МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ЕЛЕКТРОННИХ ТЕХНОЛОГІЙ, АВТОТРАНСПОРТУ ТА МАШИНОБУДУВАННЯ

# КОМП'ЮТЕРНА УМОВНА ОПТИМІЗАЦІЯ В MathCAD

**НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК**
для здобувачів освітніх ступенів «бакалавр» та «магістр»
зі спеціальностей галузі знань G Інженерія, виробництво та будівництво
(15 Автоматизація та приладобудування,
17 Електроніка, автоматизація та електронні комунікації)
усіх форм навчання

Черкаси
2025

УДК 004.942 (075.8)
У 55

*Затверджено вченою радою ФЕТАМ,
протокол № 6 від 30.09.2025 р.,
згідно з рішенням кафедри
приладобудування, мехатроніки та
комп'ютеризованих технологій,
протокол № 2 від 25.08.2025 р.*

Упорядники: Гальченко В.Я., д.т.н., професор,
Трембовецька Р.В., д.т.н., професор,
Тичков В.В., к.т.н., доцент

Рецензент Федоров Є.Є., д.т.н., професор

У 55 Комп'ютерна умовна оптимізація в MathCAD: навчально-методичний посібник для здобувачів освітніх ступенів «бакалавр» та «магістр» зі спеціальностей галузі знань G Інженерія, виробництво та будівництво (15 Автоматизація та приладобудування, 17 Електроніка, автоматизація та електронні комунікації) усіх форм навчання [Електронний ресурс] / [Упоряд.: В.М. Вязовик]; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси: ЧДТУ, 2025. – 82 с. – Назва з титульного екрана.

У посібнику викладено коротко основні теоретичні положення математичних методів та докладний практичний матеріал щодо розв'язку задач умовної оптимізації у середовищі універсального математичного пакета MathCAD. Істотну увагу приділено комп'ютерній реалізації аналізованих методів, містяться комплекти завдань для самостійної роботи та велика кількість прикладів, що сприяють кращому розумінню та засвоєнню матеріалу.

УДК 004.942 (075.8)

Навчальне електронне видання
комбінованого використовування

**КОМП'ЮТЕРНА УМОВНА ОПТИМІЗАЦІЯ В MathCAD**

**НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК**
для здобувачів освітніх ступенів «бакалавр» та «магістр»
зі спеціальностей галузі знань G Інженерія, виробництво та будівництво
(15 Автоматизація та приладобудування,
17 Електроніка, автоматизація та електронні комунікації)
усіх форм навчання

Упорядники:
**Гальченко** Володимир Якович,
**Трембовецька** Руслана Володимирівна, **Тичков** Володимир Володимирович

*В авторській редакції*

## ЗМІСТ

# ВСТУП

Оптимізація є однією з ключових задач математичного моделювання і застосовується в багатьох наукових і прикладних галузях. Особливо складними і водночас актуальними є задачі нелінійного програмування, у яких хоча б одна з функцій (цільова або обмеження) є нелінійною. Поява нелінійності суттєво ускладнює як аналітичний розгляд задачі, так і чисельні методи розв’язання. Якщо в лінійних моделях оптимальне розв’язання є глобальним, то в нелінійних - це, як правило, не так: можуть існувати множинні локальні екстремуми, і знайти гарантовано глобальний екстремум досить складно.

Цей посібник присвячений розгляду теоретичних основ і практичних методів розв’язання задач нелінійного програмування з умовами у вигляді рівностей та нерівностей. У ньому докладно викладено класифікацію задач, їх специфіку порівняно зі звичайними лінійними задачами, а також графічні методи інтерпретації для випадку двовимірних функцій.

Особливу увагу приділено методам умовної оптимізації, таким як метод множників Лагранжа, умови Куна-Такера, а також сучасним чисельним підходам із використанням штрафних і бар’єрних функцій, які дозволяють ефективно враховувати обмеження на допустимі розв’язки.

Мета посібника - надати здобувачу розуміння теоретичних основ нелінійної оптимізації та практичного застосування методів розв’язання задач різного ступеня складності, включаючи приклади реалізації в системі MathCAD.

Посібник має на меті ознайомити здобувача з основними поняттями, методами та інструментами умовної оптимізації, а також сформувати практичні навички розв’язання задач у різних сферах діяльності.

В посібнику детально розглядаються окремі теоретичні положення освітніх компонентів «Оптимізація прийняття рішень у техніці», «Математичне моделювання процесів і систем та методи їх оптимізації» та формуються у здобувачів вміння та навички їх практичного застосування шляхом індивідуального розв’язання завдань. Завдання розраховані для здобувачів галузі знань G, які опановують зазначені компоненти.

В системі дистанційної освіти ЧДТУ з дисциплін «Оптимізація прийняття рішень у техніці» https://moodle.chdtu.edu.ua/course/view.php?id=53, «Математичне моделювання процесів і систем та методи їх оптимізації» https://moodle.chdtu.edu.ua/enrol/index.php?id=18 є електронна версія цього посібника. Також наведені тестові завдання для самоконтролю до кожної теми відповідного змістового модулю. Після вивчення відповідного теоретичного лекційного матеріалу здобувач самостійно проходить тест-самоконтроль, отримує відповідну кількість балів, та аналізує свій рівень знань і може виконувати тестування необмежену кількість разів.

# 1 РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Задача оптимізації стає нелінійною, якщо хоча б одна функція (цільова або в обмеженнях) є нелінійною. Поява нелінійності робить модель значно складнішою порівняно з лінійною моделлю. Це стосується як графічної інтерпретації нелінійних оптимізаційних моделей, яка можлива лише у найпростіших випадках, так і до відсутності, на сьогоднішній день, ефективних методів розв’язку загальних нелінійних задач. Якщо в лінійних моделях оптимальний розв’язок є водночас і глобальним, то в нелінійних моделях, зазвичай, зворотна ситуація. У нелінійних моделях загального вигляду ніколи не можна з упевненістю сказати, що знайдений екстремум є глобальним, а не одним з багатьох локальних екстремумів, або що були знайдені всі локальні екстремуми. Більше того, не існує ефективних методів безпосереднього пошуку глобального екстремуму в математичних оптимізаційних моделях загального вигляду, крім спеціальних класів нелінійних моделей (опуклих, увігнутих або квадратичних).

Задачі нелінійного програмування у загальному випадку записується так:

$$f = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \to \max\left(\min\right)$$

$$\begin{cases} g_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \le \left\{=, \ge\right\} b_1, \\ g_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \le \left\{=, \ge\right\} b_2, \\ \ldots \\ g_j\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \le \left\{=, \ge\right\} b_j \end{cases} \tag{1.1}$$

де $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, $g_j\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, - нелінійні функції змінних моделі (керованих факторів) $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

$b_j$ - дійсні числа.

Якщо змінні математичної моделі за змістом задачі мають бути невід'ємними, вводяться додаткові обмеження: $x_i \ge 0, i = 1, 2, \ldots, n$.

Розв’язати математичну задачу (1.1) означає знайти такі значення $n$ змінних $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, які задовольняють одночасно всі нерівності, що входять до системи обмежень, і при цьому перетворюють цільову функцію в максимум (або мінімум). Такий розв’язок називається ***оптимальним***. Будь-який набір змінних $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, що задовольняє всі обмеження (1.1), називається ***допустимим розв’язком.***

Особливості задач нелінійного програмування зрозуміти легше, якщо порівнювати їх із задачами лінійного програмування.

*Задачі лінійного програмування* мають такі особливості:

- Система обмежень, якщо вона спільна, визначає область допустимих розв’язків (ОДР), що є опуклим багатогранником;

- Цільова функція в графічній інтерпретації є гіперплощиною у разі $n$ змінних, площиною - для трьох змінних і прямою - у разі двох змінних математичної моделі;
- Оптимальний розв'язок, що доставляє цільовій функції оптимальне значення (максимум або мінімум), або єдиний, або у вигляді нескінченної множини;
- Оптимальне значення цільової функції завжди досягається в одній із вершин ОДР або на її границі;
- Локальний екстремум цільової функції є також глобальним екстремумом;
- Для розв'язку задач лінійного програмування існують універсальні та ефективні методи (наприклад, симплекс-метод), що гарантують отримання оптимального розв'язку.

*Задачі нелінійного програмування* значно складніші лінійних і жодне з перерахованих положень, властивих задачам лінійного програмування, для задач нелінійного програмування загального виду не виконується:

- Система обмежень, що визначає ОДР може бути як опуклою, так і невипуклою;
- Цільова функція є складною поверхнею в просторі трьох і більше вимірювань і складною кривою – у разі двох змінних;
- Оптимальний розв'язок може бути єдиним, їх може бути кілька, а може бути і нескінченною множиною;
- Оптимальний розв'язок може розташовуватися у вершині ОДР, на її границі, всередині ОДР;
- Знайдений локальний екстремум цільової функції може не бути глобальним;
- Не існує універсального та ефективного методу пошуку оптимального розв'язання задач нелінійного програмування загального вигляду, який би гарантував отримання глобального екстремуму цільової функції.

Перелічені обставини суттєво ускладнюють розв'язок задач нелінійного програмування.

### 1.1. Графічний метод розв'язання задач нелінійного програмування для функцій двох змінних

Задачі нелінійного програмування залежно від властивостей та виду цільової функції та функцій в обмеженнях математичної моделі (1.1) поділяються на такі види:

- *Задачі нелінійного програмування загального вигляду*, коли всі функції в обмеженнях $g_j\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, а також цільова функція $f = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ є нелінійними функціями загального вигляду;
- *Задачі опуклого (увігнутого) програмування*, в яких область допустимих розв'язків, що визначається системою обмежень, являє собою опуклу область, а цільова функція є опуклою (увігнутою) функцією;

- *Задачі квадратичного програмування*, в яких цільова функція є квадратичною, а система обмежень являє собою систему лінійних нерівностей та/або рівностей, що визначають ОДР у вигляді опуклого багатогранника або багатокутника у двовимірному випадку;
- Задачі нелінійного програмування з обмеженнями, заданими як рівності, чи *задачі на умовний екстремум*.

Якщо для задач нелінійного програмування загального виду досі немає ефективних методів пошуку глобального екстремуму цільової функції (максимуму чи мінімуму), то для задач опуклого (увігнутого) і квадратичного програмування розроблені ефективні методи, які дозволяють визначити глобальний екстремум.

Задачі нелінійного програмування, як і задачі лінійного, допускають графічну інтерпретацію, якщо нелінійна математична модель містить лише дві змінні $x_1, x_2$:

$$f = f\left(x_1, x_2\right) \to \max\left(\min\right)$$

$$\begin{cases} g_1\left(x_1, x_2\right) \le \left\{\text{чи } \ge\right\} b_1, \\ g_2\left(x_1, x_2\right) \le \left\{\text{чи } \ge\right\} b_2, \\ \dots \\ g_j\left(x_1, x_2\right) \le \left\{\text{чи } \ge\right\} b_j \end{cases} \tag{1.2}$$

Обмеження (1.2) записані як нерівності, що, проте, не зменшує спільності математичної моделі, оскільки обмеження, задане як рівність $g_i\left(x_1, x_2\right) = b_i$ може бути представлено у вигляді системи двох нерівностей $g_i\left(x_1, x_2\right) \ge b_i$ і $g_i\left(x_1, x_2\right) \le b_i$.

Методики графічної інтерпретації задач лінійного та нелінійного програмування в основному не відрізняються один від одного, за винятком геометричних образів цільової функції та системи обмежень. Так, якщо в задачах лінійного програмування (з двома змінними) геометричний образ цільової функції є прямою лінією, а системи обмежень – опуклий багатокутник (рис.1.1 а), то в задачах нелінійного програмування цільова функція – деяка довільна крива $f = f\left(x_1, x_2\right)$, а система обмежень - область довільного виду (рис.1.1 б). На рисунках: $F$ – цільова функція (пунктирна лінія), область допустимих розв'язків заштрихована.

Однак в обох випадках пошук оптимального розв'язку полягає в певному взаємному розташуванні ліній рівня цільової функції та області допустимих розв'язків.

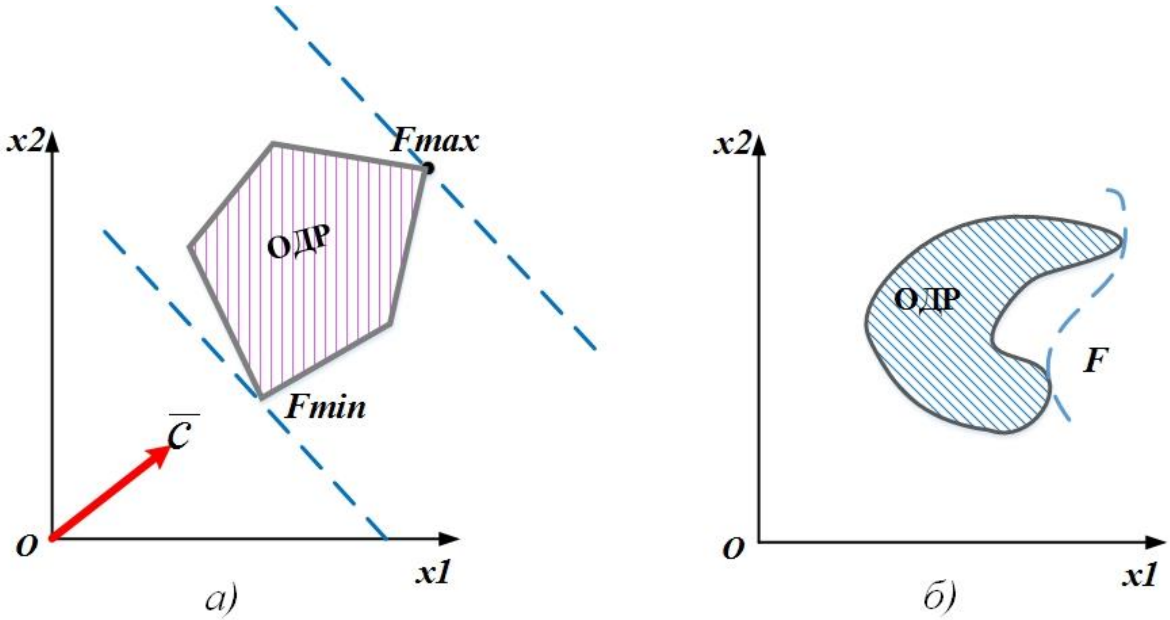



Рис.1.1 - Графічна інтерпретація задач: а) лінійного; б) нелінійного програмування

**1.1.1. Геометричні образи нелінійних оптимізаційних моделей**

Нелінійні оптимізаційні моделі містять як обов'язкові компоненти цільову функцію та обмеження, що є системою нерівностей та/або рівностей, і, можливо, умови невід'ємності змінних моделі у вигляді (1.1).

Якщо математична оптимізаційна модель містить лише дві змінні $x_1, x_2$, то цьому випадку компоненти моделі мають прості геометричні образи, які, проте, значно складніше таких для лінійних оптимізаційних моделей. Наочне графічне уявлення цільової функції та системи обмежень моделі, по-перше, полегшує розуміння як самої моделі, і методів її розв'язання і, по-друге, графічна інтерпретація розв’язку є простим інструментом визначення оптимального розв’язку. Це визначається тим, що візуалізація компонентів нелінійної моделі дозволяє безпосередньо спостерігати розташування глобального та локального екстремумів.

У задачах нелінійного програмування лінії рівня, що відповідають цільовій функції, є нелінійними і тому значно складнішими. Наступні приклади ілюструють нелінійні цільові функції, що часто зустрічаються в додатках, і відповідні їм лінії рівня.

***Приклад 1.*** Дана цільова функція $f=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2$. Прирівнявши її довільному числу *C* отримаємо рівняння лінії рівня, відповідної цільової функції *f*:

$$(x_1-2)^2+(x_2-3)^2=C.$$

Це рівняння описує лінію рівня, яка в цьому випадку представляє коло радіусом $\sqrt{C}$ та центром, зміщеним праворуч по осі $x_1$ на 2 од. та вгору по осі $x_2$ – на 3 од. (рис.1.2 а). При збільшенні (зменшенні) числа *C*, отже, і значення цільової функції *f*, радіус кола збільшується (зменшується), залишаючи положення центру кола незмінним. Тому сімейство ліній рівня цільової функції є сукупністю концентричних кіл.

Цільова функція $f = x_1^2 + x_2$. Лінія рівня цієї цільової функції описується рівнянням $x_2 = -x_1^2 + C$. Це рівняння параболи, піднятої на $C$ од. по осі $x_2$ з гілками донизу (рис.1.2 б). Збільшення значення цільової функції відповідає зсуву лінії рівня вгору, а зменшення – зсуву лінії рівня вниз. Сукупність парабол для різних значень числа $C$ являє собою сімейство ліній рівня, відповідних розглядуваної цільової функції.

Цільова функція $f = x_1 \cdot x_2$. Лінія рівня цієї цільової функції визначається рівнянням $x_1 \cdot x_2 = C$ і при різних значеннях числа $C$ є сімейство гіпербол (рис.1.2 в), або сімейство ліній рівня, які описуються рівнянням: $x_2 = \frac{C}{x_1}$. Збільшення значення цільової функції відповідає зсуву лінії рівня (гіпербол) вгору і вправо.

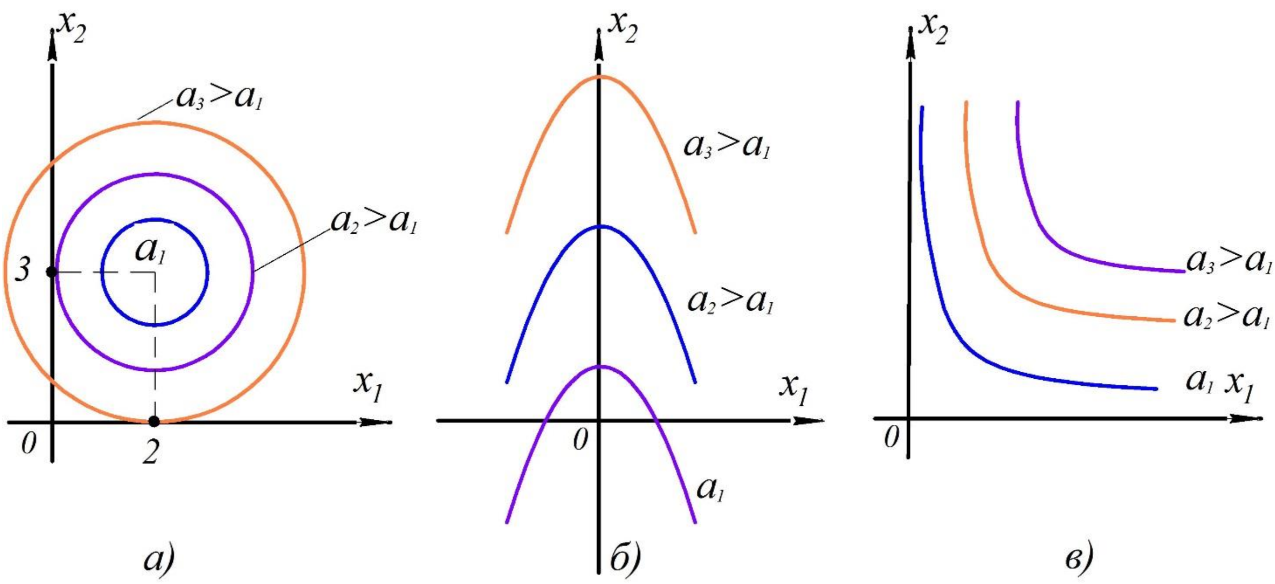



Рис.1.2 – Лінії рівня, які відповідні цільовій функції:
а) $f = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$; б) $f = x_1^2 + x_2$; в) $f = x_1 \cdot x_2$

***Приклад 2.*** Лінії рівня цільової функції загального виду:

$$f = a \cdot x_1^2 + b \cdot x_1 + c \cdot x_2^2 + d \cdot x_2 + e \cdot x_1 \cdot x_2,$$

де $a, b, c, d, e$ - дійсні числа, визначаються рівнянням:

$$a \cdot x_1^2 + b \cdot x_1 + c \cdot x_2^2 + d \cdot x_2 + e \cdot x_1 \cdot x_2 = g,$$

де $g$ - дійсне число.

Це рівняння, залежно від значень та знаків коефіцієнтів $a, b, c, d, e, g$ визначає різні сімейства ліній рівня (рис. 1.3): кола, еліпси, гіперболи чи параболи.

При $a = c > 0, e = 0$ лінії рівня визначаються рівнянням $a \cdot x_1^2 + b \cdot x_1 + a \cdot x_2^2 + d \cdot x_2 = g$ і являють собою кола з центром, зміщеним по осях координат $x_1, x_2$. Сімейство ліній рівня (рис.1.3 а) – концентричні кола, радіуси яких збільшуються із збільшенням значення цільової функції *f*.

При $a \neq c > 0, e = 0$ рівняння $a \cdot x_1^2 + b \cdot x_1 + c \cdot x_2^2 + d \cdot x_2 = g$ визначає сімейство ліній рівня у формі еліпсів, зміщених по осях координат $x_1, x_2$. Збільшення значень цільової функції *f* лінії рівня концентрично «розширюються».

Лінії рівня, що описуються загальним рівнянням $a \cdot x_1^2 + b \cdot x_1 + c \cdot x_2^2 + d \cdot x_2 + e \cdot x_1 \cdot x_2 = g$ при $a \neq c > 0, e \neq 0$, являють собою еліпси, повернені на деякий кут і зміщені по осях координат $x_1, x_2$. Збільшення цільової функції *f* відповідає концентричним лініям рівня, які розпливаються (рис.1.3 в).

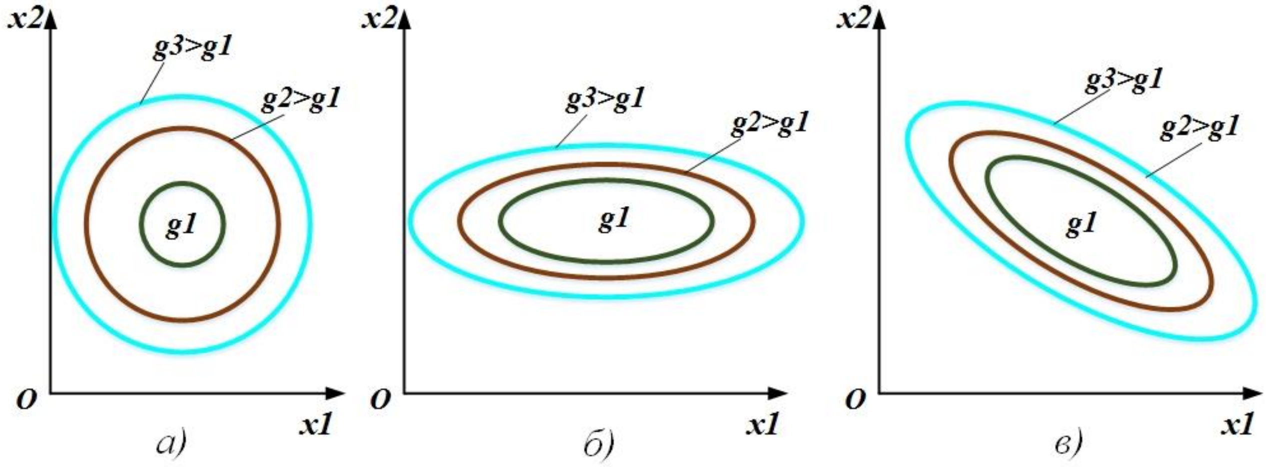



Рис.1.3 - Лінії рівня цільової функції виду $f = a \cdot x_1^2 + b \cdot x_1 + c \cdot x_2^2 + d \cdot x_2 + e \cdot x_1 \cdot x_2$: а) кола при $a = c > 0, e = 0$; б) еліпси при $a \neq c > 0, e = 0$; в) еліпси, повернуті на деякий кут при $a \neq c > 0, e \neq 0$

Отже, геометричні уявлення функцій, що найчастіше зустрічаються на практиці, можуть бути зведені в таблицю.

Таблиця 1.1 – Геометричне подання функцій

| ***Рівняння*** | ***Опис*** |
|---|---|
| $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ | визначає коло з центром у точці $(x_0, y_0)$ радіус якої дорівнює *R*. |
| $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ | є канонічним рівнянням еліпса з центром у точці $(x_0, y_0)$, у якого напівосі паралельні до осей координат і рівні $a, b$. |
| $y - y_0 = a \cdot (x - x_0)^2$ | визначає параболу, вершина якої знаходиться у точці $(x_0, y_0)$. Ця парабола симетрична щодо прямої $x = x_0$. Напрямок гілок параболи залежить від знаку коефіцієнта *a*. Якщо $a \geq 0$, то гілки параболи спрямовані вгору, інакше вниз. |

| *Рівняння* | *Опис* |
|---|---|
| $x - x_0 = a \cdot (y - y_0)^2$ | визначає параболу, вершина якої знаходиться у точці $(x_0, y_0)$. Ця парабола симетрична щодо прямої $y = y_0$. Напрямок гілок параболи залежить від знаку коефіцієнта $a$. Якщо $a \geq 0$, то гілки параболи спрямовані у бік збільшення $x$, інакше у бік зменшення. |
| $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ | визначає канонічне рівняння гіперболи |
| $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ | визначає:<br>• Дві паралельні прямі $x = x_1, x = x_2$ якщо дискримінант рівняння більше нуля і $x_1, x_2$ - корені рівняння;<br>• Одну пряму $x = x_1$, якщо дискримінант рівняння дорівнює нулю та корені $x_1 = x_2$.<br>Вказані прямі паралельні осі *оу*. |
| $a \cdot y^2 + b \cdot y + c = 0$ | визначає:<br>• Дві паралельні прямі $y = y_1, y = y_2$ якщо дискримінант рівняння більше нуля і $y_1, y_2$ - корені рівняння;<br>• Одну пряму $y = y_1$, якщо дискримінант рівняння дорівнює нулю та корені $y_1 = y_2$.<br>Вказані прямі паралельні осі *ох*. |

У свою чергу область допустимих розв'язків, що формується системою нерівностей, є перетином множин розв'язків кожної окремої нерівності, що входить в систему. На відміну від задач лінійного програмування, в яких область допустимих розв'язків (якщо вона не порожня) завжди опукла, область допустимих розв'язків задач нелінійного програмування може бути опуклою, так і неопуклою. Область (або множина) називається опуклою, якщо будь-який відрізок, що з'єднує дві довільні точки області, повністю лежить у цій області, інакше область неопукла.

***Приклад 3.*** Знайти множину розв'язків нерівності:

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2 \leq 4.$$

Границею множини розв'язків нерівності є коло $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2 = 4$ радіусом 2 од., зміщена по осі $x_1$ вправо на 3 од., і по осі $x_2$ - вгору на 5 од. (рис.1.4 а). Це коло ділить площину на дві частини, одна з яких розташована всередині кола, а інша – зовні. Щоб дізнатися, в якій частині площини задовольняється вихідна нерівність, треба взяти будь-яку точку, наприклад, точку з координатами (3,5) всередині кола і підставити її у вихідну нерівність. Отримаємо $(x_1-3)^2+(x_2-5)^2=(3-3)^2+(5-5)=0\le 4$.

Отже, множина розв'язків нерівності розташовано всередині кола і включає в себе також точки своєї границі:

$$(x_1-3)^2+(x_2-5)^2=4,$$

тобто, є замкнутою та обмеженою.

Знайти множину розв'язків нерівності: $x_1\cdot x_2\ge 3,\ (x_1,x_2>0)$.

Границя множини розв'язків нерівності визначається рівнянням $x_1\cdot x_2=3$ і є гіперболою $x_2=\dfrac{C}{x_1}$ (рис.1.4 б), що поділяє площину на дві множини – «під» і «над» гіперболою. Взявши пробну точку, наприклад, точку з координатами (1,1) і підставивши їх у вихідну нерівність, отримаємо $x_1\cdot x_2=1\cdot 1<3$. Це означає, що множина «під» гіперболою не може бути множиною розв'язків нерівності $x_1\cdot x_2\ge 3$. Множина розв’язків нерівності розташовуватиметься «над» гіперболою (рис.1.4 б показано штрихуванням); вона містить також точки своєї границі і є замкнутою необмеженою множиною.

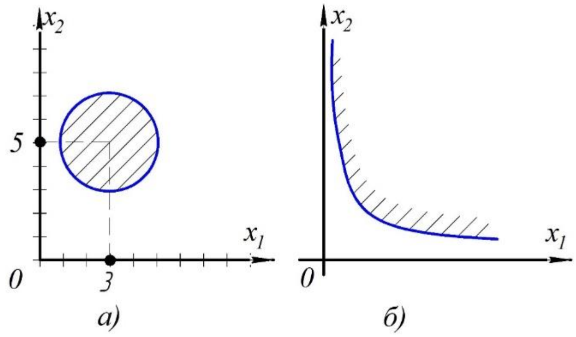



Рис.1.4 - Множина розв’язків нелінійних нерівностей:
а) $(x_1-3)^2+(x_2-5)^2\le 4$; б) $x_1\cdot x_2\ge 3,\ (x_1,x_2>0)$

***Приклад 4.*** Побудувати множину розв’язків систем нелінійних нерівностей (1.3) і (1.4) за умови $(x_1,x_2)>0$:

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2\le 9 \\ x_1\cdot x_2\ge 1 \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2\ge 9 \\ x_1\cdot x_2\le 1 \end{cases} \tag{1.4}$$

Оскільки змінні $x_1,x_2$ повинні бути за умовою суворо позитивними, шукані множини розв’язків будуть лежати в першому квадранті декартової системи координат $Ox_1x_2$.

Множина розв’язків першої нерівності системи (1.3) є коло радіусом 3 од. з центром на початку координат. Множина розв’язків другої нерівності –

необмежена область, що лежить над гіперболою $x_1 \cdot x_2 = 1$ (рис.1.5 а). Перетин обох множин утворює опуклу, замкнуту і обмежену множину розв'язків системи нерівностей (1.3).

Множина розв'язків першої нерівності в системі (1.4) лежить поза колом радіусом 3 од., другої – «під» гіперболою $x_1 \cdot x_2 = 1$ і обмежена знизу та зліва осями координат $Ox_1$ та $Ox_2$. Множина розв'язків системи нерівностей (1.4) утворюється перетином двох множин розв'язків кожної нерівності системи та складається з двох частин. Очевидно, що множина розв'язків системи нерівностей (1.4) є неопуклою, незамкнутою і не обмеженою.

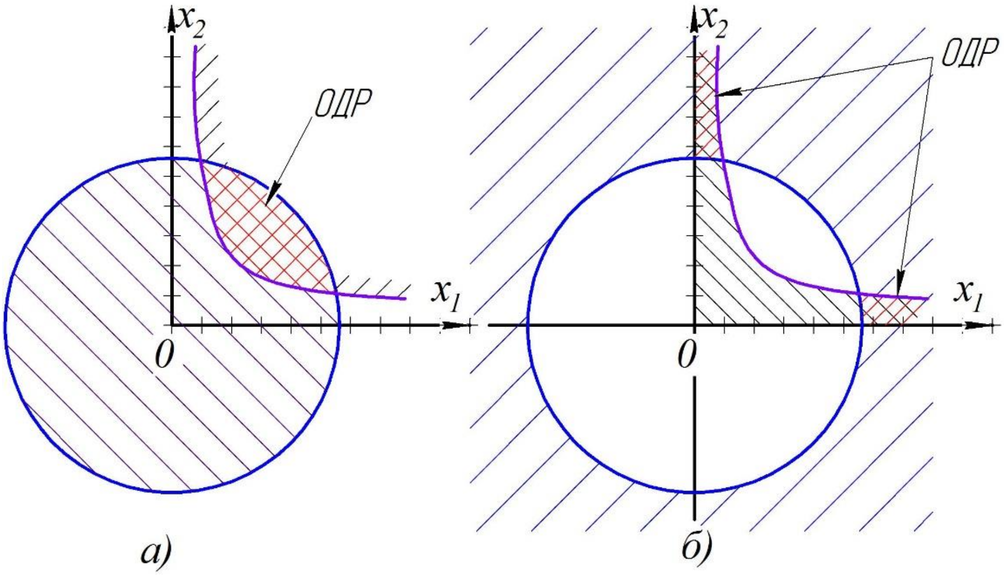



Рис.1.5 - Множина розв'язків (ОДР) систем нелінійних нерівностей (1.3) і (1.4): а) опукла; б) невипуклі множини

***Алгоритм геометричного розв'язання задачі нелінійного програмування (знаходження глобального оптимуму)***

1. Побудувати на площині прямокутну декартову систему координат

2. Для кожного обмеження знайти геометричне місце точок, що задовольняють це обмеження.

Виділити перетин отриманих множин. Множина, що вийшла в результаті, є область допустимих розв'язків (ОДР).

Якщо обмеження суперечливі, ОДР виявиться порожньою множиною.

Якщо ОДР – порожня множина, то робимо висновок: задача не має розв'язку.

3. Цільову функцію прирівняти до довільної константи.

Отримаємо рівняння, що визначає однопараметричне сімейство кривих. Ці криві називаються лініями рівня.

Зобразити 2-3 криві із цього сімейства. Вибрати з них одну криву та зафіксувати на ній деяку точку.

4. Знайти градієнт цільової функції у точці п.3.

Градієнт – це вектор, координати якого дорівнюють частинним похідним першого порядку цільової функції. Градієнт нелінійної функції залежить від точки.

Зобразити знайдений градієнт у вигляді вектору, що виходить із точки, вибраної у п.3

5. Подумки переміститися лініями рівня при максимізації в напрямку градієнта (при мінімізації в напрямку, протилежному градієнту) до лінії рівня, стосовно якої ОДР розташовується по одну сторону

Якщо при скільки завгодно тривалому переміщенні таке положення не досягнуто, робимо висновок про необмеженість цільової функції в ОДР зверху при максимізації (знизу при мінімізації).

Якщо положення знайдено, то в цьому положенні знаходимо точки, що лежать на перетині лінії рівня та ОДР. Вони є оптимальними розв'язками задачі. Точне значення координат цих точок визначають аналітично.

### 1.1.2. Задача з лінійною цільовою функцією та нелінійною системою обмежень

В опуклих і увігнутих задачах нелінійного програмування ОДР, що визначається системою обмежень (1.1), є опуклою, а цільова функція – опукла чи увігнута. Особливість задач опуклого та увігнутого програмування полягає в тому, що для них локальний оптимальний розв’язок є глобальним розв’язком. Якщо цільова функція є суворо опуклою чи суворо увігнутою, то глобальний оптимальний розв’язок є єдиним.

Випукла задача нелінійного програмування відповідає випадку мінімізації опуклої цільової функції на опуклій області допустимих розв’язків (рис.1.6 а), а на увігнутій задачі – випадку максимізації увігнутої цільової функції на опуклій ОДР (рис.1.6 б). Стрілки вказують напрями деформації та/або зміщення ліній рівня, що відповідають збільшенню значень цільової функції.

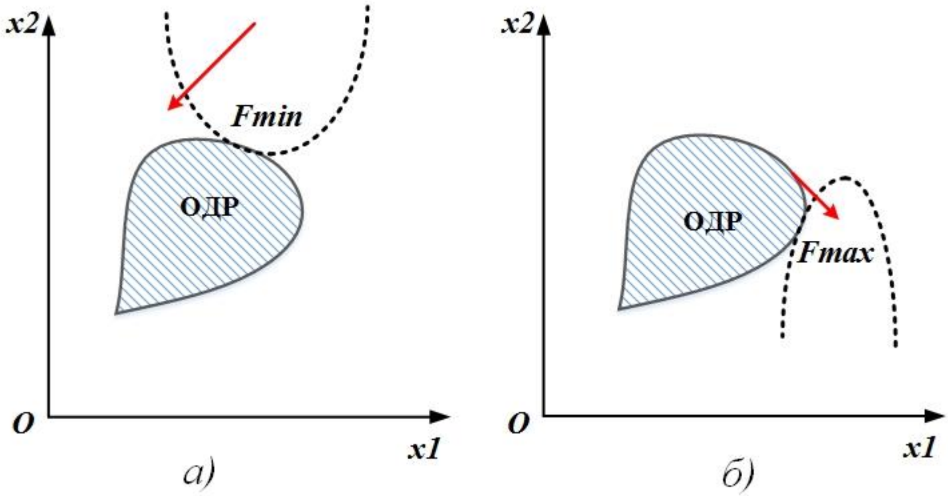



Рис.1.6 – Задачі опуклого програмування: а) з мінімізацією цільової функції; б) з максимізацією функції на опуклій ОДР

Прикладом опуклої або увігнутої задачі є задача лінійного програмування, оскільки ОДР (якщо вона не порожня) є опуклим багатогранником, а цільова функція – пряма лінія, яка одночасно є і опуклою і увігнутою функцією. Тому задача лінійного програмування має єдиний локальний оптимальний розв’язок, є обов'язковим і глобальним оптимальним розв’язком.

***Приклад 5.*** Графічно знайти точки глобального екстремуму лінійної цільової функції $f(x, y) = 2 \cdot x + y$ з нелінійною системою обмежень $x^2 + y^2 \le 16;\ x \ge 0,\ y \ge 0$.

Порядок розв’язання задачі:

1. Побудувати область допустимих розв’язків.
2. Побудувати лінії рівня цільової функції:
- Побудувати лінії рівня для кількох довільних констант $C$;
3. Визначити координати точок оптимуму, використовуючи блок ***Given-Find***.

***Приклад розв’язання задачі у MathCAD***

***Приклад 5.*** Графічно знайти точки глобального екстремуму лінійної цільової функції $f(x,y)=2\cdot x+y$ з нелінійною системою обмежень $x^2+y^2\le 16;\ x\ge 0,\ y\ge 0$.

$f(x,y) := 2x + y$ - цільова функція, що підлягає оптимізації

Задана система обмежень:

$$x^2 + y^2 \le 16$$

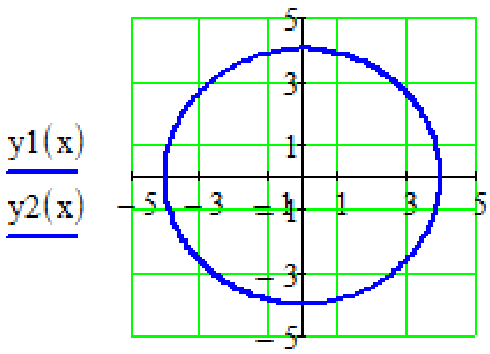
$$x \ge 0 \qquad y \ge 0$$

Побудова допустимої області розв'язків:

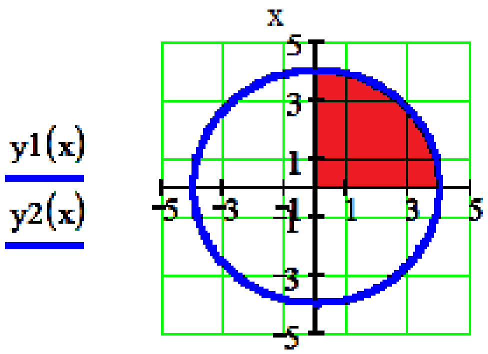
$x^2 + y^2 = 16$ - обмеження

$$\begin{bmatrix} \left(-x^2+16\right)^{\frac{1}{2}} \\ -\left(-x^2+16\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$ - вираз змінної y із обмеження

$$y1(x) := \left(-x^2+16\right)^{\frac{1}{2}} \qquad y2(x) := -\left(-x^2+16\right)^{\frac{1}{2}}$$




Побудова області допустимих розв'язків



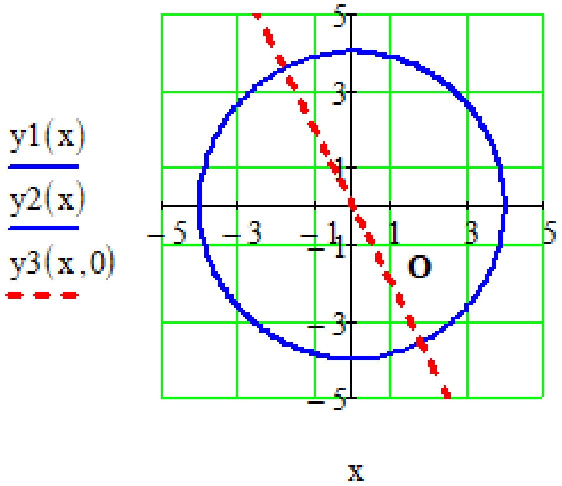

Вибираємо внутрішню область кола в першій чверті, використовуючи пробну точку (1, 1) із цієї області, так як в обмеженні використовується знак "менше або рівно"

x

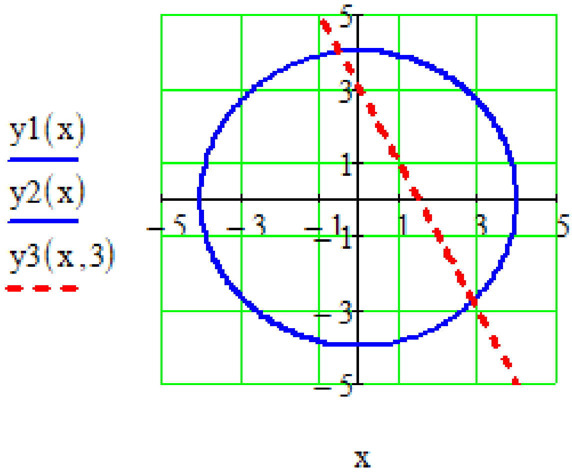
Побудова лінії рівня цільової функції:

$2x + y = C$ - C є довільна константа

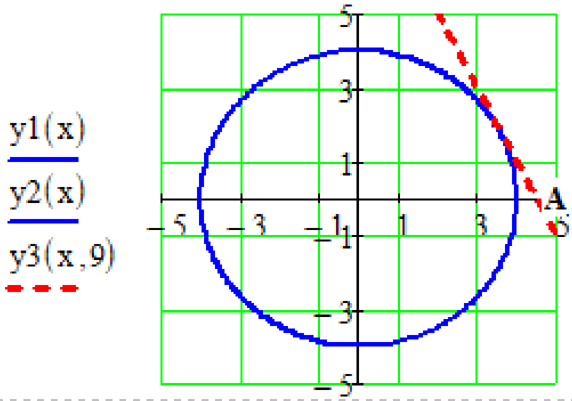
$-2 \cdot x + C \quad y3(x, C) := -2 \cdot x + C$ - рівняння для побудови лінії рівня цільової функції




- випадок $C = 0$




- випадок $C = 3$




- випадок $C = 9$

Мінімум цільової функції, який дорівнює нулю, знаходиться в точці O(0, 0).

Визначення координат точки **A** за допомогою блока ***Given - Find***:

$x := 0 \quad y := 1$

Given

$x^2 + y^2 = 16$

$y = \frac{1}{2} \cdot x$ - рівняння прямої $y_1 = k_1 \cdot x + b_1$, перпендикулярній вихідній $y_2 = k_2 \cdot x + b_2$, де $k_1 \cdot k_2 = -1$, яка проходить через точку O(0,0) (точка $M(x_1, y_1)$); пряма $y = a \cdot x + b$; перпендикулярна прямій $y - y_1 = -\frac{1}{a} \cdot (x - x_1)$, яка проходить через точку M.

$\mathrm{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} 3.578 \\ 1.789 \end{pmatrix}$ - координати точки **A**

$f(3.578, 1.789) = 8.945$ - значення цільової функції точки

Максимум цільової функції, який дорівнює 8.945, знаходиться в точці **A**(3.578, 1.789)

### 1.1.3. Задача з нелінійною цільовою функцією та лінійною системою обмежень

Задача квадратичного програмування належить до класу опуклих (увігнутих) задач нелінійного програмування і характеризується тим, що її область допустимих розв'язків є опуклим багатогранником (опуклою багатогранною областю), а цільова функція – квадратичною функцією.

Задача квадратичного програмування, якщо її область допустимих розв'язків не порожня, а цільова квадратична функція є опуклою або увігнутою, завжди має оптимальний розв'язок, причому її локальний екстремум (максимум або мінімум) є також і глобальним екстремумом (максимумом або мінімумом). Для розв'язання задач опуклого (увігнутого) квадратичного програмування розроблені ефективні методи розв'язку, реалізовані комп'ютерними програмами.

Математична модель задачі квадратичного програмування має такі компоненти:

- Квадратична цільова функція характеризується тим, що сума ступенів при змінних моделі не перевищує два:

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \qquad (1.5)$$

- Обмеження, що є системою лінійних нерівностей та/або рівностей:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n \le \{=, \ge\} b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n \le \{=, \ge\} b_2, \\ \ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n \le \{=, \ge\} b_m \end{cases} \tag{1.6}$$

- Умови невід'ємності змінних:

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$$

де $a_i, c_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ - дійсні числа.

Математичні моделі задач квадратичного програмування та задач лінійного програмування мають багато спільного. В обох моделях обмеження є системою лінійних нерівностей (1.6), що формує ОДР у вигляді опуклого багатогранника або опуклої багатогранної області (якщо вона не обмежена). Відмінність полягає у вигляді цільової функції. Якщо в задачі квадратичного програмування цільова функція є квадратичною функцією змінних моделі, то в задачі лінійного програмування – лінійної функцією, яка є водночас і опуклою і увігнутою. А оскільки, лінійна функція є окремим випадком квадратичної при коефіцієнтах $c_{ij} = 0\,(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ в рівності (1.5), то задачі лінійного програмування можна віднести до окремого виду задач квадратичного програмування. В обох задачах (квадратичного та лінійного) оптимальний розв’язок може бути або в одній з вершин багатогранника, або на одній з його граней.

У загальному випадку квадратичні функції можуть бути не тільки опуклими або увігнутими, але й також опуклими при одних значеннях змінних і увігнутими при інших. В останньому випадку квадратична форма називається невизначеною і для задач квадратичного програмування з такою цільовою функцією поки що не існує ефективних методів розв'язання.

Математична модель задачі квадратичного програмування з двома змінними має вигляд:

- Цільова функція ($a \ne 0, b, c \ne 0, d, e$ - дійсні числа):

$$f = a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_1^2 + d \cdot x_2^2 + e \cdot x_1 \cdot x_2 \tag{1.7}$$

- Обмеження – система лінійних нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \le \{=, \ge\} b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \le \{=, \ge\} b_2, \\ \ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 \le \{=, \ge\} b_m \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

Графічна інтерпретація розв'язання задач нелінійного програмування з двома змінними (1.7), (1.8) з опуклою і увігнутою квадратичною цільовою функцією наведена на (рис.1.7 а, б), на якому ОДР являє собою опуклий багатокутник (заштрихована), а цільова функція (показана пунктирними лініями) – опуклою (рис.1.7 а), або увігнутою (рис.1.7 б) функцією.

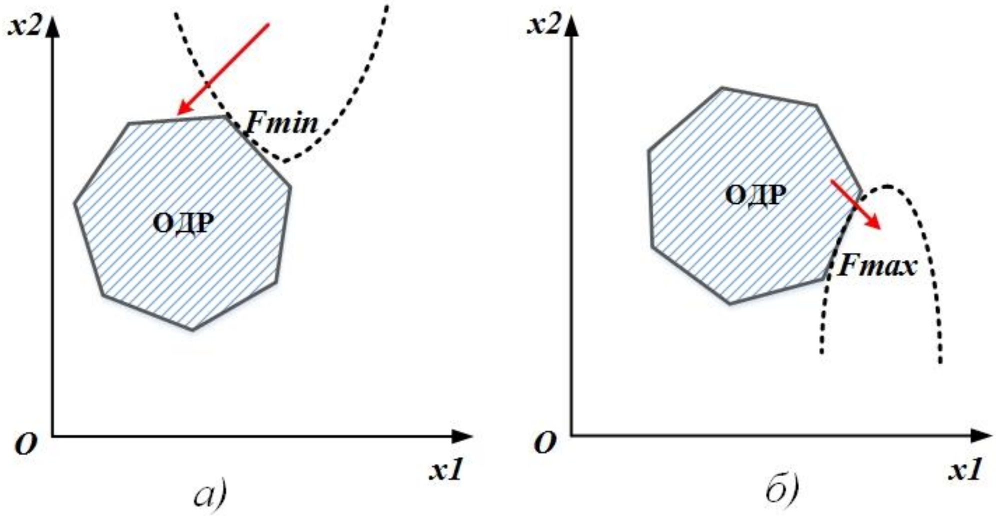



Рис.1.7 - Задача квадратичного програмування:
а) з опуклою; б) увігнутою цільовою функцією

***Приклад 6.*** Графічно знайти точки глобального екстремуму нелінійної цільової функції $f(x,y)=(x-2)^2+(y-3)^2$ з лінійною системою обмежень $x+2\cdot y\le 12;\ x+y\le 9;\ x\ge 0,\ y\ge 0$.

Порядок розв'язання задачі:

1. Побудувати область допустимих розв'язків.
2. Побудувати лінії рівня цільової функції:
- Побудувати лінії рівня для кількох довільних констант *C*;
3. Визначити координати точок екстремуму.

***Приклад розв'язання задачі у MathCAD***

***Приклад 6.*** Графічно знайти точки глобального екстремума нелінійної цільової функції $f(x,y)=(x-2)^2+(y-3)^2$ з лінійною системою обмежень $x+2\cdot y\le 12;\ x+y\le 9;\ x\ge 0,\ y\ge 0$.

$f(x,y) := (x-2)^2+(y-3)^2$ - цільова функція, яка підлягає оптимізації

Задана система обмежень:

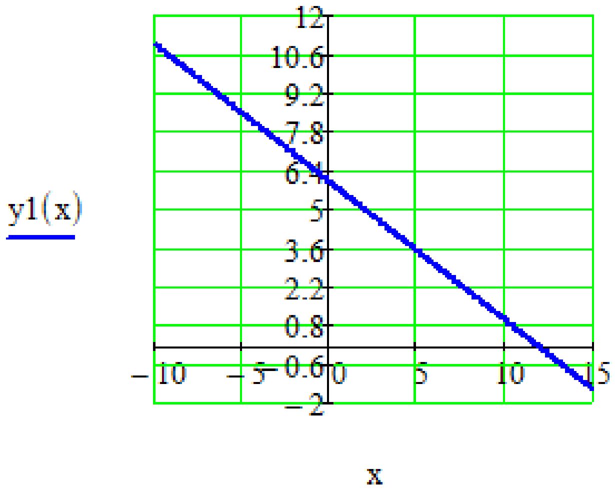
$x+2\cdot y\le 12 \qquad x+y\le 9 \qquad x\ge 0 \qquad y\ge 0$

Побудова допустимої області розв'язків:

$x + 2 \cdot y = 12$ - перше обмеження

$\frac{-1}{2} \cdot x + 6$ - вираз змінної y із першого обмеження

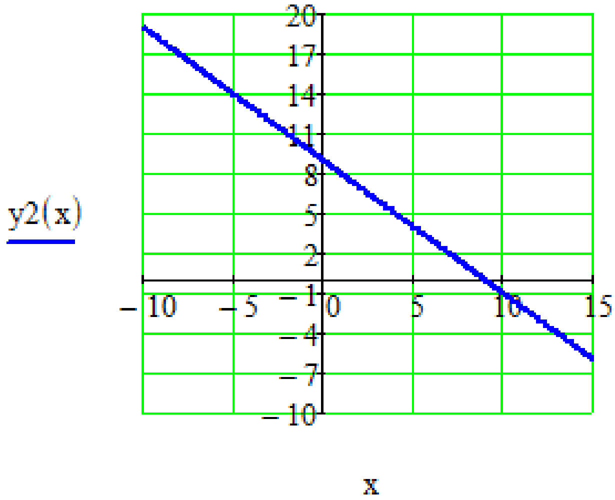
$y1(x) := \frac{-1}{2} \cdot x + 6$ - функція для побудови графіка першого обмеження



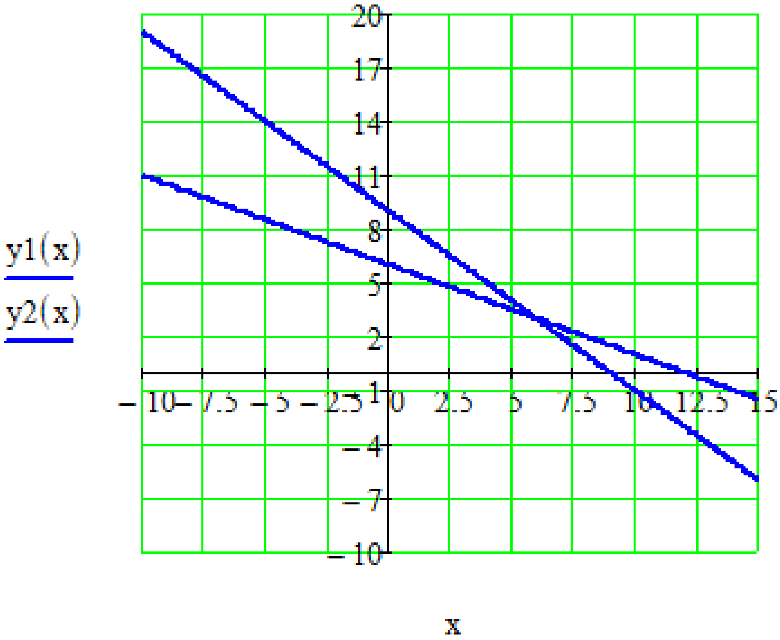

$x + y = 9$ - друге обмеження

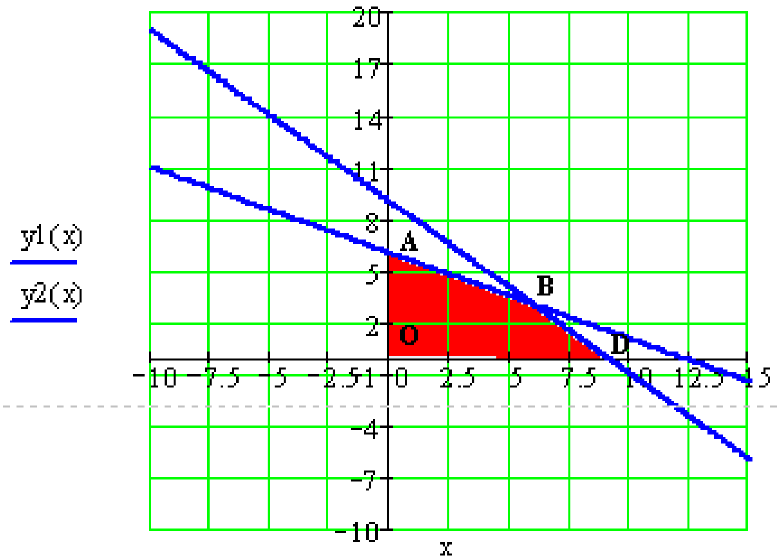
$-x + 9$ - вираз змінної y із другого обмеження

$y2(x) := -x + 9$ - функція для побудови графіка другого обмеження



Побудова області допустимих розв'язків




Вибираємо залиту червоним кольором область OABD у першій чверті, використовуючи пробну точку (1, 1) з цієї області для перевірки коректності обмежень.

Побудова лінії рівня цільової функції:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = C$$

- C - є довільна константа

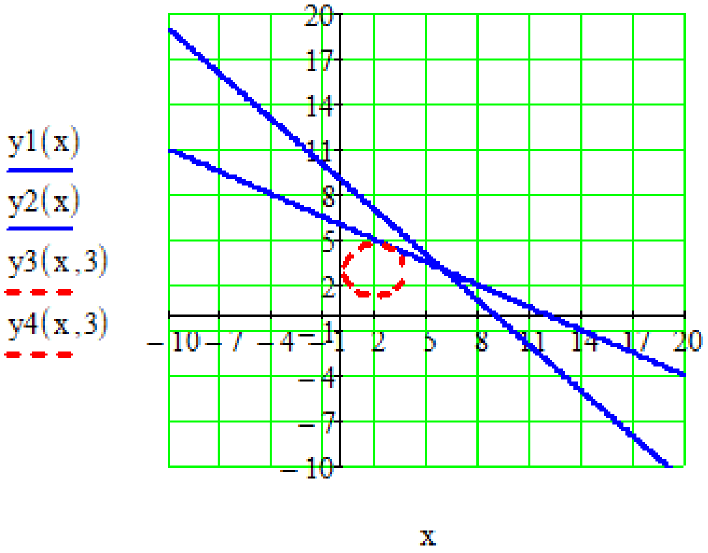
$$\begin{bmatrix} 3 + \left(-4 - x^2 + 4 \cdot x + C\right)^{\frac{1}{2}} \\ 3 - \left(-4 - x^2 + 4 \cdot x + C\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

- вираз змінної y із рівняння цільової функції

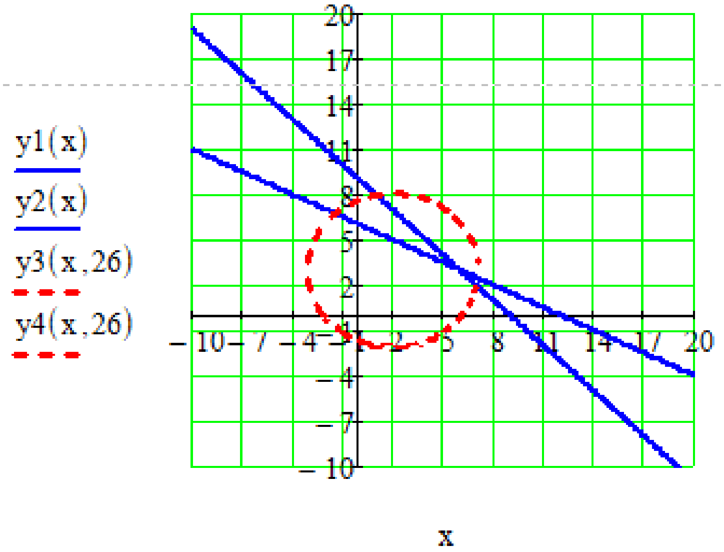
$$y3(x,C) := 3 + \left(-4 - x^2 + 4 \cdot x + C\right)^{\frac{1}{2}}$$

- рівняння для побудови лінії рівня цільової функції

$$y4(x,C) := 3 - \left(-4 - x^2 + 4 \cdot x + C\right)^{\frac{1}{2}}$$




- випадок C = 3




- випадок C = 26

Мінімум цільової функції, рівний f(2,3)=0, знаходиться в точці O(2, 3).

$$f(2,3) = 0$$

Максимум цільової функції знаходиться в крайній правій точці області допустимих розв'язків у напрямку збільшення цільової функції, тобто її градієнта. Такою точкою є точка D.

Визначення координат точки D проведемо при y=0 з рівняння:

$x + y = 9$

Отже, друга координата точки D дорівнює x=9.

$f(9, 0) = 58$ - значення цільової функції в точці D.

### 1.1.4. Задача з нелінійною цільовою функцією та нелінійною системою обмежень

У нелінійних математичних моделях загального вигляду (1.1), (1.2) цільова функція та функції в системі обмежень є довільними нелінійними функціями. Причому область допустимих розв'язків, яка визначається системою обмежень, може бути як опуклою, так і невипуклою, оптимальний розв'язок, що доставляють екстремум цільової функції (максимум або мінімум), може бути розташований в будь-якій точці ОДР, у тому числі всередині області і на її границях, оптимальний розв'язок може бути єдиний, їх може бути кілька або – нескінченною множиною.

***Приклад 7.*** Графічно знайти точки глобального екстремуму нелінійної цільової функції $f(x, y) = (x-5)^2 + (y-6)^2$ з нелінійною системою обмежень $x^2 + y^2 \le 9;\ x \cdot y \ge 1;\ x \ge 0, y \ge 0$.

Порядок розв'язання задачі:

1. Побудувати область допустимих розв'язків.
2. Побудувати лінії рівня цільової функції:
   - Побудувати лінії рівня для кількох довільних констант *C*;
3. Визначити координати точок екстремуму цільової функції, використовуючи блок ***Given-Find***.

***Приклад розв'язання задачі у MathCAD***

***Приклад 7.*** Графічно знайти точки глобального екстремума нелінійної цільової функції $f(x, y) = (x-5)^2 + (y-6)^2$ з нелінейною системою обмежень $x^2 + y^2 \le 9;\ x \cdot y \ge 1;\ x \ge 0, y \ge 0$.

$f(x, y) := (x-5)^2 + (y-6)^2$ - цільова функція, яка підлягає оптимізації

Задана система обмежень:

$x^2 + y^2 \le 9 \qquad x \cdot y \ge 1 \qquad x \ge 0 \qquad y \ge 0$

Побудова допустимої області розв'язків:

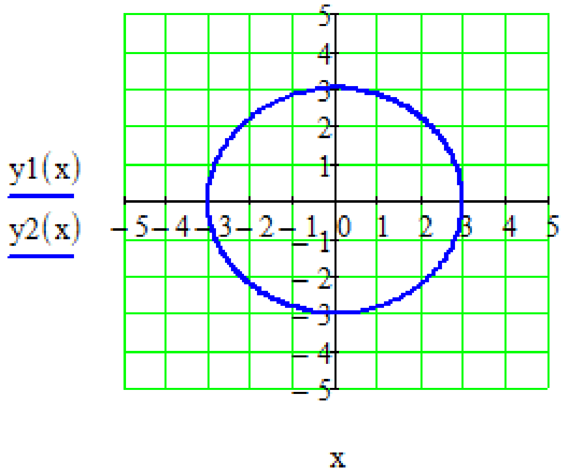
$x^2 + y^2 = 9$ - перше обмеження

$$\begin{bmatrix} \left(-x^2+9\right)^{\frac{1}{2}} \\ -\left(-x^2+9\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$ - вираз змінної y із першого обмеження

$y1(x) := \left(-x^2+9\right)^{\frac{1}{2}}$

- функції для побудови графіка першого обмеження

$y2(x) := -\left(-x^2+9\right)^{\frac{1}{2}}$

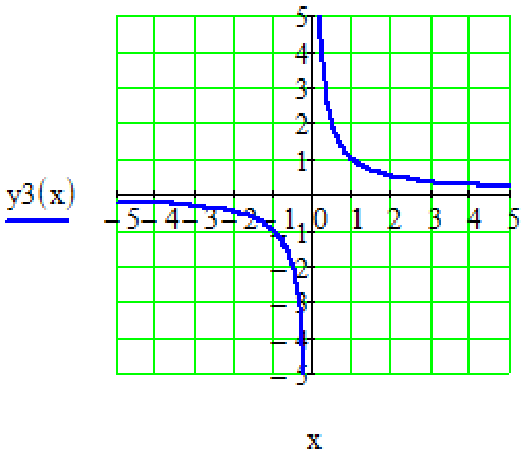



$x \cdot y = 1$ - друге обмеження

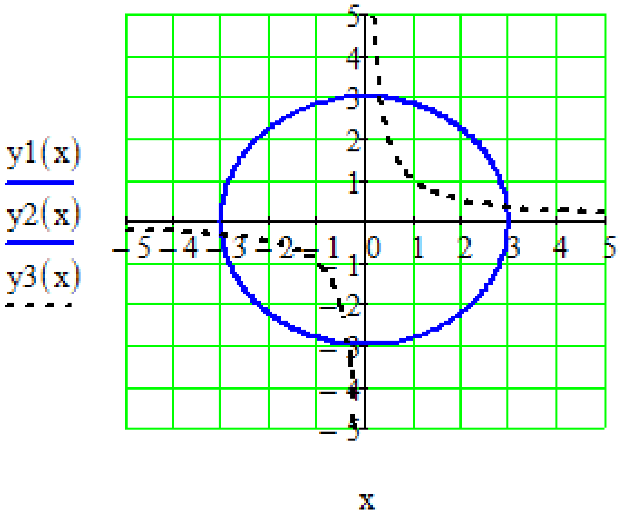
$\frac{1}{x}$ - вираз змінної y з другого обмеження

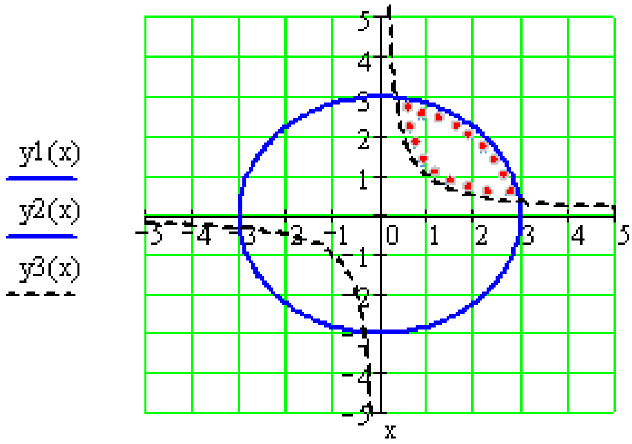
---

$y3(x) := \frac{1}{x}$ - функція для побудови графіка другого обмеження



Побудова області допустимих розв'язків




Вибираємо позначену червоним кольором область АВ у першій чверті, використовуючи пробну точку (2, 2) з цієї області для перевірки коректності обмежень.

Побудова лінії рівня цільової функції:

$(x-5)^2 + (y-6)^2 = C$ - C - є довільна константа

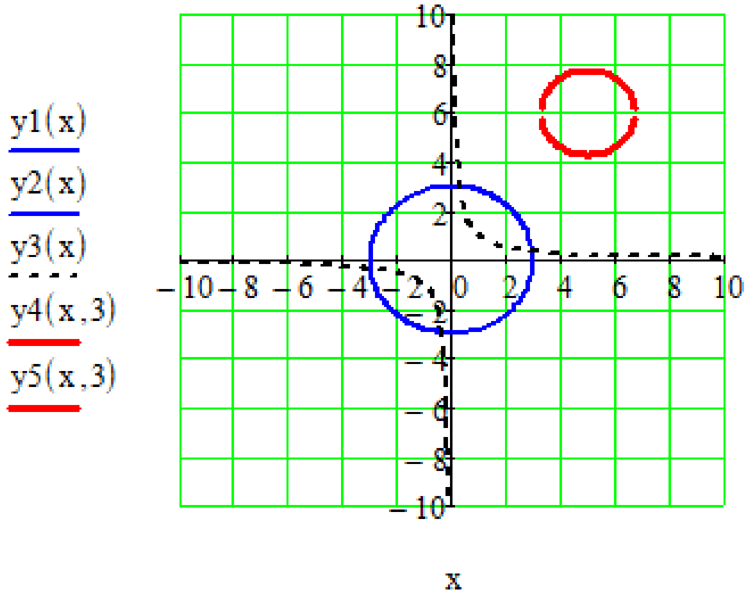
$$\begin{bmatrix} 6 + \left(-25 - x^2 + 10 \cdot x + C\right)^{\frac{1}{2}} \\ 6 - \left(-25 - x^2 + 10 \cdot x + C\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

- вираз змінної у із рівняння цільової функції

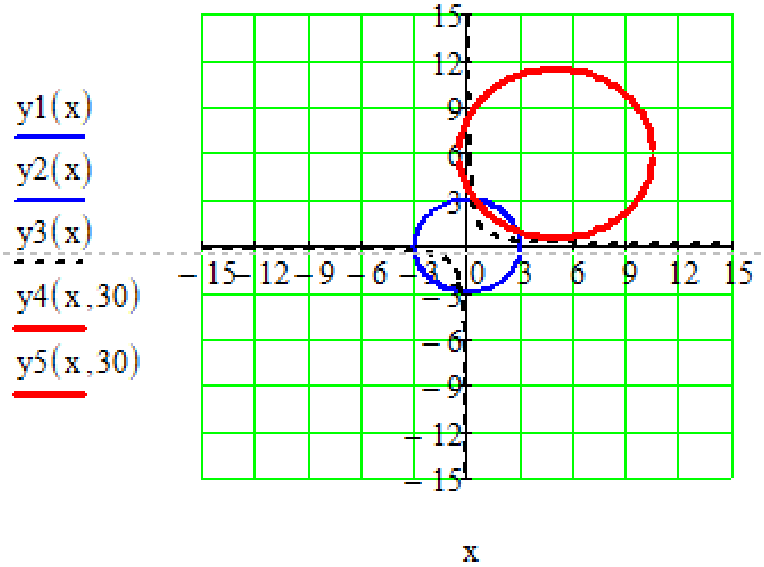
$$y4(x, C) := 6 + \left(-25 - x^2 + 10 \cdot x + C\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$y5(x, C) := 6 - \left(-25 - x^2 + 10 \cdot x + C\right)^{\frac{1}{2}}$$

- рівняння для побудови лінії рівня цільової функції




- випадок C = 3




- випадок C = 30

Мінімум цільової функції знаходиться в точці дотику кола лінії рівня і кола, що обмежує область допустимих розв'язків.

Якщо з'єднати центри двох кіл з відомими координатами прямої, то визначивши координати точки перетину прямої і кола, що обмежує область допустимих розв'язків, тим самим знайдемо координати точки дотику двох кіл.

Точки, що є центрами кіл: O_1(5, 6) та O(0, 0)

Рівняння прямої: (x-5) / -5 = (y-6) / -6 (т.M(x1;y1) і т.д. N(x2;y2); пряма, яка проходить через точки M та N (x-x1)/(x2-x1)=(y-y1)/(y2-y1)

$x := 0 \qquad y := 1$

Given

$x^2 + y^2 = 9$ - рівняння кола, яке обмежує область допустимих розв'язків

$y = 6 \cdot \frac{(x-5)}{5} + 6$ - рівняння прямої

$\mathrm{Find}(x,y) = \begin{pmatrix} 1.921 \\ 2.305 \end{pmatrix}$ - координати точки мінімуму цільової функції

$f(1.921, 2.305) = 23.133$ - мінімальне значення цільової функції

Максимум цільової функції знаходиться в точці дотику кола лінії рівня і гіперболи, що обмежує область допустимих розв'язків.

Якщо з'єднати центр кола лінії рівня з точкою початку координат прямої, то визначивши координати точки перетину прямої і гіперболи, що обмежує область допустимих розв'язків, тим самим знайдемо координати точки дотику кола лінії рівня і гіперболи.

$x := 0 \qquad y := 1$

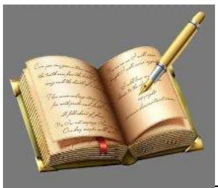
Given

$x \cdot y = 1$ - рівняння гіперболи, що обмежує область допустимих розв'язків

$y = 6 \cdot \frac{(x-5)}{5} + 6$ - рівняння прямої

$\mathrm{Find}(x,y) = \begin{pmatrix} 0.913 \\ 1.095 \end{pmatrix}$ - координати точки максимума цільової функції

$f(0.913, 1.095) = 40.763$ - максимальне значення цільової функції



## ЗАДАЧІ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

***Задача 1.*** Графічно знайти точки глобального екстремуму функції

| № п/п | $f(x_1,x_2)=(x_1+a)^2+(x_2+b)^2 \to extr$ обмеження $a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2 \le b_1;\ \ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2 \le b_2;\ \ x_{1,2}\ge 0$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $b$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $b_1$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $b_2$ |
| **1** | -5 | -4 | 5 | -4 | -20 | 3 | 2 | 30 |
| **2** | -6 | -2 | 2 | 5 | 20 | 2 | 1 | 10 |
| **3** | -1 | -1 | 5 | -4 | -20 | 3 | 2 | 30 |
| **4** | -2 | -1 | 2 | 5 | 20 | 2 | 1 | 10 |
| **5** | -3 | -4 | 3 | 8 | 24 | 4 | 7 | 28 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***6*** | -1 | -1 | 3 | 5 | 15 | 5 | 3 | 15 |
| ***7*** | -3 | -1 | 3 | 8 | 24 | 4 | 7 | 28 |
| ***8*** | -2 | -6 | 3 | 5 | 15 | 5 | 3 | 15 |
| ***9*** | -2 | -2 | 6 | 7 | 42 | 3 | -2 | -6 |
| ***10*** | 1 | -1 | 6 | 7 | 42 | 3 | -2 | -6 |

| ***№ п/п*** | $f(x_1,x_2)=a_0\cdot x_1^{a_1}\cdot x_2^{a_2}\to\max$ обмеження $c_1\cdot x_1+c_2\cdot x_2\le V;\quad x_{1,2}\ge 0$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $c_1$ | $c_2$ | $V$ |
| ***11*** | 0.6 | 0.3 | 0.7 | 20 | 10 | 300 |
| ***12*** | 0.65 | 0.35 | 0.65 | 30 | 20 | 350 |
| ***13*** | 0.7 | 0.4 | 0.6 | 40 | 30 | 400 |
| ***14*** | 0.75 | 0.45 | 0.55 | 50 | 20 | 450 |
| ***15*** | 0.8 | 0.7 | 0.3 | 60 | 30 | 500 |
| ***16*** | 0.85 | 0.65 | 0.35 | 70 | 35 | 550 |
| ***17*** | 0.5 | 0.6 | 0.4 | 80 | 40 | 600 |
| ***18*** | 0.55 | 0.55 | 0.45 | 40 | 80 | 650 |
| ***19*** | 0.45 | 0.55 | 0.45 | 30 | 75 | 700 |
| ***20*** | 0.4 | 0.35 | 0.65 | 35 | 70 | 750 |

### 1.2. Розв’язання багатовимірних задач умовної оптимізації вбудованими засобами MathCAD

У задачах на умовний екстремум вбудовані функції мінімізації та максимізації повинні бути включені до обчислювального блоку, тобто, їм має передувати ключове слово ***Given***. У проміжку між ***Given*** і функцією пошуку екстремуму за допомогою булевих операторів, запозичених на панелі ***Boolean***, записуються логічні вирази (нерівності, рівняння), що задають обмеження на значення аргументів оптимізованої функції.

Раніше ці можливості MathCAD в комплексі з графічними методами використовувалися нами при розв’язанні багатоекстремальних задач оптимізації для вказівки тільки в області локалізації екстремуму.

Тут самі інструментальні засоби використовуються для пошуку оптимуму цільових функцій з додатково накладеними на них обмеженнями.

***Приклад 8.*** Дослідити на умовний екстремум функцію

$f(x,y)=\dfrac{1}{\left[\dfrac{x^2+y^2}{200}\right]-\cos(x)\cdot\cos\left(\dfrac{y}{\sqrt{2}}\right)+2}$ при заданих обмеженнях

$-1\le x\le 1; -1\le y\le 1.$

Порядок розв’язання задачі:

1. Задати цільову функцію $f(x,y)$.

2. Побудувати графік функції двох змінних, використовуючи функцію ***CreateMesh(f, xn, xk, yn, yk, Nx, Ny)***

де *f* - назва функції;

*xn*, *xk* - границі інтервалу зміни аргументу x;

*yn*, *yk* - границі інтервалу зміни аргументу y;

*Nx*, *Ny* - кількість вузлів по x та y відповідно.

3. Знайти екстремум функції:

- Присвоїти початкові значення змінним;
- Записати умови пошуку екстремуму;
- Визначити точку екстремуму, використовуючи функцію ***Maximize()*** або ***Minimize()***.

4. Знайти значення цільової функції у точці екстремуму.

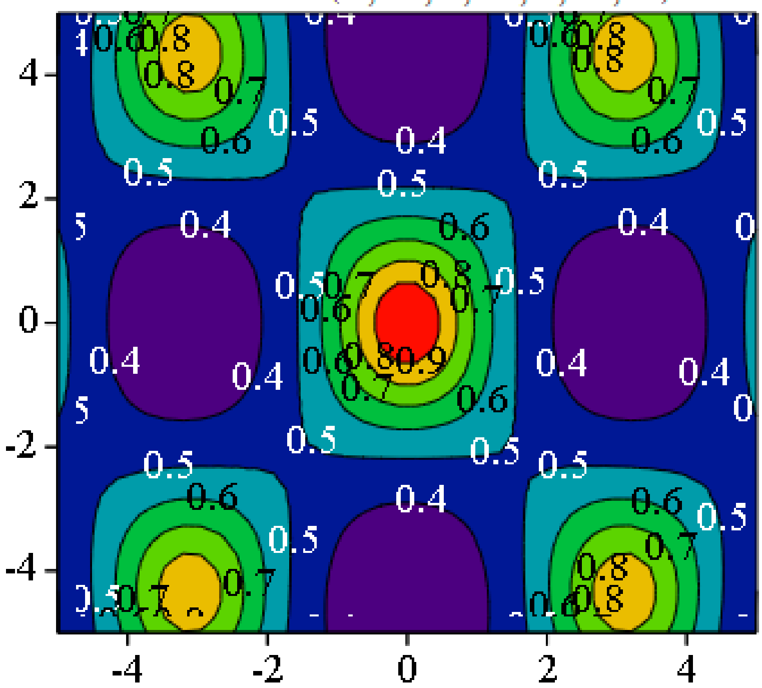
***Приклад розв’язання задачі у MathCAD***

***Приклад 8.*** Досліджити на умовний екстремум функції

$$f(x,y)=\frac{1}{\left[\frac{x^2+y^2}{200}\right]-\cos(x)\cdot\cos\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)+2}$$ при заданих обмеженнях $-1\le x\le 1;\ -1\le y\le 1$.

$$F(X,Y):=\frac{1}{\left[\frac{\left(X^2+Y^2\right)}{200}\right]-\cos(X)\cdot\cos\left(\frac{Y}{\sqrt{2}}\right)+2}$$ цільова функція

ZZ := CreateMesh(F, −5, 5, −5, 5, 40, 40)




ZZ

X := 0.5    Y := 0.5

Given

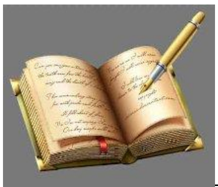
$-1 \le X \le 1$ - обмеження на змінні

$-1 \le Y \le 1$

Zmin := Maximize(F, X, Y) - пошук умовного екстремуму цільової функції

$$Zmin = \begin{pmatrix} 2.924 \times 10^{-9} \\ -1.006 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$$ - точка екстремуму

F(0, 0) = 1 - екстремальне значення цільової функції



## ЗАДАЧІ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

***Задача 2***. Дослідити на умовний екстремум функцію *f* при заданих обмеженнях

| *№ п/п* | *Задачі* |
|---|---|
| *1* | $f(x,y) = x^2 + 8 \cdot x \cdot y + 2 \cdot y^2, x + y = 5$ |
| *2* | $f(x,y) = x^2 + 8 \cdot x \cdot y + 3 \cdot y^2, 9 \cdot x + 10 \cdot y = 29$ |
| *3* | $f(x,y) = x^2 + 10 \cdot x \cdot y + 2 \cdot y^2, 17 \cdot x + 16 \cdot y = 82$ |
| *4* | $f(x,y) = 2 \cdot x^2 + 10 \cdot x \cdot y + 3 \cdot y^2, 9 \cdot x + 13 \cdot y = 31$ |
| *5* | $f(x,y) = 3 \cdot x^2 - 8 \cdot x \cdot y + y^2, 10 \cdot y - x = 17$ |

| № п/п | Задачі |
|---|---|
| 6 | $f(x,y)=y+10\cdot x^3, 8\cdot x^3\cdot y^2+y=2$ в точці $M_0\left(\frac{1}{2},-2\right)$ |
| 7 | $f(x,y)=x+y,\ x^2+y=1$ |
| 8 | $f(x,y)=x+y,\ x^2+y^2=2$ |
| 9 | $f(x,y)=x+y,\ 2\cdot x^2+y^2=6$ |
| 10 | $f(x,y)=x+y,\ 3\cdot x^2+y^2=12$ |
| 11 | $f(x,y)=x-y,\ tg(x)-3\cdot tg(y)=0, \lvert x\rvert<\pi/2, \lvert y\rvert<\pi/2$ |
| 12 | $f(x,y)=x+2\cdot y,\ x^2+y^2=5$ |
| 13 | $f(x,y)=x+9\cdot y,\ x^2+y=1$ |
| 14 | $f(x,y)=2\cdot x+16\cdot y,\ x\cdot y+y^2=7$ |
| 15 | $f(x,y)=3\cdot x-6\cdot y,\ y^2-x\cdot y=1$ |
| 16 | $f(x,y)=4\cdot x-y,\ x^2-y^2=15$ |
| 17 | $f(x,y)=4\cdot x-2\cdot y,\ x^2-x\cdot y=3$ |
| 18 | $f(x,y)=-12\cdot x+7\cdot y,\ x^2-x\cdot y=35$ |
| 19 | $f(x,y)=2\cdot y-4\cdot x-5\cdot x\cdot y,\ x^2\cdot y+x=2$ |
| 20 | $f(x,y)=x^2+y^2, x^2+y^2-x\cdot y=1$ |
| 21 | $f(x,y,z)=x\cdot y+y\cdot z+x\cdot z, x+y+2\cdot z+2=0$ |
| 22 | $f(x,y,z)=2\cdot x\cdot y+y\cdot z+2\cdot x\cdot z, 2\cdot x+y+z=3$ |
| 23 | $f(x,y,z)=x\cdot y+y\cdot z+x\cdot z,$<br>$2\cdot x^3\cdot y^2\cdot z+4\cdot x^2+5\cdot y^2+6\cdot z^2=17$ в точці $M_0(1;1;1)$ |
| 24 | $f(x,y,z)=x^3+y^2-z^3,$<br>$2\cdot x+2\cdot y-2\cdot z=-1$ в точці $M_0\left(-1;\frac{3}{2};1\right)$ |
| 25 | $f(x,y,z)=27\cdot x^3+y^3-z^3,\ x\cdot y\cdot z=9$ |
| 26 | $f(x,y,z)=x^3+27\cdot y^3-z^3,\ x\cdot y\cdot z=-9$ |
| 27 | $f(x,y,z)=x^3+y^3-z^3,\ x\cdot y\cdot z=27$ |
| 28 | $f(x,y,z)=x\cdot y^2\cdot z^3, x+m\cdot y^2+n\cdot z^3=1,$<br>$m>0, n>0, y>0, z>0$ |
| 29 | $f(x,y,z)=x^2\cdot y^3\cdot z^4, 2\cdot x+3\cdot y+4\cdot z=a,$<br>$x>0, y>0, z>0, a>0$ |

| № п/п | Задачі |
|---|---|
| *30* | $f\left(x,y,z\right)=4\cdot\ln\left(x\cdot z\right)-y+z,$<br>$x\cdot y=-12+x$ в точці $M_0\left(-24;2;-6\right)$ |
| *31* | $f\left(x,y,z\right)=8\cdot\ln\left(x\cdot y\cdot z\right)-x-y+2\cdot z,$<br>$x\cdot z+x\cdot y=6$ в точці $M_0\left(3;3;1\right)$ |
| *32* | $f\left(x,y,z\right)=x-2\cdot y+2\cdot z,\ x^2+y^2+z^2=1$ |
| *33* | $f\left(x,y,z\right)=x+2\cdot y+3\cdot z,\ x^2+y^2+z^2=1$ |

## 1.3. Метод множників Лагранжа для розв'язання задач умовної оптимізації

### 1.3.1. Алгоритм застосування методу для випадку обмежень у вигляді рівностей

Розглянемо задачу мінімізації цільової функції, у якій всі обмеження задані у вигляді рівностей:

$$\begin{aligned}&f\left(\vec{X}\right)\to\min\\&h_i\left(\vec{X}\right)=0,\ i=1\ldots m,\\&\vec{X}\in E^n,\ т.е.\ \vec{X}=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)^T\end{aligned}\tag{1.9}$$

Побудуємо функцію, яку назвемо функцією Лагранжа:

$$L\left(\vec{X},\vec{Y}\right)=f\left(\vec{X}\right)+\left(\vec{Y},h\left(\vec{X}\right)\right)$$

Компоненти вектору $\vec{Y}=\left(y_1,y_2,\ldots,y_m\right)^T$, називаються ***множниками Лагранжа***.

Якщо функції $f\left(\vec{X}\right), g_i\left(\vec{X}\right)=0$ безперервно диференційовані, то вірна така теорема.

***Теорема Лагранжа (необхідні умови).*** Нехай функції $f\left(\vec{X}\right), h_i\left(\vec{X}\right)=0$ диференційовані в точці $\vec{X}^* \in E^n$. Якщо точка $\vec{X}^* \in E^n$ є локальним оптимальним розв’язком задачі (1.9), то існує вектор множників Лагранжа $\vec{Y}^* \in E^m$ такий, що точка $\left(\vec{X}^*, \vec{Y}^*\right)^T$ є стаціонарна точка функції Лагранжа, тобто у цій точці виконуються рівності:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L\left(\vec{X}, \vec{Y}\right)}{\partial x_j} = 0, \; j = 1 \ldots n \\ \dfrac{\partial L\left(\vec{X}, \vec{Y}\right)}{\partial y_i} = 0, \; i = 1 \ldots m \end{cases} \qquad (1.10)$$

Ця теорема дозволяє, розв’язуючи систему рівнянь, знайти стаціонарні точки $\left(\vec{X}^*, \vec{Y}^*\right)^T$ функції Лагранжа. Потім серед отриманих точок $\vec{X}^* \in E^n$ необхідно відібрати оптимальні розв'язки задачі (1.9). При цьому використовуються достатні умови оптимальності.

***Теорема (достатні умови).*** Нехай функції $f\left(\vec{X}\right), h_i\left(\vec{X}\right)=0$ двічі диференційовані у точці $\vec{X}^* \in E^n$. Якщо $\left(\vec{X}^*, \vec{Y}^*\right)^T$ стаціонарна точка функції Лагранжа, і в цій точці знаки кутових мінорів $H_{2m+1}, H_{2m+2}, \ldots, H_{m+n}$ матриці $H$ збігаються зі знаком $(-1)^m$, то ця стаціонарна точка є точкою умовного мінімуму функції $f\left(\vec{X}\right)$. Якщо знаки цих кутових мінорів чергуються, причому знак мінору $H_{2m+1}$ збігається зі знаком числа $(-1)^{m+1}$, то досліджувана стаціонарна точка є точкою умовного максимуму функції $f\left(\vec{X}\right)$.

Матриця $H$, що включає гесіан функції Лагранжа має вигляд:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{m\text{ - стовпців}} & \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{n\text{ - стовпців}} \end{array} \\
H = & \left(\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\
0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \frac{\partial h_m}{\partial x_2} & \frac{\partial h_m}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n} \\
\frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\
\frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} \\
\frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \frac{\partial h_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_3} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{\partial h_1}{\partial x_n} & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_3} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2}
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} m\text{ - рядків} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} n\text{ - рядків} \end{array}
\end{array}
$$

При розв'язанні задачі максимізації цільової функції її необхідно обов'язково перетворити на задачу мінімізації.

**Алгоритм розв'язання задачі Лагранжа**

1. Перетворити задачу на вигляд (1.9), коли праві частини обмежень дорівнюють нулю.
2. Побудувати функцію Лагранжа $L\left(\vec{X},\vec{Y}\right)=f\left(\vec{X}\right)+\left(\vec{Y},h\left(\vec{X}\right)\right)$
3. Знайти усі стаціонарні точки функції Лагранжа.
4. Кожну стаціонарну точку перевірити на оптимальність, використовуючи достатні умови оптимальності.

***Приклад 9.*** Розв'язати задачі $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3\to extr$ при системі обмежень $x_1^2+x_2^2=2;\; x_2+x_3=2;\;\; x_1,x_2,x_3>0$.

Розв’язання

1. Перетворюємо задачу на вигляд:

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 \to extr$$

$$h_1\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$$

$$h_2\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_2 + x_3 - 2 = 0$$

Очевидно, що функції $h_1(x_1, x_2, x_3)$, $h_2\left(x_1, x_2, x_3\right)$ безперервно диференційовані в $E^2$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot x_1 & 2 \cdot x_2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Функція Лагранжа має вигляд:

$$L\left(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2\right) = f\left(x_1, x_2, x_3\right) + y_1 \cdot h_1\left(x_1, x_2, x_3\right) + y_2 \cdot h_2\left(x_1, x_2, x_3\right)$$

$$L\left(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2\right) = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + y_1 \cdot \left(x_1^2 + x_2^2 - 2\right) +$$

$$+ y_2 \cdot \left(x_2 + x_3 - 2\right)$$

2. Складемо систему

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 + 2 \cdot y_1 \cdot x_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + x_3 + 2 \cdot y_1 \cdot x_2 + y_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} = x_2 + y_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y_1} = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y_2} = x_2 + x_3 - 2 = 0 \end{cases}$$

Розв'яжемо систему рівнянь відносно змінних $x_1, x_2, x_3, y_1$ та $y_2$.

3. Знайдено лише одну стаціонарну точку функції Лагранжа, яка задовольняє умовам $x_1, x_2, x_3 > 0$:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1,\ y_1 = -\frac{1}{2},\ \ y_2 = -1.$$

Досліджуємо цю точку на оптимальність. Для цього знайдемо другі похідні, необхідні для складання матриці Гесе $H_x$:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 2 \cdot y_1, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 1, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 2 \cdot y_1, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} = 1, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} = 0$$

У знайденій точці матриця $H$ має вигляд:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2x_1 & 2x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2x_1 & 0 & 2y_1 & 1 & 0 \\ 2x_2 & 1 & 1 & 2y_1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$\det H_5 = -24;\ (-1)^{2+1} = -1.$

Знак п'ятого кутового мінору збігається зі знаком $(-1)^{2+1}$. Це означає, що функція в точці $\tilde{x} = (1,1,1)^T$ має локальний максимум, рівний $f(x_1, x_2, x_3) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$.

***Приклад 10.*** Знайти мінімум функції $f(x,y) = x^2 + y^2$ при обмеженні $h(x,y) = y^2 - x + 3 = 0$.

Порядок розв’язання задачі:

1. Встановити цільову функцію та обмеження.
2. Обчислити частинні похідні. У символьному вигляді отримати рівняння для множників Лагранжа. У символьному вигляді сформувати систему рівнянь з урахуванням обмеження.
3. Присвоїти початкові значення змінним $x, y, \lambda$ де $\lambda$ – множник Лагранжа. Розв'язати систему рівнянь, використовуючи вбудовану функцію ***Find(x, y, λ)***. Отримати значення цільової функції та обмеження при знайденому розв’язку.
4. Перевірити отриманий розв’язок, використовуючи блок **Given-Minimize**.

***Приклад розв’язання задачі у MathCAD***

## УМОВНА ОПТИМІЗАЦІЯ МЕТОДОМ МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА ПРИ ОБМЕЖЕННЯХ ТИПУ РІВНОСТІ

***Приклад 10.*** **Знайти** мінімум функції $f(x,y)=x^2+y^2$ при обмеженні $h(x,y)=y^2-x+3=0$.

$ORIGIN := 1$

$f(x,y) := x^2 + y^2$ - цільова функція

$h(x,y) := y^2 - x + 3$ - задане обмеження у вигляді h(x, y) = 0

$\frac{d}{dx}f(x,y) \rightarrow 2\cdot x \qquad \frac{d}{dy}f(x,y) \rightarrow 2\cdot y$

$\frac{d}{dx}h(x,y) \rightarrow -1 \qquad \frac{d}{dy}h(x,y) \rightarrow 2\cdot y$

- обчислення частинних похідних

$\frac{d}{dx}f(x,y) + \lambda\cdot\left(\frac{d}{dx}h(x,y)\right) \rightarrow 2\cdot x - \lambda$

$\frac{d}{dy}f(x,y) + \lambda\cdot\left(\frac{d}{dy}h(x,y)\right) \rightarrow 2\cdot y + 2\cdot\lambda\cdot y$

- рівняння для множників Лагранжа

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dx}f(x,y) + \lambda\cdot\left(\frac{d}{dx}h(x,y)\right) \\ \frac{d}{dy}f(x,y) + \lambda\cdot\left(\frac{d}{dy}h(x,y)\right) \\ h(x,y) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot x - \lambda \\ 2\cdot y + 2\cdot\lambda\cdot y \\ y^2 - x + 3 \end{pmatrix}$$

- символьне формулювання системи рівнянь з обмеженням

$$F(x,y,\lambda) := \begin{pmatrix} 2\cdot x - \lambda \\ 2\cdot y + 2\cdot\lambda\cdot y \\ y^2 - x + 3 \end{pmatrix}$$

- підготовка функції для розв'язання систем рівнянь

$x := 1 \quad y := 1 \quad \lambda := 1$ - присвоєння початкових значень змінним

Given

$F(x,y,\lambda) = 0$

$$\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ \lambda 1 \end{pmatrix} := Find(x,y,\lambda)$$

- розв'язання системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ \lambda 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- отриманий розв' язок

$f(x1, y1) = 9$ - значення цільової функції

$h(x1, y1) = 0$ - значення обмеження

(3; 0) - стаціонарна точка P

ПЕРЕВІРКА СТАЦІОНАРНОЇ ТОЧКИ НА ОПТИМАЛЬНІСТЬ

$L(x2, y2, \lambda2) := f(x2, y2) + \lambda2 \cdot h(x2, y2)$ - функція Лагранжа

$$H\_GESSE(x2, y2, \lambda2) := \begin{bmatrix} 0 & \frac{d}{dx2}h(x2, y2) & \frac{d}{dy2}h(x2, y2) \\ \frac{d}{dx2}h(x2, y2) & \frac{d^2}{dx2^2}L(x2, y2, \lambda2) & \frac{d}{dx2}\left(\frac{d}{dy2}L(x2, y2, \lambda2)\right) \\ \frac{d}{dy2}h(x2, y2) & \frac{d}{dy2}\left(\frac{d}{dx2}L(x2, y2, \lambda2)\right) & \frac{d^2}{dy2^2}L(x2, y2, \lambda2) \end{bmatrix}$$

- побудова матриці, що включає гесіан функції Лагранжа

$$H\_GESSE(x2, y2, \lambda2) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \cdot y2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 \cdot y2 & 0 & 2 \cdot \lambda2 + 2 \end{pmatrix}$$

- символьне обчислення матриці з гесіаном

$$H\_GESSE\_P(x2, y2, \lambda2) := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \cdot y2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 \cdot y2 & 0 & 2 \cdot \lambda2 + 2 \end{pmatrix}$$

- функція отримана копіюванням правої частини попереднього виразу

$$H\_GESSE\_P(x1, y1, \lambda1) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

- обчислення матриці з гесіаном у стаціонарній точці P(3, 0)

$$\left|H\_GESSE\_P(3, 0, \lambda1)\right| \rightarrow -14$$

- обчислення детермінанта матриці з гессіаном у стаціонарній точці P(3, 0)

Оскільки детермінант матриці з гесіаном у стаціонарній точці від'ємний, то стаціонарна точка P(3, 0) є точкою мінімуму цільової функції f(x, y)

ПЕРЕВІРКА ОТРИМАНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

$x := 1 \quad y := 1$

Given

$h(x,y) = 0$

$p := \text{Minimize}(f, x, y)$

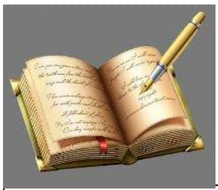
- перевірка розв' язку за допомогою блоку ***Given - Minimize***

$p = \begin{pmatrix} 3 \\ 4.808 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$ - отриманий розв'язок

$x := p_1 \quad y := p_2$

$h(x,y) = 4.001 \times 10^{-6}$ - значення обмеження

$f(x,y) = 9$ - значення цільової функції



## ЗАДАЧІ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

***Задача 3.*** Знайти умовні екстремуми функцій при обмеженнях - рівності

| | |
|---|---|
| ***варіант 1*** | ***варіант 2*** |
| $f(\vec{X}) = x_1^2 + x_2^2 + 4 \cdot x_3$<br>$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 = 12 \end{cases}$ | $f(\vec{X}) = 3 \cdot x_1^2 + 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2^2 + 4 \cdot x_2 \cdot x_3$<br>$\begin{cases} x_1^2 + 2 \cdot x_2^2 = 19 \\ x_1 + 2 \cdot x_2 \cdot x_3 = 11 \end{cases}$ |
| ***варіант 3*** | ***варіант 4*** |
| $f(\vec{X}) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$<br>$\begin{cases} 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 = 12 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 = 8 \end{cases}$ | $f(\vec{X}) = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3$<br>$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$ |
| ***варіант 5*** | ***варіант 6*** |
| $f(\vec{X}) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$<br>$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 = 8 \end{cases}$ | $f(\vec{X}) = x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3^4 \to \max$<br>$x_1 + x_2 + x_3 = 18$ |
| ***варіант 7*** | ***варіант 8*** |
| $f(\vec{X}) = x_1^2 + x_2 + 0{,}5 \cdot x_1 \cdot x_2$<br>$x_1 + x_2 - 1 = 0$ | $f(\vec{X}) = 10 \cdot (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$<br>$x_1 + x_2 - 1 = 0$ |
| ***варіант 9*** | ***варіант 10*** |
| $f(\vec{X}) = x_1 \cdot x_2$<br>$3 \cdot x_1 + x_2 = 6$ | $f(\vec{X}) = 3 \cdot x_1^2 + 2 \cdot x_2^2 - 3 \cdot x_1 + 1$<br>$x_1^2 + x_2^2 = 4$ |

| *варіант 11* | *варіант 12* |
|---|---|
| $f(\vec{X}) = 3 \cdot x_1 \cdot x_2$<br>$2 \cdot x_1 + x_2 = 3$ | $f(\vec{X}) = 2 \cdot x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2 + 2 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2$<br>$x_1 + x_2 = 2$ |
| *варіант 13* | *варіант 14* |
| $f(\vec{X}) = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3$<br>$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ | $f(\vec{X}) = x_1 + 3 \cdot x_2$<br>$x_1^2 + x_2^2 = 10$ |
| *варіант 15* | *варіант 16* |
| $f(\vec{X}) = 5 - 3 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2$<br>$x_1^2 + x_2^2 = 25$ | $f(\vec{X}) = 8 - \left(x_1 + 2\right)^2 - \left(x_2 - 4\right)^2$<br>$x_1 + 3 \cdot x_2 = 0$ |
| *варіант 17* | *варіант 18* |
| $f(\vec{X}) = 1 - 4 \cdot x_1 - 8 \cdot x_2$<br>$x_1^2 - 8 \cdot x_2^2 = 2$ | $f(\vec{X}) = 2 \cdot x_1^2 + 3 \cdot x_2^2 + x_3^2$<br>$x_1 + x_2 + x_3 = 13$ |
| *варіант 19* | *варіант 20* |
| $f(\vec{X}) = x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3$<br>$x_1^2 + x_2^2 + 2 \cdot x_3^2 = 16$ | $f(\vec{X}) = x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3^3$<br>$x_1 + x_2 + x_3 = 6$ |
| *варіант 21* | *варіант 22* |
| $f(\vec{X}) = x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3$<br>$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ | $f(\vec{X}) = x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3$<br>$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 = 8 \end{cases}$ |
| *варіант 23* | *варіант 24* |
| $f(\vec{X}) = x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2$<br>$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = a \\ x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0,\ a > 0 \end{cases}$ | $f(\vec{X}) = x_1 + x_2^2 + x_3$<br>$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ |
| *варіант 25* | *варіант 26* |
| $f(\vec{X}) = x_2^2$<br>$x_1^3 + x_2^3 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2 = 0$ | $f(\vec{X}) = x_1 + x_2 + x_3^2 +$<br>$+2 \cdot \left(x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3\right)$<br>$x_1^2 + x_2^2 + x_3 = 1$ |

### 1.3.2. Алгоритм застосування методу для випадку обмежень у вигляді нерівностей. Умови Куна-Такера

Американські вчені Г. Кун та А. Такер узагальнили метод множників Лагранжа, придатний для задач НЛП з обмеженнями – рівностями, на випадок загальної задачі НЛП з обмеженнями у вигляді рівностей та нерівностей. Нехай:

$$f\left(\vec{X}\right)\to \min$$
$$g_i\left(\vec{X}\right)\le b_i,\, i=1,\,2,\,\ldots,\,k \qquad (1.11)$$
$$h_k\left(\vec{X}\right)=0,\, k=1,\,2,\,\ldots,l$$

Кун і Такер сформулювали необхідні та достатні умови оптимальності задач НЛП, виходячи з припущень про диференційованість функцій $f\left(\vec{X}\right),\, g_i\left(\vec{X}\right),\, h_k\left(\vec{X}\right)$.

***Стандартною формою*** задачі нелінійного програмування з $n$ змінними називають задачу про знаходження максимуму або мінімуму цільової функції $f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\to \min\left(\max\right)$ за наявності обмежень $g_i\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\le 0,\, i=1,\,2,\,\ldots,\,m$ у випадку, коли нелінійною є цільова функція або хоча б одна з функцій обмежень, при цьому частина обмежень може мати форму рівностей.

Функція $L=L\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\right)$, визначена співвідношенням:

$$L\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\right)= \\ = f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\cdot g_i\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) \qquad (1.12)$$

$\lambda_1,\,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ - множники Лагранжа.

Називається ***функцією*** Лагранжа для задачі (1.11).

***Теорема Куна-Такера.*** Якщо у точці $\vec{X}=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)^T$ $n$ – мірного простору досягається максимум функції $f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\to \max$ за наявності обмежень $g_i\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\le 0,\, i=1,\,2,\,\ldots,\,m$, то в цій точці виконуються такі умови:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i}=0,\, i=1,\,2,\,\ldots,\,n \\ \lambda_i\cdot g_i\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=0,\, i=1,\ldots,m \\ \lambda_i\le 0,\, i=1,\ldots,m \end{cases} \qquad (1.13)$$

У цьому випадку точка $\vec{X}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$ називається стаціонарною точкою функції $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ за наявності обмежень $g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\le 0, i=1,2,\ldots,m$.

***Теорема Куна-Такера.*** Якщо у точці $\vec{X}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$ $n$ – мірного простору досягається мінімум функції $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to\min$ за наявності обмежень $g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\le 0, i=1,2,\ldots,m$, то в цій точці виконуються такі умови:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_i}=0, i=1,2,\ldots,n\\ \lambda_i\cdot g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0, i=1,\ldots,m\\ \lambda_i\ge 0, i=1,\ldots,m\end{cases} \qquad (1.14)$$

У цьому випадку точка $\vec{X}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$ також називається стаціонарною точкою функції $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ за наявності обмежень $g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\le 0, i=1,2,\ldots,m$.

***Приклад 11.*** Знайти максимум функції $u=4\cdot x-6\cdot y^2+z^4$ за наявності обмежень $z\ge x-2\cdot y^2-3;\quad z\le 1$.

Розв’язання

1. Перепишемо систему обмежень у необхідному для застосування теореми Куна-Такера вигляді:

$$\begin{cases}x-2\cdot y^2-z-3\le 0;\\ z-1\le 0\end{cases}$$

2. Складемо функцію Лагранжа $L$ з множниками Лагранжа $\lambda_1,\lambda_2$:

$$L=L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=4\cdot x-6\cdot y^2+z^4+\lambda_1\cdot\left(x-2\cdot y^2-z-3\right)+\lambda_2\cdot(z-1)$$

Скористаємося умовами Куна-Такера

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 4 + \lambda_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -12 \cdot y - 4 \cdot \lambda_1 \cdot y = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 4 \cdot z^3 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1 \cdot \left(x - 2 \cdot y^2 - z - 3\right) = 0 \\ \lambda_2 \cdot \left(z - 1\right) = 0 \\ \lambda_1 \le 0, \ \ \lambda_2 \le 0 \end{cases}$$

Отже,

$$\begin{cases} \lambda_1 = -4, \\ y = 0, \\ 4 \cdot z^3 + 4 + \lambda_2 = 0, \\ x - 2 \cdot y^2 - z - 3 = 0, \\ \lambda_2 \cdot \left(z - 1\right) = 0, \\ \lambda_2 \le 0. \end{cases}$$

У випадку $\lambda_2 = 0$ із системи отримуємо:

$$\begin{cases} 4 \cdot z^3 = -4, \ z = -1, \\ x = 2 \cdot y^2 + z + 3 = 2. \end{cases}$$

Отже, точка $\left\{ x = 2, \ y = 0, \ z = -1, \ \lambda_1 = -4, \ \lambda_2 = 0 \ \right\}$ є розв'язком системи.

У випадку $\lambda_2 < 0$ із системи отримуємо:

$$\begin{cases} z = 1, \ y = 0, \\ x = 2 \cdot y^2 + z + 3 = 4, \\ \lambda_2 = -4 \cdot z^3 - 4 = -8 \end{cases}$$

Отже, точка $\left\{ x = 4, \ y = 0, \ z = 1, \ \lambda_1 = -4, \ \lambda_2 = -8 \ \right\}$ також є розв’язком системи.

3. З отриманого результату маємо, що у функції $u = 4 \cdot x - 6 \cdot y^2 + z^4$ за наявності обмежень $z \ge x - 2 \cdot y^2 - 3; \ \ z \le 1$ існують дві стаціонарні точки: точка

$M_1$ з координатами $\{x=2, y=0, z=-1\}$ та точка $M_2$ з координатами $\{x=4, y=0, z=1\}$.

При цьому

$$u(M_1)=(x=2, y=0, z=-1)=4\cdot 2-0+1=9,$$
$$u(M_2)=(x=4, y=0, z=1)=4\cdot 4-0+1=17$$

Максимум функції $u=4\cdot x-6\cdot y^2+z^4$ за наявності обмежень $z\ge x-2\cdot y^2-3;\ \ z\le 1$ дорівнює 17 і досягається в точці $\{x=4, y=0, z=1\}$.

Точки $M_1$ і $M_2$ перетворюють на рівність і перше, і друге обмеження з вихідної системи.

### 1.3.3. Розв’язання задачі умовної оптимізації для випадку нелінійної функції двох змінних з обмеженнями-нерівностями

***Приклад 12.*** Знайти мінімум функції $f(x,y)=x^2-y$ за наступної системи обмежень

$$\begin{cases} x\ge 0,\ y\ge 0,\ \ h_1(x,y)=x+y-6=0, \\ g_1(x)=x-1\ge 0,\ \ g_2(x,y)=x^2+y^2\le 26 \end{cases}$$

Порядок розв’язання задачі:

1. Задати цільову функцію та обмеження-нерівності, обмеження-рівність.
2. Присвоїти початкові значення змінним $x, y, \gamma_1, \gamma_2, \lambda_1$, де $\gamma_1, \gamma_2, \lambda_1$ - множники Лагранжа.
3. У символьному вигляді записати систему рівнянь, використовуючи умови Куна-Такера.
4. Розв'язати систему рівнянь, використовуючи функцію $Find(x, y, \gamma_1, \gamma_2, \lambda_1)$. Знайти координати стаціонарних точок. Визначити значення цільової функції у точці екстремуму.
5. Перевірити отриманий розв’язок, використовуючи блок ***Given-Minimize***.

***Приклад розв’язання задачі у MathCAD***

## УМОВНА ОПТИМІЗАЦІЯ З ВИКОРИСТАННЯМ УМОВ КУНА-ТАКЕРА ПРИ ОБМЕЖЕННЯХ ТИПУ НЕРІВНОСТІ

***Приклад 12.*** Знайти мінімум функції $f(x,y)=x^2-y$ при наступній системі обмежень

$$\begin{cases} x\geq 0,\ y\geq 0,\ h_1(x,y)=x+y-6=0, \\ g_1(x)=x-1\geq 0,\ g_2(x,y)=x^2+y^2\leq 26 \end{cases}$$

$f(x,y) := x^2 - y$ - цільова функція

$g1(x,y) := -x + 1$

$g2(x,y) := x^2 + y^2 - 26$ - задані обмеження-нерівності у вигляді g(x, y) <b

$h1(x,y) := x + y - 6$ - задане обмеження-рівність у вигляді h(x, y) = 0

$x := 2 \quad y := 2$

$\gamma 1 := 0.5 \quad \gamma 2 := 0.5 \quad \lambda 1 := 0.5$ - присвоєння початкових значень змінним

Given

$$\frac{d}{dx}f(x,y) + \gamma 1\cdot\frac{d}{dx}g1(x,y) + \gamma 2\cdot\frac{d}{dx}g2(x,y) + \lambda 1\cdot\frac{d}{dx}h1(x,y) = 0$$

$$\frac{d}{dy}f(x,y) + \gamma 1\cdot\frac{d}{dy}g1(x,y) + \gamma 2\cdot\frac{d}{dy}g2(x,y) + \lambda 1\cdot\frac{d}{dy}h1(x,y) = 0$$

$g1(x,y) \leq 0 \qquad g2(x,y) \leq 0$

$h1(x,y) = 0$ - умови Куна - Такера

$\gamma 1\cdot g1(x,y) = 0 \quad \gamma 2\cdot g2(x,y) = 0$

$\gamma 1 \geq 0 \qquad \gamma 2 \geq 0$ - знаки γ змінюються на протилежні при пошуку максимуму

$x \geq 0 \qquad y \geq 0 \qquad x > 1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \gamma 1 \\ \gamma 2 \\ \lambda 1 \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(x,y,\gamma 1,\gamma 2,\lambda 1)$$ - розв'язання системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \gamma 1 \\ \gamma 2 \\ \lambda 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0.612 \\ 0.298 \\ -1.984 \end{pmatrix}$$ - отриманий розв'язок

$f(x,y) = -4$ - значення цільової функції

ПЕРЕВІРКА ОТРИМАНОГО РОЗВ' ЯЗКУ

$$\frac{d}{dx}f(x,y) + \gamma 1 \cdot \frac{d}{dx}g1(x,y) + \gamma 2 \cdot \frac{d}{dx}g2(x,y) + \lambda 1 \cdot \frac{d}{dx}h1(x,y) = 0$$

$$\frac{d}{dy}f(x,y) + \gamma 1 \cdot \frac{d}{dy}g1(x,y) + \gamma 2 \cdot \frac{d}{dy}g2(x,y) + \lambda 1 \cdot \frac{d}{dy}h1(x,y) = 0$$

$h1(x,y) = 0$

- значення обмежень

$g1(x,y) = 0 \qquad g2(x,y) = 0$

Перевірка розв' язку за допомогою блоку ***Given - Minimize***

$x := 8 \qquad y := 6$

Given

$x \ge 0 \quad y \ge 0 \quad x - 1 \ge 0$

$x^2 + y^2 - 26 \le 0 \qquad x + y - 6 = 0$ - система обмежень

$$\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} := \text{Minimize}(f, x, y)$$

$$\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$ - отриманий розв'язок

$f(x1, y1) = -4$ - значення цільової функції

### 1.3.4. Розв’язання задачі умовної оптимізації для випадку нелінійної функції трьох змінних з обмеженнями-нерівностями

Іноді буває зручним видозмінити формулювання задачі Лагранжа (1.12) на таке:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \\ = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot g_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{1.15}$$

що справедливо для обмежень-нерівностей виду $g_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$.

***Приклад 13.*** Знайти мінімум функції трьох незалежних змінних $f\left(x, y, z\right) = 100 \cdot \left(z - y^2 - 0.25 \cdot x^2\right) + \left(1 - x\right)^2 + \left(2 - y\right)^2$ за наступної системи обмежень

$$\begin{cases} h_1\left(x, y\right) = 4 \cdot x + y - 6 = 0,\ \ g_1\left(x\right) = 2 \cdot x + z \geq 5 \\ g_2\left(x, y\right) = x + 3 \cdot y \leq 10,\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ z \geq 0 \end{cases}$$

Порядок розв’язання задачі:

1. Задати цільову функцію та обмеження-нерівності, обмеження-рівності.
2. Присвоїти початкові значення змінним $x, y, z, \gamma_1, \gamma_2, \lambda_1$.
3. У символьному вигляді записати систему рівнянь, використовуючи умови Куна-Такера.
4. Розв'язати систему рівнянь, використовуючи функцію $Find\left(x, y, z, \gamma_1, \gamma_2, \lambda_1\right)$. Визначити значення цільової функції у точках екстремуму.
5. Перевірити отриманий розв’язок, використовуючи блок ***Given-Minimize***.

***Приклад розв’язання задачі у MathCAD***

УМОВНА ОПТИМІЗАЦІЯ З ВИКОРИСТАННЯМ УМОВ КУНА-ТАКЕРА ПРИ ОБМЕЖЕННЯХ ТИПУ НЕРІВНОСТІ

***Приклад 13.*** Знайти мінімум функції трьох незалежних змінних $f(x, y, z) = 100 \cdot \left(z - y^2 - 0.25 \cdot x^2\right) + (1 - x)^2 + (2 - y)^2$ при наступній системі обмежень

$$\begin{cases} h_1(x, y) = 4 \cdot x + y - 6 = 0,\ \ g_1(x) = 2 \cdot x + z \geq 5 \\ g_2(x, y) = x + 3 \cdot y \leq 10,\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ z \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x, y, z) := 100 \cdot \left(z - y^2 - 0.25 \cdot x^2\right)^2 + (1 - x)^2 + (2 - y)^2$$

- цільова функція від трьох незалежних змінних

$g1(x, y, z) := 2 \cdot x + z - 5$

$g2(x, y, z) := -x - 3 \cdot y + 10$

- задані обмеження - нерівності у вигляді g(x, y, z) > b

$h1(x, y, z) := 4 \cdot x + y - 6$

- задане обмеження - рівність у вигляді h(x, y, z) = 0

$\gamma 1 := 0.01 \quad \gamma 2 := 0.1 \quad \lambda 1 := 5$

$x := 3 \quad y := 3.2 \quad z := 5$

- присвоєння початкових значень змінним

Given

$$\frac{d}{dx}f(x,y,z)-\gamma 1\cdot\frac{d}{dx}g1(x,y,z)-\gamma 2\cdot\frac{d}{dx}g2(x,y,z)-\lambda 1\cdot\frac{d}{dx}h1(x,y,z)=0$$

$$\frac{d}{dy}f(x,y,z)-\gamma 1\cdot\frac{d}{dy}g1(x,y,z)-\gamma 2\cdot\frac{d}{dy}g2(x,y,z)-\lambda 1\cdot\frac{d}{dy}h1(x,y,z)=0$$

$$\frac{d}{dz}f(x,y,z)-\gamma 1\cdot\frac{d}{dz}g1(x,y,z)-\gamma 2\cdot\frac{d}{dz}g2(x,y,z)-\lambda 1\cdot\frac{d}{dz}h1(x,y,z)=0$$

$g1(x,y,z)\ge 0$ $\quad g2(x,y,z)\ge 0$

$h1(x,y,z)=0$ — умови Куна - Такера

$\gamma 1\cdot g1(x,y,z)=0$ $\quad \gamma 2\cdot g2(x,y,z)=0$

$\gamma 1\ge 0$ $\quad \gamma 2\ge 0$ — знаки γ змінюються на протилежні при пошуку максимуму

$x\ge 0$ $\quad y\ge 0$ $\quad z\ge 0$ — задані обмеження

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ \lambda 1\\ \gamma 1\\ \gamma 2\end{pmatrix}:=\mathrm{Find}(x,y,z,\lambda 1,\gamma 1,\gamma 2)$$

- розв'язання системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ \lambda 1\\ \gamma 1\\ \gamma 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 4.25\\ -1.6\times 10^{-14}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

- отриманий розв'язок

$f(x,y,z)=0$ — значення цільової функції

ПЕРЕВІРКА ОТРИМАНОГО РОЗВ' ЯЗКУ

$$\frac{d}{dx}f(x,y,z)-\gamma 1\cdot\frac{d}{dx}g1(x,y,z)-\gamma 2\cdot\frac{d}{dx}g2(x,y,z)\ \ldots=-8.58\times 10^{-15}$$
$$+\left(-\lambda 1\cdot\frac{d}{dx}h1(x,y,z)\right)$$

$$\frac{d}{dy}f(x,y,z) - \gamma 1\cdot\frac{d}{dy}g1(x,y,z) - \gamma 2\cdot\frac{d}{dy}g2(x,y,z)\ \ldots = 1.28\times 10^{-13}$$
$$+\left(-\lambda 1\cdot\frac{d}{dy}h1(x,y,z)\right)$$

$$\frac{d}{dz}f(x,y,z) - \gamma 1\cdot\frac{d}{dz}g1(x,y,z) - \gamma 2\cdot\frac{d}{dz}g2(x,y,z)\ \ldots = 1.33\times 10^{-14}$$
$$+\left(-\lambda 1\cdot\frac{d}{dz}h1(x,y,z)\right)$$

$h1(x,y,z) = 0$

$g1(x,y,z) = 1.25$ $\quad$ $g2(x,y,z) = 3$ $\quad$ - значения обмежень

Перевірка розв' язку за допомогою блоку ***Given - Minimize***

$x := 1$ $\quad$ $y := 2$ $\quad$ $z := 4$

Given

$x \ge 0$ $\quad$ $y \ge 0$ $\quad$ $z \ge 0$

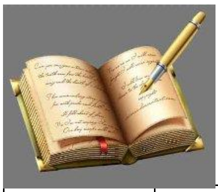
$2\cdot x + z - 5 \ge 0$ $\quad$ $-x - 3\cdot y + 10 \ge 0$ $\quad$ - система обмежень

$4\cdot x + y - 6 = 0$

$$\begin{pmatrix} X1 \\ Y1 \\ Z1 \end{pmatrix} := \mathrm{Minimize}(f, x, y, z)$$

$$\begin{pmatrix} X1 \\ Y1 \\ Z1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4.249 \end{pmatrix}$$ - отриманий розв'язок

$f(X1, Y1, Z1) = 7.48\times 10^{-7}$ $\quad$ - значення цільової функції



## ЗАДАЧІ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

***Задача 4.*** Знайти умовні екстремуми функцій при обмеженнях-нерівності, використовуючи метод множників Лагранжа

| № п/п | Задачі |
|---|---|
| 1 | $f(\vec{X}) = -3\cdot x_1^2 - x_2^2 + 4\cdot x_1 + 4\cdot x_2 - 2\cdot x_1\cdot x_2 \to \max$<br>$\begin{cases} 3\cdot x_1 + 4\cdot x_2 \le 12 \\ x_1 - 2\cdot x_2 \le 2 \end{cases}$<br>$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| 2 | $f(\vec{X}) = -3\cdot x_1^2 - x_2^2 + 12\cdot x_1 + 4\cdot x_2 \to \max$<br>$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 0 \\ \frac{1}{2}\cdot x_1 - \frac{1}{2}\cdot x_2 \le 1 \end{cases}$<br>$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| 3 | $f(\vec{X}) = -\frac{1}{2}\cdot x_1^2 - \frac{1}{2}\cdot x_2^2 + x_1 + 2\cdot x_2 \to \max$<br>$\begin{cases} 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \le 2 \\ x_1 + 4\cdot x_2 \le 5 \end{cases}$<br>$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| 4 | $f(\vec{X}) = 3\cdot x_1 - 2\cdot x_2 - \frac{1}{2}\cdot x_1^2 - x_2^2 + x_1\cdot x_2 \to \max$<br>$\begin{cases} 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \le 2 \\ x_1 + 4\cdot x_2 \le 5 \end{cases}$<br>$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| 5 | $f(\vec{X}) = 3\cdot x_1 - 2\cdot x_2 - \frac{1}{2}\cdot x_1^2 - x_2^2 + x_1\cdot x_2 \to \max$<br>$\begin{cases} x_1 \le 3 \\ x_2 \le 6 \end{cases}$<br>$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| 6 | $f(\vec{X}) = -4\cdot x_1 + 8\cdot x_2 - x_1^2 - \frac{3}{2}\cdot x_2^2 + 2\cdot x_1\cdot x_2 \to \max$<br>$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \le 1 \end{cases}$<br>$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |

| № п/п | Задачі |
| --- | --- |
| 7 | $f(\vec{X}) = -4 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 - x_1^2 - \frac{3}{2} \cdot x_2^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 \le 4 \end{cases}$ <br> $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| 8 | $f(\vec{X}) = -4 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 - x_1^2 - \frac{3}{2} \cdot x_2^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 15 \\ x_1 - x_2 \le 1 \end{cases}$ <br> $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| 9 | $f(\vec{X}) = 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 - \frac{1}{2} \cdot x_1^2 - x_2^2 + x_1 \cdot x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} -x_1 + 2 \cdot x_2 \le 2 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 \le 2 \end{cases}$ <br> $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| 10 | $f(\vec{X}) = -x_1 + 6 \cdot x_2 - x_1^2 - 3 \cdot x_2^2 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 12 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \end{cases}$ <br> $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| 11 | $f(\vec{X}) = -x_1 + 6 \cdot x_2 - x_1^2 - 3 \cdot x_2^2 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ -2 \cdot x_1 + x_2 \le 2 \end{cases}$ <br> $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| 12 | $f(\vec{X}) = -x_1 + 6 \cdot x_2 - x_1^2 - 3 \cdot x_2^2 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 0 \\ x_2 \le 5 \end{cases}$ <br> $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| 13 | $f(\vec{X}) = 6 \cdot x_2 - x_1^2 - \frac{3}{2} \cdot x_2^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 12 \\ -x_1 + x_2 \le 12 \end{cases}$ <br> $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |

| № п/п | Задачі |
|---|---|
| *14* | $f(\vec{X}) = 6\cdot x_2 - x_1^2 - \frac{3}{2}\cdot x_2^2 + 2\cdot x_1\cdot x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} -x_1 + 2\cdot x_2 \le 2 \\ x_1 \le 4 \end{cases}$ <br> $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| *15* | $f(\vec{X}) = 6\cdot x_2 - x_1^2 - \frac{3}{2}\cdot x_2^2 + 2\cdot x_1\cdot x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} 3\cdot x_1 + 4\cdot x_2 \le 12 \\ -x_1 - 2\cdot x_2 \le -2 \end{cases}$ <br> $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| *16* | $f(\vec{X}) = 4\cdot x_1 + 4\cdot x_2 - 3\cdot x_1^2 - x_2^2 + 2\cdot x_1\cdot x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} 3\cdot x_1 + 6\cdot x_2 \le 18 \\ -x_1 + x_2 \le 12 \end{cases}$ <br> $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| *17* | $f(\vec{X}) = 8\cdot x_1 + 12\cdot x_2 - x_1^2 - \frac{3}{2}\cdot x_2^2 \to \max$ <br> $\begin{cases} -x_1 + 2\cdot x_2 \le 2 \\ x_1 \le 6 \end{cases}$ <br> $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| *18* | $f(\vec{X}) = 8\cdot x_1 + 12\cdot x_2 - x_1^2 - \frac{3}{2}\cdot x_2^2 \to \max$ <br> $\begin{cases} -3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 0 \\ 4\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \le 12 \end{cases}$ <br> $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| *19* | $f(\vec{X}) = 3\cdot x_1 - 2\cdot x_2 - \frac{1}{2}\cdot x_1^2 - x_2^2 + x_1\cdot x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} -2\cdot x_1 - x_2 \le -2 \\ 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \le 6 \end{cases}$ <br> $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |

| № п/п | Задачі |
|---|---|
| **20** | $f(\vec{X}) = 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - x_1^2 - \frac{1}{2} \cdot x_2^2 - x_1 \cdot x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 \le 2 \\ -2 \cdot x_1 + x_2 \le 0 \end{cases}$ <br> $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| **21** | $f(\vec{X}) = 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - x_1^2 - \frac{1}{2} \cdot x_2^2 - x_1 \cdot x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} 2 \cdot x_1 + x_2 \le 2 \\ x_2 \le 1 \end{cases}$ <br> $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| **22** | $f(\vec{X}) = 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - x_1^2 - \frac{1}{2} \cdot x_2^2 - x_1 \cdot x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \le 6 \\ -2 \cdot x_1 - x_2 \le -3 \end{cases}$ <br> $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| **23** | $f(\vec{X}) = 8 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 - 2 \cdot x_1^2 - 2 \cdot x_2^2 \to \max$ <br> $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \le 6 \end{cases}$ <br> $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| **24** | $f(\vec{X}) = 8 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 - 2 \cdot x_1^2 - x_2^2 \to \max$ <br> $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 \le 3 \end{cases}$ <br> $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| **25** | $f(\vec{X}) = 8 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 - 2 \cdot x_1^2 - x_2^2 \to \max$ <br> $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 12 \end{cases}$ <br> $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| **26** | $f(\vec{X}) = 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - x_1^2 - 2 \cdot x_2^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 12 \\ x_2 \le 3 \end{cases}$ <br> $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |

| *№ п/п* | *Задачі* |
|---|---|
| *27* | $f(\vec{X}) = 2\cdot x_1 + 2\cdot x_2 - x_1^2 - 2\cdot x_2^2 + 2\cdot x_1\cdot x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} 2\cdot x_1 + x_2 \le 4 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \end{cases}$ <br> $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| *28* | $f(\vec{X}) = 2\cdot x_1 + 2\cdot x_2 - x_1^2 - 2\cdot x_2^2 + 2\cdot x_1\cdot x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} 2\cdot x_1 - x_2 \le 2 \\ x_2 \le 4 \end{cases}$ <br> $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| *29* | $f(\vec{X}) = 4\cdot x_1 + 4\cdot x_2 - 3\cdot x_1^2 - x_2^2 + 2\cdot x_1\cdot x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} 4\cdot x_1 + 5\cdot x_2 \le 0 \\ 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 6 \end{cases}$ <br> $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |
| *30* | $f(\vec{X}) = 8\cdot x_1 + 12\cdot x_2 - x_1^2 - \frac{3}{2}\cdot x_2^2 \to \max$ <br> $\begin{cases} -2\cdot x_1 - x_2 \le -4 \\ 2\cdot x_1 + 5\cdot x_2 \le 10 \end{cases}$ <br> $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ |

## 1.4. Умовна оптимізація зведенням до задач без обмежень

### 1.4.1. Врахування обмежень шляхом заміни змінних

Розглянемо методи врахування обмежень в однокритеріальній задачі:

$$f\left(\vec{X}\right) \to \min, \quad x \in D \tag{1.16}$$

де $D$ - область допустимих розв’язків.

Формально найпростіше знімаються прямі обмеження. Для цього достатньо виконати заміну змінних за однією із формул табл.1.2. Тоді вихідна задача зводиться до задачі безумовної оптимізації щодо нових змінних, після розв’язку якої необхідно повернутися до старих змінних.

Така заміна змінних пов'язана з такими небезпеками:

- Істотно збільшує ступінь нелінійності цільової функції, у нової цільової функції з'являються особливості, яких не було у вихідної, втрачається гладкість;
- Матриця Гесе виходить виродженою чи погано обумовленою, виникають додаткові стаціонарні та локальні екстремальні точки;

- Залежність цільової функції від нових змінних виявляється періодичною.

Таблиця 1.2 - Можливі перетворення для врахування прямих обмежень

| № | ***Обмеження*** | ***Перетворення*** |
|---|---|---|
| 1 | $x_i > a_i$ | $x_i = a_i + \exp(z_i)$ |
| 2 | $x_i > a_i$ | $x_i = a_i + z_i^2$ |
| 3 | $x_i > x_j,\ i \neq j$ | $x_j = z_j,\ x_i = z_j + z_i^2$ |
| 4 | $a_i \le x_i \le b_i$ | $x_i = b_i + (a_i - b_i) \cdot \sin^2(z_i)$<br>$x_i = 0{,}5 \cdot (a_i - b_i) + 0{,}5 \cdot (b_i - a_i) \cdot \sin(z_i)$ |
| 5 | $a_i < x_i < b_i$ | $x_i = b_i + (a_i - b_i) \cdot \frac{1}{\pi} \cdot arcctg(z_i)$<br>$x_i = \frac{b_i + (a_i - b_i) \cdot \exp(z_i)}{1 + \exp(z_i)}$ |
| 6 | $a \le x_i \le b$<br>$a \le x_j \le b$<br>$x_i > x_j,\ i \neq j$ | $x_j = b + (a - b) \cdot \sin^2(z_j)$<br>$x_i = b + (a - b) \cdot \sin^2(z_j) \cdot \sin^2(z_i)$ |
| 7 | $a < x_i < b$<br>$a < x_j < b$<br>$x_i > x_j,\ i \neq j$ | $x_j = b + (a - b) \cdot \frac{1}{\pi} \cdot arcctg(z_j)$<br>$x_i = b + (a - b) \cdot \frac{1}{\pi^2} \cdot arcctg(z_i) \cdot arcctg(z_j)$ |
| 8 | $a_i(x_j) < x_i < b_i(x_j)$<br>$i \neq j$ | $x_j = z_j$<br>$x_i = b_i(z_j) + \left(a_i(z_j) - b_i(z_j)\right) \cdot \sin^2(z_i)$ |
| 9 | $a_i(x_k) < x_i < b_i(x_j)$<br>$i \neq j,\ i \neq k$ | $x_j = z_j$<br>$x_k = z_k$<br>$x_i = b_i(z_i) + \left(a_i(z_k) - b_i(z_j)\right) \cdot \sin^2(z_i)$ |
| z – позначення нових незалежних змінних | | |

***Приклад 14.*** Розв'язати задачу умовної оптимізації зведенням до безумовної методом заміни змінних, якщо задана функція $f = (x_1 + x_2 + x_3)^2 \to \min$ разом з такими обмеженнями $0 \le x_1 \le 2, 0 \le x_2 \le 4, 0 \le x_3 \le 6$.

Порядок розв’язання задачі:

1. Виконати заміну змінних із урахуванням прямих двосторонніх обмежень виду п.4. табл.1.2.
2. Визначити цільову функцію, виражену через нові змінні.
3. Присвоїти початкові значення новим змінним.
4. Виконати пошук розв'язку, використовуючи функцію ***Minimize()*** або одну з раніше описаних процедур безумовної оптимізації.
5. Виконати перехід до вихідних змінних. Отримати оптимальне значення цільової функції.
6. Перевірити розв'язання задачі:

- Задати цільову функцію та початкові значення змінних;
- Використовуючи функцію ***Minimize()***, знайти умовний екстремум цільової функції.

***Приклад розв'язання задачі у MathCAD***

**РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ЗВЕДЕННЯМ ДО БЕЗУМОВНОЇ МЕТОДОМ ЗАМІНИ ЗМІННИХ**

***Приклад 14.*** Розв'язати задачу умовної оптимізації зведенням до безумовної методом заміни змінних, якщо задана функція

$f = (x_1 + x_2 + x_3)^2 \to \min$ разом із наступними обмеженнями

$0 \le x_1 \le 2,\ 0 \le x_2 \le 4,\ 0 \le x_3 \le 6$

$$y1(z1) := 2 + (0-2)\cdot\sin(z1)^2$$
$$y2(z2) := 4 + (0-4)\cdot\sin(z2)^2$$
$$y3(z3) := 6 + (0-6)\cdot\sin(z3)^2$$

- заміна змінних з урахуванням прямих двосторонніх обмежень виду $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$

$$f\_VAR(z1, z2, z3) := (y1(z1) + y2(z2) + y3(z3))^2$$

- цільова функція, виражена через нові змінні

$z1 := 1 \quad z2 := 1 \quad z3 := 1$ - присвоєння початкових значень новим змінним

$f\_PR := \text{Minimize}(f\_VAR, z1, z2, z3)$ - пошук розв' язку

$$f\_PR = \begin{pmatrix} 1.568 \\ 1.571 \\ 1.572 \end{pmatrix}$$

- знайдений розв'язок для нових змінних

$y1(f\_PR_0) = 1.49 \times 10^{-5}$

$y2(f\_PR_1) = 1.822 \times 10^{-10}$

$y3(f\_PR_2) = 4.45 \times 10^{-6}$

- виконання переходу до старих змінних, тобто знайдений розв'язок

$f\_VAR(f\_PR_0, f\_PR_1, f\_PR_2) = 3.745 \times 10^{-10}$

- оптимальне значення цільової функції

## ПЕРЕВІРКА РОЗВ' ЯЗКУ ЗАДАЧІ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

$f(x1, x2, x3) := (x1 + x2 + x3)^2$ - цільова функція

$x1 := 1 \qquad x2 := 5 \qquad x3 := 40$

Given

$0 \le x1 \le 2 \qquad 0 \le x2 \le 4 \qquad 0 \le x3 \le 6$ - обмеження на змінні

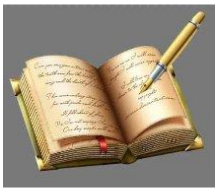
---

$Fmin := \text{Minimize}(f, x1, x2, x3)$ -пошук умовного екстремуму цільової функції

$$Fmin = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- точка екстремуму

$f(Fmin_0, Fmin_1, Fmin_2) = 0$ - екстремальне значення цільової функції



## ЗАДАЧІ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

***Задача 10.*** Використовуючи метод заміни змінних, розв’язати задачу умовної оптимізації. Побудувати лінії рівня вихідної задачі. Задаючи різні початкові значення, дослідити функцію на наявність кількох екстремумів.

| *№ п/п* | *Задачі* |
|---|---|
| *1* | $f(x,y)=\left(x^2+y-11\right)^2+\left(x+y^2-7\right)^2\to\min$ $\begin{cases}-6<x<6\\-6<y<6\end{cases}$ |
| *2* | $f(x,y)=3\cdot x^2+y^2-3\cdot x\to\min$ $\begin{cases}-3<x<3\\-3<y<3\end{cases}$ |
| *3* | $f(x,y)=\left(1-x^2\right)+\left(2+y^2\right)\to\min$ $\begin{cases}-6<x<6\\-6<y<6\end{cases}$ |
| *4* | $f(x,y)=2\cdot x^3+4\cdot x\cdot y^3-10\cdot x\cdot y+y^2\to\min$ $\begin{cases}0<x<5\\0<y<5\end{cases}$ |
| *5* | $f(x,y)=8\cdot x^2+4\cdot x\cdot y+5\cdot y^2\to\min$ $\begin{cases}-6<x<6\\-6<y<6\end{cases}$ |
| *6* | $f(x,y)=4\cdot x^2+3\cdot y^2-4\cdot x\cdot y+x\to\min$ $\begin{cases}-6<x<6\\-6<y<6\end{cases}$ |
| *7* | $f(x,y)=100\cdot\left(y-x^2\right)+\left(1-x\right)^2\to\min$ $\begin{cases}-2<x<2\\-2<y<2\end{cases}$ |
| *8* | $f(x,y)=2\cdot x^3+4\cdot x\cdot y^2-10\cdot x\cdot y+y^2\to\min$ $\begin{cases}-3<x<3\\-3<y<3\end{cases}$ |

| № п/п | Задачі |
|---|---|
| 9 | $f(x,y)=(x-a^2\cdot y^2)\cdot(x-b^2\cdot y^2)\to\min$ <br> $\begin{cases}-3<x<3\\-3<y<3\end{cases}$ $\quad a,b-const$ |
| 10 | $f(x,y)=\left(x^2+(y+1)^2\right)\cdot\left(x^2+(y-1)^2\right)\to\min$ <br> $\begin{cases}-3<x<3\\-3<y<3\end{cases}$ |

### 1.4.2. Врахування обмежень методом штрафних функцій (зовнішніх штрафів)

Основним методом зведення задачі умовної оптимізації до безумовно екстремальної форми є метод штрафних функцій, ідея якого полягає в наступному.

Якщо шукається мінімум цільової функції і якщо поточна точка пошуку знаходиться всередині допустимої області, то штрафна добавка до значення цільової функції не додається; якщо ж якесь обмеження порушено, то до цільової функції додається штрафна добавка, пропорційна до ступеня порушення обмеження. У разі пошуку максимуму штрафна добавка повинна відніматися. Це змушує пошуковий алгоритм працювати всередині допустимої області та при спробі виходу з неї, повертатися назад.

Методи штрафних функцій існують у різних варіантах, які відрізняються способом формування штрафної добавки, однак, мають одну спільну рису: у всіх цих методах здійснюється перетворення задачі нелінійного програмування за наявності обмежень або в одну (еквівалентну вихідну) задачу без обмежень, або в еквівалентну послідовність задач без обмежень.

Нехай вихідна задача задана у вигляді

$$\begin{aligned}&f(\vec{X})\to\min\\&g_i(\vec{X})\le 0,\quad i=1,\ldots,m\end{aligned}\tag{1.17}$$

Сформулюємо нову задачу:

$$\begin{aligned}&P(\vec{X})=f(\vec{X})+h(\vec{X})\to\min\\&-\infty<x_j<\infty,\ j=1,\ldots,n,\end{aligned}\tag{1.18}$$

у якій модифікована (штрафна) цільова функція $P(\vec{X})$ містить додатковий доданок $h(\vec{X})$, що накладає штраф за недотримання обмежень вихідної задачі. Якщо величина штрафу досить велика, це змусить будь-який алгоритм мінімізації зважати на обмеження.

Методи зовнішніх штрафів (зовнішньої точки) виходять із припущення, що штраф усередині допустимої області відсутній, а за її границями монотонно збільшується при віддаленні від границі. У методах зовнішньої точки початкова точка $\vec{X}_0$ і всі наступні розташовуються поза допустимої області. Будь-який релаксаційний метод безумовної оптимізації, прагнучи мінімізувати штраф, намагатиметься притиснути точку екстремуму до допустимої області із зовнішнього боку.

Прикладом штрафної функції для обмежень нерівностей може бути функція з квадратичним зовнішнім штрафом:

$$P(\vec{X}) = f(\vec{X}) + R \cdot \sum_{i=1}^{m} cut^2\left[g_i(\vec{X})\right] \tag{1.19}$$

де $cut[x]$ позначає так звану функцію зрізування (див. рис.1.8)

$$cut[x] = \max[0, x] = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & x \ge 0 \end{cases}$$

R - масштабний параметр, що визначає строгість штрафу.

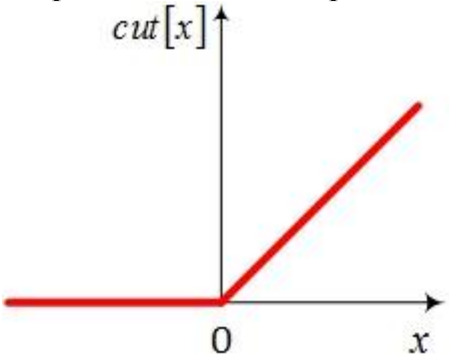



Рис.1.8 - Функція зрізування

Для обмежень – рівності виду $g_i(\vec{X}) = 0$ відповідні штрафні доданки при квадратичному штрафі записуються у формі $\left[g_i(\vec{X})\right]^2$.

Для точок, розташованих усередині допустимої області, $g_i(\vec{X}) \le 0$, при цьому штраф дорівнює нулю. Для того, щоб підвищити крутизну штрафної функції за границями допустимої області, потрібно збільшити штрафний параметр.

На рис.1.9 показано як формується розширена (штрафна) функція для функції однієї змінної та одного геометричного обмеження $x \le a$.

Видно, що в методі зовнішнього штрафу пошуковий алгоритм для активного обмеження як оптимальну завжди знаходитиме точку, що лежить майже на границі допустимої області, але зовні її. У цьому його основний недолік. До переваг необхідно віднести те, що початкова точка може лежати будь-де: штрафна добавка завжди поверне точку всередину допустимої області.

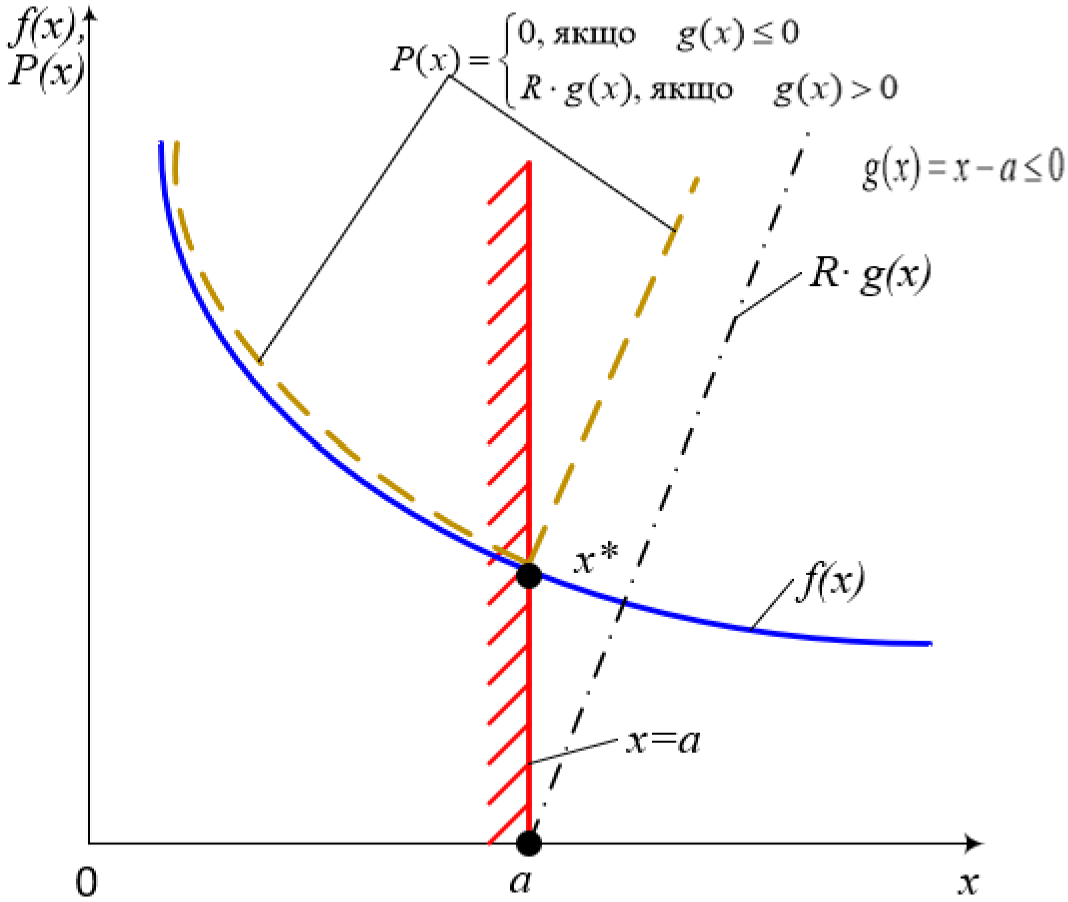



Рис.1.9 - Зовнішня штрафна функція

Ступінь виходу оптимальної точки за границю допустимої області залежить від величини вагового коефіцієнта $R$ у формулі (1.19). Він визначає прийнятний ступінь переходу за границю допустимої області для кожного окремого обмеження і повинен підбиратися в кожній конкретній задачі.

***Приклад 15.*** Розв’язати задачу умовної оптимізації методом штрафних (зовнішніх) функцій, використовуючи раніше описану процедуру релаксації MGA. Функція задається як

$$f\left(\vec{X}\right)=x_1^2+\frac{5}{2}\cdot x_2^2-x_1\cdot x_2\to \min$$

$$\begin{cases}x_1^2-4\cdot x_1-x_2\le -5\\ -x_1^2+6\cdot x_1-x_2\ge 7\end{cases}$$

Порядок розв'язання задачі:

1. Попередньо записати процедуру $MGA(\mu, xx, xn, \varepsilon, Sqr)$ безумовної оптимізації функції *N* змінних гібридним методом.

2. Встановити обмеження у вигляді $g(x) < 0$, коефіцієнт *R*, що визначає строгість штрафу.

3. Використовуючи вихідну цільову функцію, задати перетворену її модифікацію, що містить доданок – штраф як функції зрізання.

4. Задати діапазон змінних $(xx, xn)$, точність оптимізації ε, число особин у початковій популяції μ.

5. Використовуючи процедуру $MGA(\mu, xx, xn, \varepsilon, Sqr)$, отримати значення цільової функції в точці екстремуму.

6. Перевірити розв'язання задачі:

- Задати вихідну цільову функцію та початкові значення змінних, обмеження;
- Використовуючи функцію ***Minimize ()***, знайти координати точки мінімуму та значення цільової функції у точці екстремуму.

***Приклад розв'язання задачі у MathCAD***

**РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ МЕТОДОМ ШТРАФНИХ (ЗОВНІШНІХ) ФУНКЦІЙ**

Приклад 15. Розв'язати задачу умовної оптимізації методом штрафних (зовнішніх) функцій, використовуючи раніше описану процедуру релаксації MGA. Функція задається у вигляді

$$f(\vec{X}) = x_1^2 + \frac{5}{2} \cdot x_2^2 - x_1 \cdot x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1^2 - 4 \cdot x_1 - x_2 \le -5 \\ -x_1^2 + 6 \cdot x_1 - x_2 \ge 7 \end{cases}$$

Параметри процедури $MGA(\mu, xx, xn, \varepsilon, Sqr)$ безумовної оптимізації функції N змінних гібридним методом:
$\mu$ - початкова розмірність популяції ГА, $\mu > N$;
xx, xn - вектори розмірністю N x 1, що містять початкові та кінцеві значення інтервалів зміни кожної з N змінних;
$\varepsilon$ - достатньо мале число, що характеризує точність оптимізації;
Sqr - назва функції, що обчислює значення цільової функції.
Результат роботи процедури:
вектор з N+1 значень, перші N з яких - знайдені координати точки мінімуму цільової функції, а останнє - значення цільової функції в точці екстремуму.

```
MGA(μ, xx, xn, ε, Sqr) := | N ← length(xx)
                          | m ← floor[ [(μ + N) + 1] / 0.9 ]
                          | for j ∈ 0 .. m
                          |   | for i ∈ 0 .. N − 1
                          |   |   x_{i,j} ← rnd(xx_i − xn_i) + xn_i
                          |   | x_{N,j} ← Sqr(x^⟨j⟩)
                          | z ← 0
                          | x ← rsort(x, N)
                          | while |x_{N,m} − x_{N,0}| > ε
                          |   | z ← z + 1
                          |   | r ← 0
                          |   | while r ≤ floor(0.1·m)
                          |   |   | r ← r + 1
                          |   |   | h ← 0
                          |   |   | while h = 0
                          |   |   |   | Mt ← 0
                          |   |   |   | for j ∈ 0 .. N
                          |   |   |   |   P_j ← floor(rnd(0.9·m))
                          |   |   |   | for j ∈ 1 .. N
                          |   |   |   |   for jj ∈ 0 .. j − 1
                          |   |   |   |     Mt ← 1 if P_jj = P_j
```

$h \leftarrow 1 \ \text{ if } \ Mt = 0$

$\text{for } \ j \in 0..N$

$\quad as^{\langle j \rangle} \leftarrow x^{\langle (P_j) \rangle}$

$k \leftarrow 0$

$as \leftarrow \text{rsort}(as, N)$

$\text{while } \ \left| as_{N,N} - as_{N,0} \right| > \varepsilon$

$\quad a \leftarrow as$

$\quad \text{for } \ i \in 0..N-1$

$$a_{i,N+1} \leftarrow \frac{1}{N} \cdot \left[ \left( \sum_{j=0}^{N} a_{i,j} \right) - a_{i,N} \right]$$

$$a_{i,N+2} \leftarrow a_{i,N+1} + 1.0 \cdot (a_{i,N+1} - a_{i,N})$$

$\quad a_{N,N+2} \leftarrow \text{Sqr}\left(a^{\langle N+2 \rangle}\right)$

$\quad \text{if } \ a_{N,N+2} \le a_{N,0}$

$\qquad \text{for } \ i \in 0..N-1$

$\qquad\quad a_{i,N+3} \leftarrow a_{i,N+1} + 2(a_{i,N+2} - a_{i,N+1})$

$\qquad a_{N,N+3} \leftarrow \text{Sqr}\left(a^{\langle N+3 \rangle}\right)$

$\qquad a^{\langle N \rangle} \leftarrow a^{\langle N+3 \rangle} \ \text{ if } \ a_{N,N+3} \le a_{N,0}$

$\qquad a^{\langle N \rangle} \leftarrow a^{\langle N+2 \rangle} \ \text{ otherwise}$

$\quad \text{otherwise}$

$\qquad a^{\langle N \rangle} \leftarrow a^{\langle N+2 \rangle} \ \text{ if } \ a_{N,N+2} < a_{N,N-1}$

$\qquad a^{\langle N \rangle} \leftarrow a^{\langle N+2 \rangle} \ \text{ if } \ a_{N,N+2} < a_{N,N}$

$\qquad \text{otherwise}$

$\qquad\quad \text{for } \ i \in 0..N-1$

$\qquad\qquad a_{i,N+4} \leftarrow a_{i,N+1} + 0.5(a_{i,N} - a_{i,N+1})$

$\qquad\quad a_{N,N+4} \leftarrow \text{Sqr}\left(a^{\langle N+4 \rangle}\right)$

$\qquad\quad \text{for } \ j \in 0..N \qquad\qquad \text{if } \ a_{N,N+4} \ge a_{N,N}$

$\qquad\qquad \text{for } \ i \in 0..N-1$

$\qquad\qquad\quad a_{i,j} \leftarrow a_{i,0} + 0.5(a_{i,j} - a_{i,0})$

```
                    a_{N,j} ← Sqr(a^⟨j⟩)
                  a^⟨N⟩ ← a^⟨N+4⟩   otherwise
            as ← 0
            for  j ∈ 0..N
               as^⟨j⟩ ← a^⟨j⟩
            as ← rsort(as, N)
            k ← k + 1
            if  k > 5000·N
                 ads ← as^⟨0⟩
                 ads_{N+1} ← "Alarm Program stop in DM"
                 ads_{N+2} ← k
                 return  ads
        x^⟨floor(0.9m)+r⟩ ← a^⟨0⟩
        x ← rsort(x, N)
        return  x  if  z > 2m
  x^⟨0⟩
```

---

$g1(x) := (x_0)^2 - 4 \cdot x_0 - x_1 + 5$ - обмеження, записані у вигляді g(x) < 0

$g2(x) := (x_0)^2 - 6 \cdot x_0 + x_1 + 7$

$Sqr(x) := (x_0)^2 + \frac{5}{2}(x_1)^2 - x_0 \cdot x_1$ - цільова функція

$R := 10^6$ - - коефіцієнт, що визначає строгість штрафу

$Sqr\_F(x) := Sqr(x) + R \cdot \left(\max(0, g1(x))^2 + \max(0, g2(x))^2\right)$

- перетворена цільова функція, що містить доданок - штраф у вигляді функції зрізання

$xx := \begin{pmatrix} -100 \\ -100 \end{pmatrix}$ $xn := \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$ - діапазон зміни змінних

$\varepsilon := 0.000001$ - точність оптимізації

$\mu := 30$ - число особин у початковій популяції

$V := MGA(\mu, xx, xn, \varepsilon, Sqr\_F)$ - виклик процедури оптимізації

$V = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4.49999 \end{pmatrix}$ - знайдений розв'язок

$Sqr(V) = 4.49999$ - значення цільової функції в точці екстремуму

ПЕРЕВІРКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

$ff(x1, x2) := x1^2 + \frac{5}{2}x2^2 - x1 \cdot x2$ - цільова функція

$x1 := 5$ $x2 := 0$ - початкові значення змінних

Given

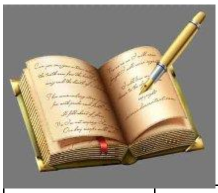
$x1^2 - 4 \cdot x1 - x2 \le -5$

$-x1^2 + 6 \cdot x1 - x2 \ge 7$ - обмеження

$pr := Minimize(ff, x1, x2)$ - пошук розв'язку

$pr = \begin{pmatrix} 1.99999 \\ 0.99999 \end{pmatrix}$ - знайдені координати точки мінімуму

$ff(pr_0, pr_1) = 4.49993$ - значення цільової функції в точці екстремуму



## ЗАДАЧІ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

***Задача 11.*** Методом штрафних функцій розв'язати задачу умовної оптимізації, використовуючи одну з розглянутих раніше релаксаційних процедур безумовної оптимізації.

| ***№ п/п*** | ***Задачі*** |
|---|---|
| ***1*** | $f(\vec{X}) = -x_1^2 - x_2^2 \to \max$ <br> $\begin{cases} (x_1-5)^2 + (x_2-5)^2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ |
| ***2*** | $f(\vec{X}) = -x_1^2 + x_2^2 \to \min$ <br> $\begin{cases} (x_1-4)^2 - (x_2-4)^2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ |
| ***3*** | $f(\vec{X}) = -x_1^2 + x_2^2 \to \min$ <br> $\begin{cases} (x_1-8)^2 - (x_2-8)^2 \le 16 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ |
| ***4*** | $f(\vec{X}) = -x_1^4 - x_2^4 \to \max$ <br> $\begin{cases} (x_1-4)^2 - (x_2-4)^2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ |
| ***5*** | $f(\vec{X}) = -x_1^2 - x_2^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} (x_1-7)^2 - (x_2-7)^2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ |
| ***6*** | $f(\vec{X}) = -x_1^2 - x_2^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 - x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} x_1^2 - 3 \cdot x_2^2 + 5 \cdot x_1 \cdot x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ |
| ***7*** | $f(\vec{X}) = 7 \cdot x_1^2 + 3 \cdot x_2^2 - 3 \cdot x_1 - 9 \cdot x_2 + 6 \to \max$ <br> $\begin{cases} x_1^3 + x_2^2 \le 11 \\ 4x_1^2 + x_2^2 - x_2 \le 7 \end{cases}$ |

| № п/п | Задачі |
|---|---|
| 8 | $f(\vec{X}) = 3 \cdot x_1^2 - 3 \cdot x_2^2 \to \max$ <br> $\begin{cases} x_1^3 + x_2^4 - 3 \cdot x_1^2 \cdot x_2^2 \le 14 \\ x_1^2 + 5 \cdot x_2^2 - 4 \cdot x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ |
| 9 | $f(\vec{X}) = 6 \cdot x_1^5 - 4 \cdot x_2^4 \to \max$ <br> $\begin{cases} 2 \cdot x_1^3 - 3 \cdot x_2^2 - 3 \cdot x_1^2 \le 5 \\ -x_1^2 - 5 \cdot x_2^2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ |
| 10 | $f(\vec{X}) = x_1^2 - 6 \cdot x_2^2 + x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} -5 \cdot x_1^2 + 2 \cdot x_2^2 - 3 \cdot x_1 + x_2 \le -1 \\ x_1^2 - 6 \cdot x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ |
| 11 | $f(\vec{X}) = 7 \cdot x_1^2 - 7 \cdot x_2^2 \to \max$ <br> $\begin{cases} \left(x_1^2 + 2 \cdot x_2^2\right)^2 \le 19 \\ 2 \cdot x_2^2 - 4 \cdot x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ |
| 12 | $f(\vec{X}) = -2 \cdot x_1^2 - x_2^2 \to \max$ <br> $\begin{cases} \left(x_1 - 2 \cdot x_2\right)^2 + \left(x_1^2 - 3\right)^2 \le 10 \\ -2 \cdot x_2^2 - 4 \cdot x_2 \le -1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ |
| 13 | $f(\vec{X}) = x_1^2 - 7 \cdot x_2^2 + x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} \left(x_1 - 3\right)^2 - \left(x_2 - 3\right)^2 \le 16 \\ x_1^2 - 4 \cdot x_2^2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ |

| № п/п | Задачі |
|---|---|
| 14 | $f(\vec{X}) = -x_1^2 + 7\cdot x_2^2 + x_1\cdot x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} (x_1-6)^2 - (x_2-6)^2 \le 16 \\ 12\cdot x_1^2 + 4\cdot x_2^2 \le 11 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ |
| 15 | $f(\vec{X}) = \frac{1}{2}\cdot x_1^2 - \frac{1}{2}\cdot x_2^2 - 2\cdot x_1\cdot x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} \frac{1}{2}\cdot x_1^2 - x_2^2 \le 3 \\ 12\cdot x_1^2 - 7\cdot x_2^2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ |
| 16 | $f(\vec{X}) = -x_1^4 - x_2^4 + 8\cdot x_1\cdot x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} (x_1^2-3)^2 + (x_2^2-3)^2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ |
| 17 | $f(\vec{X}) = \frac{1}{4}\cdot x_1^4 - 2\cdot x_1^2 + x_2^2 - 3\cdot x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} x_1^2 - 2\cdot x_2^2 - x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ |
| 18 | $f(\vec{X}) = 5\cdot x_1^2 - 6\cdot x_2^2 - 3\cdot x_1\cdot x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} -5\cdot x_1^2 + 2\cdot x_2^2 - 3\cdot x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1^2 - 6\cdot x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ |
| 19 | $f(\vec{X}) = -2\cdot x_1^2 + \cdot x_2^2 + 17 \to \max$ <br> $\begin{cases} -2\cdot x_1^2 + 6\cdot x_2^2 - 3\cdot x_1 \le 4 \\ -x_1^2 + 4\cdot x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ |
| 20 | $f(\vec{X}) = -18\cdot x_1^2 + 6\cdot x_2^2 - x_1 + x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} x_1^2 + 12\cdot x_2^2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ |

| № п/п | Задачі |
|---|---|
| 21 | $f\left(\vec{X}\right) = -8 \cdot x_1^2 - 6 \cdot x_2^2 + \frac{1}{3} \cdot x_1 \cdot x_2 - 12 \to \max$ <br> $\begin{cases} x_1^3 + 12 \cdot x_2^4 \le 7 \\ 12 \cdot x_1^2 + 2 \cdot x_2^2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ |
| 22 | $f\left(\vec{X}\right) = -8 \cdot x_1^2 - 6 \cdot x_2^2 \to \max$ <br> $\begin{cases} x_1^2 + 12 \cdot x_2^2 - 13 \cdot x_1 - 7 \cdot x_2 \le 1 \\ 2 \cdot x_1^2 + 3 \cdot x_2^2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ |
| 23 | $f\left(\vec{X}\right) = -x_1^2 - x_2^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + 4 \cdot x_1 + 25 \to \max$ <br> $\begin{cases} x_1^2 - 3 \cdot x_2^4 + 5 \cdot x_1 \cdot x_2 \le 8 \\ 2 \cdot x_1^2 - x_2^2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ |
| 24 | $f\left(\vec{X}\right) = 11 \cdot x_1^2 + 13 \cdot x_2^2 + 6 \cdot x_1 \cdot x_2 + 4 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} 9 \cdot x_1 + x_2 \le 18 \\ 4 \cdot x_1^2 + x_2^2 - x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ |
| 25 | $f\left(\vec{X}\right) = 2 \cdot x_1^2 + x_2^2 + 7 \cdot x_1 \cdot x_2 - 2 \cdot x_2 \to \max$ <br> $\begin{cases} 9 \cdot x_1 - x_2^2 \le 4 \\ 4 \cdot x_1^2 + x_2^2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ |
| 26 | $f\left(\vec{X}\right) = 13 \cdot x_1^2 + 8 \cdot x_2^2 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2 + 16 \cdot x_1^2 \cdot x_2^2 \to \max$ <br> $\begin{cases} x_1^2 + 6 \cdot x_2^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \le 17 \\ x_1^2 + 15 \cdot x_2^2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ |

| *№ п/п* | *Задачі* |
|---|---|
| *27* | $f\left(\vec{X}\right)=\frac{1}{3}\cdot x_1^3-\frac{1}{2}\cdot x_2^2-6\cdot x_1\cdot x_2+x_1-2x_2\rightarrow\max$ <br> $\begin{cases} x_1^2-2\cdot x_2^2+x_2\le 3 \\ 7\cdot x_1-5\cdot x_2\le 9 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$ |
| *29* | $f\left(\vec{X}\right)=-x_1^2-x_2^2+2\cdot x_1\cdot x_2+4\cdot x_1-2\cdot x_2\rightarrow\max$ <br> $\begin{cases} x_1^2-3\cdot x_2^2+5\cdot x_1\cdot x_2\le 8 \\ 2\cdot x_1^2-x_2^2\le 4 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$ |

### 1.4.3. Врахування обмежень методом бар'єрних функцій (внутрішніх штрафів)

Ідея внутрішнього штрафу полягає в тому, що штрафна добавка не повинна дозволяти пошуковому алгоритму не те щоб переходити границю допустимої області, але навіть наближатися до неї. Тому методи внутрішнього штрафу називають ще методами бар'єрних функцій. Розширена функція формується у вигляді (1.18), де може використовуватись:

- Обернена штрафна функція $-R\cdot\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(x)}$;
- Логарифмічна штрафна функція $-R\cdot\sum_{i=1}^{m}\ln\left(-g_i(x)\right)$.

На рис. 1.10 показано розширену функцію однієї змінної з використанням внутрішнього штрафу. Видно, що точка оптимуму гарантовано лежить усередині допустимої області.

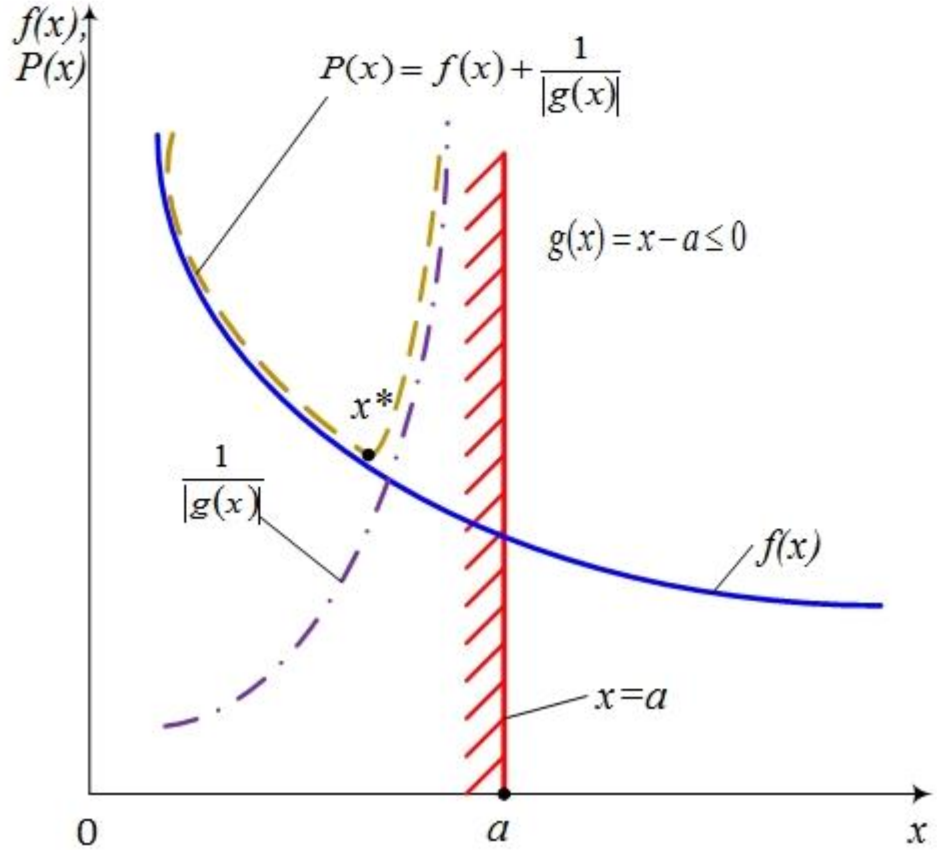



Рис.1.10 - Метод внутрішнього штрафу

При цьому, однак, завжди існує певний «зазор», що визначає знайдений екстремум від принципово досяжного оптимуму. Прибрати цей зазор просто: після оптимізації потрібно задати відповідний параметр, що лежить на границі допустимої області та обчислити цільову функцію; проте регулювати його у процесі пошуку досить важко.

Другим недоліком методу внутрішнього штрафу є те, що бар'єр на границі допустимої області працює при наближенні до границі як із зсередини області, так і зовні неї. Тому, якщо в процесі пошуку поточна точка вийшла за границю допустимої області, то назад вона ніколи не повернеться. Цю обставину необхідно враховувати під час задачі початкової точки пошуку: вона обов'язково повинна лежати всередині допустимої області. Метод внутрішнього штрафу добре працює на монотонних функціях, інакше він може призводити до хибних екстремумів.

Для використання методу потрібен вибір коректного початкового наближення, щоб побудувати послідовність точок, що сходить до мінімуму. З метою побудови початкового наближення можна використовувати метод штрафних функцій, виключивши з розгляду вихідну цільову функцію та мінімізуючи суму квадратів нев'язок в обмеженнях.

$$\sum_{i=1}^{m} h_i\left(\vec{X}\right) \to \min$$

Задачу достатньо розв’язати один раз. При цьому можна отримати не тільки граничну, а й внутрішню точку, якщо посилити обмеження, прийнявши натомість $g(\vec{X}) \le 0, \quad g(\vec{X}) \le -\varepsilon$.

**Алгоритм розв'язання задачі**

1. Задати початкові значення

Задати початкову точку $\vec{X}$ усередині ОДР; початкове значення параметра штрафу $R \ge 0$.

2. Скласти модифіковану цільову функцію з урахуванням штрафу

3. Знайти точку мінімуму модифікованої цільової функції

***Приклад 16.*** Розв’язати задачу умовної оптимізації методом бар'єрних функцій, використовуючи метод безумовної оптимізації Нелдера-Міда. Цільова функція задається у вигляді $f(\vec{X}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min$ при наступних обмеженнях

$$g_1(\vec{X}) = x_1^2 + x_2^2 - 4 \le 0,$$

$$g_2(\vec{X}) = -x_1 + x_2 \le 0,$$

$$g_3(\vec{X}) = x_2 - 1 \le 0,$$

$$g_4(\vec{X}) = -x_1 \le 0,$$

$$g_5(\vec{X}) = -x_2 \le 0.$$

Порядок розв’язання задачі:

1. Попередньо записати процедуру пошуку оптимуму методом Нелдера-Міда $Opt(X0, \varepsilon, Sqr)$.

2. Задати цільову функцію, записати обмеження у вигляді $g(x) < 0$. Задати коефіцієнт R, що визначає строгість штрафу.

3. Задати перетворену цільову функцію, що містить доданок – як штраф у вигляді функції $P\left(\vec{X}\right)=f\left(\vec{X}\right)-\frac{1}{R}\cdot\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i\left(\vec{X}\right)}$.

4. Задати вихідну точку $\vec{X}_0=(1,0.5)^T$. Похибка розв'язання задачі $\varepsilon=0{,}00000001$.

5. Використовуючи програму оптимізації $Opt\left(X0,\varepsilon,Sqr\_F\right)$, отримати матрицю розв'язку, виділити з неї координати точки мінімуму і обчислити значення цільової функції в точці екстремуму.

6. Перевірити розв'язання задачі:

- Задати цільову функцію та початкові значення змінних;
- Задати систему обмежень;
- Використовуючи функцію ***Minimize ()***, знайти значення змінних; значення цільової функції у точці екстремуму.

***Приклад розв'язання задачі у MathCAD***

***Приклад 16.*** Розв'язати задачу умовної оптимізації методом бар'єрних функцій, використовуючи метод безумовної оптимізації Нелдера-Міда. Цільова функція задається у вигляді

$f(\vec{X})=(x_1-2)^2+(x_2-2)^2\rightarrow\min$ за таких обмежень

$g_1(\vec{X})=x_1^2+x_2^2-4\le 0,$

$g_2(\vec{X})=-x_1+x_2\le 0,$

$g_3(\vec{X})=x_2-1\le 0,$

$g_4(\vec{X})=-x_1\le 0,$

$g_5(\vec{X})=-x_2\le 0.$

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ
МЕТОДОМ БАР'ЄРНИХ (ВНУТРІШНІХ) ФУНКЦІЙ

Програма пошуку оптимуму методом деформованого багатогранника (НЕЛДЕРА -МІДА) Opt (X0, e, Sqr), де
Sqr - назва цільової функції;
ε - похибка розв'язку задачі;
X0 - вектор початкових значень координат точки екстремуму
Результат виконання програми - матриця, елементи якої представляють:
0-й стовпець - номер останнього рядка, що містить три останні наближення кожної змінної, отриманих в результаті обчислень;
1-3-й стовпці - три останні наближення першої змінної, отримані на останніх ітераціях;
4-6-й стовпці - три останні наближення другої змінної, отримані на останніх ітераціях, і т.д.

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{Opt}(X0,\varepsilon,\mathrm{Sqr}) := \\
\quad k \leftarrow 0 \\
\quad N \leftarrow \mathrm{length}(X0) \\
\quad as^{\langle 0\rangle} \leftarrow X0 \\
\quad \text{for } j \in 1..N \\
\quad\quad \text{for } i \in 0..N-1 \\
\quad\quad\quad as_{i,j} \leftarrow X0_i \cdot 1.41 \;\; \text{if } j-1 = i \\
\quad\quad\quad as_{i,j} \leftarrow X0_i \cdot 1.27 \;\; \text{otherwise} \\
\quad \text{for } j \in 0..N \\
\quad\quad as_{N,j} \leftarrow \mathrm{Sqr}\left(as^{\langle j\rangle}\right) \\
\quad as \leftarrow \mathrm{rsort}(as, N) \\
\quad \text{while } \left| as_{N,N} - as_{N,0} \right| > \varepsilon \\
\quad\quad a \leftarrow as \\
\quad\quad \text{for } i \in 0..N-1 \\
\quad\quad\quad a_{i,N+1} \leftarrow \dfrac{1}{N} \cdot \left[\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{N} a_{i,j}\right) - a_{i,N}\right] \\
\quad\quad\quad a_{i,N+2} \leftarrow a_{i,N+1} + 1\left(a_{i,N+1} - a_{i,N}\right) \\
\quad\quad a_{N,N+2} \leftarrow \mathrm{Sqr}\left(a^{\langle N+2\rangle}\right) \\
\quad\quad \text{if } a_{N,N+2} \le a_{N,0} \\
\quad\quad\quad \text{for } i \in 0..N-1 \\
\quad\quad\quad\quad a_{i,N+3} \leftarrow a_{i,N+1} + 2\left(a_{i,N+2} - a_{i,N+1}\right) \\
\quad\quad\quad a_{N,N+3} \leftarrow \mathrm{Sqr}\left(a^{\langle N+3\rangle}\right) \\
\quad\quad\quad a^{\langle N\rangle} \leftarrow a^{\langle N+3\rangle} \;\; \text{if } a_{N,N+3} \le a_{N,0} \\
\quad\quad\quad a^{\langle N\rangle} \leftarrow a^{\langle N+2\rangle} \;\; \text{otherwise} \\
\quad\quad \text{otherwise} \\
\quad\quad\quad a^{\langle N\rangle} \leftarrow a^{\langle N+2\rangle} \;\; \text{if } a_{N,N+2} < a_{N,N-1} \\
\quad\quad\quad a^{\langle N\rangle} \leftarrow a^{\langle N+2\rangle} \;\; \text{if } a_{N,N+2} < a_{N,N} \\
\quad\quad\quad \text{otherwise} \\
\quad\quad\quad\quad \text{for } i \in 0..N-1
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_{i,N+4} \leftarrow a_{i,N+1} + 0.5\left(a_{i,N} - a_{i,N+1}\right)\\
&a_{N,N+4} \leftarrow Sqr\left(a^{\langle N+4\rangle}\right)\\
&\text{for } j \in 0..N \qquad\qquad \text{if } a_{N,N+4} \ge a_{N,N}\\
&\quad \text{for } i \in 0..N-1\\
&\qquad a_{i,j} \leftarrow a_{i,0} + 0.5\left(a_{i,j} - a_{i,0}\right)\\
&\quad a_{N,j} \leftarrow Sqr\left(a^{\langle j\rangle}\right)\\
&a^{\langle N\rangle} \leftarrow a^{\langle N+4\rangle} \quad \text{otherwise}\\
&as \leftarrow 0\\
&\text{for } j \in 0..N\\
&\quad as^{\langle j\rangle} \leftarrow a^{\langle j\rangle}\\
&as \leftarrow rsort(as, N)\\
&ZZ_{k,0} \leftarrow k\\
&\text{for } i \in 0..N\\
&\quad ZZ_{k,i+1} \leftarrow as_{0,i}\\
&\text{for } i \in 0..N\\
&\quad ZZ_{k,i+4} \leftarrow as_{1,i}\\
&k \leftarrow k + 1\\
&\text{return } a \ \text{ if } k > 10^3 \cdot N\\
&ZZ
\end{aligned}
$$

$g1(x) := (x_0)^2 + (x_1)^2 - 4 \quad g2(x) := -x_0 + x_1$

$g4(x) := -x_0 \quad g3(x) := x_1 - 1$ — обмеження, записані у вигляді g(x) < 0

$g5(x) := -x_1$

$Sqr(x) := (x_0 - 2)^2 + (x_1 - 2)^2$ — цільова функція

$R := 5$ — коефіцієнт, що визначає строгість штрафу

$$Sqr\_F(x) := Sqr(x) - \frac{1}{R}\cdot\left(\frac{1}{g1(x)} + \frac{1}{g2(x)} + \frac{1}{g3(x)} + \frac{1}{g4(x)} + \frac{1}{g5(x)}\right)$$

- перетворена цільова функція, що містить доданок - штраф у вигляді функції

$xx := \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ — вектор початкових значень змінних

$\varepsilon := .00000001$ — похибка розв'язку задачі

$V := Opt(xx, \varepsilon, Sqr\_F)$ — виклик програми оптимізації

$V =$

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1.41 | 1.68 | 1.27 | 0.635 | 0.84 | 0.705 |
| 1 | 1 | 1.4075 | 1.41 | 1.68 | 0.72125 | 0.635 | 0.84 |
| 2 | 2 | 1.54437 | 1.4075 | 1.41 | 0.75906 | 0.72125 | 0.635 |
| 3 | 3 | 1.54437 | 1.44297 | 1.4075 | 0.75906 | 0.68758 | 0.72125 |
| 4 | 4 | 1.66602 | 1.54437 | 1.44297 | 0.72746 | 0.75906 | 0.68758 |
| 5 | 5 | 1.66602 | 1.52408 | 1.54437 | 0.72746 | 0.71542 | 0.75906 |
| 6 | 6 | 1.64572 | 1.66602 | 1.52408 | 0.68382 | 0.72746 | 0.71542 |
| 7 | 7 | 1.64572 | 1.66602 | 1.58998 | 0.68382 | 0.72746 | 0.71053 |
| 8 | 8 | 1.62292 | 1.64572 | 1.66602 | 0.70808 | 0.68382 | 0.72746 |
| 9 | 9 | 1.65017 | 1.62292 | 1.64572 | 0.71171 | 0.70808 | 0.68382 |
| 10 | 10 | 1.65017 | 1.64113 | 1.62292 | 0.71171 | 0.69686 | 0.70808 |
| 11 | 11 | 1.63429 | 1.65017 | 1.64113 | 0.70618 | 0.71171 | 0.69686 |
| 12 | 12 | 1.64168 | 1.63429 | 1.65017 | 0.7029 | 0.70618 | 0.71171 |
| 13 | 13 | 1.64408 | 1.64168 | 1.63429 | 0.70812 | 0.7029 | 0.70618 |
| 14 | 14 | 1.64408 | 1.63858 | 1.64168 | 0.70812 | 0.70585 | 0.7029 |
| 15 | 15 | 1.64151 | 1.64408 | 1.63858 | 0.70494 | 0.70812 | 0.70585 |
| 16 | 16 | 1.64069 | 1.64151 | 1.64408 | 0.70619 | 0.70494 | 0.70812 |
| 17 | 17 | 1.64259 | 1.64069 | 1.64151 | 0.70685 | 0.70619 | 0.70494 |
| 18 | 18 | 1.64259 | 1.64069 | 1.64177 | 0.70685 | 0.70619 | 0.70809 |
| 19 | 19 | 1.64259 | 1.6417 | 1.64069 | 0.70685 | 0.70731 | 0.70619 |
| 20 | 20 | 1.64259 | 1.64142 | 1.6417 | 0.70685 | 0.70663 | 0.70731 |
| 21 | 21 | 1.6423 | 1.64259 | 1.64142 | 0.70617 | 0.70685 | 0.70663 |
| 22 | 22 | 1.64193 | 1.6423 | 1.64259 | 0.70657 | 0.70617 | 0.70685 |
| 23 | 23 | 1.64235 | 1.64193 | 1.6423 | 0.70661 | 0.70657 | 0.70617 |
| 24 | 24 | 1.64235 | 1.64222 | 1.64193 | 0.70661 | 0.70638 | ... |

$V1 := V^{\langle 0 \rangle}$ $\quad nom := \mathrm{last}(V1) \quad nom = 31$

- визначення останнього рядка результуючої матриці

$V_{nom,3} = 1.64236 \qquad V_{nom,6} = 0.70648$

- знайдені координати точки мінімуму

$$VV := \begin{pmatrix} V_{nom,3} \\ V_{nom,6} \end{pmatrix}$$

$Sqr(VV) = 1.80111$ - значення цільової функції в точці екстремуму

ПЕРЕВІРКА РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ

$ff(x1, x2) := (x1 - 2)^2 + (x2 - 2)^2$ - цільова функція

$x1 := 1 \quad x2 := 5$ - початкові значення змінних

Given

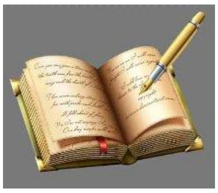
$x1^2 + x2^2 - 4 \le 0 \quad -x1 + x2 \le 0$

$x2 - 1 \le 0 \quad -x1 \le 0 \quad -x2 \le 0$ - обмеження

$pr := \mathrm{Minimize}(ff, x1, x2)$ - пошук розв'язку

$pr = \begin{pmatrix} 1.73216 \\ 1 \end{pmatrix}$ - знайдені значення змінних

$ff(pr_0, pr_1) = 1.07174$ - значення цільової функції в точці екстремуму



**ЗАДАЧІ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

***Задача 12.*** Методом бар'єрних функцій розв’язати задачу умовної оптимізації, використовуючи одну з розглянутих раніше релаксаційних процедур безумовної оптимізації. Використати варіанти задач із задачі 11.

## ТЕРМІНИ ТА ВИЗНАЧЕННЯ

***Бар'єрні функції*** - функції, які забороняють порушення обмежень, стаючи нескінченно великими на границі або поза областю допустимих розв'язків.

***Глобальний екстремум*** - розв'язок із найкращим можливим значенням цільової функції на всій області допустимих розв'язків.

***Локальний екстремум*** - розв'язок, у якої цільова функція не має сусідніх точок із кращим значенням у близькому оточенні.

***Метод множників Лагранжа*** - метод розв'язання задач з рівняннями обмежень, що трансформує умовну оптимізацію у задачу безумовної оптимізації.

***Нелінійне програмування*** - клас задач оптимізації, у яких хоча б одна з функцій (цільова або обмеження) є нелінійною.

***Обмеження*** - додаткові умови, які мають виконуватися для допустимих розв'язків (рівності або нерівності).

***Оптимізація*** - процес пошуку кращого розв'язку серед множини допустимих варіантів за визначеним критерієм (цільовою функцією).

***Умовна оптимізація*** - оптимізація з урахуванням рівностей і/або нерівностей, що накладають обмеження на допустимий розв'язок.

***Умови Куна-Такера*** - загальні необхідні умови оптимальності в задачах із нерівностями в обмеженнях.

***Цільова функція*** - функція, значення якої потрібно максимізувати або мінімізувати.

***Штрафні функції*** - функції, які додаються до цільової функції для врахування обмежень у формі штрафів за їх порушення.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ


1. Черненко, О. О., Гаркуша, С. В., Кошова, О. П., & Стусь, С. (2024). Аналіз алгоритмів розв'язування умовної задачі оптимізації дробово-лінійної цільової функції на множині розміщень. *Вісник КрНУ імені Михайла Остроградського. Випуск*, *3*, 146.
2. Жученко, А. І., Ладієва, Л. Р., Дубік, Р. М., & Тюріна, Є. О. (2024). Оптимізація технологічних процесів у середовищі MATLAB.
3. Яровий, А. Т., Страхов, Є. М., & Васильєв, О. Б. (2025). Методи оптимізації.
4. Бриль, В. В., & Задонцев, Ю. В. (2024). Аналіз еволюційних алгоритмів глобальної пошукової оптимізації. Наукові записки Державного університету інформаційно-комунікаційних технологій, (2), 63-72.
5. Chenreddy, A. R., Bandi, N., & Delage, E. (2022). Data-driven conditional robust optimization. Advances in Neural Information Processing Systems, 35, 9525-9537.
6. Vicanović, J. (2024). Uslovi optimalnosti za izoperimetrijske probleme optimizacije sa neprekidnim vremenom.
7. Cartis, C., & Otemissov, A. (2022). A dimensionality reduction technique for unconstrained global optimization of functions with low effective dimensionality. *Information and Inference: A Journal of the IMA, 11*(1), 167-201.
8. Li, M., Kolouri, S., & Mohammadi, J. (2023). Learning to solve optimization problems with hard linear constraints. IEEE Access, 11, 59995-60004.
9. Mehdaoui, M., Lacitignola, D., & Tilioua, M. (2025). State-Constrained Optimal Control of a Coupled Quasilinear Parabolic System Modeling Economic Growth in the Presence of Technological Progress. Applied Mathematics & Optimization, 91(1), 14.
10. Grimmer, B., & Jia, Z. (2025). Goldstein stationarity in Lipschitz constrained optimization. Optimization Letters, 19(2), 425-435.
11. Kortus, T., Keidel, R., Gauger, N. R., & Kieseler, J. (2025). Constrained Optimization of Charged Particle Tracking with Multi-Agent Reinforcement Learning. arXiv preprint arXiv:2501.05113.
12. Liu, Z., Han, F., Ling, Q., Han, H., & Jiang, J. (2025). Constraint-Pareto dominance and diversity enhancement strategy based evolutionary algorithm for solving constrained multiobjective optimization problems. IEEE Transactions on Evolutionary Computation.
13. Jia, H., Zhou, X., Zhang, J., & Mirjalili, S. (2025). Superb Fairy-wren Optimization Algorithm: a novel metaheuristic algorithm for solving feature selection problems. Cluster Computing, 28(4), 246.
14. Jdid, M., Smarandache, F., & Fujita, T. (2025). Neutrosophic augmented lagrange multipliers method nonlinear programming problems constrained by inequalities. Neutrosophic Sets and Systems, 81(1), 45.

15. Dinc, A., Yildiz, F., Nag, K., Otkur, M., & Mamedov, A. (2025). Solving and optimization of Cobb–douglas function by genetic algorithm: A step-by-step implementation. Computation, 13(2), 23.

16. Abdelkarim, A., Voos, H., & Görges, D. (2025). Factor Graphs in Optimization-Based Robotic Control-A Tutorial and Review. IEEE Access.

17. Olagunju, S. O., Akinmuyise, M. F., & Ogunbona, B. D. (2025). Numerical Solution of Optimization Problems Via Multiplier Method. Ajayi Crowther Journal of Pure and Applied Sciences, 4(2).

18. Chuang, P. J., Saadat, A., Ghazvini, S., Edwards, H., & Vandenberghe, W. G. (2025). Constrained Bayesian optimization using a Lagrange multiplier applied to power transistor design. Journal of Computational Electronics, 24(5), 147.

19. Cerone, V., Fosson, S. M., Pirrera, S., & Regruto, D. (2025). A new framework for constrained optimization via feedback control of Lagrange multipliers. IEEE Transactions on Automatic Control.

20. Nam, N. M., Sandine, G., & Tran-Dinh, Q. (2025). Lagrange Multipliers and Duality with Applications to Constrained Support Vector Machine. arXiv preprint arXiv:2501.01082.

21. Fischer, A., Izmailov, A. F., & Scheck, W. (2025). Techniques for adjusting dual iterates in the presence of critical Lagrange multipliers for optimization problems with inequality constraints. Optimization, 74(4), 915-938.

22. Van Hang, N. T., & Sarabi, E. (2025). Convergence of Augmented Lagrangian Methods for Composite Optimization Problems. Mathematics of Operations Research.

23. Efor, T. E., Chijioke, C. N., & Okoro, C. N. (2025). Solvability Analysis Of Equality-Constrained Optimization Problems With Nonlinear Functions. The Transactions of the Nigerian Association of Mathematical Physics, 21, 121-131.