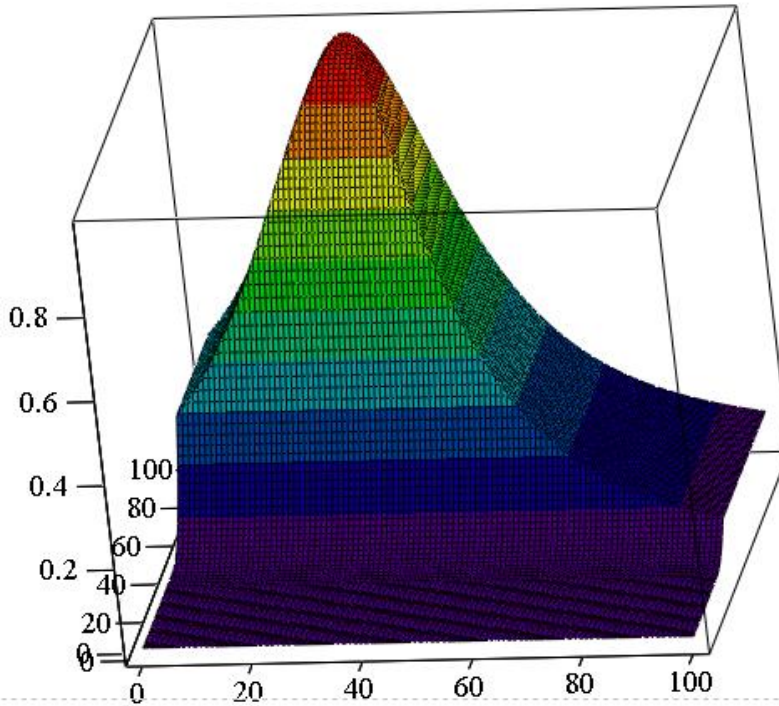
$x_i := x_n + h_x \cdot i$

- визначення координат вузлів сітки

$y_j := y_n + h_y \cdot j$

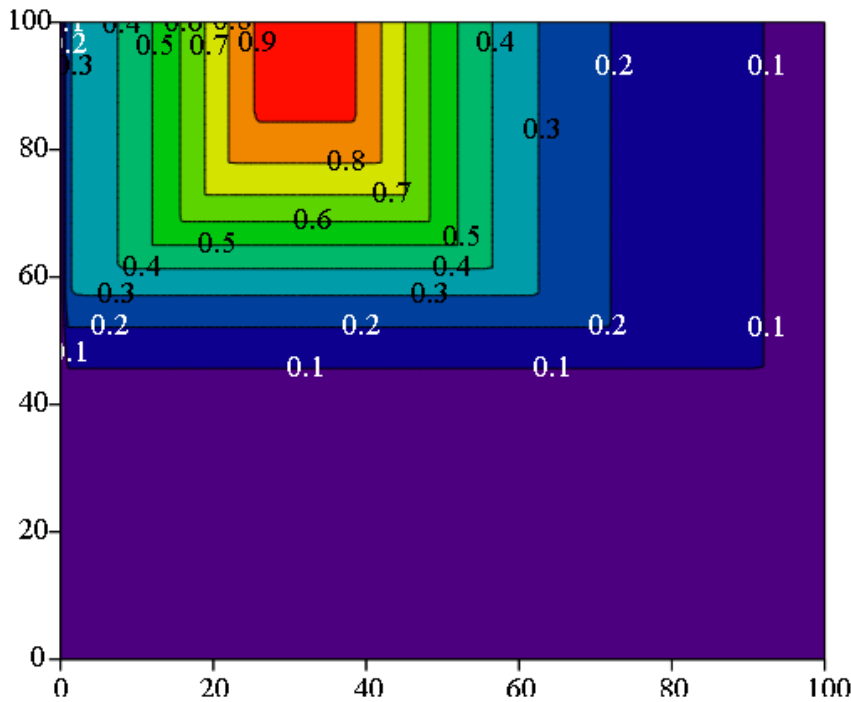
$Z_{i,j} := \mu_{PER}(x_i, y_j)$

- побудова матриці аплікат у вузлах сітки



$Z$

- просторовий графік функції приналежності нової множини



Z

- лінії рівня функції приналежності нової множини

ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМУМУ (МАКСИМУМУ) ФУНКЦІЇ ПРИНАЛЕЖНОСТІ  
 НОВОЇ НЕЧІТКОЇ МНОЖИНИ

Для цих завдань доцільним є використання стохастичних методів оптимізації

АЛГОРИТМ СТОХАСТИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ІМІТАЦІЄЮ ВІДПАЛУ

Процедура **Prob()** визначення ймовірності прийнятності розв'язку

$$\text{Prob}(\text{New}, \text{Old}, \text{Temp}) := \begin{cases} \text{return } 1 & \text{if } \text{New} < \text{Old} \\ \text{return } \exp\left[\frac{(\text{Old} - \text{New})}{\text{Temp}}\right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\text{RandomInts}(N, n) := \text{round}(\text{runif}(N, 0, n + 1) - 0.5)$

- повертає N випадкових цілих чисел у межах від 0 до n

Функція **Candidate()**, що визначає новий варіант розв'язку на кожній ітерації:  
 Values - вектор з N рядків, що містить поточні значення аргументів;  
 MinValues - вектор з N рядків, що містить мінімальні значення аргументів;  
 MaxValues - вектор з N рядків, що містить максимальні значення аргументів;  
 N - кількість аргументів, що змінюються випадково.

Candidate(Values, MinValues, MaxValues, N) :=



Indicies  $\leftarrow$  RandomInts(N, last(Values))



for  $i \in$  Indicies

Values<sub>i</sub>  $\leftarrow$  MinValues<sub>i</sub> + (MaxValues<sub>i</sub> - MinValues<sub>i</sub>) · rnd(1)

Values

Функція **Anneal()** штучної імітації відпалу:

Obj\_Function - назва цільової функції, яка підлягає мінімізації;

MinValues - вектор мінімально допустимих значень для аргументів цільової функції;  
 MaxValues - вектор максимально допустимих значень для аргументів цільової функції;

Temp - початкова температура;

MinTemp - мінімальна кінцева температура;

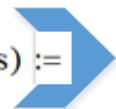
CoolRate - швидкість охолодження;

N - число аргументів цільової функції;

Ntries - кількість нових кандидатів розв'язку, що створюються при кожній температурі.

Результат роботи функції: матриця з двох стовпчиків, перший з яких містить поточне рішення (температура досягла мінімального кінцевого значення), а другий - найкраще рішення.

Anneal(Obj\_Function, MinValues, MaxValues, Temp, MinTemp, CoolRate, N, Ntries) :=



```

LastSol ← Rand ← runif(rows(MinValues), 0, 1)
          |
          | t1 ← Rand ·  $\overrightarrow{(\text{MaxValues} - \text{MinValues})}$ 
          | MinValues + t1
LastCost ← Obj_Function(LastSol)
BestSol ← LastSol
BestCost ← LastCost
while Temp > MinTemp
  for i ∈ 1..Ntries
    CurrentSol ← Candidate(LastSol, MinValues, MaxValues, N)
    CurrentCost ← Obj_Function(CurrentSol)
    P ← Prob(CurrentCost, LastCost, Temp)
    if P ≥ rnd(1)
      LastSol ← CurrentSol
      LastCost ← CurrentCost
    if LastCost < BestCost
      BestSol ← LastSol
      BestCost ← LastCost
  Temp ← Temp · (1 - CoolRate)
augment(LastSol, BestSol)

```



$f_3(p) := -\mu\_PER(p_0, p_1)$

- перетворення цільової функції до виду з одним векторним аргументом;
- цільова функція проінвертована для пошуку максимуму функції приналежності алгоритмом, що реалізує пошук мінімуму

$$\text{MinVals} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{MaxVals} := \begin{pmatrix} 50 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Temp := 25    MinTemp := 0.0001    CoolRate := 0.01    N := 2    Ntries := 25

- ініціалізація фактичних параметрів функції імітації відпалу

Solution := Anneal(f3, MinVals, MaxVals, Temp, MinTemp, CoolRate, N, Ntries)

$$\text{Solution} = \begin{pmatrix} 15.92191 & 16.04279 \\ 0.99882 & 0.99886 \end{pmatrix} \quad \text{- отриманий розв'язок: глобальний максимум}$$

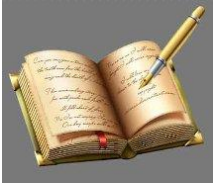
$$\text{Solution}^{\langle 0 \rangle} = \begin{pmatrix} 15.922 \\ 0.999 \end{pmatrix} \quad \text{- отриманий поточний розв'язок}$$

$$\text{Solution}^{\langle 1 \rangle} = \begin{pmatrix} 16.043 \\ 0.999 \end{pmatrix} \quad \text{- отриманий найкращий розв'язок}$$

$$f3(\text{Solution}^{\langle 0 \rangle}) = -0.99994 \quad \text{- значення цільової функції в точці поточного розв'язку}$$

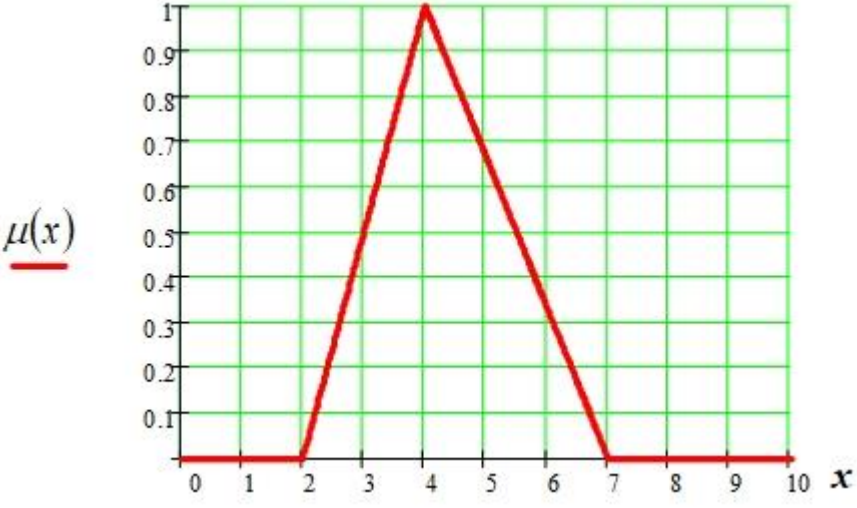

$$f3(\text{Solution}^{\langle 1 \rangle}) = -1 \quad \text{- значення цільової функції в точці найкращого розв'язку}$$

- значення цільової функції в точці екстремуму від'ємне внаслідок попереднього інвертування цільової функції



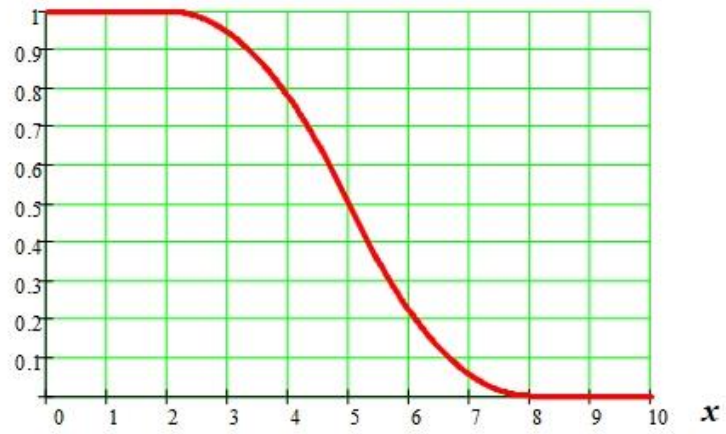
## 2. ЗАВДАННЯ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

**Завдання 1.** Побудувати, використовуючи засоби MathCAD, задані функції приналежності для опису нечітких змінних. Зобразити функції приналежності графічно.

№ п/п	Функція приналежності
1	 <p data-bbox="479 693 552 766"><math>\underline{\mu(x)}</math></p>
2	 <p data-bbox="535 1260 609 1333"><math>\underline{\mu(x)}</math></p>

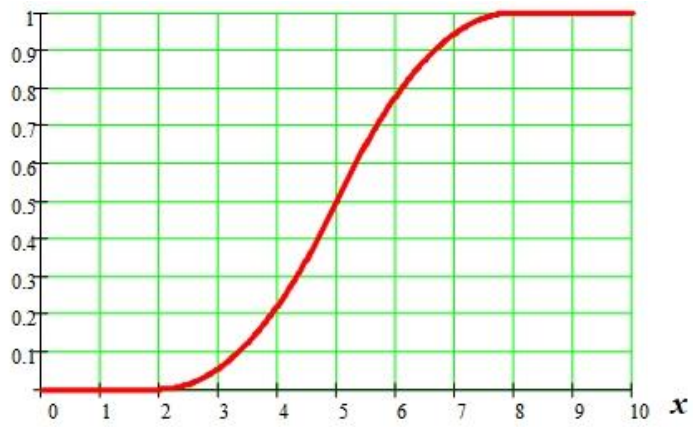
3

$\mu(x)$



4

$\mu(x)$



5

$\mu(x)$



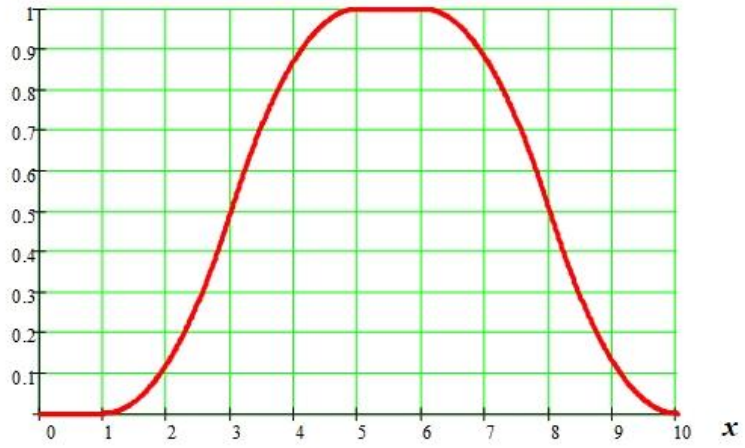
6

$\mu(x)$



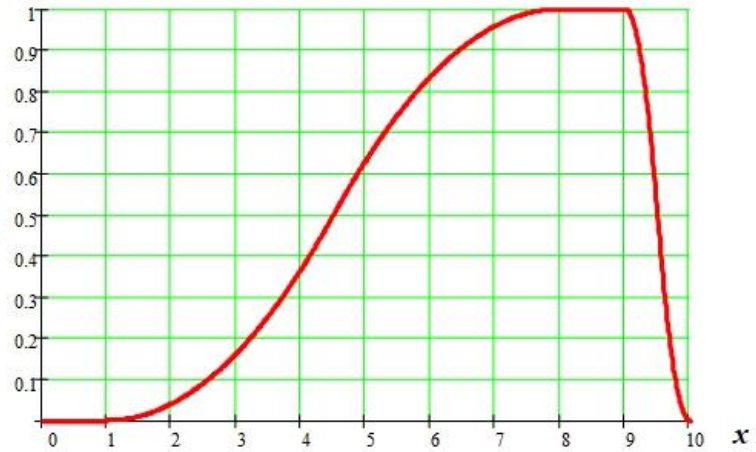
7

$\mu(x)$



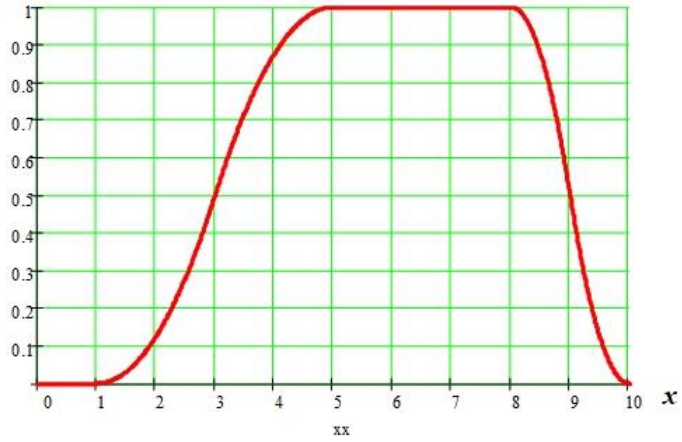
8

$\mu(x)$



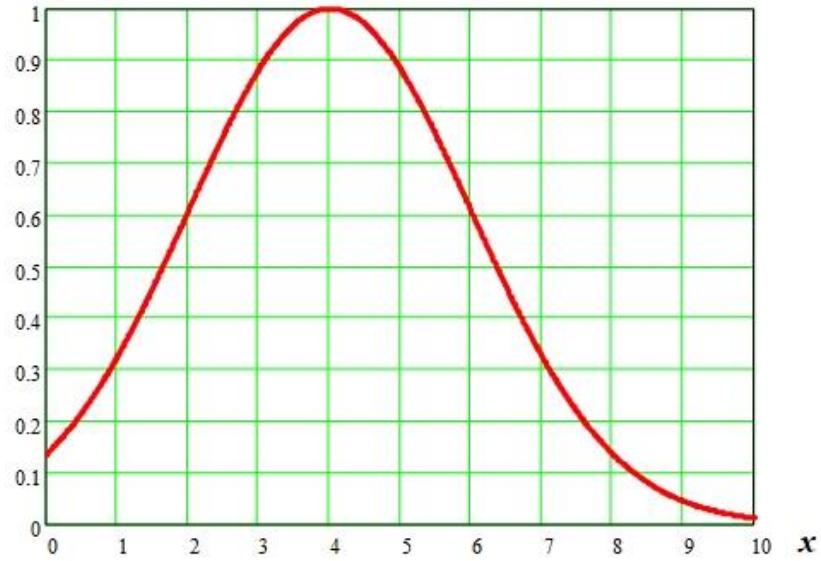
9

$\mu(x)$



10

$\mu(x)$



11

$$f(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & c \leq x \end{cases}$$

Параметри  $a$ ,  $c$  характеризують основу трикутника, а параметр  $b$  - його вершину

12	$f(x, a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & d \leq x \end{cases}$ <p>Параметри <math>a, d</math> характеризують нижню основу трапеції, параметри <math>b, c</math> - верхню основу трапеції</p>
13	$f(x; \sigma, c) = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}}$ <p><math>\sigma</math> - коефіцієнт концентрації функції приналежності;  <math>c</math> - координата максимуму функції приналежності</p>
14	$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{(x-c_1)^2}{2a_1^2}}, & x < c_1; \\ 1, & c_1 \leq x \leq c_2; \\ e^{-\frac{(x-c_2)^2}{2a_2^2}}, & x > c_2; \end{cases}$ <p><math>c_1 &lt; c_2</math> - мінімальне (максимальне) значення ядра нечіткої множини;  <math>a_1(a_2)</math> - коефіцієнт концентрації лівої (правої) частини функції приналежності</p>
15	$f(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left  \frac{x-c}{a} \right ^{2b}}$ <p><math>a, b, c</math> - деякі параметри, що набувають довільних дійсних значень і впорядковані співвідношенням <math>a &lt; b &lt; c</math>, причому <math>b &gt; 0</math>.</p>

16	$f(x; a, c) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-c)}}$ <p><math>a</math> – коефіцієнт крутизни функції приналежності;  <math>c</math> – координата перегину функції належності</p>
17	$f(x; a, c) = \frac{1}{1 + e^{-a_1(x-c_1)}} - \frac{1}{1 + e^{-a_2(x-c_2)}}$ <p><math>a</math> – коефіцієнт крутизни функції приналежності;  <math>c</math> – координата перегину функції належності</p>
18	$f(x, a, c) = \frac{1}{1 + e^{-a_1(x-c_1)}} \cdot \frac{1}{1 + e^{-a_2(x-c_2)}}$ <p><math>a</math> – коефіцієнт крутизни функції приналежності;  <math>c</math> – координата перегину функції належності</p>
19	$f(x, a, b) = \begin{cases} 1, & x < a \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{x-a}{b-a} \cdot \pi\right), & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$ <p><math>a, b</math> - деякі числові параметри, що набувають довільних дійсних значень і впорядковані співвідношенням <math>a &lt; b</math>.</p>
20	$f(x, a, b) = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ 1 - 2 \cdot \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2, & a < x \leq \frac{a+b}{2} \\ 2 \cdot \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2, & \frac{a+b}{2} < x < b \\ 0, & b \leq x \end{cases}$ <p><math>a, b</math> - деякі числові параметри, що набувають довільних дійсних значень і впорядковані співвідношенням <math>a &lt; b</math>.</p>

21	$f(x, a, b) = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ \frac{b-x}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & b \leq x \end{cases}$ <p><math>a, b</math> - деякі числові параметри, що набувають довільних дійсних значень і впорядковані співвідношенням <math>a &lt; b</math>.</p>
22	$f(x, a, b) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & b \leq x \end{cases}$ <p><math>a, b</math> - деякі числові параметри, що набувають довільних дійсних значень і впорядковані співвідношенням <math>a &lt; b</math>.</p>
23	$f(x, a, b, c, d) = f(x, a, b) \cdot f(x, c, d)$ $f(x, a, b) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-b)}}, f(x, c, d) = \frac{1}{1 + e^{-c(x-d)}}$ <p><math>a, b, c, d</math> - деякі параметри, що набувають довільних дійсних значень, причому <math>a &gt; 0, c &lt; 0</math> та упорядковані співвідношенням <math>a \leq b \leq  c  \leq d</math>.</p>

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ala, A., Goli, A., Mirjalili, S., & Simic, V. (2024). A fuzzy multi-objective optimization model for sustainable healthcare supply chain network design. *Applied Soft Computing*, 150, 111012.
2. Gangil, G., Goyal, S. K., & Saraswat, A. (2024). Multi-objective optimization of reactive power dispatch problem using fuzzy tuned mayfly algorithm. *Expert Systems with Applications*, 249, 123819.
3. Wang, Y., Li, K., Wang, G. G., Gong, D., & Pedrycz, W. (2024). A fuzzy-guided adaptive algorithm with hierarchy mechanism for solving dynamic multi-objective optimization problems. *Knowledge-Based Systems*, 284, 111227.
4. Kacher, Y., & Singh, P. (2024). A generalized parametric approach for solving different fuzzy parameter based multi-objective transportation problem. *Soft Computing*, 28(4), 3187-3206.
5. Zhou, X., Tan, W., Sun, Y., Huang, T., & Yang, C. (2024). Multi-objective optimization and decision making for integrated energy system using STA and fuzzy TOPSIS. *Expert Systems with Applications*, 240, 122539.
6. Jiménez Tovar, M., Acevedo-Chedid, J., Ospina-Mateus, H., Salas-Navarro, K., & Sana, S. S. (2024). An optimization algorithm for the multi-objective flexible fuzzy job shop environment with partial flexibility based on adaptive teaching–learning considering fuzzy processing times. *Soft Computing*, 28(2), 1459-1489.
7. Pandey, S. K., & Singh, B. (2024). Optimized Multi-objective Clustering using Fuzzy Based Genetic Algorithm for Lifetime Maximization of WSN. *Recent Advances in Computer Science and Communications (Formerly: Recent Patents on Computer Science)*, 17(3), 48-65.
8. Kirimat, A., Tasgetiren, M. F., Krejcar, O., Buyukdagli, O., & Maresova, P. (2024). A multi-objective optimization framework for functional arrangement in smart floating cities. *Expert Systems with Applications*, 237, 121476.
9. Wang, C., & Li, J. Improved ant colony optimization algorithms for multi-objective investment decision model based on intelligent fuzzy clustering algorithm. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, (Preprint), 1-15.
10. Xie, Y., Li, J., Li, Y., Zhu, W., & Dai, C. (2024). Two-stage evolutionary algorithm with fuzzy preference indicator for multimodal multi-objective optimization. *Swarm and Evolutionary Computation*, 85, 101480.
11. Dutta, S., & Acharya, S. (2024, February). A Novel Approach to Solve Multi-objective Fuzzy Stochastic Bilevel Programming Using Genetic Algorithm. In *Operations Research Forum (Vol. 5, No. 1, p. 11)*. Cham: Springer International Publishing.

- 12.Hao, Y., Zhao, C., Zhang, Y., Cao, Y., & Li, Z. (2024). Constrained multi-objective optimization problems: Methodologies, algorithms and applications. Knowledge-Based Systems, 111998.
- 13.Banerjee, A., Pradhan, S., Misra, B., & Chakraborty, S. (2024). A Guide to Meta-Heuristic Algorithms for Multi-objective Optimization: Concepts and Approaches. Applied Multi-objective Optimization, 1-19.
- 14.Feng, L., Gupta, A., Tan, K. C., & Ong, Y. S. (2023). Evolutionary multi-task optimization: foundations and methodologies. Springer.
- 15.Liao, Y. H. (2024). Fuzzy Assessment Mechanisms under Multi-Objective Considerations. Mathematics, 12(19), 3074.
- 16.Pulluri, H., Rao, K. V. G., Sriram, C., Srikanth Goud, B., Balachandran, P. K., & K, S. (2024). Multiobjective optimal power flow solutions using nondominated sorting colliding bodies optimization. Scientific Reports, 14(1), 26593.
- 17.Gulia, P., Kumar, R., Viriyasitavat, W., Aledaily, A. N., Yadav, K., Kaur, A., & Dhiman, G. (2023). A systematic review on fuzzy-based multi-objective linear programming methodologies: concepts, challenges and applications. Archives of Computational Methods in Engineering, 30(8), 4983-5022.
- 18.Das, S. K., & Giaccalone, M. (Eds.). (2022). Fuzzy Optimization Techniques in the Areas of Science and Management. CRC Press.
- 19.Gerogiannis, V. C. (2021). Applications of Fuzzy Optimization and Fuzzy Decision Making.
- 20.Shi, F., Ye, G., Liu, W., & Ghosh, D. (2023). Fritz-John optimality condition in fuzzy optimization problems and its application to classification of fuzzy data. arXiv preprint arXiv:2308.01914.
- 21.Sutikno, T. (2023). Fuzzy optimization and metaheuristic algorithms. Babylonian Journal of Mathematics, 2023, 59-65.
- 22.Коваленко, В. О. (2023). Еволюційна оптимізація нечітких систем управління багатоцільовими мобільними роботами.
- 23.Козлов, О. (2021). Інформаційна технологія для синтезу та оптимізації баз правил нечітких систем. Управління розвитком складних систем, (45), 66-74.
- 24.Кондратенко, Ю. П., Кондратенко, Г. В., & Сіденко, Є. В. (2019). Нечіткі множини та нечітка логіка.
- 25.Зайченко, Ю. П. (2006). Дослідження операцій: підручник-7-ме вид., перероб. та доп.

## ТЕРМІНИ ТА ВИЗНАЧЕННЯ

**Нечітка багатоцільова оптимізація** - розв'язання задачі виду:  $\max (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))$  за умов  $g_j(x) \lesssim b_j$  ( $j=1..m$ ), де  $\lesssim$  позначає нечітке обмеження, а  $f_i$  - конфліктні цільові функції.

**Нескінченні нечіткі множини**- це такі нечіткі множини, носій яких не є кінцевою множиною.

**Доповнення** нечіткої множини  $A$  позначається  $\bar{A}$  і визначається як нечітка множина  $\bar{A} = \{x \mid \mu_{\bar{A}}(x)\}$ , функція приналежності якого  $\mu_{\bar{A}}(x)$  визначається  $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$ ,  $\forall x \in X$ .

**Метод відпалу** (метод випалу, метод симуляції відпалу, метод модельного загартування, simulated annealing) – це техніка оптимізації, яка використовує впорядкований випадковий пошук на основі аналогії з процесом утворення речовини кристалічної структури з мінімальною енергією при охолодженні..

**Нечітка множина** - являє собою сукупність елементів довільної природи, щодо яких не можна з певністю стверджувати – належить той чи інший елемент аналізованій сукупності даному множині чи ні, тобто математичний об'єкт виду  $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$ , де  $\mu_A(x) \in [1]$  — функція приналежності, що визначає ступінь належності елемента  $x$  до множини  $A$ .

**Нечітка оптимізація** - Метод знаходження екстремуму цільової функції  $f(x)$  з урахуванням нечітких обмежень або параметрів, описаних функціями приналежності.

**Носієм нечіткої множини  $A$**  називається звичайне множина  $A_S$ , яка містить ті і тільки ті елементи універсуму, для яких значення функції належності відповідної нечіткої множини відмінні від нуля.

**Об'єднання двох нечітких множин  $A$  і  $B$** - деяка третя нечітка множина  $D$ , задана на цьому ж універсумі  $X$ , функція приналежності якого визначається як  $\mu_D(x) = \max \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ ,  $\forall x \in X$ .

**Перетин двох нечітких множин  $A$  і  $B$**  - деяка третя нечітка множина  $C$ , задана на цьому ж універсумі  $X$ , функція приналежності якого визначається як  $\mu_C(x) = \min \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ ,  $\forall x \in X$ .

**Ядром нечіткої множини  $A$**  називається така звичайна множина  $A_1$ , елементи якого задовольняють умову  $A_1 = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\}$ .

**$\alpha$ -рівень** – множина  $A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$ , що дозволяє звести нечітку задачу до класичної оптимізації при фіксованому рівні приналежності.

**Принцип Беллмана-Заде** - стратегія об'єднання цільової функції  $f(x)$  та обмежень  $g_j(x)$  в єдину функцію приналежності  $\mu_D(x) = \min(\mu_f(x), \mu_{g_1}(x), \dots, \mu_{g_m}(x))$ .

**Нечітке розширення чіткої функції** - Операція поширення звичайних функцій на нечіткі вхідні дані через принцип розширення Заде (наприклад,  $y_{\sim} = f(x_{\sim})$ ).

**Нечітка база знань** - Сукупність правил виду «Якщо  $X \in A$ , то  $Y \in B$ », де  $A, B$  — нечіткі множини. Використовується в системах нечіткого виводу.

**Генетична оптимізація нечітких систем** - Застосування еволюційних алгоритмів для пошуку оптимальної структури нечітких правил, збалансованої за критеріями точності та компактності.

**Функція приналежності трикутного типу (TFN)** - Функція виду  $\mu(x) = \max(0, 1 - w|x - c|)$ , де  $c$  — центр,  $w$  — ширина. Часто використовується через простоту інтерпретації.