

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ЕЛЕКТРОННИХ ТЕХНОЛОГІЙ ТА РОБОТОТЕХНІКИ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
до виконання курсової роботи
з дисципліни «Теоретична та прикладна механіка»
для здобувачів освітнього ступеня бакалавра
галузі знань 15 «Автоматизація та приладобудування»
усіх форм навчання

Черкаси
2018

УДК 621.01(07)
М 54

*Затверджено вченою радою ФЕТР,
протокол № 5 від 22.02.2018 р.,
згідно з рішенням кафедри
приладобудування, мехатроніки та
комп'ютеризованих технологій
протокол № 4 від 30.11.2017 р*

Упорядники: Кісіль Т.Ю., к.т.н., доцент
Заїка В.М., к.т.н.

Рецензент Гальченко В.Я., д.т.н., професор

М 54 Методичні рекомендації до виконання курсової роботи з дисципліни «Теоретична та прикладна механіка» для здобувачів освітнього ступеня бакалавра галузі знань 15 Автоматизація та приладобудування [Електронний ресурс] Упор./Т.Ю.Кісіль, В.М.Заїка В.М.; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси : ЧДТУ, 2018. – 80 с.
- Назва з титульного екрана

В основу методичних рекомендацій покладено досвід викладання дисципліни «Теоретична та прикладна механіка» у Черкаському державному технологічному університеті. Відмінною особливістю пропонованого видання є лаконічність і спеціальний підбір необхідної інформації. Наведені завдання до курсової роботи охоплюють розділи з теоретичної механіки та опору матеріалів. До кожного завдання надано теоретичний матеріал та приклади вирішення.

УДК 621.01(07)

Виробничо-практичне
електронне видання
комбінованого використання

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
до виконання курсової роботи
з дисципліни «Теоретична та прикладна механіка»
для здобувачів освітнього ступеня бакалавра
галузі знань 15 «Автоматизація та приладобудування»
усіх форм навчання

Упорядники: **Кісіль** Тетяна Юріївна,
Заїка Василь Михайлович

© Упорядкування: Кісіль Т.Ю., Заїка В.М., 2018

ЗМІСТ

| | | |
|----|---|----|
| | Вступ..... | 3 |
| 1. | Завдання №1 Змістовний модуль №1 Теоретична механіка..... | 4 |
| | 1.1. Короткі теоретичні відомості..... | 4 |
| | 1.2. Варіанти завдань №1 до курсової роботи..... | 10 |
| | 1.3. Приклади вирішення завдання №1..... | 11 |
| 2. | Завдання №2 Змістовний модуль №1 Теоретична механіка..... | 15 |
| | 2.1. Короткі теоретичні відомості. Центр ваги..... | 15 |
| | 2.2. Варіанти завдань №2 до курсової роботи..... | 26 |
| 3. | Приклади вирішення завдання №2..... | 27 |
| 4. | Завдання №3 Змістовний модуль №1 Теоретична механіка..... | 33 |
| | 3.1. Короткі теоретичні відомості. Просторова стрижнева система..... | 33 |
| | 3.2. Варіанти завдань №3 до курсової роботи..... | 35 |
| 4. | Змістовний модуль №1 Теоретична механіка..... | 36 |
| | 4.1. Короткі теоретичні відомості. Центр ваги об'ємного тіла..... | 36 |
| | 4.2. Варіанти завдань №4 до курсової роботи..... | 38 |
| 5. | Завдання №5 Змістовний модуль №1 Теоретична механіка..... | 39 |
| | 5.1. Короткі теоретичні відомості. Кінематика..... | 39 |
| | 5.2. Варіанти завдань №5 до курсової роботи..... | 46 |
| 6. | Завдання №6 Змістовний модуль №1 Теоретична механіка..... | 48 |
| | 6.1. Короткі теоретичні відомості. Розрахунок зусиль в стержнях ферми..... | 48 |
| | 6.2. Варіанти завдань №6 до курсової роботи..... | 61 |
| 7. | Завдання №7 Змістовний модуль №2 Опір матеріалів..... | 63 |
| | 7.1. Короткі теоретичні відомості. Поняття про розрахункові схеми.... | 63 |
| | 7.2. Варіанти завдань №7 до курсової роботи..... | 74 |
| | 7.3. Приклади вирішення завдання №7..... | 75 |
| 8. | Вимоги до оформлення курсової роботи..... | 77 |
| | Список рекомендованої літератури..... | 79 |

Вступ

Дисципліна «Теоретична і прикладна механіка», як одна з найважливіших дисциплін, грає істотну роль в підготовці інженерів. Значимість цієї дисципліни в інженерній освіті визначається тим, що вона є науковою базою дуже багатьох областей сучасної техніки, фундаментальною дисципліною, викладання якої передбачає оволодіння основними методами дослідження і вирішення завдань механіки, розвиток логічного мислення, вироблення вміння самостійного розширення обсягу отриманих знань і проведення математичного аналізу прикладних задач. Курс теоретичної і прикладної механіки є основою як професійної освіти інженера, так і успішного вивчення загальнотеоретичних і спеціальних дисциплін, передбачених навчальними планами.

Закони механіки широко використовуються в машинобудуванні, приладобудуванні, в енергетиці. Її методи та прийоми використовуються при всіх технічних розрахунках, пов'язаних з проектуванням різних споруд, машин і їх експлуатацією. Зміст дисципліни «Теоретична і прикладна механіка» визначається робочою програмою, складеною для здобувачів освітнього ступенів бакалавра галузі знань 15 «Автоматизація та приладобудування».

Теоретична і прикладна механіка, будучи однією з перших природничо-наукових дисциплін, яку вивчають студенти в процесі навчання, займає важливе місце в загальнотехнічній підготовці бакалаврів. Її викладання переслідує двояку мету: по-перше, сприяти формуванню у студентів діалектико-матеріалістичного світогляду, розвивати їх логічне мислення та вводити в розуміння вельми широкого кола явищ, що відносяться до однієї з форм руху матерії - до механічного руху; по-друге, забезпечити оволодіння бакалаврами науковою базою сучасної техніки. Однак, для доброго засвоєння курсу теоретичної і прикладної механіки потрібно не тільки глибоко вивчити її основні теоретичні положення, але і навчитися застосовувати їх на практиці. Це можливо при роботі студентів над рішеннями завдань на практичних заняттях. Дані методичні рекомендації містять методіку рішення типових задач з теоретичної та прикладної механіки, які потім ілюструються на конкретних прикладах і є основною частиною курсової роботи з цієї дисципліни. Розглянуті завдання охоплюють матеріал усіх модулів курсу теоретичної і прикладної механіки і всіх тем практичних занять у відповідність до робочої програми.

Методичні рекомендації призначені для допомоги студентам при виконанні курсової роботи та розвитку у них навичок вирішення завдань.

ЗАВДАННЯ №1

1. Змістовний модуль «Теоретична механіка»

1.1. Короткі теоретичні відомості

Розвиток сучасної техніки ставить перед інженерами найрізноманітніші завдання, пов'язані з розрахунком різних споруд (будівель, мостів, каналів, гребель та ін.), з проектуванням, виробництвом і експлуатацією всіляких машин, механізмів, двигунів і, зокрема, таких об'єктів, як автомобілі, тепловози, морські та річкові судна, літаки, ракети, космічні кораблі і т. п. Не дивлячись на різноманіття всіх цих проблем, вирішення їх в певній частині ґрунтуються на деяких загальних принципах і мають загальну наукову базу. Пояснюється це тим, що в зазначених завданнях значне місце займають питання, які потребують вивчення законів руху або рівноваги тих чи інших матеріальних тіл.

Наука про загальні закони руху та рівноваги матеріальних тіл і про виникаючі при цьому взаємодіях між тілами називається теоретичною механікою. Теоретична механіка являє собою одну з наукових основ сучасних технічних дисциплін.

Механікою в широкому сенсі цього слова називається наука, присвячена вирішенню будь-яких завдань, пов'язаних з вивченням руху або рівноваги тих чи інших матеріальних тіл і відбуваються при цьому взаємодій між тілами. Теоретична механіка являє собою частину механіки, в якій вивчаються загальні закони руху та взаємодії матеріальних тіл. Ті закони, які, наприклад, справедливі і для руху Землі навколо Сонця і для польоту ракети або артилерійського снаряда та ін.

Під рухом в механіці ми розуміємо механічний рух, тобто те, що відбувається з плином часу зміна взаємного положення матеріальних тіл у просторі. Механічним взаємодією між тілами називається той вид взаємодії, в результаті якого відбувається зміна руху цих тіл або зміна їх форми (деформація). Величина, що є кількісною мірою механічної взаємодії тіл, називається в механіці силою. Основним завданням теоретичної механіки є вивчення загальних законів руху і рівноваги матеріальних тіл під дією прикладених до них сил.

За характером розглянутих завдань механіку прийнято розділяти на статику, кінематику і динаміку. У статисти викладається вчення про сили і про умови рівноваги матеріальних тіл під дією сил. У кінематиці розглядаються загальні геометричні властивості руху тіл. Нарешті, в динаміці вивчаються закони руху матеріальних тіл під дією сил.

Вивчення теоретичної механіки зазвичай починається зі статички.

Розділ «Статика»

Статикою називається розділ механіки, в якому викладається загальне вчення про сили і вивчаються умови рівноваги матеріальних тіл, що знаходяться під дією сил.

Аксиома паралелограма сил. Дві сили, що діють в одній точці твердого тіла або на одну матеріальну точку, можна замінити однією рівнодійною силою, рівною по модулю і напрямку діагоналі паралелограма, побудованого на заданих силах (рис.1).

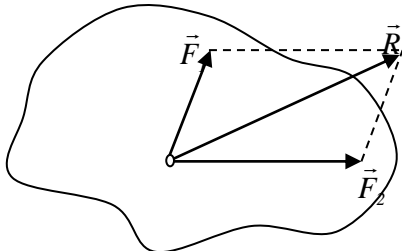


Рис. 1

Очевидно, справедливо і зворотнє. Одну силу, прийнявши за рівнодійну, можна розкласти за правилом

паралелограма на дві складові сили.

Заміну двох сил однією рівнодійною силою за правилом паралелограма називають *векторним складанням* цих сил. Векторне складання сил F_1 і F_2 математично виражають так:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (1)$$

Отже, закон паралелограма сил можна ще сформулювати таким чином: дві сили, прикладені до тіла в одній точці, мають рівнодійну, рівну геометричній (векторною) сумі цих сил і прикладену в одній точці. Надалі слід розрізняти поняття суми сил і їх рівнодійну. Пояснимо це прикладом. Розглянемо дві сили F_1 і F_2 (рис.2) прикладені в точках А і В. Показана на рис.2 сила Q дорівнює геометричній сумі F_1 і F_2 ($Q = F_1 + F_2$), як діагональ відповідного паралелограма. Але сила Q не є рівнодійною, оскільки неважко зрозуміти, що одна сила Q не може замінити дію сил F_1 і F_2 на це тіло, де б вона не була прикладена.

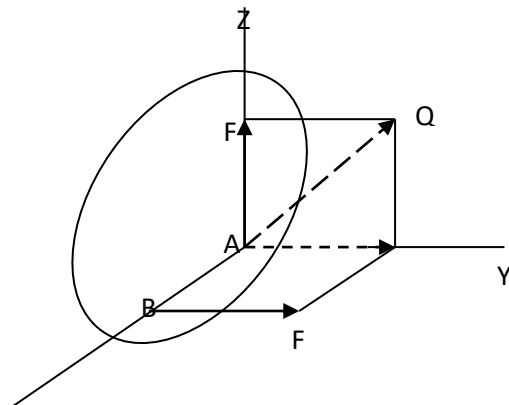


Рис.2

Якщо сили F_1 і F_2 спрямовані по одній прямій в одну або протилежні сторони, то векторне складання переходить в алгебру.

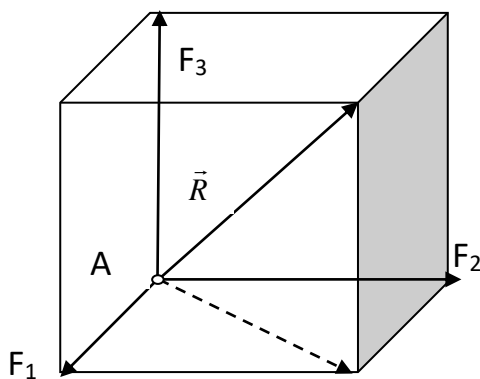


Рис.3

Модуль рівнодійної сили R , як векторну суму сил, обчислюють за формулою діагоналі паралелограма :

$$\vec{R} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos(\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2)}. \quad (2)$$

Геометричний спосіб складання сил. Розкладання сил. Рішення багатьох завдань механіки пов'язане з відомою з векторної алгебри операцією складання векторів, і, зокрема, сил. Величина, рівна геометричній сумі сил якої-небудь системи, називається

головним вектором цієї системи сил. Поняття про геометричну суму сил не слід змішувати з поняттям про рівнодійну; для багатьох систем сил рівнодійної взагалі не існує, геометричну суму (головний вектор) можна вичислити для будь-якої системи сил.

Складання трьох сил, що не лежать в одній площині. Геометрична сума R трьох сил F_1, F_2, F_3 , що не лежать в одній площині, зображується діагоналлю паралелепіпеда, побудованого на цих силах (правило паралелепіпеда). У справедливості цього переконуємося, застосовуючи послідовно правило паралелограма (рис. 3).

Складання системи сил. Геометрична сума (головний вектор) будь-якої системи сил визначається або послідовним складанням сил системи за правилом паралелограма, або побудовою силового багатокутника. Другий спосіб є простішим і зручнішим. Для знаходження цим способом суми сил $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$, (рис. 4, а) відкладаємо від довільної точки O (рис. 4, б) вектор Oa , що зображує у вибраному масштабі силу F_1 , від точки a - вектор ab , що зображує силу F_2 , від точки b - вектор bc , що зображує силу F_3 , і т. д.; від кінця m передостаннього вектору відкладаємо вектор mn , що зображує силу F_n . З'єднавши початок першого вектору з кінцем останнього, отримуємо вектор $On=R$, що зображує геометричну суму або головний вектор складових сил:

$$\bar{R} \equiv F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n \quad (3)$$

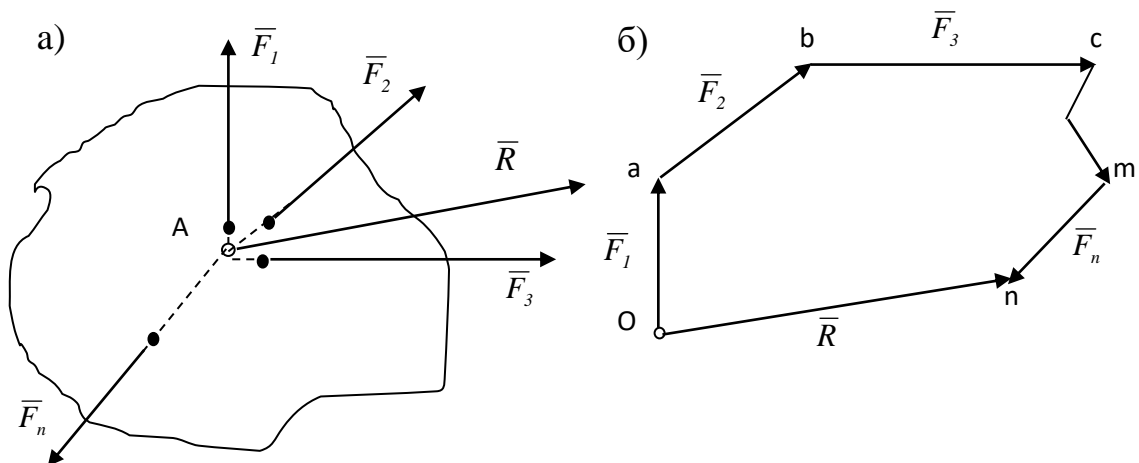


Рис. 4

Рівнодійна сил, що сходяться. Розглянемо систему сил, що сходяться, тобто сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці (рис. 4, а).

Оскільки сила, що діє на абсолютно тверде тіло, є вектором що ковзає, то система сил, що сходяться, еквівалентна системі сил, прикладених в одній точці (на рис. 4, а в точці A).

Послідовно застосовуючи закон паралелограма сил, дійдемо висновку, що система сил, що сходяться, має рівнодійну, рівну геометричній сумі (головному вектору) цих сил і прикладену в точці перетину їх ліній дії. Отже система сил $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ зображених на рис. 4, а, має рівнодійну, рівну їх головному

вектору R і прикладену в точці A (чи у будь-якій іншій точці, що лежить на лінії дії сили, проведеної через точку A).

Розкладання сил. Розкласти цю силу на декілька складових - означає знайти таку систему декількох сил, для якої ця сила є рівнодійною. Це завдання є невизначеним і має однозначне рішення лише при завданні додаткових умов. Розглянемо два окремі випадки:

а) *розкладання сили по двох заданих напрямках.* Завдання зводиться до побудови такого паралелограма, у якого розкладена сила є діагоналлю, а сторони паралельні заданим напрямкам. Наприклад, на рис. 3 показано, як сила R розкладається по напрямках AB і AO на сили F_1 і F_2 , - складові сили R (сила R і прями AB , AO лежать в одній площині);

б) *розкладання сили по трьох заданих напрямках.* Якщо задані напрями не лежать в одній площині, то завдання є визначеним і зводиться до побудови такого паралелепіпеда, у якого діагональ зображує задану силу R , а ребра паралельні заданим напрямкам (див. рис. 3).

Способом розкладання можна в простих випадках користуватися для визначення сил тиску на зв'язку. Для цього задану силу, що діє на тіло (конструкцію), потрібно розкласти по напрямках реакції зв'язків, оскільки згідно із законом про дію і протидію сила тиску на зв'язок і реакція зв'язку спрямовані уздовж однієї і тієї ж прямої.

Елементи векторної алгебри

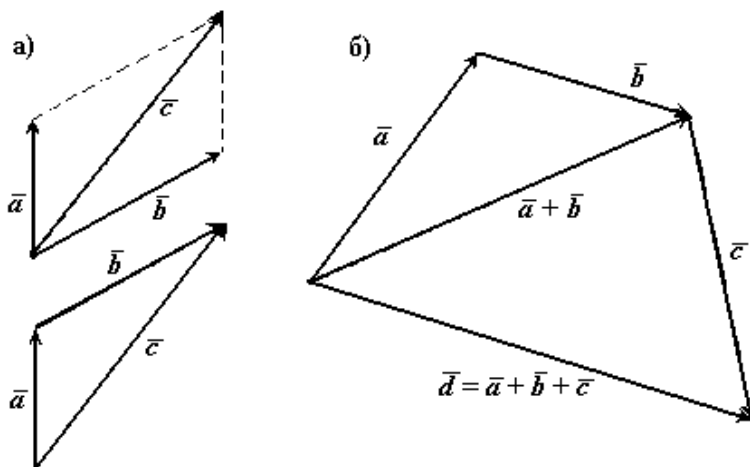
У теоретичній механіці розглядаються такі векторні величини як сила, моменти сили відносно точки і осі, момент пари сил, швидкість, прискорення і інші.

1. Поняття вектору.

Для визначеності розглядаємо прямокутну декартову систему координат.

Вектор - це спрямований відрізок, який характеризується довжиною і напрямком.

Операції над векторами. Вектори можна складати і множити на число.



$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ - сумою двох векторів є вектор;
 $\alpha \cdot \vec{a} = \vec{b}$ - добуток вектору на дійсне число є вектор;
 $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ - існує нульовий вектор.

Рис. 5

В математиці усі вектори є вільними, їх можна переносити паралельно самим собі.

У сумі двох векторів (рис.5, а) початок другого вектору можна помістити в кінець першого вектору, тоді суму двох векторів можна уявити як вектор, який має початок на початку першого вектору, а кінець в кінці другого вектору. Застосовуючи це правило для суми декількох векторів (рис.5, б) отримуємо, що сумою декількох векторів є вектор, що замикає ламану лінію та складається з доданих векторів.

Операції над векторами підкорюються наступним законам (див. рис.6):

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a} & \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) &= (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \\ \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) &= (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a} & (\alpha + \beta) \cdot \vec{a} &= \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a} \\ \alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) &= \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b} & 0 \cdot \vec{a} &= \vec{0} \end{aligned}$$

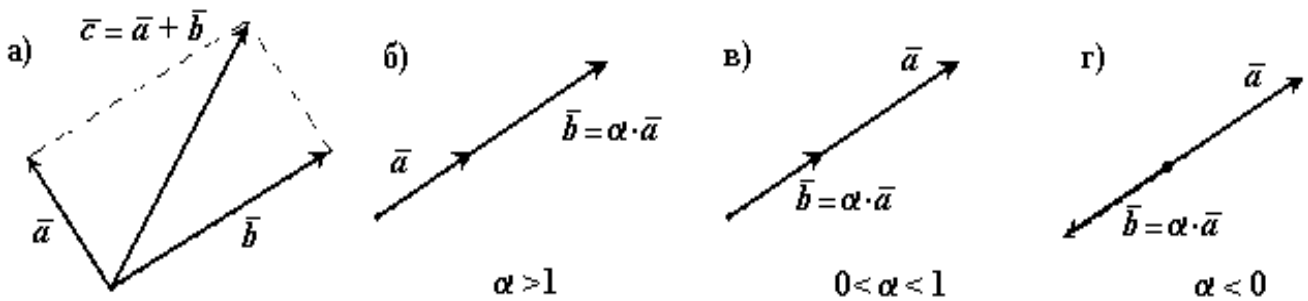


Рис. 6

2. Праві і ліві системи координат.

Декартові системи координат діляться на два види: праву і ліву.

Розглянемо декартові системи координат на площині (див. рис. 7). При повороті осі Ox правої системи координат на 90° проти годинникової стрілки вона збігається з віссю Oy .

Розглянемо декартові системи координат в просторі (див. рис. 8). При повороті осі Ox правої системи координат навколо осі Oz на 90° проти годинникової стрілки вона збігається з віссю Oy .

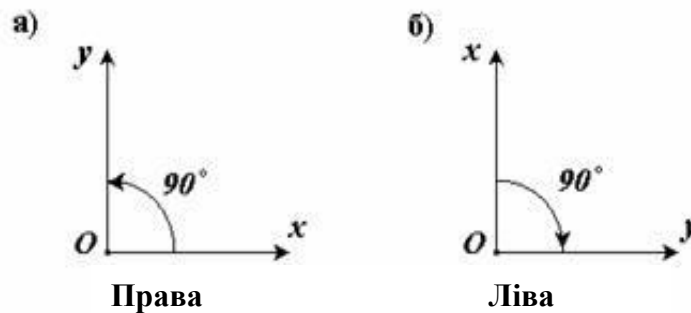


Рис. 7

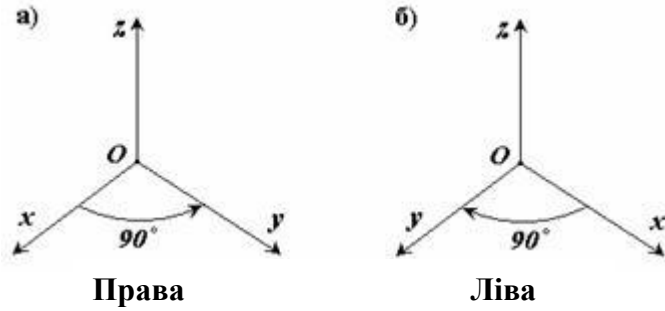


Рис. 8

3. Довжина і проєкції вектору.

Надалі будемо розглядати праву декартову систему координат. Поодинокі вектори вздовж осей Ox , Oy і Oz утворюють систему одиничних (або базисних) векторів. Будь-вектор, який має початок в точці O , можна уявити як суму $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$, числа (a_x, a_y, a_z) - це проєкції вектору на осі координат (див. рис.9).

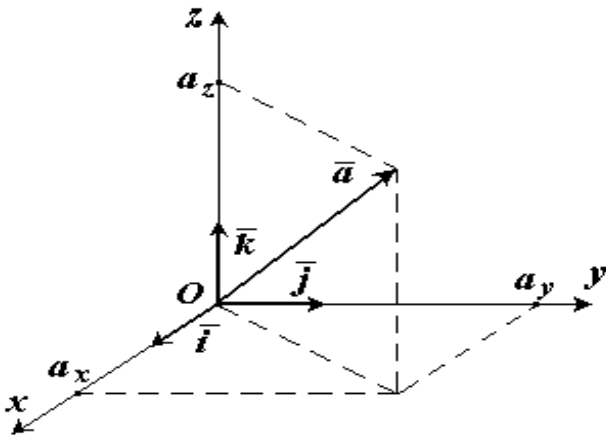


Рис. 9

Довжина (модуль) вектору \vec{a} визначається формулою $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ та позначається a або $|\vec{a}|$.

Проєкцією вектору на вісь називається скалярна величина, яка визначається відрізком, що відсікається перпендикулярами, опущеними з початку і кінця вектору на цю вісь. Проєкція вектору вважається позитивною (+), якщо напрямок її збігається з позитивним напрямком осі, і негативною (-), якщо проєкція направлена в протилежну сторону (див. рис.10).

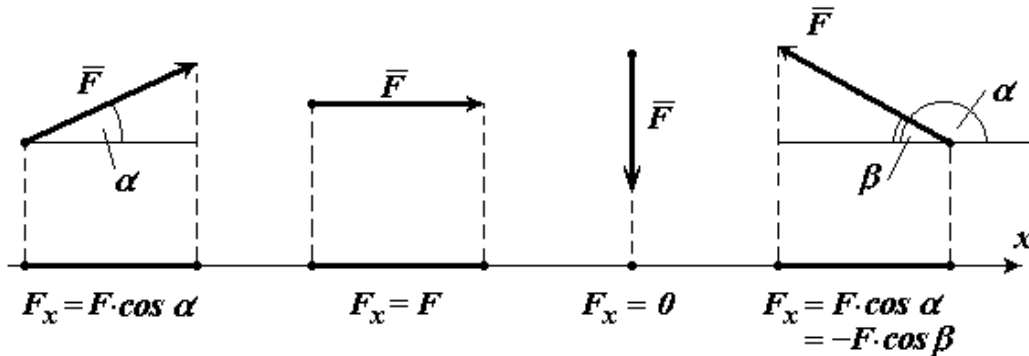
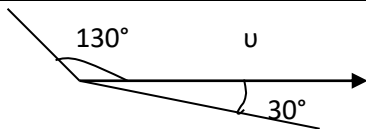


Рис. 10

Варіанти завдань №1 до курсової роботи

| № варіанта | Умова |
|---------------|--|
| 1 | Вектор B спрямований вертикально вгору і чисельно рівний 8, перший складовий вектор B_1 теж дорівнює 8 і його напрям складає з напрямом B кут $\varphi_1=70^\circ$. Визначити другий складовий вектор. |
| 2 | Провести складання двох векторів, якщо вектор A_1 спрямований по горизонталі управо, а вектор A_2 складає з вектором A_1 кут 150° . Модулі векторів $A_1=12$, $A_2=10$. |
| 3 | Вектор B спрямований вертикально вниз і має модуль $B=30$ одиниць. Перший складовий вектор спрямований горизонтально, а другою має модуль $B_2=45$ одиниць. Визначити модуль вектору B_1 і кут φ_2 між вектором B і другим складовим. |
| 4 | Вектор A спрямований під кутом 55° до горизонту (управо і вгору) і має модуль 15 одиниць, одна з його складових A_1 має модуль 20 одиниць і спрямований по горизонталі вліво. Знайти другий вектор. (Знайти його модуль і напрям відносно цього вектору). |
| 5 | Провести складання двох векторів, якщо вектор A_1 спрямований по горизонталі управо, а вектор A_2 складає з вектором A_1 кут 30° . Модулі векторів $A_1=10$, $A_2=6$. |
| 6 | Вектор A спрямований вертикально вниз і має модуль 50 одиниць. Знайти модулі складових векторів, якщо вони спрямовані під кутами $+70^\circ$ і -70° до даного. |
| 7 | Провести складання двох векторів, якщо вектор A_1 спрямований по горизонталі управо, а вектор A_2 складає з вектором A_1 кут 60° . Модулі векторів $A_1=22$, $A_2=12$. |
| 8 | Знайти суму п'яти векторів, використовуючи правило багатокутника, якщо їх модулі $A_1=30$; $A_2=48$; $A_3=60$; $A_4=10$; $A_5=20$. Перший вектор спрямований по горизонталі управо, а інші з цим напрямом утворюють відповідно кути $\alpha=45^\circ$; $\beta=90^\circ$; $\gamma=180^\circ$; $\delta=30^\circ$ убік проти ходу годинникової стрілки. |
| 9 | Провести складання двох векторів, якщо вектор A_1 спрямований по горизонталі управо, а вектор A_2 складає з вектором A_1 кут 60° . Модулі векторів $A_1=5$, $A_2=4$. |
| 10 | Провести складання двох векторів, якщо вектор A_1 спрямований по горизонталі управо, а вектор A_2 складає з вектором A_1 кут 45° . Модулі векторів $A_1=20$, $A_2=36$. |
| 11 | Провести складання двох векторів, якщо вектор A_1 спрямований по горизонталі управо, а вектор A_2 складає з вектором A_1 кут 60° . Модулі векторів $A_1=32$, $A_2=10$. |
| 12 | Провести складання двох векторів, якщо вектор A_1 спрямований по горизонталі управо, а вектор A_2 складає з вектором A_1 кут 35° . Модулі векторів $A_1=28$, $A_2=16$. |
| 13 | Знайти суму п'яти векторів, використовуючи правило багатокутника, якщо їх модулі $A_1=36$; $A_2=68$; $A_3=80$; $A_4=12$; $A_5=20$. Перший вектор спрямований по горизонталі управо, а інші з цим напрямом утворюють відповідно кути $\alpha=45^\circ$; $\beta=90^\circ$; $\gamma=180^\circ$; $\delta=30^\circ$ убік проти ходу годинникової стрілки. |
| 14 | Провести складання двох векторів, якщо вектор A_1 спрямований по горизонталі управо, а вектор A_2 складає з вектором A_1 кут 90° . Модулі векторів $A_1=40$, $A_2=16$. |
| 15 | Вектор A , модуль якого $A=12$ спрямований під кутом 60° до горизонтальної прямої; розкласти його два складових, спрямованих вертикально і горизонтально. |
| 16 | Знайти суму трьох сил, що лежать в одній площині, якщо дано: $F=17,32$ Н, $T=10$ Н, $P=24$ Н, $\varphi=30^\circ$, $\psi=60^\circ$. |

| | | |
|----|--|---|
| 17 | Горизонтально спрямований (управо) вектор v , модуль якого 40 одиниць, розкласти на два складових, спрямованих під кутами 130° і -30° . |  |
| 18 | Довільно спрямований вектор A , чисельно рівний 25 одиницям, розкласти на два вектори, модулі яких $A_1=20$ і $A_2=40$ одиниць. | |
| 19 | Провести складання двох векторів, якщо вектор A_1 спрямований по горизонталі управо, а вектор A_2 складає з вектором A_1 кут 55° . Модулі векторів $A_1=38$, $A_2=16$. | |
| 20 | Провести складання двох векторів, якщо вектор A_1 спрямований по горизонталі управо, а вектор A_2 складає з вектором A_1 кут 130° . Модулі векторів $A_1=60$, $A_2=40$. | |

1.2. Приклади вирішення завдання №1

Приклад 1. Провести складання двох векторів, якщо вектор A_1 спрямований горизонтально управо, а вектор A_2 складає з вектором A_1 кут 60° . Модулі векторів $A_1=10$. $A_2=8$.

Рішення.

Використовуємо правило паралелограма.

1. Виберемо масштаб побудови векторів. Вибір масштабу побудови проводимо на основі очевидної залежності: довжина відрізка l , що зображує вектор A , прямо пропорційна його модулю A :

$$\bar{A} = k_e l,$$

де коефіцієнт пропорціональності k_e - масштаб побудови векторів.

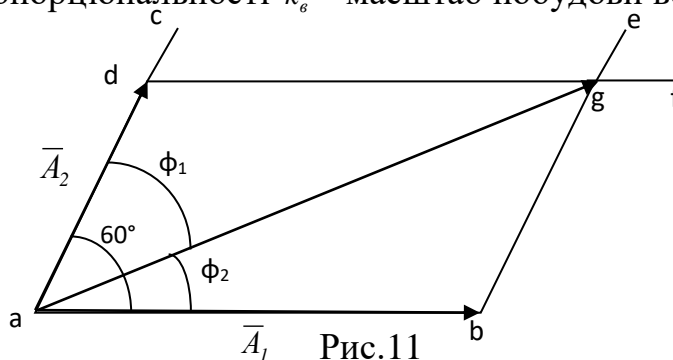


Рис.11

Так, якщо для зображення вектору A_1 , модуль якого дорівнює десяти одиницям, виберемо відрізок завдовжки $ab=40$ мм, то отримаємо значення масштабу побудови для цього завдання (рис.11):

$$k_e = \frac{A_1}{ab} = \frac{10}{40} = 0,25 \frac{1}{\text{мм}},$$

(0,25 одиниці модуля в 1 мм)

2. З довільної точки a (див. рис.11) побудуємо вектор A_1 , зображує його відрізком $ab=40$ мм.

3. За допомогою транспортира з точки a - начала побудованого вектору - під кутом $\alpha=60^\circ$ до лінії ab проведемо лінію ac - напрям вектору A_2 .

4. Визначимо довжину відрізка ad , який зображуватиме вектор A_2 :

$$ad = \frac{A_2}{k_6} = \frac{8}{0,25} = 32 \text{ мм.}$$

5. Відкладемо з точки a відрізок $ad=32$ мм і, показавши на ньому стрілкою напрям від a до d , отримаємо вектор A_2 .

6. Побудуємо прями $be \parallel ad$ і $df \parallel ab$ і, позначивши g точку перетину цих прямих, отримаємо паралелограм $abgd$.

7. З'єднавши точки a і g , отримаємо діагональ ag , яка по модулю і напрямку (від a до g) зображує вектор A_s - шукану суму векторів A_1 і A_2

8. Знайдемо модуль вектору A_2 :

$$A_s = k_6 \cdot ag$$

Шляхом безпосереднього виміру знаходимо, що $ag=63$ мм

Таким чином,

$$A_s = 0,25 \cdot 63 = 15,8$$

Відповідь: Два вектори A_1 і A_2 можна замінити одним вектором A_s , причому модуль його містить 15,8 одиниць.

Приклад 2. Знайти суму п'яти векторів, використовуючи правило багатокутника, якщо їх модулі $A_1=40$; $A_2=30$; $A_3=50$; $A_4=25$; $A_5=32$. Перший вектор спрямований по горизонталі управо, а інші з цим напрямком утворюють відповідно кути $\alpha=45^\circ$; $\beta=90^\circ$; $\gamma=180^\circ$; $\delta=30^\circ$ убік проти ходу годинникової стрілки.

Рішення:

Проводимо рішення за правилом багатокутника (перший спосіб).

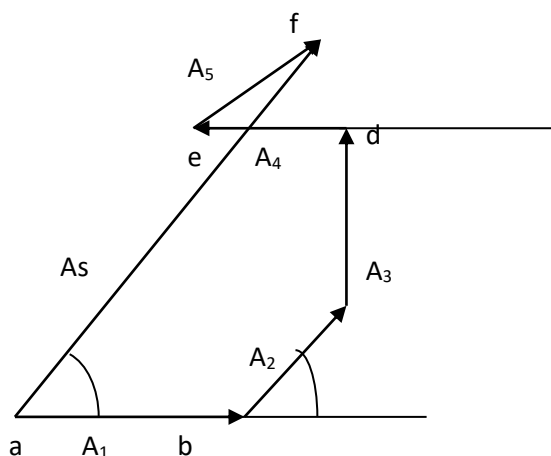


Рис.12

1. Виберемо масштаб побудови. Для зображення вектору приймемо довжину $ab=20$ мм. Тоді масштаб побудови отримає значення

$$k_b = \frac{A_1}{ab} = \frac{40}{20} = 2 \frac{1}{\text{мм}}$$

2. Визначимо довжини відрізків для зображення інших векторів:

$$bc = \frac{A_2}{k_b} = \frac{30}{2} = 15 \frac{1}{\text{мм}}$$

$$cd = \frac{A_3}{k_b} = \frac{50}{2} = 25 \frac{1}{\text{мм}}$$

$$de = \frac{A_4}{k_b} = \frac{25}{2} = 12.5 \frac{1}{\text{мм}}$$

$$ef = \frac{A_5}{k_b} = \frac{32}{2} = 16 \frac{1}{\text{мм}}$$

3. Побудуємо векторний багатокутник. З довільно вибраної точки a відкладемо відрізок $ab=20$ мм, що зображує вектор A_1 . З точки b - кінця вектору A_1 проводимо пряму під цим кутом $\alpha=45^\circ$ до горизонталі і відкладемо на ній відрізок $bc=15$ мм. Потім з точки c під кутом $\beta=90^\circ$ до горизонталі відкладемо відрізок $cd=25$ мм і так далі. Отриману ламану лінію $abcdef$ замикаємо відрізком af , направивши його від a - початок побудови багатокутника до f - останньої точки побудови. Цей замикаючий вектор зображує шукану суму усіх векторів, рівну A_s .

4. Визначимо модуль A_s . Вимірявши лінійкою af знайдемо, що $af=54$ мм, отже

$$A_s = k_b af = 2 \cdot 54 \approx 108 \text{ одиниць}$$

5. Напрямок вектору A_s визначається кутом $\varphi = A_1 \wedge A_s$. Значення кута знаходимо шляхом виміру транспортиром

$$\varphi = A_1 \wedge A_s = 54^\circ$$

Відповідь: Сума побудованих векторів дорівнює вектору A_s , модуль якого містить 108 одиниць, а напрям сумарного вектору складає з вектором A_1 кут в 54° .

Приклад 3. Вектор A , модуль якого $A=12$ спрямований під кутом 35° до горизонтальної прямої; розкласти його два складових, спрямованих вертикально і горизонтально (рис.13).

Рішення:

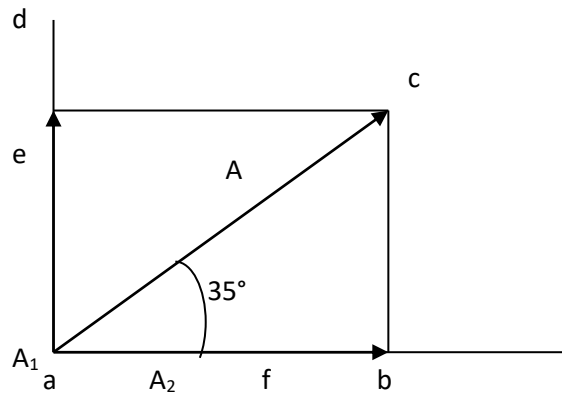


Рис.13

1. З точки a проводимо горизонтальну пряму ab і під кутом 35° до неї будуємо вектор A завдовжки $ac=25$ мм.

2. Виразуємо те, що вийшло завдяки вибору цієї довжини масштабу побудови:

$$k_b = \frac{A}{ac} = \frac{12}{25} = 0,48 \frac{1}{\text{мм}} \quad (0,48 \text{ одиниці модуля вектору в } 1 \text{ мм})$$

3. З точки a (початок вектору) проведемо вертикальну лінію ad , що визначає напрям однієї із складових. Напрямок другого визначається горизонтальною лінією ab .

4. З точки c (кінця вектору A) проводимо паралельні лінії ad і ab . Отримуємо паралелограм $aecf$, сторони ae і af якого і зображують шукані складові A_1 і A_2 вектору A .

5. Вимірявши довжини відрізків ae і af , отримуємо:

$$ae=15 \text{ мм і } af=20 \text{ мм.}$$

Отже, модулі складових векторів :

$$A_1 = k_a ae = 0,48 \cdot 15 = 7,2$$

$$A_2 = k_a af = 0,48 \cdot 20 = 9,6$$

Відповідь: Вертикальний вектор містить 7,2 одиниць, а горизонтальний - 9,6.

ЗАВДАННЯ №2

2. Змістовний модуль №1 Теоретична механіка

2.1. Короткі теоретичні відомості Центр ваги

На усі точки тіла, що знаходиться поблизу поверхні Землі, діють сили - сили тяжіння цих точок або їх вага \vec{P}_i . Взагалі ці сили будуть такими, що сходяться - лінії дії їх перетинаються в центрі Землі. Але, якщо нехтувати розмірами тіла порівняно з розмірами Землі, то можна вважати їх паралельними.

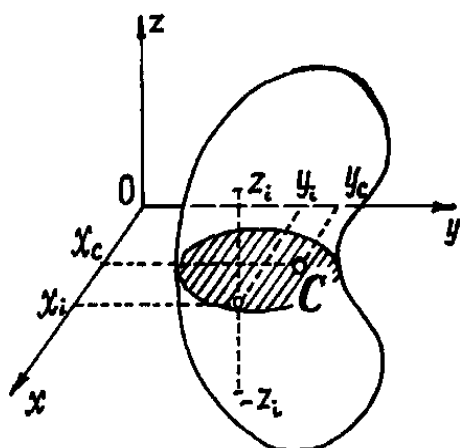


Рис.14

Центр цих паралельних сил, сил тяжіння точок, називається **центром ваги тіла**.

Тобто, знаходити центр ваги тіл можна як центр паралельних сил. Наприклад, координати його

$$x_c = \frac{\sum P_i x_i}{P}; \quad y_c = \frac{\sum P_i y_i}{P}; \quad z_c = \frac{\sum P_i z_i}{P}; \quad (4)$$

де P_i - вага кожної точки тіла, а $P = \sum P_i$ - вага усього тіла.

При визначенні центру ваги корисні декілька теорем.

1) Якщо однорідне тіло має площину симетрії, то центр ваги його знаходиться в цій площині.

Якщо осі x і y розташувати в цій площині симетрії (рис.8), то для кожної точки з координатами x_i, y_i, z_i можна відшукати точку з координатами $x_i, y_i, -z_i$. І координата z_c по(4), дорівнюватиме нулю, оскільки в сумі $\sum P_i \cdot z_i$ усі члени, що мають протилежні знаки, попарно знищуються. Це означає, що центр тяжіння розташований в площині симетрії.

2) Якщо однорідне тіло має вісь симетрії, то центр ваги тіла знаходиться на цій вісі.

Дійсно, в цьому випадку, якщо вісь z провести по осі симетрії, для кожної точки з координатами x_i, y_i, z_i можна відшукати точку з координатами $-x_i, -y_i, z_i$ і координати x_c і y_c , вичислені по формулах (4), виявляться рівними нулю.

Аналогічно доводиться і третя теорема.

3) Якщо однорідне тіло має центр симетрії, то центр ваги тіла знаходиться в цій точці.

І ще декілька зауважень.

Перше. Якщо тіло можна розділити на частини, у яких відомі вага і положення центру ваги, то непотрібно розглядати кожен точку, а у формулах (4) P_i - визначати як вагу відповідної частини і x_i, y_i, z_i - як координати її центру ваги.

Друге. Якщо тіло однорідне, то вага окремої частини його $P_i = V_i \cdot \gamma$, де γ - питома вага матеріалу, з якого зроблено тіло, а V_i - об'єм цієї частини тіла. І формули (4) наберуть зручнішого вигляду. Наприклад:

$$x_c = \frac{\sum P_i x_i}{P} = \frac{\sum V_i \cdot \gamma \cdot X_i}{V \cdot \gamma} = \frac{\sum V_i x_i}{V}.$$

І аналогічно, $y_c = \frac{\sum V_i y_i}{V}$, $z_c = \frac{\sum V_i z_i}{V}$, де $V = \sum V_i$ - об'єм усього тіла.

Третє. Якщо тіло складається з однорідних пластин однакової, малої товщини, то об'єм кожної пластини $V_i = S_i \cdot d$, де S_i - площа пластини, d - товщина. І координати центру ваги визначатимуться тільки за допомогою площини:

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{S}; \quad y_c = \frac{\sum S_i y_i}{S}; \quad z_c = \frac{\sum S_i z_i}{S},$$

де x_i, y_i, z_i - координати центру тяжіння окремих пластин; $S = \sum S_i$ - загальна площа тіла.

Четверте. Якщо тіло складається із стержнів, прямих або криволінійних, однорідних і постійного перерізу, то вага їх $P_i = l_i \cdot \rho$, де l - довжина, ρ - вага одиниці довжини (погонного метра), а координати центру ваги визначатимуться за допомогою довжин окремих ділянок :

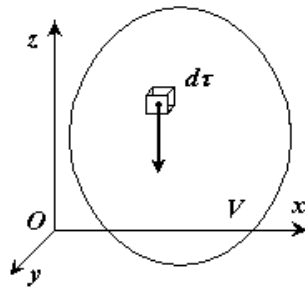
$$x_c = \frac{\sum l_i x_i}{L}; \quad y_c = \frac{\sum l_i y_i}{L}; \quad z_c = \frac{\sum l_i z_i}{L},$$

де x_i, y_i, z_i - координати центру ваги i -ої ділянки; $L = \sum l_i$.

Відмітимо, що згідно з визначенням центр ваги - це точка геометрична; вона може лежати і поза межами цього тіла (наприклад, для кільця).

Координати центру ваги неоднорідних тіл

Координати центру ваги **неоднорідного твердого тіла** у вибраній системі відліку визначаються таким чином:

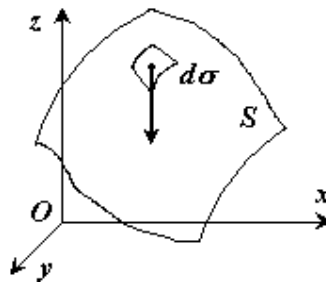


$$x_C = \frac{\int_V x \cdot \gamma_T(x, y, z) d\tau}{\int_V \gamma_T(x, y, z) d\tau} \quad y_C = \frac{\int_V y \cdot \gamma_T(x, y, z) d\tau}{\int_V \gamma_T(x, y, z) d\tau} \quad z_C = \frac{\int_V z \cdot \gamma_T(x, y, z) d\tau}{\int_V \gamma_T(x, y, z) d\tau}$$

де $\gamma_T(x, y, z)$ - вага одиниці об'єму тіла(питома вага)

$$\int_V \gamma_T(x, y, z) d\tau \quad - \text{ вага усього тіла.}$$

Якщо тверде тіло є **неоднорідною поверхнею**, то координати центру ваги у вибраній системі відліку визначаються таким чином:

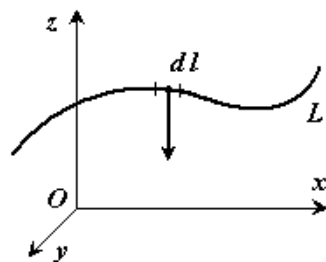


$$x_C = \frac{\int_S x \cdot \gamma_S(x, y, z) d\sigma}{\int_S \gamma_S(x, y, z) d\sigma} \quad y_C = \frac{\int_S y \cdot \gamma_S(x, y, z) d\sigma}{\int_S \gamma_S(x, y, z) d\sigma} \quad z_C = \frac{\int_S z \cdot \gamma_S(x, y, z) d\sigma}{\int_S \gamma_S(x, y, z) d\sigma}$$

де $\gamma_S(x, y, z)$ - вага одиниці площі тіла,

$$\int_S \gamma_S(x, y, z) d\sigma \quad - \text{ вага усього тіла.}$$

Якщо тверде тіло є **неоднорідною лінією**, то координати центру ваги у вибраній системі відліку визначаються таким чином:



$$x_C = \frac{\int_L x \cdot \gamma_L(x, y, z) dl}{\int_L \gamma_L(x, y, z) dl} \quad y_C = \frac{\int_L y \cdot \gamma_L(x, y, z) dl}{\int_L \gamma_L(x, y, z) dl} \quad z_C = \frac{\int_L z \cdot \gamma_L(x, y, z) dl}{\int_L \gamma_L(x, y, z) dl}$$

де $\gamma_L(x, y, z)$ - вага одиниці довжини тіла

$$\int_L \gamma_L(x, y, z) dl \quad - \text{ вага усього тіла.}$$

Координати центру ваги однорідних тіл

Для однорідного тіла вага P_k будь-якої його частини пропорційна об'єму V_k цієї частини : $P_k = \gamma V_k$, а вага P усього тіла пропорційна об'єму V цього тіла $P = \gamma V$, де γ - вага одиниці об'єму.

Підставивши ці значення P і P_k в попередні формули, помітно, що в чисельнику γ як загальний множник виноситься за дужку і скорочується з γ в знаменнику. В результаті отримаємо:

$$x_C = \frac{\sum V_k x_k}{V}, \quad y_C = \frac{\sum V_k y_k}{V}, \quad z_C = \frac{\sum V_k z_k}{V}.$$

Як видно, центр ваги однорідного тіла залежить тільки від його геометричної форми, а від величини γ не залежить. З цієї причини точку C , координати якої визначаються формулами, називають центром тяжіння об'єму V .

Шляхом аналогічних міркувань легко знайти, що якщо тіло представляє собою однорідну плоску і тонку пластину, то для неї:

$$x_C = \frac{\sum S_k x_k}{S}, \quad y_C = \frac{\sum S_k y_k}{S},$$

де S - площа усієї пластини, а S_k - площ її частин.

Точку, координати якої визначаються формулами називають **центром ваги площини S** .

Так само виходять формули для координат центру ваги лінії:

$$x_C = \frac{\sum l_k x_k}{L}, \quad y_C = \frac{\sum l_k y_k}{L}, \quad z_C = \frac{\sum l_k z_k}{L},$$

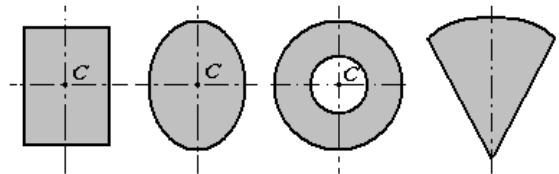
де L - довжина усієї лінії, l - довжини її частин.

Таким чином, центр тяжіння однорідного тіла визначається, як центр ваги відповідного об'єму, площі або лінії.

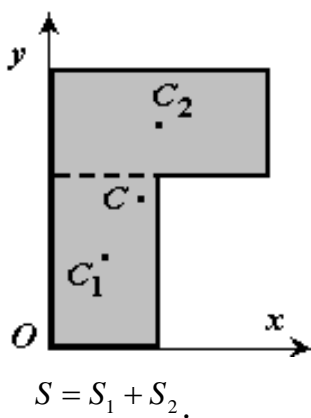
Виходячи з отриманих вище загальних формул, можна вказати конкретні способи визначення координат центру ваги тіл:



1. Симетрія. Якщо однорідне тіло має площину, вісь або центр симетрії, то його центр ваги лежить відповідно в площині симетрії, осі симетрії або в центрі симетрії.



2. Розбиття. Тіло розбивається на кінцеве число частин, для кожної з яких положення центру ваги і площа відомі.



$$C_1(x_1, y_1), S_1$$

$$C_2(x_2, y_2), S_2$$

$$x_c = \frac{x_1 \cdot S_1 + x_2 \cdot S_2}{S_1 + S_2}$$

$$y_c = \frac{y_1 \cdot S_1 + y_2 \cdot S_2}{S_1 + S_2}$$

3. Доповнення. Окремий випадок способу розбиття. Він застосовується до тіл, що мають вирізи, якщо центри тяжіння тіла без вирізу і вирізаної частини відомі.

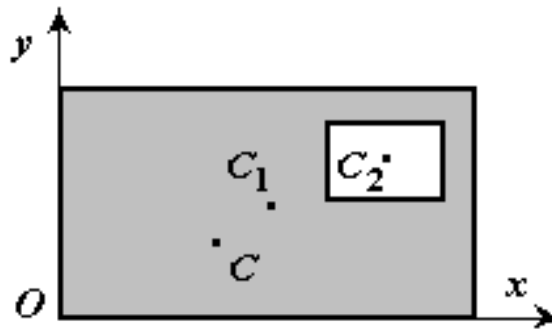
$$C_1(x_1, y_1), S_1$$

$$C_2(x_2, y_2), S_2$$

$$x_c = \frac{x_1 \cdot S_1 - x_2 \cdot S_2}{S_1 - S_2}$$

$$y_c = \frac{y_1 \cdot S_1 - y_2 \cdot S_2}{S_1 - S_2}$$

$$S = S_1 - S_2.$$



4. Експериментальний спосіб. Центри ваги неоднорідних тіл складної конфігурації (літак, паровоз, корабель, тощо) можна визначати експериментально. Один з можливих експериментальних методів (*метод підвішування*) полягає в тому, що тіло підвішують на нитці або тросі за різні його точки. Напрямок нитки, на якій підвішене тіло, кожного разу даватиме напрям сили тяжіння. Точка перетину цих напрямів визначає центр ваги тіла.

Іншим можливим способом експериментального способу є зважування. Розглянемо на прикладі.

Покажемо, як можна експериментально визначити одну з координат центру тяжіння літака (відстань a), якщо відстань $AB=l$ (рис. 15) відома.

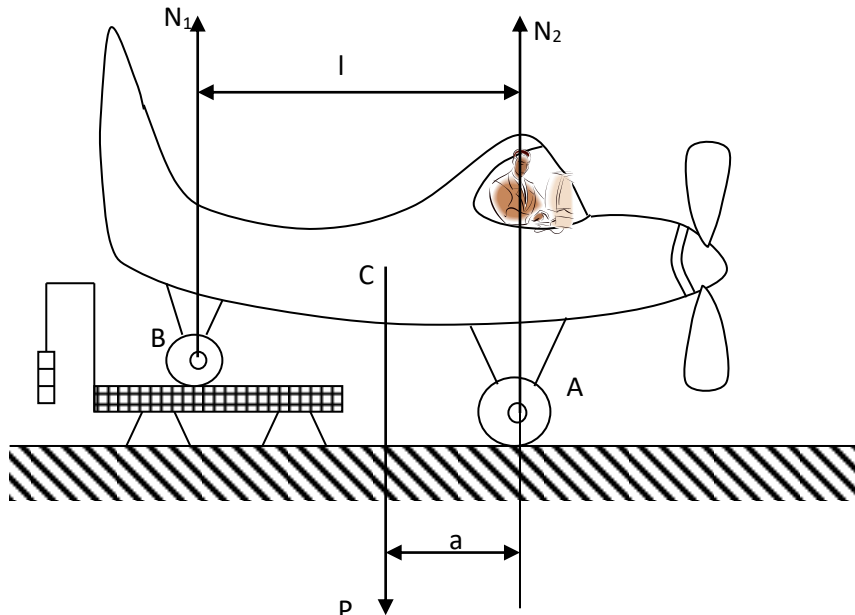


Рис. 15

Поставивши колесо B на платформу вагів, зважуванням знайдемо силу тиску колеса на платформу. Тим самим буде знайдена чисельно рівна цій силі

реакція N_1 . Далі, також зважуванням знайдемо реакцію N_2 . Прирівнюючи потім нулю суму моментів усіх сил відносно центру тяжіння G літака, отримуємо:

$$N_2 a - N_1(l-a) = 0,$$

звідки знаходимо a

$$a = l N_1 / (N_1 + N_2)$$

Вочевидь, $N_1 + N_2 = P$, де P – вага літака. Якщо значення величини P заздалегідь відоме, то для визначення a можливо обмежитись однократним зважуванням.

5. Інтегрування. Якщо тіло неможливо розбити на декілька кінцевих частин, положення центрів тяжіння яких відомі, то тіло спочатку розбивають на самовільно малі об'єми Δv_k , для яких:

$$X_c = \frac{1}{V} \sum x_k v_k, \quad (5)$$

де x_k, v_k - координати деякої точки, що лежить усередині об'єму Δv_k

Тоді в рівнянні (5) переходять до ліміту, направляючи усі Δv_k до нуля, тобто стягуючи усі об'єми в точки. Тоді суми, що знаходяться в рівняннях, обертаються в інтеграли, що розповсюджуються на увесь об'єм тіла і формула (6) дають в межі:

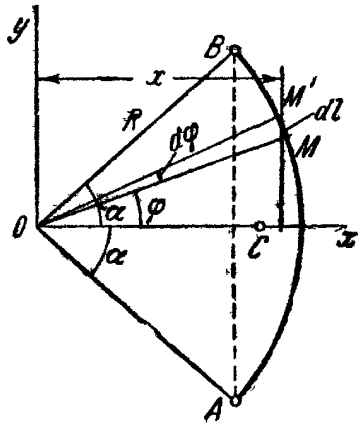
$$\begin{aligned} X_c &= \frac{1}{V} \int_v x dv \\ Y_c &= \frac{1}{V} \int_v y dv \\ Z_c &= \frac{1}{V} \int_v z dv \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогічно для координат центрів тяжіння площин та ліній отримаємо в межах формули:

$$\begin{aligned} X_c &= \frac{1}{S} \int_s x ds \\ Y_c &= \frac{1}{S} \int_s y ds \end{aligned} \quad i$$

Центр ваги деяких однорідних тіл

1) Центр тяжіння дуги кола. Розглянемо дугу AB радіусу R з центральним кутом $AOB = 2\alpha$. В силу симетрії центр тяжіння цієї дуги лежить на осі Ox .



Знайдемо координату x_c по формулі $x_c = \frac{1}{L} \int x dl$. Для цього виділимо на дузі AB елемент MM' завдовжки $dl = R d\varphi$, положення якого визначається кутом φ . Координата x елемента MM' буде $x = R \cos \varphi$. Підставляючи ці значення x і dl маючи на увазі, що інтеграл має бути поширений на всю довжину дуги, отримаємо:

$$x_c = \frac{1}{L} \int_A^B x dl = \frac{R^2}{L} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi = 2 \frac{R^2}{L} \sin \alpha,$$

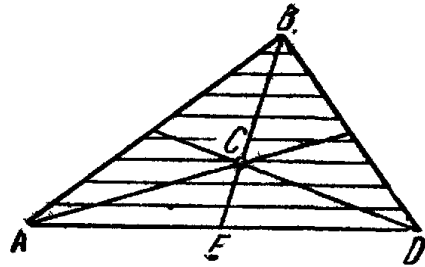
де L - довжина дуги AB , рівна $R \cdot 2\alpha$. Звідси остаточно знаходимо, що центр тяжіння дуги кола лежить на її осі симетрії на відстані від центру O , рівному

$$x_c = R \frac{\sin \alpha}{\alpha},$$

де кут α вимірюється в радіанах.

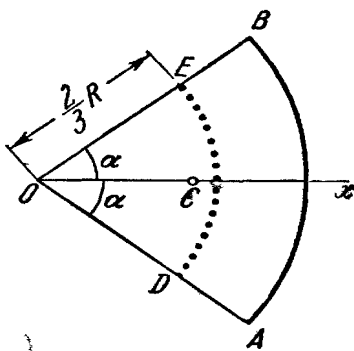
2) Центр ваги площі трикутника. Розіб'ємо площу трикутника ABD прямими, паралельними AD , на вузькі смужки; центри тяжіння цих смужок лежатимуть на медіані BE трикутника.

Отже, і центр тяжіння усього трикутника лежить на цій медіані. Аналогічний результат виходить для двох інших медіан. Звідси робимо висновок, що центр тяжіння площі трикутника лежить в точці перетину його



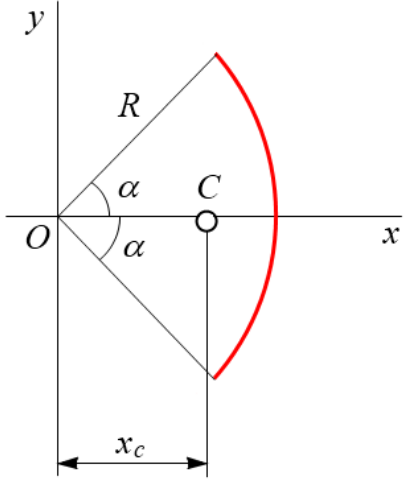
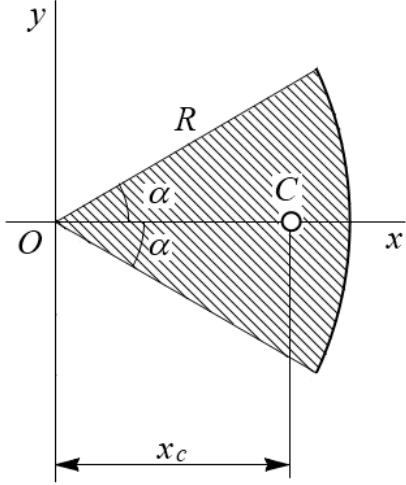
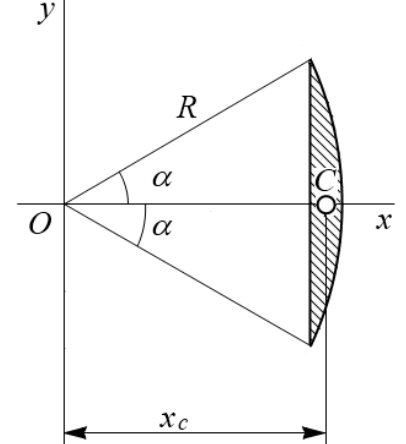
медіан. При цьому, як відомо, $CE = \frac{1}{3} BE$.

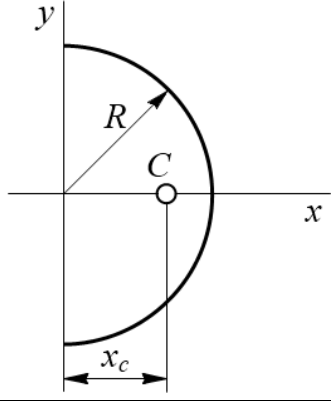
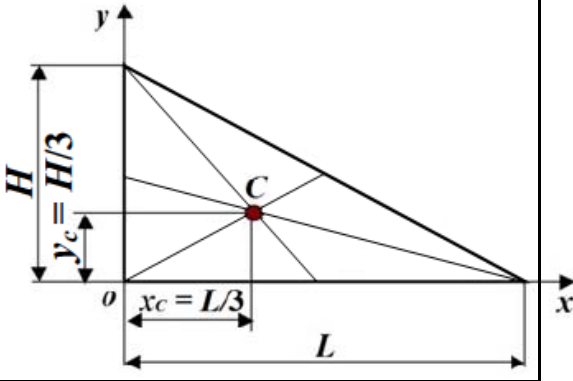
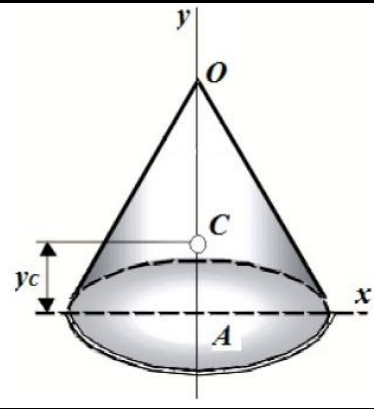
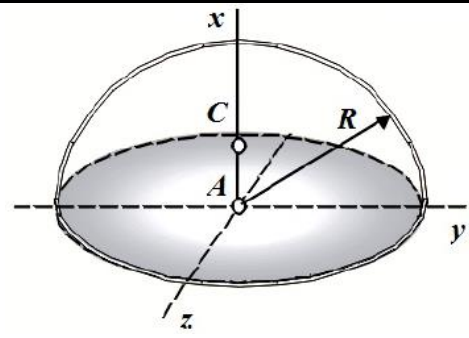
3) Центр ваги площі кругового сектора. Розглянемо круговий сектор OAB радіусу R з центральним кутом 2α . Розіб'ємо подумки площу сектора OAB радіусами, проведеними з центру O , на n секторів. У межі, при необмеженому збільшенні числа n , ці сектори можна розглядати як плоскі трикутники, центри ваги яких лежать на дузі DE радіусу $2R/3$. Отже, центр тяжіння сектора OAB буде співпадати з центром ваги дуги DE . Остаточно отримаємо, що центр ваги площі кругового сектора лежить на його центральній осі симетрії на відстані від початкового

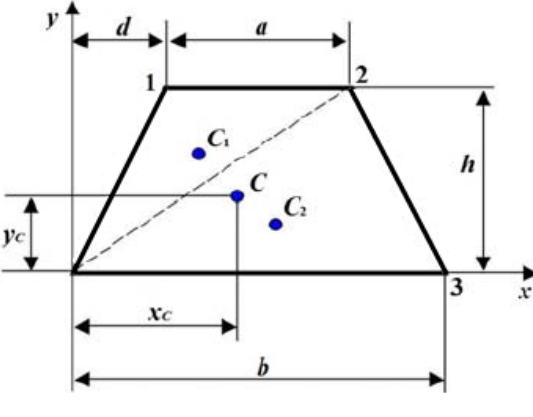
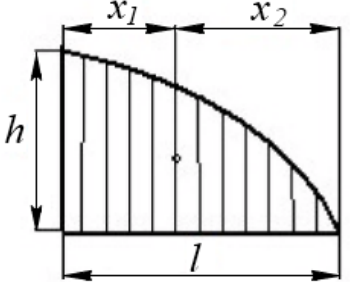
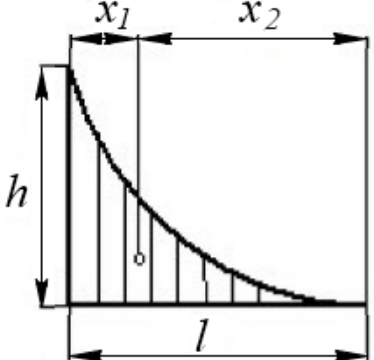


центру O , рівному $x_c = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$.

Координати центру ваги деяких однорідних тіл

| № | Назва фігури | Рисунок |
|---|--|--|
| 1 | <p>Дуга кола: центр ваги дуги однорідної окружності знаходиться на осі симетрії (координата $y_c=0$).</p> $x_c = OC = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}; y_c = 0$ <p>де α – половина центрального кута; R – радіус кола.</p> |  |
| 2 | <p>Однорідний круговий сектор: центр ваги знаходиться на осі симетрії (координата $y_c=0$).</p> $x_c = OC = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}; y_c = 0$ <p>де α – половина центрального кута; R – радіус кола.</p> |  |
| 3 | <p>Сегмент: центр ваги знаходиться на осі симетрії (координата $y_c=0$).</p> $x_c = OC = \frac{2}{3} R \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}; y_c = 0$ <p>де α – половина центрального кута; R – радіус кола.</p> |  |

| | | |
|---|---|--|
| 4 | <p>Півколо:</p> $x_C = OC = \frac{4R}{3\pi}.$ |  |
| 5 | <p>Трикутник: центр ваги однорідного трикутника знаходиться в точці перетину його медіан.</p> $x_C = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; y_C = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},$ <p>де $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ – координати вершин трикутника</p> |  |
| 6 | <p>Конус: центр ваги однорідного кругового конусу знаходиться на його висоті та на відстані 1/4 висоти від основи конусу.</p> $y_C = AC = \frac{OA}{4}.$ |  |
| 7 | <p>Півсфера: центр ваги знаходиться на осі симетрії.</p> $x_C = AC = \frac{3R}{8}.$ |  |

| | | |
|----|--|---|
| 8 | <p>Трапеція:</p> $x_c = \frac{(a+2d) \cdot a + (a+b+d) \cdot b}{3 \cdot (a+b)};$ $y_c = \frac{2a+b}{3(a+b)} h;$ $S = \frac{a+b}{2} h$ - площа фігури. |  |
| 9 | $S = \frac{2}{3} lh$ - площа фігури; $x_1 = \frac{1}{4} l; x_2 = \frac{5}{8} l.$ |  |
| 10 | $S = \frac{1}{4} lh$ - площа фігури; $x_1 = \frac{1}{5} l; x_2 = \frac{4}{5} l.$ |  |

План вирішення задач по визначенню положення центру ваги однорідних тіл

При вирішенні задач слід дотримуватись наступного порядку:

1. Обрати метод, який найбільш прийнятний до даної задачі (метод розбиття або метод доповнення).
2. Розбити складне тіло на прості елементи, для яких центр ваги відомі.
3. Вибрати осі координат. При цьому необхідно пам'ятати, що: якщо тіло має площину симетрії, то його центр лежить в цій площині; якщо тіло має вісь симетрії, то його центр лежить на цій осі; якщо тіло має центр симетрії, то його центр ваги збігається з центром симетрії.
4. Визначити координати центру ваги окремих простих тіл відносно обраних вісей.
5. Використовуючи формули, що відповідають обраному методу, визначити координати центру ваги заданого тіла.

Відповіді до завдання 2:

| | <i>A</i> | x_c | y_c | | <i>A</i> | x_c | y_c |
|---|----------|-------|-------|----|----------|-------|-------|
| 1 | 40.642 | 5.203 | 3.627 | 6 | 17.858 | 2.380 | 2.964 |
| 2 | 35.642 | 4.764 | 3.495 | 7 | 27.358 | 3.582 | 2.653 |
| 3 | 27.071 | 3.887 | 2.492 | 8 | 19.429 | 2.668 | 2.945 |
| 4 | 26.071 | 3.755 | 2.441 | 9 | 23.929 | 2.668 | 3.585 |
| 5 | 39.783 | 4.702 | 3.351 | 10 | 22.217 | 3.593 | 2.950 |

2.3. Приклади вирішення завдання №2

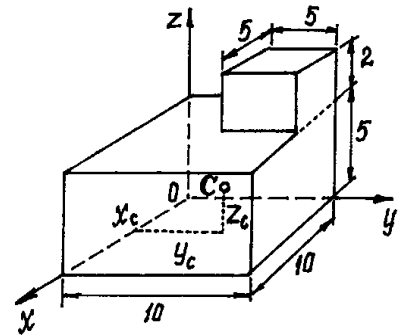
Приклад 1. Визначимо центр ваги однорідного тіла, зображеного на рисунку.

Тіло однорідне, що складається з двох частин, що мають симетричну форму. Координати центру ваги їх рівні:

$$x_1 = 5 \text{ см}; y_1 = 5 \text{ см}; z_1 = 2,5 \text{ см};$$

$$x_2 = 2,5 \text{ см}; y_2 = 7,5 \text{ см}; z_2 = 6 \text{ см}.$$

Об'єми їх: $V_1 = 5 \cdot 10 \cdot 10 = 500 \text{ см}^3;$
 $V_2 = 5 \cdot 5 \cdot 2 = 50 \text{ см}^3$



Тому координати центру ваги тіла

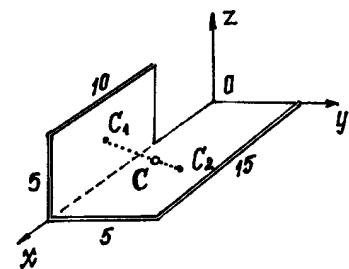
$$x_c = \frac{\sum V_i x_i}{V} = \frac{500 \cdot 2,5 + 50 \cdot 6}{500 + 50} = 4,77 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\sum V_i y_i}{V} = \frac{500 \cdot 5 + 50 \cdot 7,5}{550} = 5,23 \text{ см};$$

$$z_c = \frac{\sum V_i z_i}{V} = \frac{500 \cdot 2,5 + 50 \cdot 6}{550} = 2,82 \text{ см}.$$

Приклад 2. Знайдемо центр ваги пластини, зігнутої під прямим кутом. Розміри - на рисунку.

Координати центру ваги: $x_1 = 20 \text{ см}, y_1 = 0,$
 $z_1 = 2,5 \text{ см},$



$$x_2 = 7,5 \text{ см}, \quad y_2 = 2,5 \text{ см}, \quad z_2 = 0.$$

$$\text{Площі: } S_1 = 5 \cdot 10 = 50 \text{ см}^2, \quad S_2 = 5 \cdot 15 = 75 \text{ см}^2.$$

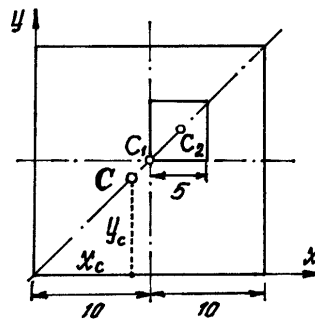
Тому:

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{S} = \frac{50 \cdot 20 + 75 \cdot 7,5}{50 + 75} = 12,5 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\sum S_i y_i}{S} = \frac{50 \cdot 0 + 75 \cdot 2,5}{125} = 1,5 \text{ см};$$

$$z_c = \frac{\sum S_i z_i}{S} = \frac{50 \cdot 2,5}{125} = 1,0 \text{ см}.$$

Приклад 3. У квадратного листа 20×20 см вирізаний квадратний отвір 5×5 см Знайти центр ваги листа, зображеного на рисунку.



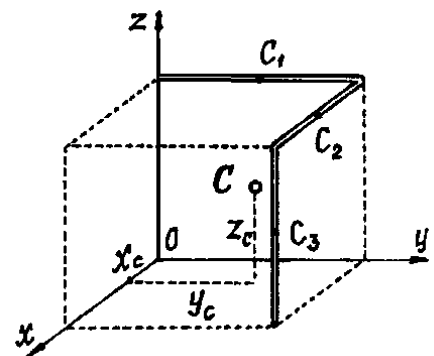
У цьому завданні зручніше розділити тіло на дві частини: великий квадрат і квадратний отвір. Тільки площу отвору потрібно вважати негативною. Тоді координати центру ваги листа з отвором:

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{S} = \frac{S_1 \cdot x_1 - S_2 \cdot x_2}{S_1 - S_2} = \frac{20 \cdot 20 \cdot 10 - 5 \cdot 5 \cdot 12,5}{400 - 25} = 9,83 \text{ см},$$

координата $y_c = x_c = 9,83$ см, оскільки тіло має вісь симетрії (діагональ).

Приклад 4. Дротяна дужка, зображена на рисунку, складається з трьох ділянок однакової довжини l .

Координати центру ваги ділянок:



$x_1 = 0, \quad y_1 = 0,5l, \quad z_1 = l; \quad x_2 = 0,5l, \quad y_2 = l, \quad z_2 = l; \quad x_3 = l, \quad y_3 = l, \quad z_3 = 0,5l.$ Тому координати центру ваги усієї дужки:

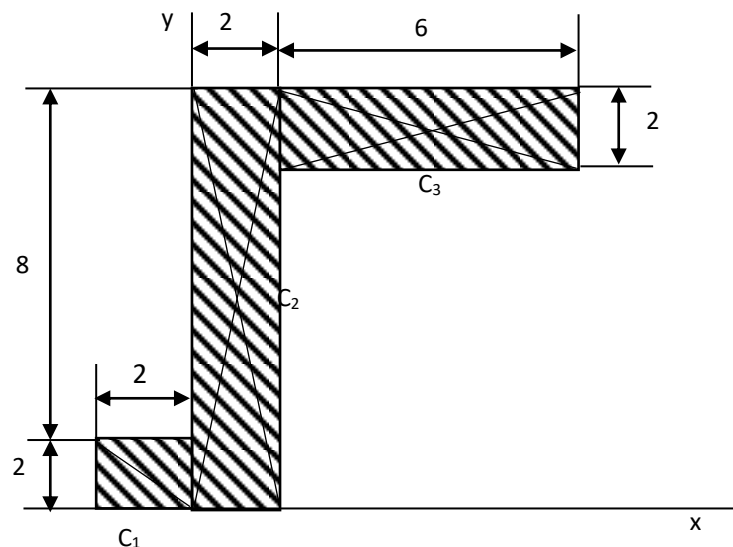
$$x_c = \frac{\sum l_i x_i}{L} = \frac{l \cdot 0 + l \cdot 0,5l + l \cdot l}{3l} = 0,5l,$$

$$y_c = \frac{\sum l_i y_i}{L} = \frac{l \cdot 0,5l + l \cdot l + l \cdot l}{3l} = 0,83l,$$

$$z_c = \frac{\sum l_i z_i}{L} = \frac{l \cdot l + l \cdot l + l \cdot 0,5l}{3l} = 0,83l.$$

Приклад 5. Визначити координати центру ваги однорідної пластини, зображеної на рисунку. Усі розміри дані в сантиметрах.

| № | 1 | 2 | 3 |
|-------|----|----|----|
| x_k | -1 | 1 | 5 |
| y_k | 1 | 5 | 9 |
| s_k | 4 | 20 | 12 |



Проводимо осі x, y і розбиваємо пластину на три прямокутники (лінії розрізу показані на малюнку). Обчислюємо координати центру ваги кожного з прямокутників і їх площі (див. таблицю).

Площа усієї пластини $S = s_1 + s_2 + s_3 = 36 \text{ см}^2$

Підставляючи отримані величини у формулу, отримуємо:

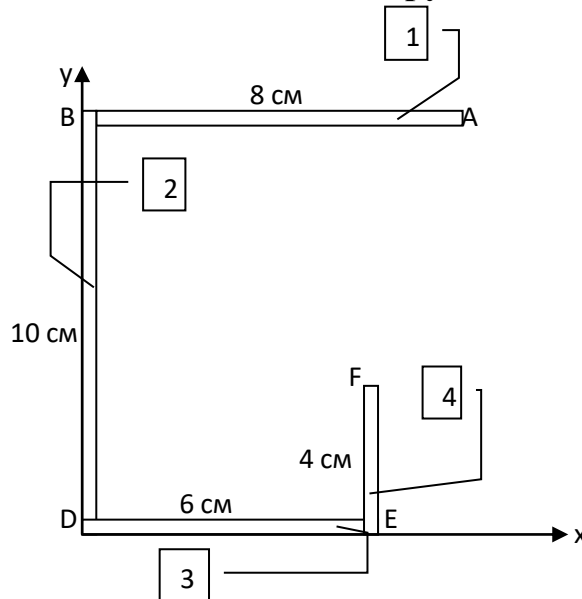
$$X_c = \frac{1}{S} \sum s_k x_k \quad Y_c = \frac{1}{S} \sum s_k y_k$$

$$X_c = \frac{x_1 s_1 + x_2 s_2 + x_3 s_3}{S} = \frac{-4 + 20 + 60}{36} = 2 \frac{1}{9} \text{ см,}$$

$$Y_c = \frac{y_1 s_1 + y_2 s_2 + y_3 s_3}{S} = \frac{4 + 100 + 108}{36} = 5 \frac{8}{9} \text{ см}$$

де S - площа усієї пластини, s_k - площі її частин.

Приклад 6. Визначити положення центру ваги плоскої фігури, зігнутої з тонкого дроту.



1. Фігура складається з чотирьох прямих відрізків : $AB=11=8\text{см}$, $BD=12=10\text{см}$, $DE=13=6\text{см}$, $EF=14=4\text{см}$. На ці чотири частини і розділимо фігуру.
2. Осі координат розташуємо так, щоб вони співпадали з відрізками BD (вісь y) і DE (вісь x), третя вісь не потрібна, оскільки фігура плоска.
3. Для центру ваги C_1 , C_2 , C_3 і C_4 кожного відрізка відповідно, виходячи з розмірів фігури знайдемо їх координати.

Позначивши x_1 і y_1 координати C_1 , знайдемо, що

$$x_1 = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4\text{см}$$

$$y_1 = BD = 10\text{см}$$

Координати C_2 :

$$x_2 = 0$$

$$y_2 = \frac{BD}{2} = \frac{10}{2} = 5\text{см}$$

Координати C_3 :

$$x_3 = \frac{DE}{2} = \frac{6}{3} = 2 \text{ см}$$

$$y_3 = 0$$

Координати C4 :

$$x_4 = 0$$

$$y_4 = \frac{EF}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ см}$$

Для зручності, а також зважаючи на те, що координати центру ваги можна визначити безпосередньо по рисунку, дані для підстановки у формули слід представляти у такому вигляді:

$$l_1 = 8 \quad C_1(4;10)$$

$$l_2 = 10 \quad C_2(0;5)$$

$$l_3 = 6 \quad C_3(3;0)$$

$$l_4 = 4 \quad C_4(6;2)$$

4. Підставимо значення у формули:

$$X_c = \frac{\sum l_i x_i}{\sum l_i}$$

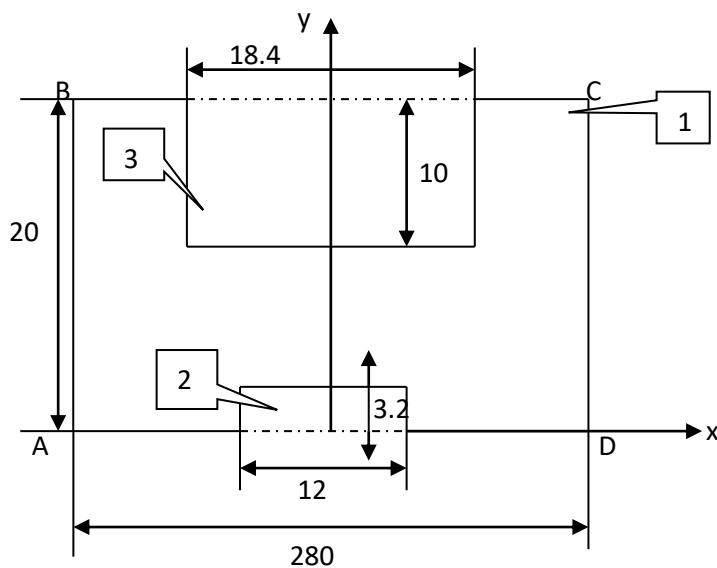
$$Y_c = \frac{\sum l_i y_i}{\sum l_i}$$

$$Z_c = \frac{\sum l_i z_i}{\sum l_i}$$

$$X_c = \frac{8 \cdot 4 + 10 \cdot 0 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 6}{8 + 10 + 6 + 4} = \frac{74}{28} = 2.64$$

$$Y_c = \frac{8 \cdot 10 + 10 \cdot 5 + 6 \cdot 0 + 4 \cdot 2}{8 + 10 + 6 + 4} = \frac{138}{28} = 4.93$$

5. Відклавши на осі координат знайдені значення, знаходимо центр ваги C цієї плоскої фігури.



Приклад 7. Визначити положення центру ваги тонкої однорідної пластини, що має вісь симетрії. Форма і розміри вказані на рисунку.

1. Пластинка має вісь симетрії, на якій знаходиться центр тяжіння. Поєднаємо з віссю симетрії вісь y , а вісь x - з нижнім краєм пластини.

2. Доповнивши платину до прямокутника ABCD, розіб'ємо

її тим самим на три частини: 1, 2 і 3.

3. Визначимо площі кожної частини і координати центру ваги.

$$S_1 = 28 \cdot 20 = 560 \text{ см}^2 \quad C_1(0;10)$$

$$S_2 = -12 \cdot 3.2 = -38.4 \text{ см}^2 \quad C_2(0;1,6)$$

$$S_3 = -18.4 \cdot 10 = -184 \text{ см}^2 \quad C_3(0;15)$$

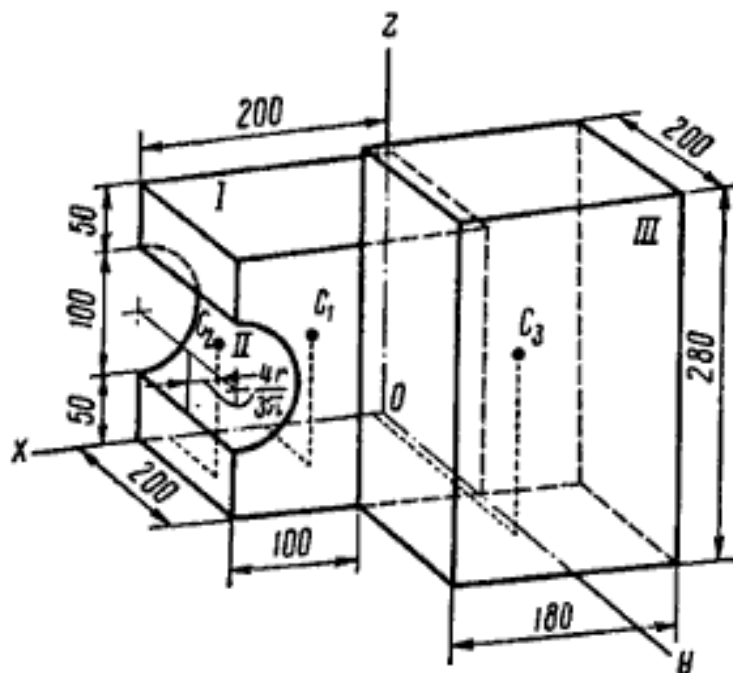
4. Визначимо ординату центру ваги пластинки, підставивши значення в формулу:

$$Y_c = \frac{\sum S_i y_i}{\sum S_i} \quad Y_c = \frac{560 \cdot 10 - 38.4 \cdot 1.6 - 184 \cdot 15}{560 - 38.4 - 184} = \frac{2779}{337.6} \approx 8.23 \text{ см}$$

Таким чином, центр ваги пластини C_0 має координати $(0;8.23)$

Приклад 8. Визначити положення центру ваги тіла, складеного з куба I, що має горизонтальну циліндричну канавку II, і прямокутного паралелепіпеда III; розміри - в мм.

1. Тіло складається з куба I, напівциліндра II, об'єм якого вважаємо негативним, оскільки він вирізаний з об'єму куба I, і прямокутного паралелепіпеда III.



2. Відмітивши на рисунку положення центру ваги складових частин (C_1 - центр ваги куба, C_2 - центр ваги напівциліндра і C_3 - центр ваги паралелепіпеда), знайдемо початкові величини для підстановки їх у формули - об'єми V_i і координати x_i, y_i, z_i їх центру ваги:

$$V_1 = 8000 \text{ см}^3; C_1(10; 10; 10);$$

$$V_2 = - 785 \text{ см}^3; C_2(17,9; 10; 10);$$

$$V_3 = 10080 \text{ см}^3; C_3(1; 30; 14).$$

3. Після підстановки в розрахункові формули маємо:

$$x_c \approx 4,40 \text{ см} \approx 44 \text{ мм};$$

$$y_c \approx 21,6 \text{ см} \approx 216 \text{ мм};$$

$z_c \approx 10,6 \text{ см} \approx 106 \text{ мм}$. Таким чином, центр ваги цього тіла знаходиться в точці $C_0(44; 216; 106)$.

Приклад 9. Визначити положення центру ваги плоскої однорідної пластинки ABCDEFG, розміри якої в см вказані на рисунку.

1. Розбиваємо пластинку на два прямокутники ABCO і OHFG і на трикутник DHE, площу якого вважаємо негативною.

2. Початок координат поміщаємо в точці O, вісь x поєднуємо з прямою AG, вісь y - з прямою CD.

3. Визначаємо площі F_i складових частин і координати x_i, y_i їх центру ваги C_i :

$$F_1 = 40 \text{ см}^2; C_1(-5; 2);$$

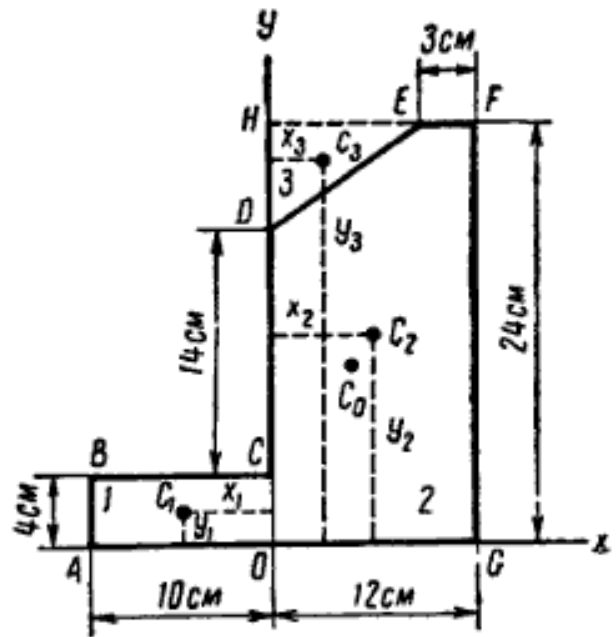
$$F_2 = 288 \text{ см}^2; C_2(6; 12);$$

$$F_3 = -27 \text{ см}^2; C_3(3; 22).$$

4. Підставляємо знайдені значення площ і координат в дві формули і проводимо обчислення:

$$x_c = 4,8 \text{ см} \text{ і } y_c = 9,8 \text{ см}$$

Таким чином, центр ваги пластинки знаходиться в точці $C_0(4,8; 9,8)$.



ЗАВДАННЯ №3

3. Змістовний модуль №1 Теоретична механіка

3.1. Короткі теоретичні відомості.

Просторова стрижнева система

Постановка задачі. Знайти координати центра ваги просторової фігури, що складається з N однорідних стрижнів.

План рішення.

1. Розбиваємо фігуру на окремі стрижні.

2. Вибираємо систему координат. Обчислюємо довжини і координати x_i, y_i, z_i $i=1, \dots, N$ центру ваги окремих стрижнів. Координати центру

прямолінійного однорідного стержня обчислюємо як напівдодаток координат його кінців.

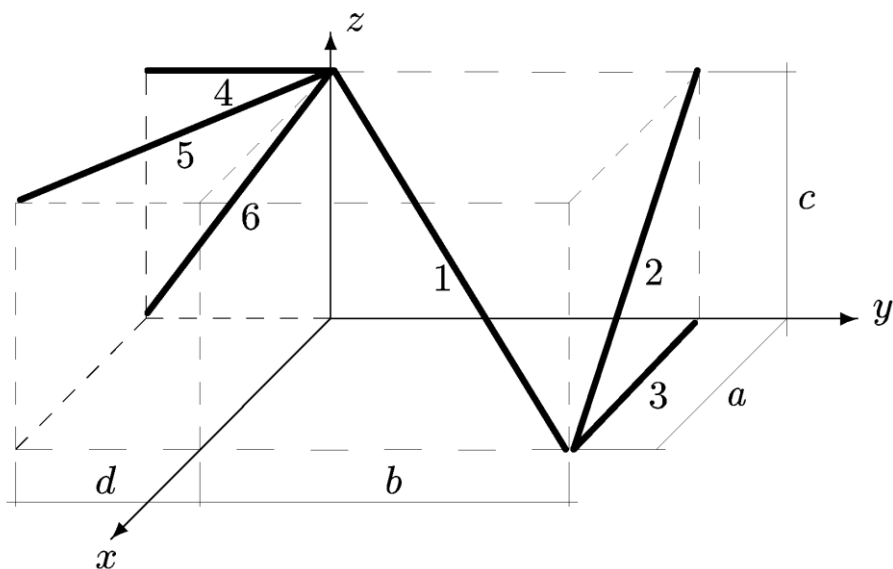


Рис. 16

3. Знаходимо сумарну довжину стрижнів системи:

$$L = \sum_{i=1}^6 L_i = 79.162 \text{ м.}$$

Проміжні результати зручно занести в таблицю:

| i | L_i | x_i | y_i | z_i |
|-----|--------------------------|-------|--------|-------|
| 1 | $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ | $a/2$ | $b/2$ | $c/2$ |
| 2 | $\sqrt{a^2 + c^2}$ | $a/2$ | b | $c/2$ |
| 3 | a | $a/2$ | b | 0 |
| 4 | d | 0 | $-d/2$ | c |
| 5 | $\sqrt{a^2 + d^2}$ | $a/2$ | $-d/2$ | c |
| 6 | $\sqrt{c^2 + d^2}$ | 0 | $-d/2$ | $c/2$ |

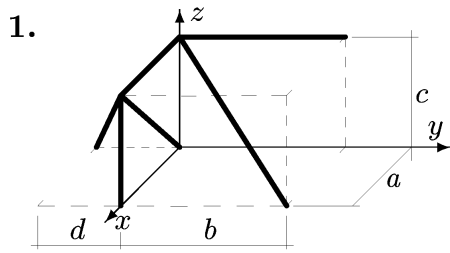
4. Визначаємо координати центру ваги тіла за формулами

$$x_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N L_i x_i = 4.774 \text{ м, } y_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N L_i y_i = 6.921 \text{ м,}$$

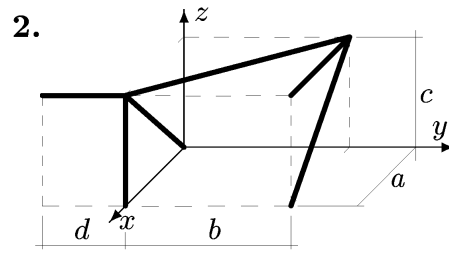
$$z_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N L_i z_i = 5.379 \text{ м.}$$

3.2. Варіанти завдань №3 до курсової роботи

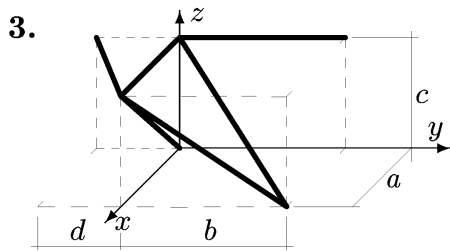
Знайти координати центру ваги просторової фігури, що складається з шести однорідних стержнів. Розміри дані в метрах.



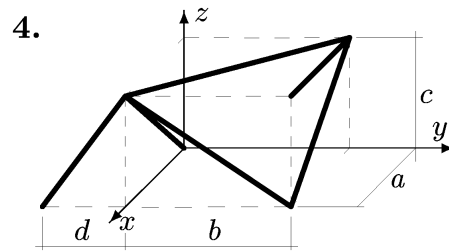
$$a = 3, b = 4, c = 3, d = 2.$$



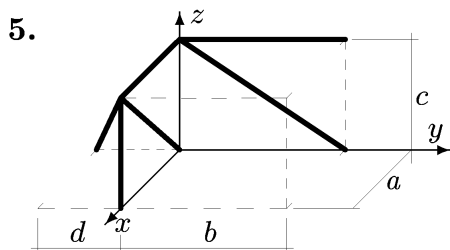
$$a = 5, b = 4, c = 3, d = 2.$$



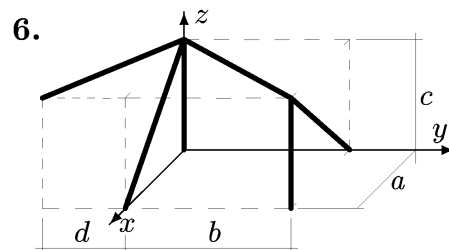
$$a = 6, b = 5, c = 4, d = 3.$$



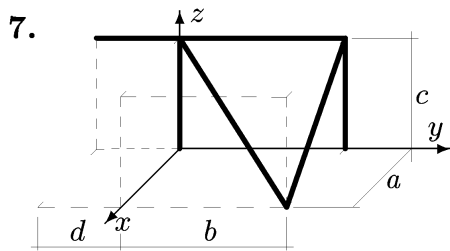
$$a = 4, b = 6, c = 5, d = 4.$$



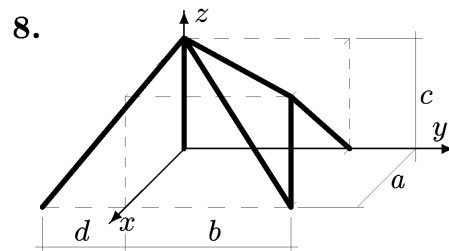
$$a = 3, b = 4, c = 3, d = 2.$$



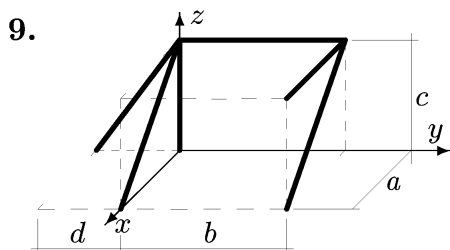
$$a = 5, b = 4, c = 3, d = 1.$$



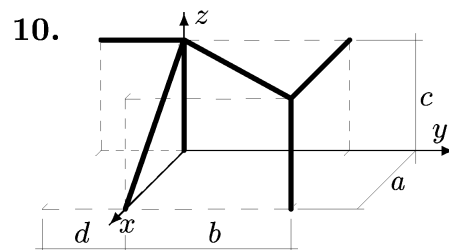
$$a = 6, b = 5, c = 4, d = 2.$$



$$a = 4, b = 6, c = 5, d = 3.$$



$$a = 3, b = 4, c = 3, d = 1.$$



$$a = 6, b = 5, c = 4, d = 2.$$

Відповіді до завдання 3:

| | L | x_c | y_c | z_c | | L | x_c | y_c | z_c |
|---|--------|-------|-------|-------|----|--------|-------|-------|-------|
| 1 | 24.764 | 1.439 | 0.605 | 1.924 | 6 | 29.164 | 2.500 | 1.563 | 2.092 |
| 2 | 28.065 | 2.945 | 1.929 | 2.216 | 7 | 30.986 | 1.548 | 2.856 | 2.452 |
| 3 | 40.097 | 3.105 | 1.007 | 2.883 | 8 | 39.460 | 2.000 | 2.680 | 2.957 |
| 4 | 38.231 | 2.744 | 2.476 | 3.233 | 9 | 21.648 | 0.796 | 1.635 | 1.985 |
| 5 | 23.933 | 1.124 | 0.556 | 1.939 | 10 | 31.021 | 2.807 | 2.177 | 3.019 |

ЗАВДАННЯ №4

4. Змістовний модуль №1 Теоретична механіка

4.1. Короткі теоретичні відомості. Центр ваги об'ємного тіла

Постановка задачі. Знайти координати центра ваги однорідного об'ємного тіла.

План рішення.

1. Розбиваємо тіло на прості частини, положення центрів ваги яких відомо.

2. Вибираємо систему координат. Обчислюємо обсяги V_i і координати x_i , y_i , z_i центру ваги окремих частин. Об'єми вирізаних частин беремо зі знаком мінус.

3. Знаходимо загальний обсяг тіла за формулою $V = \sum V_i$.

4. Визначаємо координати центра ваги тіла:

$$x_c = \sum V_i x_i / V, \quad y_c = \sum V_i y_i / V, \quad z_c = \sum V_i z_i / V.$$

Приклад. Знайти координати центра ваги однорідного об'ємного тіла (рис.17); $a = 10$ м, $b = 12$ м, $c = 6$ м, $d = 8$ м, $R = d/2$.

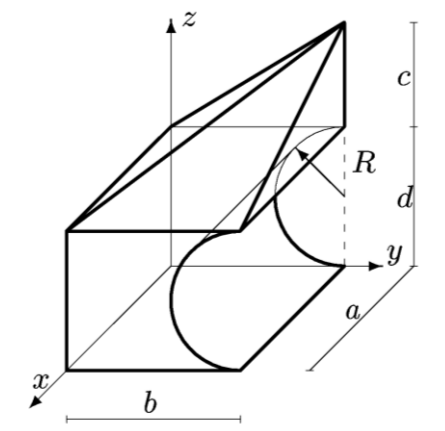


Рис.17

1. Розбиваємо тіло на піраміду 1, паралелепіпед 2 і половину циліндра 3 (рис. 18).

2. Вибираємо систему координат. Обчислюємо обсяги V_i і координати x_i, y_i, z_i центру ваги окремих частин.

Центр ваги піраміди 1 лежить в точці C_1 , $C_0C_1 = C_0O_1/4$,

$$V_1 = \frac{1}{3}abc, \quad x_1 = \frac{3}{8}a, \quad y_1 = \frac{5}{8}b, \quad z_1 = d + \frac{1}{4}c.$$

Центр ваги паралелепіпеда 2 збігається з його геометричним центром:

$$V_2 = abd, \quad x_2 = \frac{1}{2}a, \quad y_2 = \frac{1}{2}b, \quad z_2 = \frac{1}{2}d.$$

Обсяг половини циліндра 3 беремо зі знаком мінус:

$$V_3 = -\pi R^2 a/2, \quad x_3 = \frac{1}{2}a, \quad y_3 = b - l, \quad z_3 = \frac{1}{2}d,$$

де $l=4R/(3\pi)$ - відстань по осі y від осі циліндра до його центра ваги

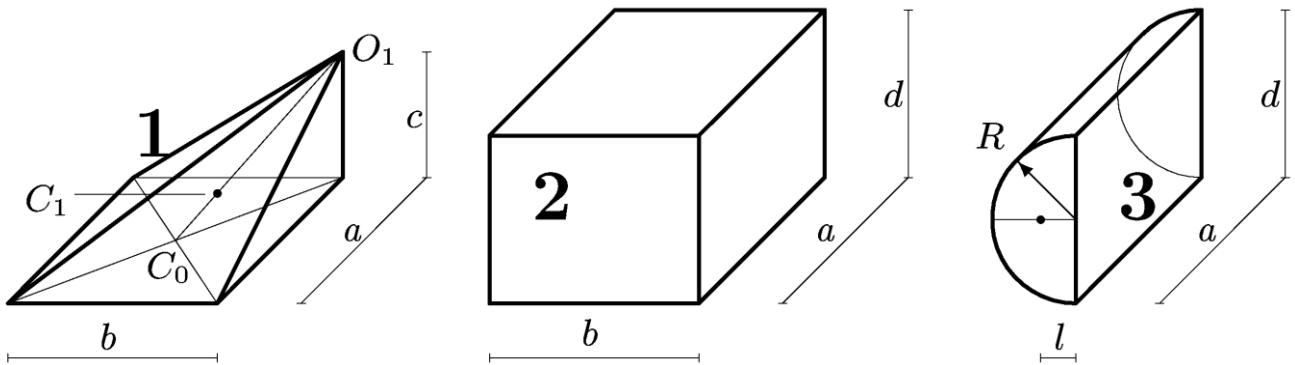


Рис. 18

5. Знаходимо загальний об'єм тіла:

$$V = \sum_{i=1}^3 V_i = 240 + 960 - 251.327 = 948.673 \text{ м}^3.$$

6. Визначаємо координати центра ваги тіла:

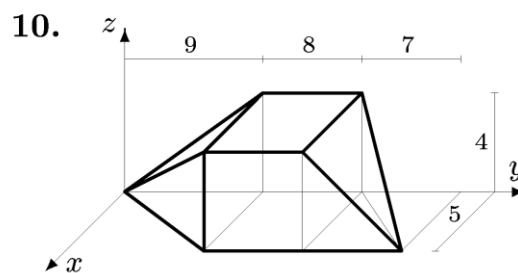
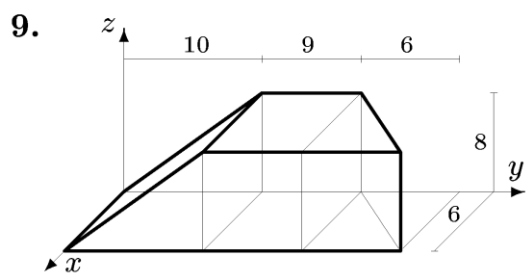
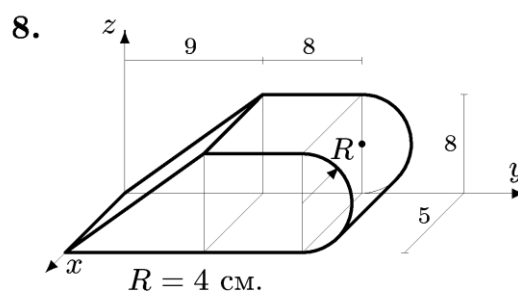
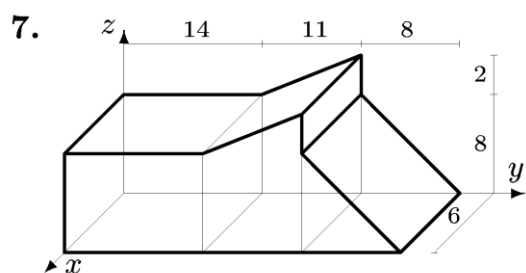
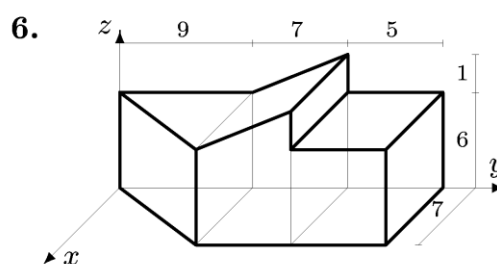
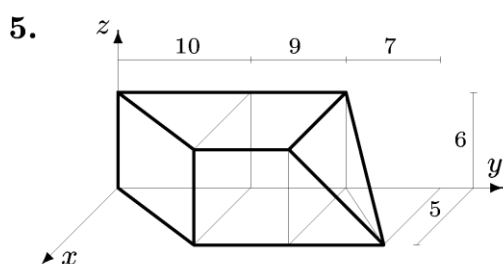
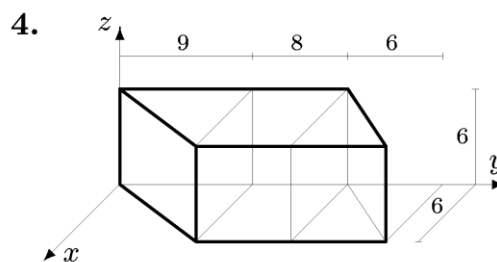
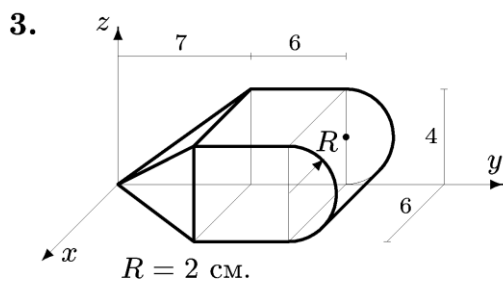
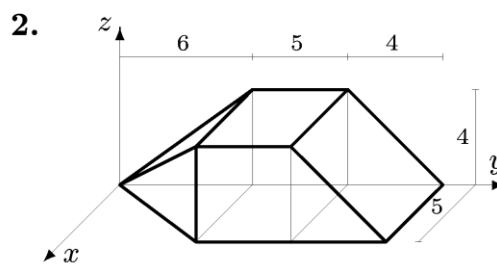
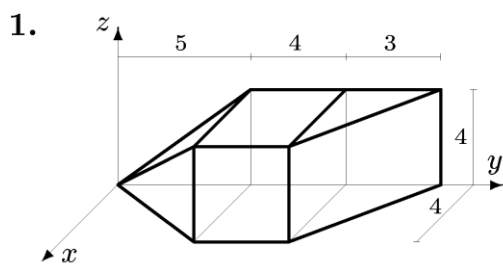
$$x_c = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^3 V_i x_i = \frac{240 \cdot 3.75 + 960 \cdot 5 - 251.327 \cdot 5}{948.673} = 4.684 \text{ м.}$$

$$y_c = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^3 V_i y_i = \frac{240 \cdot 7.5 + 960 \cdot 6 - 251.327 \cdot 10.302}{948.673} = 5.240 \text{ м.}$$

$$z_c = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^3 V_i z_i = \frac{240 \cdot 9.5 + 960 \cdot 4 - 251.327 \cdot 4}{948.673} = 5.391 \text{ м.}$$

4.2. Варіанти завдань №4 до курсової роботи

Знайти координати центра ваги однорідного об'ємного тіла. Розміри надані в метрах.



Відповіді до завдання 4:

| | V | x_c | y_c | z_c | | V | x_c | y_c | z_c |
|---|---------|-------|--------|-------|----|----------|-------|--------|-------|
| 1 | 114.667 | 1.744 | 6.872 | 1.884 | 6 | 717.500 | 3.193 | 12.584 | 4.263 |
| 2 | 180.000 | 2.361 | 8.463 | 1.741 | 7 | 1458.000 | 3.000 | 14.897 | 5.333 |
| 3 | 237.699 | 2.823 | 9.491 | 1.882 | 8 | 625.664 | 2.500 | 12.131 | 3.616 |
| 4 | 558.000 | 2.903 | 12.129 | 3.000 | 9 | 816.000 | 3.176 | 13.343 | 3.608 |
| 5 | 490.000 | 2.334 | 12.995 | 2.893 | 10 | 266.667 | 2.469 | 12.600 | 1.800 |

ЗАВДАННЯ №5

5. Змістовний модуль №1 Теоретична механіка

5.1. Короткі теоретичні відомості. Кінематика.

Кінематикою називають розділ теоретичної механіки, який вивчає рух тіл лише з геометричної точки зору, не залежно від факторів, що обумовлюють той чи інший характер цього руху. Тобто в кінематиці вивчаються геометричні властивості руху тіл, без урахування їх інертності (маси) і сил, що діють на ці тіла. Подібно до геометрії, яка, вивчаючи просторові властивості тіл, не розглядає всі інші матеріальні признаки (вага, міцність тощо), Кінематика розглядає рух тіл, як процес безперервної зміни їх положення у просторі, і не розглядає питання про зв'язок цього руху з матеріальною структурою цих тіл і сил, що на них діють. Тіло, яке рухається, розглядається в кінематиці як деякий геометричний образ.

Кінематика цілком ґрунтується на аксіомах і положеннях геометрії, але на відміну від неї, крім простору, що проходить тіло, розглядає ще і час, за який відбувається рух. Нагадаємо, що під рухом ми розуміємо зміну положення тіла у просторі відносно інших тіл протягом деякого проміжку часу.

Кінематика має важливе значення не лише для вивчення розділу теоретичної механіки - динаміки, але і для дослідження геометричних властивостей руху частин різного роду механізмів. Прогрес техніки, задачі конструювання складних механізмів і машин привели у першій половині XIX століття до відокремлення кінематики в самостійний розділ теоретичної механіки. Подальший розвиток кінематики також йде головним чином по шляху її прикладання до конструювання і дослідження механізмів і машин. Основна задача кінематики полягає в тому, щоб, знаючи закон руху даного тіла (точки), визначити всі кінематичні величини, що характеризують як рух тіла в цілому, так і рух кожної його точки окремо. Для розв'язку даної задачі необхідно, щоб безпосередньо був заданий закон руху даного тіла, або закон руху будь-якого іншого тіла, кінематично пов'язаного з даним.

Будь-який механічний рух матеріального тіла можна спостерігати і вивчати лише по відношенню до деяких інших тіл. Якщо б у просторі знаходилося лише одне дане тіло і не було б інших, то ми взагалі не мали б можливості говорити про зміну його положення у просторі, а значить і про його рух. Для визначення положення тіла (точки), що рухається, з тілом, по відношенню до якого вивчають рух, жорстко зв'язують систему координат.

Система координат, яка зв'язана з тілом, відносно якого досліджують рух, називають системою відліку. Рух тіла здійснюється у просторі протягом часу. Простір у механіці ми розглядаємо, як тривимірний евклідовий простір. Всі вимірювання у ньому відбуваються за методами евклідової геометрії. Час у механіці вважається універсальним, тобто таким, що протікає однаково у всіх системах відліку. Евклідовий простір та універсальний час відображають реальні властивості простору і часу лише наближено. Однак, для руху, що розглядають у механіці, таке наближення дає достатню для практики точність.

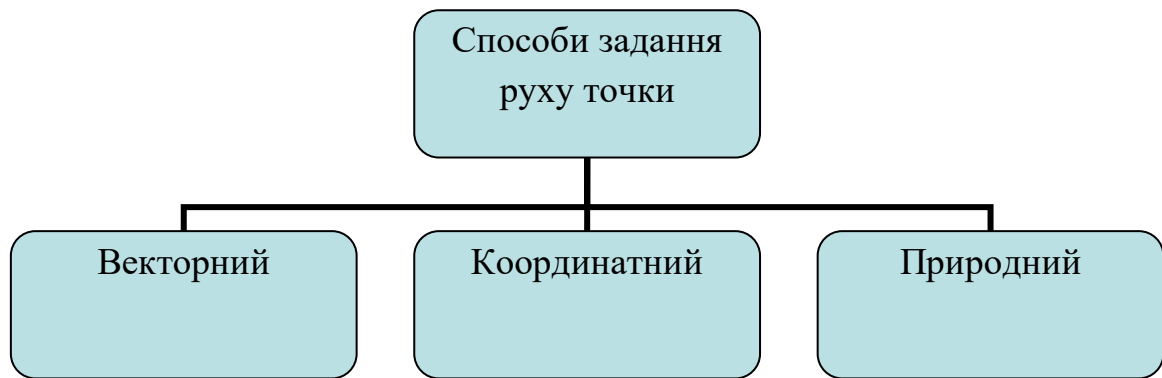
Час є скалярною величиною, яке безперервно змінюється. В задачах кінематики час t приймають за незалежну змінну. Всі інші змінні величини (відстань, швидкість і т.д.) розглядають як такі, що змінюються з часом, тобто є функціями часу. Відлік часу ведеться з деякого початкового моменту ($t_0 = 0$).

Будь-який момент часу t визначається кількістю секунд, які пройшли від початкового моменту до даного; різниця між будь-якими двома послідовними моментами часу називають проміжком часу. Протягом свого руху точка послідовно займає різні положення відносно прийнятої системи відліку, до того ж ці положення слідує безперервно одне за одним.

Лінія, яку описує точка під час свого руху в просторі, називається **траєкторією** руху цієї точки. Рух буде прямолінійний, якщо траєкторія є прямою лінією, і криволінійний, якщо траєкторія - крива. В залежності від форми кривої рух може бути: коловим рухом; еліптичним; гвинтовим і т.д. Якщо точка за рівні, довільні, проміжки часу проходить шляхи однакової довжини, то рух точки називають рівномірним, в іншому випадку рух точки називають нерівномірним або змінним.

Рух точки характеризується ознаками, що встановлюються кожною з двох наведених класифікацій. Як прямолінійний рух, так і криволінійний може одночасно бути або рівномірним, або нерівномірним.

Для розв'язку задач кінематики необхідно, щоб рух який вивчається був деяким чином заданий (описаний). Кінематично задати рух або закон руху тіла (точки) значить задати положення цього тіла (точки) відносно даної системи відліку у будь-який момент часу. Встановлення математичних способів завдання руху точки або тіла є однією з важливіших задач кінематики. Тому вивчення руху будь-якого об'єкту ми будемо починати з встановлення способів задавання цього руху.



1. Векторний спосіб задання руху точки

Нехай точка M рухається по відношенню до деякої системи відліку $Oxyz$. Положення цієї точки в будь-який момент часу можна визначити, задавши її радіус-вектор, проведений з початку координат O в точку M . (рис. 19).

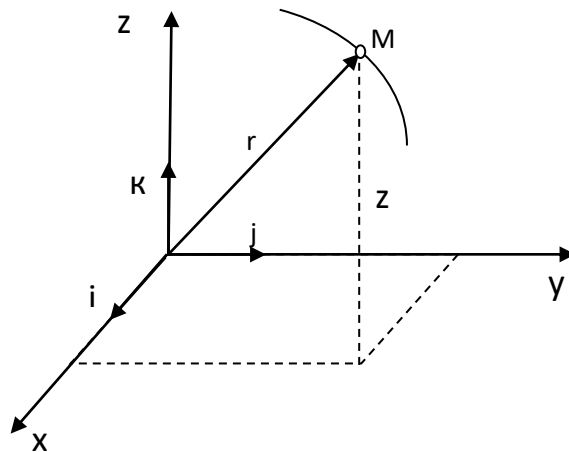


Рис. 19

При русі точки M вектор буде з плином часу змінюватися і по модулю, і за напрямком. Отже, є змінним вектором (вектором-функцією), що залежать від аргументу t :

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \tag{7}$$

Рівняння (7) і визначає закон руху точки у векторній формі, так як воно дозволяє в будь-який момент часу побудувати відповідний вектор r і визначити місце розташування точки, що рухається.

Геометричне місце кінців вектора, тобто годограф цього вектора, визначає траєкторію точки, що рухається

Аналітично, як відомо, вектор задається його проекціями на координатні вісі. У прямокутних декартових координатах для вектора буде: $\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$ (див. рис. 19), де x, y, z - декартови координати точки.

Тоді, якщо, ввести одиничні вектори (орти) координатних осей,

отримаємо для виразу:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}. \quad (8)$$

Відповідно тоді, залежність (7) \bar{r} від t буде відома, якщо будуть задані координати x , y , z точки, як функції часу. Такий спосіб задання руху точки (координатний) розглянемо нижче. Вектор може бути заданий, як відомо, і іншими способами, наприклад його модулем і кутами з вісями або проєкціями на вісі інших систем координат. Для отримання загальних формул, що не залежать від того, як конкретно заданий вектор, будемо виходити з векторного закону руху, представленого рівнянням (7).

2. Координатний спосіб задання руху точки

Положення точки можна визначати її декартовими координатами x , y , z , які при русі точки будуть змінюватися з часом. Щоб знати закон руху точки, тобто її положення в просторі в будь-який момент часу, треба знати значення координат точки для кожного моменту часу, тобто знати залежності:

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t). \quad (9)$$

Рівняння (9) - це рівняння руху точки у прямокутних декартових координатах. Вони визначають закон руху точки при координатному способі задання руху.

Якщо рух точки відбувається весь час в одній і тій же площині, то, прийнявши цю площину за площину Oxy , отримаємо в цьому випадку два рівняння руху:

$$x = f_1(t), y = f_2(t) \quad (10)$$

При прямолінійному русі точки, якщо уздовж її траєкторії направити координатну вісь Ox , рух буде визначатися одним рівнянням (законом прямолінійного руху точки)

$$x = f(t) \quad (11)$$

Рівняння (9) і (10) являють собою одночасно рівняння траєкторії точки в параметричній формі, де роль параметра відіграє час t . Виключивши з рівнянь руху час t , можна знайти рівняння траєкторії в звичайній формі, тобто у вигляді, що дає залежність між координатами точки.

3. Природний спосіб завдання руху точки

Природний спосіб задання руху використовують у випадках, коли траєкторія наперед відома. Тоді положення точки в просторі визначається (рис.20)

- просторовою кривою BC (траєкторією точки);
- криволінійною (дуговою) координатою S на траєкторії;
- початком відліку дугової координати;

- напрямом додатного відліку дугової координати.

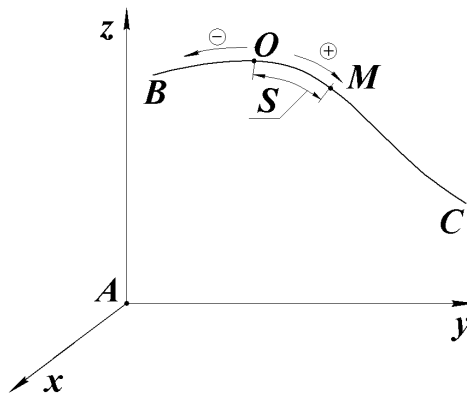


Рис. 20

При русі точки по траєкторії дугова координата змінюється з часом, тобто

$$S=S(t) \quad (12)$$

Залежність (12) називають законом руху точки вздовж заданої траєкторії. Дугову координату не можна плутати з довжиною шляху, який пройшла точка.

Шлях точки – це відстань, що пройдена нею за певний проміжок часу, яка вимірюється вздовж траєкторії в напрямку руху точки.

Дугова координата – положення точки на траєкторії в даний момент часу.

Приклад.

Постановка задачі. Точка рухається за законом

$$x=x(t) \quad y=y(t) \quad (13)$$

Для заданого моменту часу знайти швидкість, прискорення точки і радіус кривизни траєкторії.

План рішення

1. Визначаємо траєкторію руху точки, виключаючи t з закону руху (13).
2. Диференціюючи (13) за часом t , знаходимо проєкції швидкості точки на вісі x, y :

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}. \quad (14)$$

3. Модуль швидкості обчислюємо за формулою:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

4. Диференціюючи (14), знаходимо компоненти вектору прискорення

$$W_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad W_y = \dot{v}_y = \ddot{y}.$$

5. Визначаємо модуль прискорення:

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2}.$$

6. Обчислюємо тангенціальне (дотичне) прискорення. Дифференціюючи швидкість

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

як складну функцію часу, отримуємо

$$|W_\tau| = \frac{|v_x W_x + v_y W_y|}{v}.$$

7. Обчислюємо нормальне прискорення

$$W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2}.$$

8. Нормальне прискорення залежить від швидкості точки і радіусу кривизни траєкторії:

$$W_n = \frac{v^2}{R}.$$

Звідси знаходимо радіус кривизни

$$R = \frac{v^2}{W_n}.$$

Приклад.

Постановка задачі. Точка рухається за законом

$$x = 3 \sin 2t, \quad y = 2 \cos 4t. \quad (15)$$

Для моменту часу $t = t_1 = \pi/12$ знайти швидкість, прискорення точки і радіус кривизни траєкторії. Координати x, y дані в см, час – в с.

Розв'язок:

1. Визначаємо траєкторію руху точки, виключаючи t з закону руху. Параметричним поданням траєкторії є сам закон руху. Координатну форму рівняння руху точки отримуємо, виключаючи із закону руху час:

$$y = 2(1 - 2 \sin^2 2t) = 2(1 - 2(x/3)^2) = 2 - 4x^2/9.$$

Для того, щоб остаточно отримати відповідь на питання про траєкторії, необхідно ще виділити область визначення функції. Не всі точки кривої, що визначаються цією функцією, є точками траєкторії. При $0 < t < \pi/4$ маємо

$$0 \leq x \leq 3.$$

тобто траєкторією є права гілка параболи (рис. 21).

Графік будуюмо по точках (відзначені зірочками), через рівні проміжки часу 0.1 с.

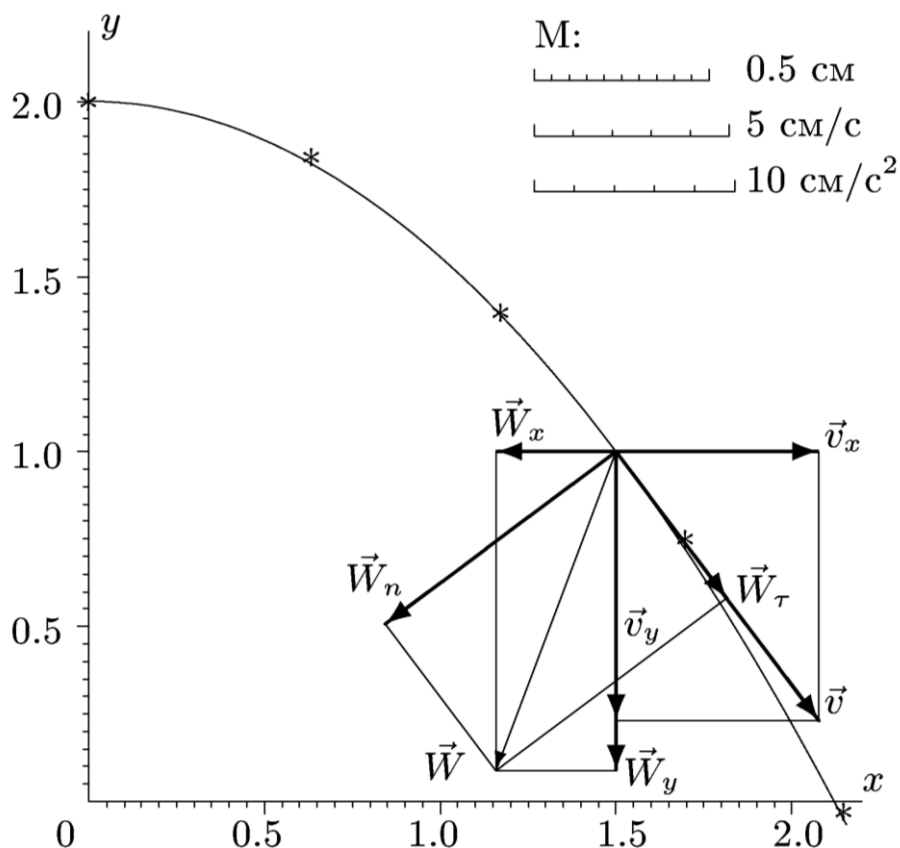


Рис. 21

2. Диференціюючи (15) за часом t , Знаходимо проекції швидкості точки на осі x, y :

$$v_x = \dot{x} = 6 \cos 2t, \quad v_y = \dot{y} = -8 \sin 4t. \quad (16)$$

При $t = \pi/12$ маємо такі чисельні значення компонентів швидкості:

$$v_x = 6 \cos(\pi/6) = 3\sqrt{3} = 5.196 \text{ см/с},$$

$$v_y = -8 \sin(\pi/3) = -4\sqrt{3} = -6.928 \text{ см/с}.$$

3. Модуль швидкості обчислюємо за формулою

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 5\sqrt{3} = 8.66 \text{ см/с}.$$

Вектор швидкості \vec{v} будуюмо на рисунку в масштабі по відомим компонентів v_x і v_y . Якщо в обчисленнях немає помилок, то вектор швидкості буде направлений по дотичній до траєкторії (рис. 21).

4. Диференціюючи (16), знаходимо компоненти вектору прискорення:

$$W_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = -12 \sin 2t,$$

$$W_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = -32 \cos 4t.$$

При $t = \pi/12$

$$W_x = -12 \sin \pi/6 = -6 \text{ см/с}^2,$$

$$W_y = -32 \cos \pi/3 = -16 \text{ см/с}^2.$$

5. Визначаємо модуль прискорення

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = \sqrt{292} = 17.088 \text{ см/с}^2.$$

Вектор прискорення будуємо на кресленні в масштабі прискорень (не обов'язково збігається з масштабом швидкостей). Вектор прискорення направлений всередину угнутості кривої.

6. Обчислюємо тангенціальне прискорення:

$$|W_\tau| = \frac{|3\sqrt{3}(-6) + (-4\sqrt{3})(-16)|}{5\sqrt{3}} = \frac{46}{5} = 9.2 \text{ см/с}^2.$$

7. Обчислюємо нормальне прискорення:

$$W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2} = \sqrt{292 - (46/5)^2} = 72/5 = 14.4 \text{ см/с}^2.$$

8. Знаходимо радіус кривизни траєкторії в зазначеному положенні точки:

$$R = \frac{v^2}{W_n} = \frac{75 \cdot 5}{72} = 5.208 \text{ см.}$$

Центр кривизни траєкторії лежить на нормалі до кривої на відстані $R=5.208$ см всередині угнутості кривої. Окружність радіусом R з центром в цій точці максимально близько співпадає з кривою в малій околиці від неї.

5.2. Варіанти завдань №5 до курсової роботи

Точка рухається за законом $x=x(t)$, $y=y(t)$. Для моменту часу $t=t_1$ знайти швидкість, прискорення точки і радіус кривизни траєкторії (x і y дані в см, t_1 – в с).

1. $x = 2 \sin(2t),$
 $y = 3 + 3 \cos(4t),$
 $t_1 = \pi/12.$
2. $x = 100/(t + 2),$
 $y = (t - 100)/(t + 2)^2,$
 $t_1 = 2.$
3. $x = 4e^{2t} + 5,$
 $y = e^{4t}/4,$
 $t_1 = 0.3.$
4. $x = 24t/(1 + t^3),$
 $y = 24t^2/(1 + t^3),$
 $t_1 = 0.4.$
5. $x = 6(2t - \sin(2t)),$
 $y = 6(1 - \cos(2t)),$
 $t_1 = 5\pi/12.$
6. $x = 16/(t + 2),$
 $y = (40 - 60t)/(t + 2)^3,$
 $t_1 = 0.6.$
7. $x = (100/(t^4 + 1) + 1)/8,$
 $y = t^4,$
 $t_1 = 1.1.$
8. $x = (45/(e^{5t} + 1) + 1)/9,$
 $y = e^{5t},$
 $t_1 = 0.08.$
9. $x = 11 \cos(2t)(1 + \cos(2t)),$
 $y = 11 \sin(2t)(1 + \cos(2t)),$
 $t_1 = \pi/12.$
10. $x = 11 \sin(3t),$
 $y = 21 \cos(3t) + 12,$
 $t_1 = 5\pi/9.$

Відповіді до завдання 5:

| | v_x | v_y | v | W_x | W_y | W | W_τ | W_n | R |
|----|--------|--------|-------|-------------------|--------|--------|----------|--------|-------|
| | см/с | | | см/с ² | | | | | см |
| 1 | 3.46 | -10.39 | 10.95 | -4.00 | -24.00 | 24.33 | 21.50 | 11.38 | 10.54 |
| 2 | -6.25 | 3.13 | 6.99 | 3.13 | -2.36 | 3.92 | -3.85 | 0.71 | 68.51 |
| 3 | 14.58 | 3.32 | 14.95 | 29.15 | 13.28 | 32.04 | 31.38 | 6.47 | 34.52 |
| 4 | 18.49 | 16.42 | 24.72 | -37.03 | 22.16 | 43.15 | -12.97 | 41.16 | 14.85 |
| 5 | 22.39 | 6.00 | 23.18 | 12.00 | -20.78 | 24.00 | 6.21 | 23.18 | 23.18 |
| 6 | -2.37 | -3.68 | 4.37 | 1.82 | 8.28 | 8.48 | -7.95 | 2.95 | 6.48 |
| 7 | -10.96 | 5.32 | 12.19 | 17.47 | 14.52 | 22.72 | -9.37 | 20.69 | 7.17 |
| 8 | -6.01 | 7.46 | 9.58 | 5.93 | 37.30 | 37.76 | 25.33 | 28.01 | 3.27 |
| 9 | -30.05 | 30.05 | 42.50 | -82.11 | -98.21 | 128.01 | -11.39 | 127.50 | 14.17 |
| 10 | 16.50 | 54.56 | 57.00 | 85.74 | -94.50 | 127.60 | -65.64 | 109.42 | 29.69 |

ЗАВДАННЯ №6

6. Змістовний модуль №1 Теоретична механіка

6.1. Короткі теоретичні відомості. Розрахунок зусиль в стрижнях ферми

Прості ферми.

Фермою називається конструкція, що складається з стрижнів, з'єднаних між собою на кінцях шарнірами, які утворюють геометрично незмінну систему (рис.22). Шарніри, що з'єднують стрижні між собою називаються вузлами ферми. Стрижні, що розташовані всередині контура ферми, утворюють її решітку. Якщо всі стрижні, що утворюють ферму, розташовані в одній площині, то така ферма називається плоскою. Ферми застосовуються для тих же випадків, що й балки, але на відміну від них, вони дозволяють перекривати великі відстані при меншій витраті матеріалу, тому що не мають суцільний переріз.

Відстань між опорами в фермі називається **прольотом**. Стрижні, розташовані по зовнішньому контуру ферми, називаються **поясами**. Стрижні, розташовані всередині зовнішнього контуру ферми, називаються: вертикальні - **стійками**, похилі - **розкосами**. Проміжок між двома сусідніми вузлами поясу ферми називають **панеллю**.

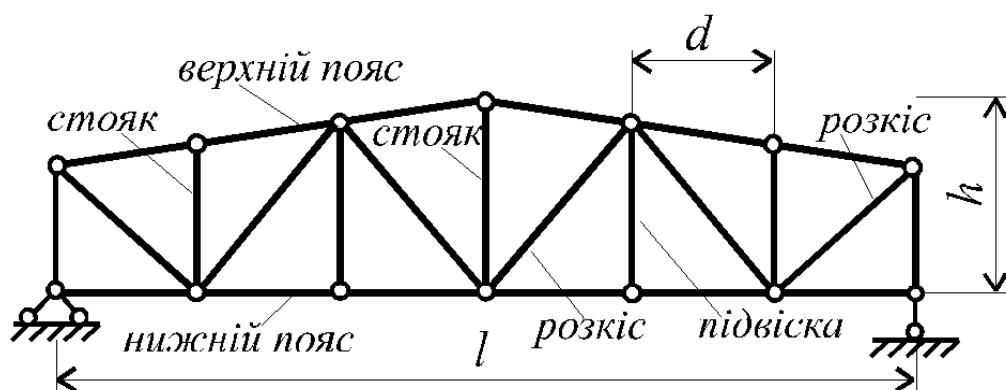


Рис. 22

При розрахунку ферм приймається, що вагою стрижнів можна знехтувати і шарніри розташовані на кінцях стержнів. Оскільки навантаження, що діють на ферму, передаються в шарнірах, то кожен стержень буде сприймати зусилля, яке напрямлене вздовж осі стержня, тобто буде або розтягнутий або стиснутий.

При виконанні розрахунків ферми розглядають як конструкції, стрижні яких з'єднані шарнірами, хоча в реальних спорудах в фермах стрижні з'єднують жорстко (наприклад, зварюванням). Оскільки результати розрахунків практично не відрізняються, проте з шарнірами в вузлах вони виконуються значно простіше.

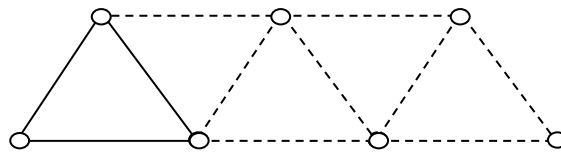
У фермах з шарнірами в вузлах як внутрішніх зусиль розраховують тільки поздовжні сили, оскільки поперечні сили і згинальних моментів в стрижнях дорівнюють нулю.

Серед різноманітних типів ферм розрізняють два основних вида:

1. Ферми без зайвих стрижнів.
2. Ферми, в яких є зайві стрижні.

В подальшому будемо розглядати прості плоскі ферми, які будуються наступним чином: до основного стрижневого трикутника двома стрижнями приєднується новий шарнір (вузел), до нього другий і т.д.

Розглянемо зв'язок між кількістю вузлів n і кількістю стрижнів k у простих фермах. Основний трикутник має три вузли і три стрижні. Для незмінного з'єднання з основним трикутником кожного з решти $n-3$ вузлів потрібно приєднати два стрижні.



Отже, загальна кількість стрижнів у простій ферми з урахуванням трьох стрижнів основного трикутника визначається так:

$$k = 2(n - 3) + 3 = 2n - 3.$$

Покажемо, що проста ферма статично означена, якщо число опорних реакцій дорівнює трьом. Дійсно, для кожного вузла можна скласти два рівняння рівноваги, оскільки на нього діє збіжна система сил. Таким чином, усього можна скласти $2n$ рівнянь рівноваги. У ці рівняння будуть входити k невідомих зусиль у стрижнях і три реакції опор. З урахуванням формули загальне число невідомих буде:

$$k + 3 = 2n - 3 + 3 = 2n,$$

тобто дорівнюватиме числу рівнянь рівноваги. Таким чином, задачу розрахунку простих ферм можна розв'язати методами теоретичної механіки.

Значимо, що якщо число стрижнів k менше, ніж підраховане за формулою, то така конструкція буде механізмом, тобто матиме можливість рухатися. Якщо число стрижнів більше, ніж підраховане за формулою, або число опорних реакцій більше трьох, ферма буде статично неозначена і для її розрахунку треба застосувати методи будівельної механіки.

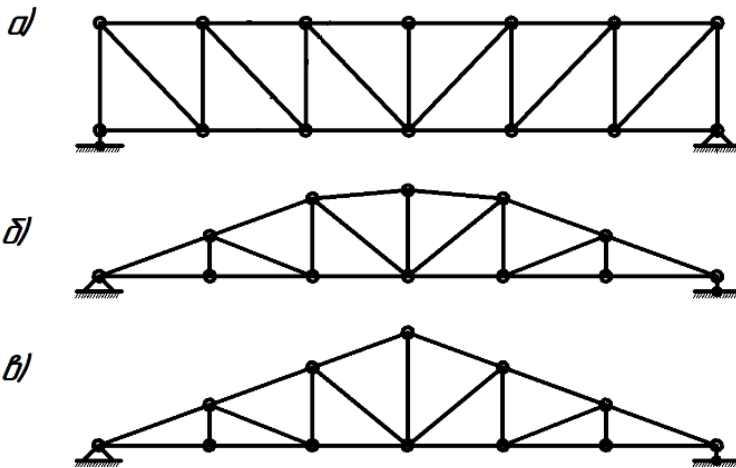
Під час розрахунку ферм припускається, що виконуються наступні умови:

1. Усі стрижні ферми - прямолінійні.
2. Тертя в шарнірах відсутнє.
3. Сили, що діють на ферму, лежать в площині цієї ферми і прикладені тільки до її вузлів.

4. Власна вага кожного стрижня ферми настільки мала в порівнянні з силами прикладеними до вузлів ферми, що нею можна знехтувати.

Основною задачею розрахунку простих ферм є визначення зусиль в стрижнях ферми, які являють собою внутрішні сили, що виникають в стержнях під дією зовнішніх сил.

Класифікація ферм

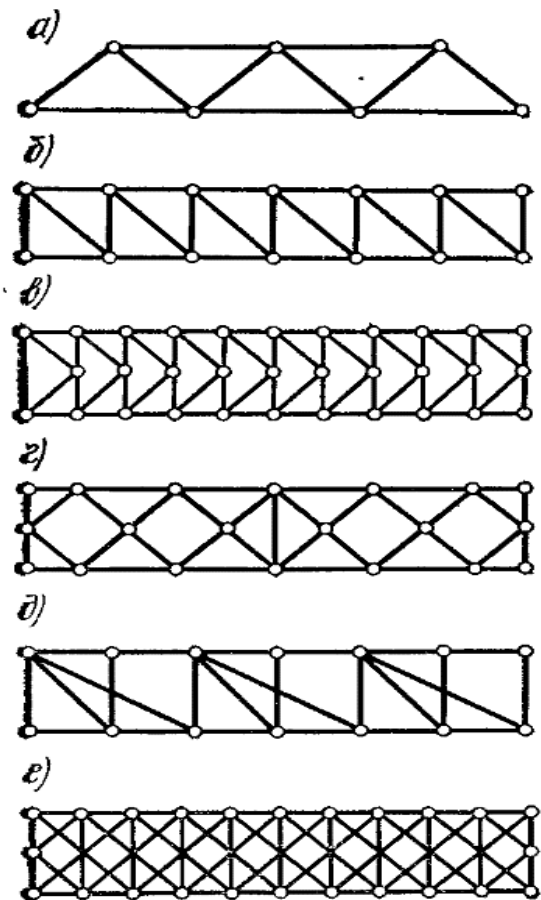


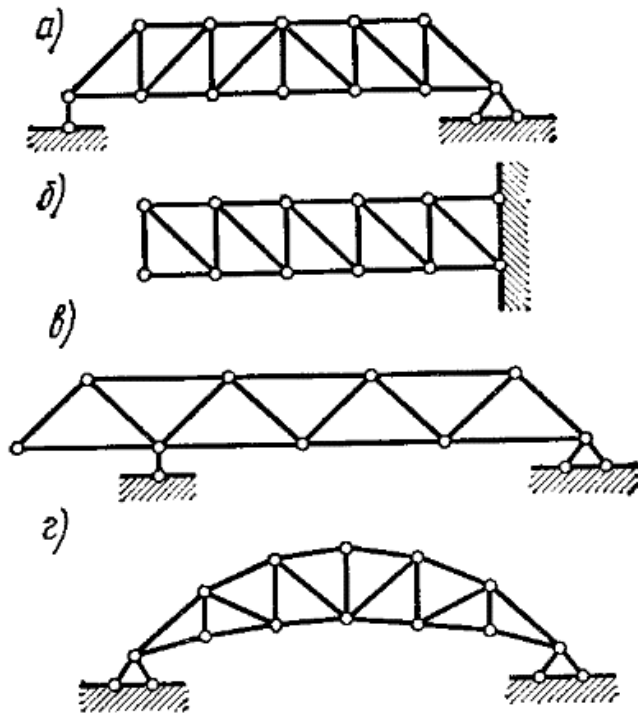
1) За характером обрису:

- з паралельними поясами (рис. а);
- з параболічним обрисом верхнього поясу (рис. б);
- ферми трикутного обрису (рис. в).

2) За типом решітки:

- ферми з трикутною решіткою (рис. а);
- ферми з розкосими ґратами (рис. б);
- ферми з напіврозкісними ґратами (рис. в);
- ферми з ромбічними ґратами (рис. г);
- двогратні (рис. д);
- багатогратні (рис. е).



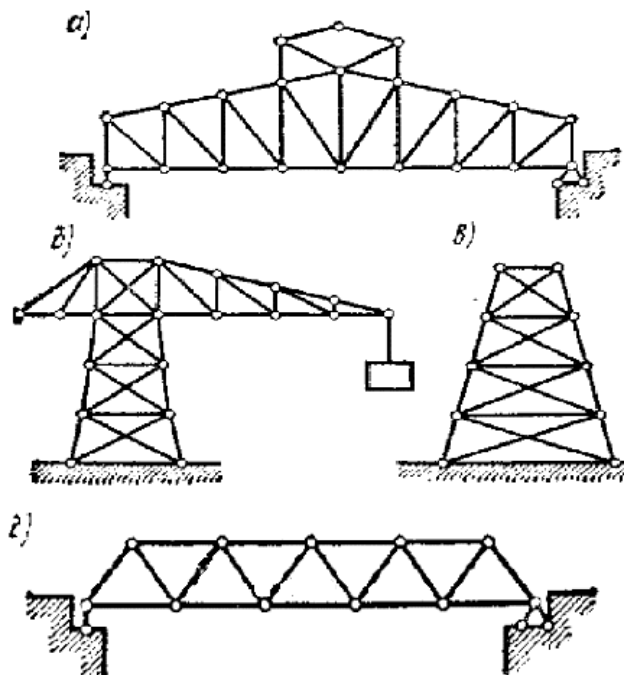


3) За типом спирання:

- балкові (рис. а);
- консольні (рис. б);
- балочно-консольні (рис. в).
- арочні (рис. г).

4) Залежно від призначення:

- кроквяна (рис. а);
- кранові (рис. б);
- баштові (рис. в);
- мостові (рис. г).



5) За методом розрахунку:

- статично визначні;
- статично невизначені.

Визначення зусиль в стрижнях ферми

Ферми, в яких нові вузли додаються за допомогою двох стрижнів, що не лежать на одній лінії (з шарнірного трикутника), називаються найпростішими. Реакції в опорах ферми визначаються як для простої однопрогоновою балки за допомогою рівнянь рівноваги.

Внутрішні зусилля в стрижнях ферми при розрахунку приймаються позитивними (спрямованими від вузлів). Якщо після виконання розрахунку зусилля в стрижні буде негативним, то для нього змінюють напрямок.

При вирішенні завдань приймемо такі умовні позначення: внутрішні зусилля в стрижнях верхнього поясу ферми позначимо літерою O , в стрижнях нижнього поясу - U , в розкосах - D , в стійках - V . В якості індексів у цих позначень застосовуються цифри, що позначають вузли ферми, розташовані на кінцях розглянутого стержня.

Для розрахунку простих ферм застосовуються такі методи:

- 1) метод моментної точки (спосіб Ріттера);
- 2) метод проєкцій;
- 3) метод вирізання вузлів.

Метод моментних точок (спосіб Ріттера)

Метод моментної точки застосовується, коли можна розрізати ферму на дві частини. Переріз повинен розітнути не більше трьох стрижнів, один з яких і є стрижнем, в якому потрібно знайти внутрішнє зусилля. При цьому два стержня, внутрішні зусилля в яких не потрібно знати, повинні з'єднуватися в одній точці, яка називається моментною.

Після того як ферма розрізана на дві частини, більш просту частину (з точки зору подальшого розрахунку) залишають, а решта відкидають. Складається рівняння моментів щодо моментної точки, з якого і визначають необхідне зусилля.

Випадки застосування способу моментної точки:

1. Перетин розрізає крім стрижня, зусилля в якому потрібно визначити, будь-яке число стрижнів, що перетинаються в одній точці, що не лежить на лінії розглянутого стержня.
 2. Коли перетин перетинає понад три стрижнів, які не перетинаються в одній точці, якщо зусилля у всіх стержнях, крім трьох, вже знайдені.
 3. Коли можна провести розріз, що перетинає будь-яке число стрижнів понад трьох, якщо при цьому кожен додатковий стрижень перетинається двічі.
- Перевагою даного методу є те, що помилка при розрахунку зусилля в одному стрижні не впливає на розрахунок зусиль в інших стержнях.

Метод проєкцій

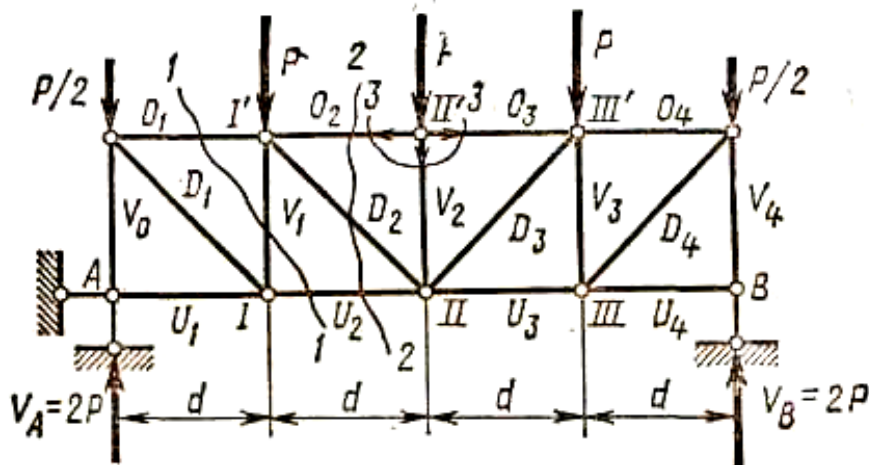
Даний метод застосовується, коли два з трьох розрізнених стрижнів, зусилля в яких визначати не потрібно, паралельні один одному.

В основу методу покладено, що: алгебраїчна сума проєкцій всіх зовнішніх сил, прикладених до відсіченої частини ферми, на одну чи на дві осі координат дорівнює нулю.

Застосовується у таких випадках:

- 1) визначення зусилля в даному стрижні ферми способом моментної точки неможливо (ферми з паралельними поясами);
- 2) коли потрібно визначити зусилля у двох стрижнях, які сходяться у одному вузлі (визначаємо зусилля за допомогою вирізання вузлів (спосіб вирізання вузлів)).

Приклад



Визначаємо зусилля в стійці V_1 і розкосі D_2 .

Проводимо переріз 1-1, який перетинає три стрижня O_1 , V_1 , U_2 . Стрижні O_1 і U_2 паралельні, тобто не мають моментної точки. Тому складаємо рівняння рівноваги у вигляді: алгебраїчної суми проєкцій всіх сил на вертикальну вісь рівної нулю:

$$\begin{aligned} \sum Y = 0; V_A - P/2 + V_1 &= 0 \\ V_1 &= -V_A + P/2 = -2P + P/2 = -(3/2)P \end{aligned}$$

Метод вирізання вузлів

Цим методом зручно користуватися, коли треба знайти зусилля в усіх стрижнях ферми. Він зводиться до послідовного розгляду умов рівноваги сил, що сходяться в кожному з вузлів ферми.

У методі вирізання вузлів спочатку вирізається вузол, в якому перетинаються не більше двох стрижнів з невідомими зусиллями, і далі послідовно вирізаючи вузли досягають необхідного стрижня. При цьому в кожному з вирізаних вузлів повинно перетинатися не більше двох невідомих стрижнів з невідомими зусиллями.

Недоліком методу вирізання вузлів є те, що помилка, допущена при розрахунку одного вузла, впливає на результат подальших розрахунків.

Крім найпростіших ферм існують системи з більш складною геометричною структурою, звані складними.

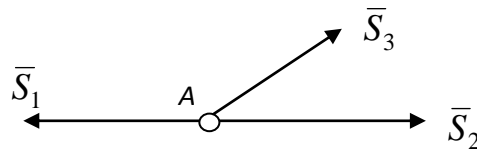
Для їх вирішення застосовується метод заміни стрижнів. Шляхом заміни стрижнів ферма перетворюється в просту, яка кладеться в основу розрахунку. Система, отримана в результаті такого перетворення, називається замінною.

Зусилля в окремих стрижнях можуть виявитись нульовими, тобто стрижні будуть не навантаженими. Такі стрижні можна визначити за допомогою кількох лем.

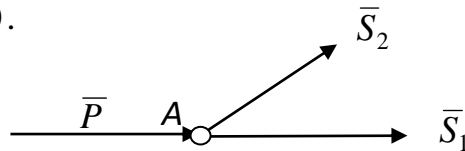
Лема 1. Якщо в не навантаженому вузлі ферми збігаються два стрижні, то зусилля в цих стрижнях дорівнюватимуть нулю, тобто



Лема 2. Якщо в не навантаженому вузлі ферми збігаються три стрижні, з яких два розташовані на одній прямій, то зусилля у третьому стрижні дорівнює нулю: $S_3 = 0$.

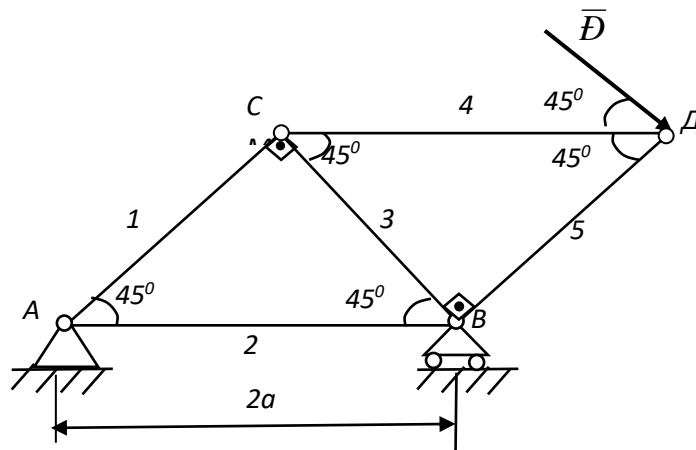


Лема 3. Якщо до вузла, в якому збігаються два стрижні, прикладена зовнішня сила \bar{P} у напрямку одного з стрижнів, то зусилля у другому стрижні дорівнює нулю: $S_2 = 0$.



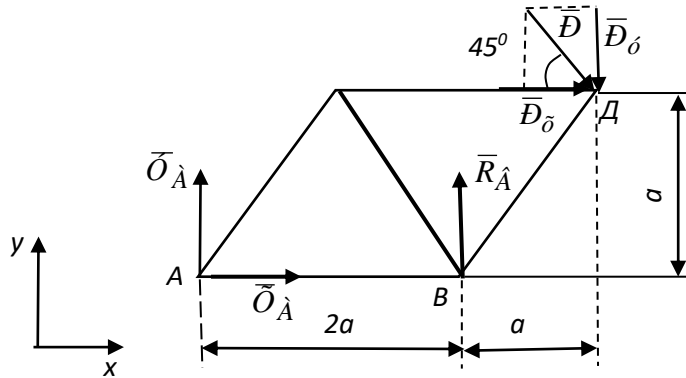
Приклад.

Постановка задачі. Визначити зусилля у стрижнях ферми, на яку діє задана сила $P = 10$ кН. Зусилля у стрижнях 2, 3, 4 перевірити способом Ріттера.



Розв'язок:

1) Розглянемо рівновагу ферми і визначимо реакції опор А і В:



$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad X_A + P \cdot \cos 45^\circ = 0; \quad X_A = -P \cdot \cos 45^\circ = -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -5\sqrt{2} \approx -7 \text{ (кН)}$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad R_B \cdot 2a - P_y \cdot 3a - P_x \cdot a = 0,$$

де P_x, P_y - модулі складових сили \bar{P} : $P_x = P \cdot \cos 45^\circ$, $P_y = P \cdot \sin 45^\circ$,

$$R_B = \frac{P_y \cdot 3 + P_x \cdot 1}{2} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 3 + 5\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \approx 14 \text{ кН};$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A + R_B - P \sin 45^\circ = 0;$$

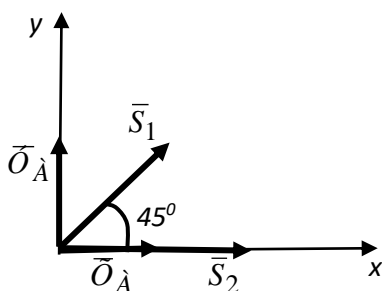
$$Y_A = P \sin 45^\circ - R_B = 5\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = -5\sqrt{2} \approx -7 \text{ (кН)}.$$

Перевірка: $\sum_{i=1}^n M_D(F_i) = -Y_A \cdot 3a + X_A \cdot a - R_B \cdot a =$

$$= -(-5\sqrt{2}) \cdot 3a + (-5\sqrt{2}) \cdot a - 10\sqrt{2} \cdot a = a(15\sqrt{2} - 5\sqrt{2} - 10\sqrt{2}) = a \cdot 0 = 0.$$

2) Визначимо зусилля у стрижнях ферми методом вирізання вузлів:

а) розглянемо рівновагу вузла А:



$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; S_1 \sin 45^\circ + Y_A = 0;$$

$$S_1 = -\frac{Y_A}{\sin 45^\circ} = -\frac{(-5\sqrt{2})}{\sqrt{2}/2} = 10 \text{ (кН)};$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; S_1 \cdot \cos 45^\circ + X_A + S_2 = 0;$$

$$S_2 = -X_A - S_1 \cdot \cos 45^\circ = -(-5\sqrt{2}) - 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 0;$$

б) розглянемо рівновагу вузла С:

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0;$$

$$-S'_1 \sin 45^\circ - S_3 \sin 45^\circ = 0;$$

$$S_3 = -S'_1 = -10 \text{ (кН)};$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; -S_1 \cdot \cos 45^\circ + S'_3 \cos 45^\circ + S_4 = 0;$$

$$S_4 = S_1 \cdot \cos 45^\circ - S_3 \cos 45^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-10) \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \approx 14 \text{ (кН)};$$

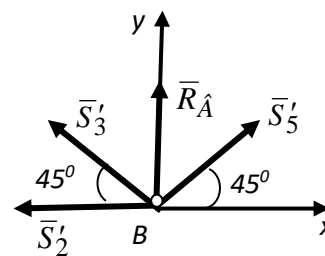
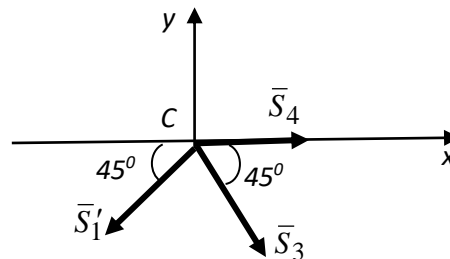
(за модулем $S'_1 = S_1 = 10$ кН);

в) розглянемо рівновагу вузла В:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0;$$

$$-S'_2 - S'_3 \cos 45^\circ + S_5 \cos 45^\circ = 0;$$

$$S_5 = \frac{S'_2 + S'_3 \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{0 - 10 \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -10 \text{ (кН)};$$



друге рівняння можна використати для перевірки:

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = -S'_3 \cdot \sin 45^\circ + R_B + S_5 \sin 45^\circ =$$

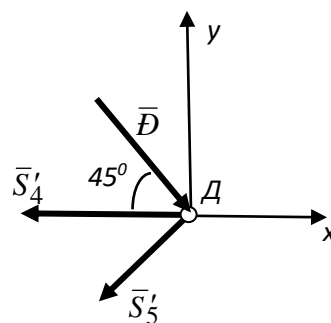
$$= -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 10 \frac{\sqrt{2}}{2} - 10 \frac{\sqrt{2}}{2} = -10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 0;$$

$$(S'_2 = S_2; S'_3 = S_3);$$

г) для перевірки розглянемо останній вузол Д :

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; -S'_4 - S'_5 \cos 45^\circ + P \cos 45^\circ =$$

$$= -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-10) \frac{\sqrt{2}}{2} + 10 \frac{\sqrt{2}}{2} = -10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 0;$$

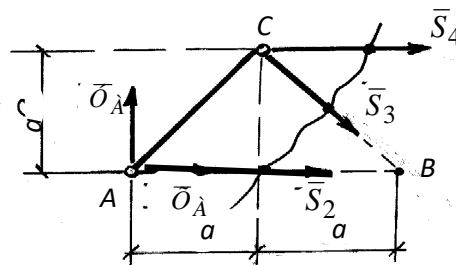


$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = -P \cdot \sin 45^\circ - S'_5 \sin 45^\circ =$$

$$-10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-10) \frac{\sqrt{2}}{2} = -5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 0;$$

$$(S'_4 = S_4; S'_5 = S_5);$$

3) Визначимо зусилля у стрижнях 2, 3, 4 ферми методом Ріттера. Для цього проведемо переріз через ці стрижні і розглянемо рівновагу, наприклад, лівої частини ферми:



$$\sum_{i=1}^n M_{\bar{N}}(\bar{F}_i) = 0; -Y_A \cdot a + X_A \cdot a + S_2 \cdot a = 0;$$

$$S_2 = Y_A - X_A = -5\sqrt{2} - (-5\sqrt{2}) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{i\bar{O}} = 0; Y_A - S_3 \sin 45^\circ = 0; S_3 = \frac{Y_A}{\sin 45^\circ} = \frac{-5\sqrt{2}}{\sqrt{2}/2} = -10 \text{ (кН)};$$

$$\sum_{i=1}^n M_{\bar{A}}(\bar{F}_i) = 0; -Y_A \cdot 2a - S_4 \cdot a = 0; S_4 - 2Y_A = -2(-5\sqrt{2}) = 10\sqrt{2} \approx 14 \text{ (кН)}.$$

Відповідь: 1) $X_A \approx -7$ кН; $Y_A \approx -7$ кН; $R_B = 14$ кН; знаки «-» означають, що справжнє направлення складових \bar{X}_A, \bar{Y}_A протилежне показаним на рисунках;

2) $S_1 = 10$ кН; $S_2 = 0$; $S_3 = -10$ кН; $S_4 \approx 14$ кН; $S_5 = -10$ кН; стрижні 1, 4 - розтягнуті; 3, 5 - стиснуті; 2 - не навантажений.

Приклад.

Постановка задачі.

Плоска ферма спирається на нерухомий і рухомий шарніри (рис. 23). До вузлів ферми прикладено два вертикальні навантаження $P = 90$ кН і два похилі $Q = 40$ кН і $F = 38$ кН, $\alpha = 55^\circ$, $\beta = 15^\circ$. Знайти зусилля в стрижнях 1-5.

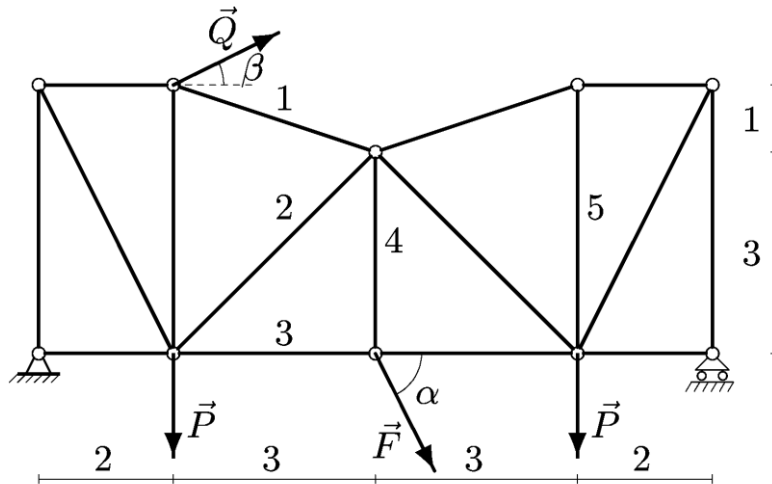


Рис.23

Розв'язок:

1. Звільняємо ферму від зовнішніх зв'язків. Дія опор замінюємо їх реакціями. Ліву (нерухому) шарнірну опору замінюємо двома складовими реакції X_A, Y_A , праву (рухому) - однієї вертикальної Y_B (рис. 24). Для визначення реакцій опор складаємо три рівняння рівноваги - рівняння проекцій на горизонтальну вісь x і два рівняння моментів щодо опор:

$$\sum X_i = X_A + F \cos \alpha + Q \cos \beta = 0,$$

$$\sum M_A = -2 \cdot P + 2 Q \sin \beta - 4 Q \cos \beta - 5 F \sin \alpha - 8 P + 10 Y_B = 0,$$

$$\sum M_B = 8 P - 8 Q \sin \beta - 4 Q \cos \beta + 5 F \sin \alpha + 2 P - 10 Y_A = 0.$$

Система рівнянь складається з трьох незалежних один від одного рівнянь, рішення яких легко знайти, підставивши чисельні значення навантажень і кутів з умови:

$$Y_A = 81.827 \text{ кН}, \quad Y_B = 118.948 \text{ кН}, \quad X_A = -60.433 \text{ кН}.$$

2. Перевіряємо знайдені вертикальні реакції, складаючи рівняння проекцій всіх сил на вісь y :

$$\begin{aligned}\sum Y_i &= Y_A - P + Q \sin \beta - F \sin \alpha - P + Y_B = \\ &= 81.827 - 90 + 40 \sin 15 - 38 \sin 55 - 90 + 118.948 = 0.\end{aligned}$$

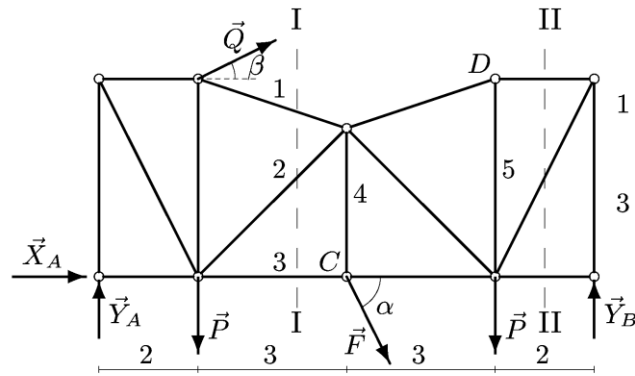


Рис.24

Горизонтальну реакцію X_A можна перевірити, склавши ще одне рівняння моментів, наприклад щодо точки D.

3. Методом Ріттера знаходимо зусилля в стрижнях 1, 2, 3. Перетином I-I (рис. 24) подумки розділяємо ферму на дві частини, перетинаючи три стрижня. Дія розрізаних частин замінюємо їх зусиллями.

Розглядаємо ліву частину (рис. 25), на яку діють чотири відомих сили X_A , Y_A , P , Q і реакції стрижнів, спрямовані з вузлів до перетину. Точки Ріттера R_1 , R_2 , R_3 знаходяться в точках попарного перетину ліній дії сил S_1 , S_2 , S_3 . номер точки Ріттера відповідає номеру розсіченого стержня, який через цю точку не проходить. Точка R_2 знаходиться на продовженні стержня 1. Відстань до неї легко обчислити, знаючи кут γ між стрижнем 1 і горизонталлю: $\text{tg} \gamma = 1/3$.

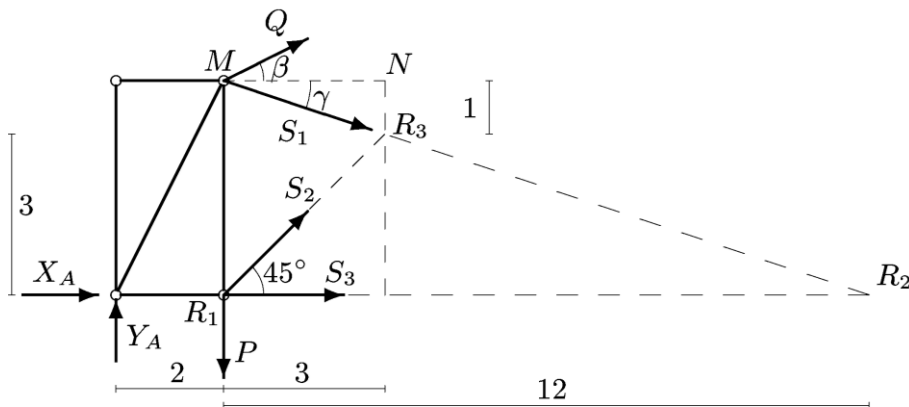


Рис. 25

Рівняння методу Ріттера мають вигляд:

$$\begin{aligned}\sum M_{R_1} &= -4 \cdot S_1 \cos \gamma - 4 \cdot Q \cos \beta - 2 \cdot Y_A = 0, \\ \sum M_{R_2} &= -12 \cdot S_2 \cos 45 - 4 \cdot Q \cos \beta - 12 \cdot Q \sin \beta + 12 \cdot P - 14 \cdot Y_A = 0, \\ \sum M_{R_3} &= 3 \cdot S_3 - 1 \cdot Q \cos \beta - 3 \cdot Q \sin \beta + 3 \cdot P - 5 \cdot Y_A + 3 \cdot X_A = 0.\end{aligned}$$

Знаходимо розв'язок системи:

$$S_1 = -83.854 \text{ кН}, S_2 = -40.584 \text{ кН}, \\ S_3 = -130.04 \text{ кН}.$$

4. Методом вирізання вузлів визначаємо S_4 . Вирізаємо вузол C (рис. 24) і складаємо рівняння проєкцій на вісь y (рис. 26), з якого відразу ж визначаємо зусилля:

$$\sum Y_i = S_4 - F \sin \alpha = 0, \quad S_4 = 31.128 \text{ кН}.$$

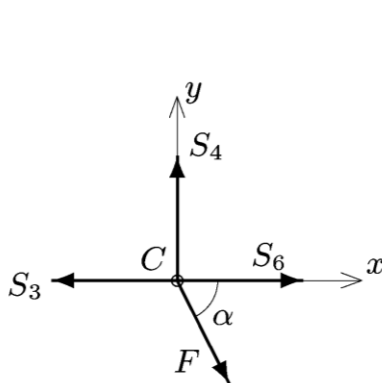


Рис. 26

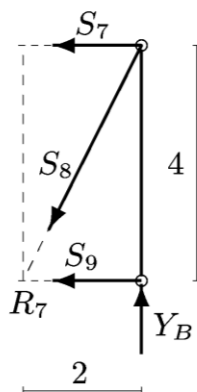


Рис.27

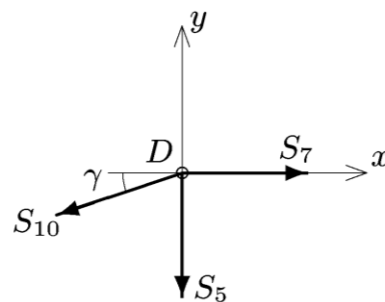


Рис.28

Зусилля більше нуля, отже, стрижень 4 розтягнутий. Зусилля в стрижні 5 методом Ріттера визначити не можливо - не існує перетину, що розділяє ферму на дві частини і перетинає при цьому три стрижня. У цьому полягає недолік методу. Тому скористаємося методом вирізання вузлів спільно з методом Ріттера. Знаходимо S_5 з умови рівноваги вузла D . До вузла підходять три стрижня з невідомими зусиллями. Один з них - S_7 легко знайти за методом Ріттера. Проводимо перетин II-II (рис. 24) і розглядаємо праву частину ферми (рис. 27). Для визначення S_7 складаємо рівняння моментів щодо точки Ріттера R_7 :

$$\sum M_{R_7} = S_7 \cdot 4 + Y_B \cdot 2 = 0.$$

Знаходимо $S_7 = -59.474$ кН. Зауважимо, що для визначення зусилля S_8 за методом Ріттера, необхідно скласти рівняння проєкцій на вісь y .

Вирізаємо вузол D і складаємо рівняння рівноваги (рис. 28):

$$\sum X_i = S_7 - S_{10} \cos \gamma = 0, \quad \sum Y_i = -S_5 - S_{10} \sin \gamma = 0.$$

Виключаючи S_{10} , знаходимо

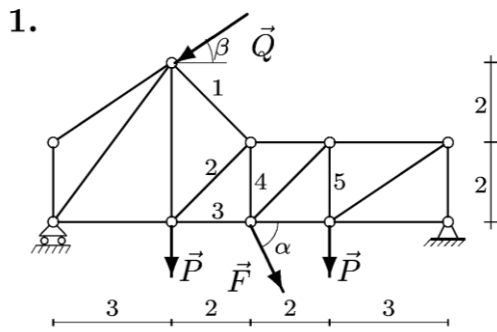
$$S_{10} = S_7 / \cos \gamma, \quad S_5 = -S_{10} \sin \gamma = -S_7 \operatorname{tg} \gamma = 19.825 \text{ кН}.$$

Результати розрахунків в кН занесемо в таблицю:

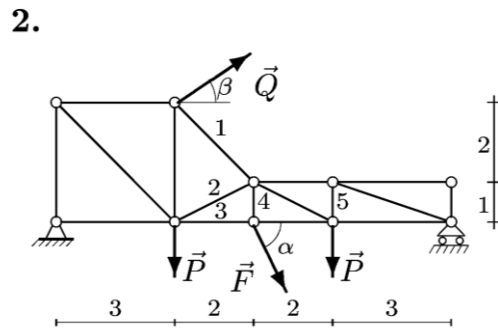
| X_A | Y_A | Y_B | S_1 | S_2 | S_3 | S_4 | S_5 |
|---------|--------|---------|---------|---------|---------|--------|--------|
| -60.433 | 81.827 | 118.948 | -83.854 | -40.584 | -130.04 | 31.128 | 19.825 |

6.2. Варіанти завдань №6 до курсової роботи

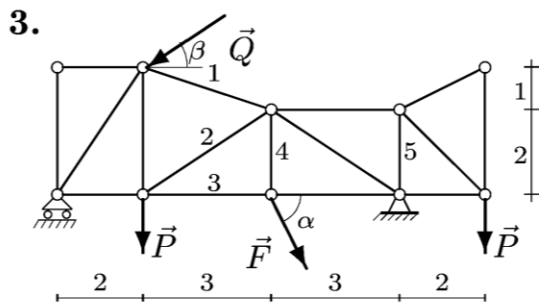
Плоска ферма спирається на нерухомий і рухливий шарніри. До вузлів ферми прикладено два вертикальні навантаження P і два похилі - Q і F . Розміри надані в метрах. Знайти зусилля в стрижнях 1-5.



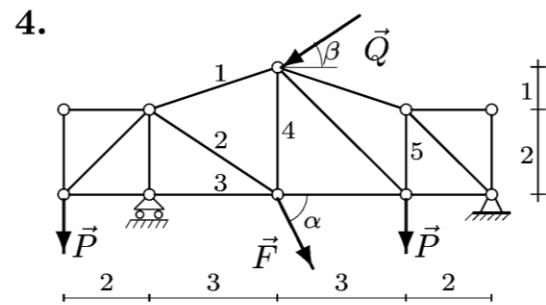
$$P = 2 \text{ кН}, Q = 9 \text{ кН}, F = 9 \text{ кН}, \\ \alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ.$$



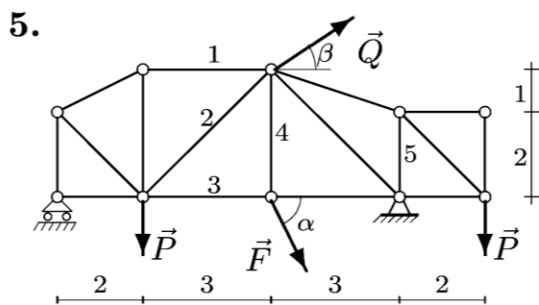
$$P = 2 \text{ кН}, Q = 8 \text{ кН}, F = 10 \text{ кН}, \\ \alpha = 60^\circ, \beta = 15^\circ.$$



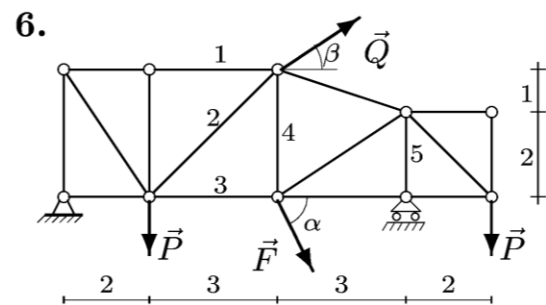
$$P = 3 \text{ кН}, Q = 7 \text{ кН}, F = 1 \text{ кН}, \\ \alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ.$$



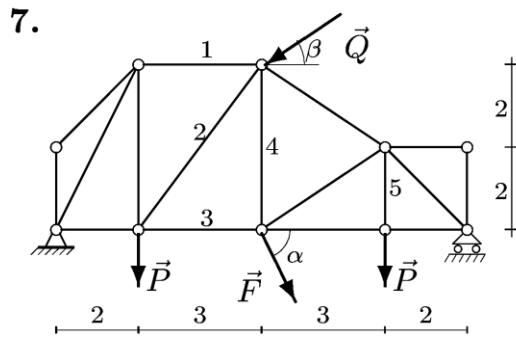
$$P = 4 \text{ кН}, Q = 4 \text{ кН}, F = 2 \text{ кН}, \\ \alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ.$$



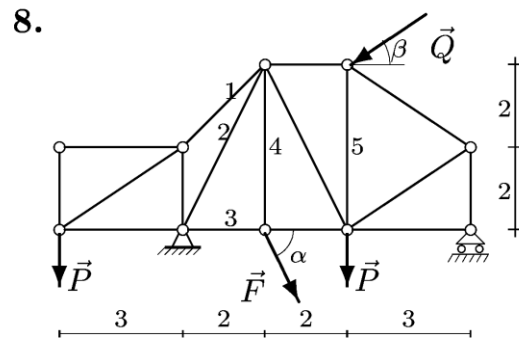
$$P = 5 \text{ кН}, Q = 5 \text{ кН}, F = 3 \text{ кН}, \\ \alpha = 45^\circ, \beta = 45^\circ.$$



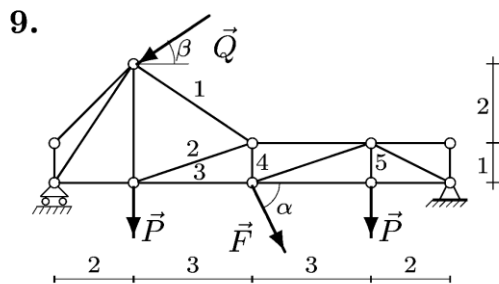
$$P = 6 \text{ кН}, Q = 6 \text{ кН}, F = 4 \text{ кН}, \\ \alpha = 45^\circ, \beta = 15^\circ.$$



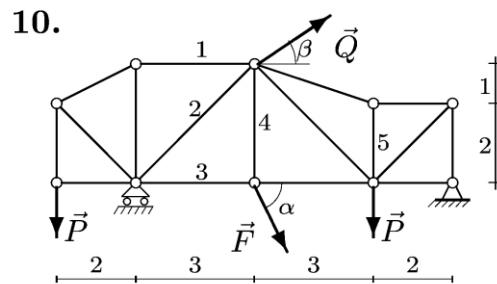
$P = 7 \text{ кН}, Q = 7 \text{ кН}, F = 5 \text{ кН},$
 $\alpha = 60^\circ, \beta = 15^\circ.$



$P = 8 \text{ кН}, Q = 3 \text{ кН}, F = 7 \text{ кН},$
 $\alpha = 30^\circ, \beta = 30^\circ.$



$P = 8 \text{ кН}, Q = 5 \text{ кН}, F = 20 \text{ кН},$
 $\alpha = 45^\circ, \beta = 30^\circ.$



$P = 3 \text{ кН}, Q = 6 \text{ кН}, F = 15 \text{ кН},$
 $\alpha = 45^\circ, \beta = 45^\circ.$

Відповіді до завдання 6:

| | Реакции опор, кН | | | Усилия в стержнях, кН | | | | |
|----|------------------|--------|--------|-----------------------|---------|--------|--------|---------|
| | X_A | Y_A | R_B | S_1 | S_2 | S_3 | S_4 | S_5 |
| 1 | 3.294 | 4.129 | 12.165 | -1.880 | -9.891 | 16.118 | 5.665 | -2.129 |
| 2 | -12.727 | 2.563 | 8.027 | -14.552 | -28.897 | 41.136 | 8.660 | 8.027 |
| 3 | 4.450 | 4.423 | 7.393 | 0.022 | 1.016 | 4.084 | 0.866 | -3.000 |
| 4 | 1.096 | 2.375 | 9.453 | -2.938 | 8.157 | -4.000 | -3.525 | 1.583 |
| 5 | -5.657 | 7.942 | 0.644 | -0.429 | 6.161 | -3.927 | 2.121 | -3.333 |
| 6 | -8.624 | 1.305 | 11.971 | -0.870 | 6.640 | 4.799 | -2.485 | -11.971 |
| 7 | 4.261 | 12.776 | 7.366 | -6.388 | -7.219 | 6.458 | 6.602 | 7.000 |
| 8 | -3.464 | 19.485 | 1.515 | 16.971 | -26.257 | 3.206 | 3.500 | -0.742 |
| 9 | -9.812 | 14.272 | 18.370 | -9.515 | -41.577 | 51.690 | 7.870 | 8.000 |
| 10 | -14.849 | 5.477 | 6.886 | 2.000 | -5.496 | 1.886 | 10.607 | -1.826 |

Попередження щодо типових помилок

1. Слід пам'ятати три основних властивості перетину Ріттера:

- Перетин ділить ферму на дві частини.
- Перетин перетинає рівно три стрижня.
- Перетин не проходить через шарніри.

Друга властивість має виключення. Існують ферми, які одним перетином можна розділити на дві, розсікаючи $N > 3$ стрижнів. При цьому для одного зі стрижнів існує точка Ріттера – точка перетину інших $N - 1$ стрижнів (подумайте, як виглядає така ферма).

2. Розглядаючи одну з частин розсіченої ферми, забудьте на час про існування іншої. Інакше в рівняння рівноваги ви можете випадково включити зовнішні сили або реакції опор відкинутої частини.

3. Не варто турбуватися, якщо точка Ріттера знаходиться на відрізаний частини, розташовується десь далеко або потрапляє на шарнір. Її положення може бути де завгодно.

4. В рівняння методу Ріттера (моментів або проекцій) має увійти тільки одне зусилля стержня ферми. У цьому основний зміст методу Ріттера. Дуже часто зустрічається така помилка. Складаючи рівняння, студент неправильно вибирає точку Ріттера або становить не те рівняння, наприклад, рівняння проекцій замість рівняння моментів. При цьому в рівняння крім одного невідомого зусилля входять і інші, раніше знайдені. В принципі, таке рівняння може бути і вірно, і відповідь вийде вірним, але це не метод Ріттера, де визначення зусиль проводиться незалежно одне від іншого, щоб уникнути накопичення помилок.

5. Положення точки Ріттера для кожного стержня не залежить від розглянутої частини. Однак ступінь складності рівняння моментів для різних частин ферми може істотно відрізнятись. Для більшої надійності рішення рівняння Ріттера (в формі рівняння моментів або рівняння проекцій) для однієї частини може служити перевірою для іншої.

ЗАВДАННЯ №7

7. Змістовний модуль №2 Опір матеріалів

7.1. Короткі теоретичні відомості. Поняття про розрахункові схеми

Опір матеріалів - це наука про міцність, жорсткість і стійкість окремих елементів конструкцій, споруд і машин. Методами опору матеріалів ведуться практичні розрахунки і визначаються необхідні (надійні) розміри деталей елементів інженерного конструкцій.

Основні положення опору матеріалів спираються на закони і теореми механіки і, в першу чергу, на закони статички, не повідомляючи яких вивчення даного предмета стає практично неможливим. На відміну від теоретичної механіки, опір матеріалів розглядає завдання, де найбільш істотними є

властивості тіл, що деформуються, а закони руху тіла, як жорсткого цілого, не тільки відступають на другий план, але в ряді випадків є просто не суттєвими.

Першу задачу курсу опору матеріалів становить викладання методів розрахунку елементів конструкцій на *міцність*. Під міцністю ми будемо розуміти здатність навантаженої конструкції чинити опір руйнуванню.

Другу задачу курсу опору матеріалів становить викладання методів розрахунку елементів конструкцій на *жорсткість*, тобто здатність елемента конструкції чинити опір деформаціям. І, нарешті, викладання методів розрахунку елемента конструкції на *стійкість* становить третю задачу курсу. Поняття стійкості може бути сформульовано таким чином: рівновага елемента стійка, якщо малій зміні навантаження відповідає мала зміна деформацій, і рівновага нестійка, якщо обмежене зростання навантаження супроводжується необмеженим ростом деформацій.

Поняття про розрахункові схеми

Необхідність довести рішення кожної практичної задачі до деякого числового результату змушує в опорі матеріалів вдаватися до спрощення, тобто до гіпотез - припущеннями, що виправдовуються надалі шляхом зіставлення розрахункових даних з експериментом.

Таким чином, приступаючи до розрахунку конструкції, слід перш за все встановити, що в даному випадку є істотним і що не суттєвим. Необхідно, як кажуть, зробити схематизацію об'єкту конструкції (рис. 29), тобто відкинути всі ті чинники, які не можуть помітним чином вплинути на роботу системи в цілому.

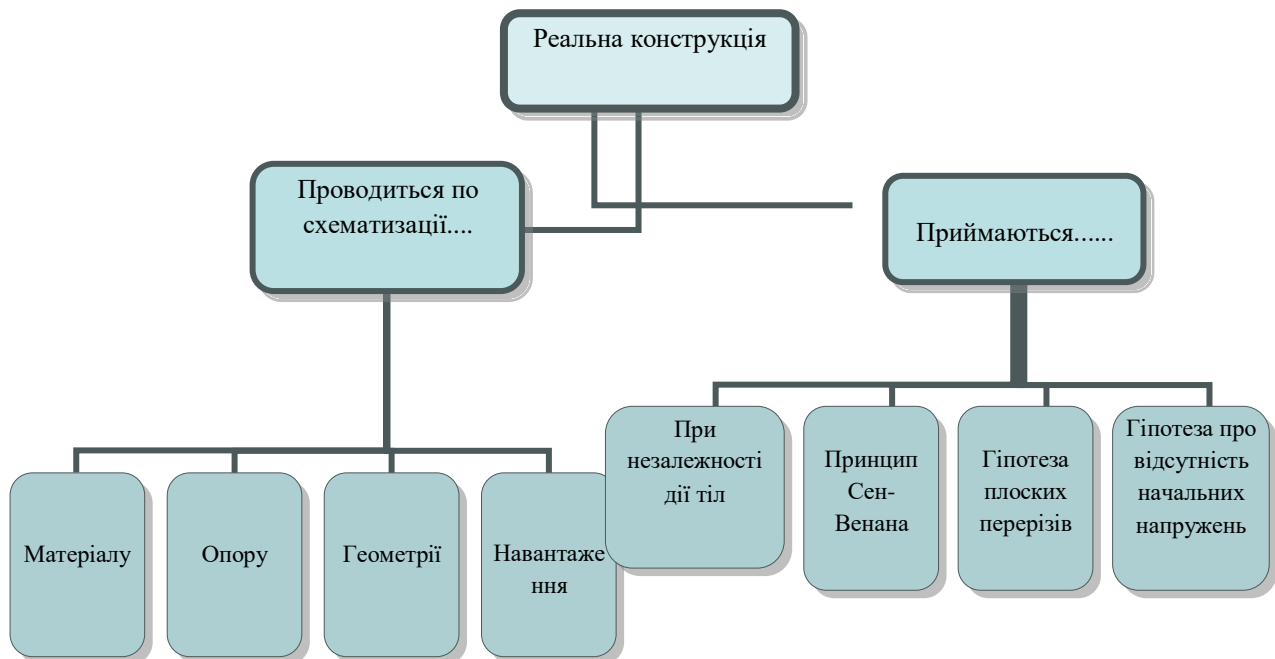


Рис. 29

Такого роду спрощення завдання вкрай необхідні, так як рішення з повним урахуванням усіх властивостей реального об'єкта є принципово неможливим в силу їх очевидної невичерпності. Реальний об'єкт, звільнений від несуттєвих ознак, носить назву *розрахункової схеми*.

Схематично процес отримання розрахункової схеми показаний на рис. 29. Зупинимося докладніше на окремих етапах процесу перетворення реальної конструкції в розрахункову схему.

Схематизація за матеріалом

Будемо вважати, що матеріал конструкції, що розраховується, однорідний, тобто його властивості не залежать від величини виділеного з тіла обсягу.

Вводиться поняття *суцільності середовища*, як середовища, що безперервно заповнює відведений їй обсяг. Внаслідок чого до суцільного середовища може бути застосований аналіз нескінченно малих.

Ці положення дозволяють не брати до уваги дискретну, атомістичну структуру речовини. Вони застосовуються навіть при розрахунку конструкцій з такого неоднорідного матеріалу, як бетон.

Матеріал *ізотропний*, тобто володіє в усіх напрямках однаковими властивостями. Це передумова використовується при вирішенні більшості завдань опору матеріалів, хоча для деяких матеріалів (дерево, залізо бетон, мідь, пластмаси та ін.) вона досить умовна. Матеріали, властивості яких в різних напрямках різні, називаються *анізотропними*.

Матеріал конструкції має властивість ідеальної пружності, тобто здатністю повністю відновлювати початкову форму і розміри тіла після зняття зовнішнього навантаження.

Ця передумова справедлива лише при нарузі, що не перевищують для даного матеріалу певної, постійної величини, званої межею пружності.

Передумова про ідеальну пружність матеріалу використовується при рішенні більшості завдань опору матеріалів.

Схематизація по геометрії окремих елементів конструкції

Основна увага в опорі матеріалів приділяється вивченню брусів, що є найбільш поширеним елементом багатьох конструкцій.

Брусом називається елемент, довжина якого значно більше його поперечних розмірів. *Віссю* бруса називається лінія, що з'єднує центри ваги його поперечних перерізів.

Плоска фігура, що має свій центр ваги на осі і нормальна до ній, називається його *поперечним перерізом*.

Брус з прямолінійною віссю часто називають стержнем (рис. 30, а). Елемент конструкції, довжина і ширина якого в багато разів перевищують його товщину, називається *оболонкою* (рис. 30, б).

Геометричне місце точок, рівновіддалених від зовнішньої і внутрішньої поверхонь оболонки, називається *серединною поверхнею*.

Оболонка, серединна поверхня якої являє собою площину, називається *пластинкою* (рис. 30, в).

Елемент конструкції, розміри якого в усіх напрямках мало відрізняються один від одного (наприклад, суцільна опора мосту), називається *масивним тілом* (рис. 30, г).

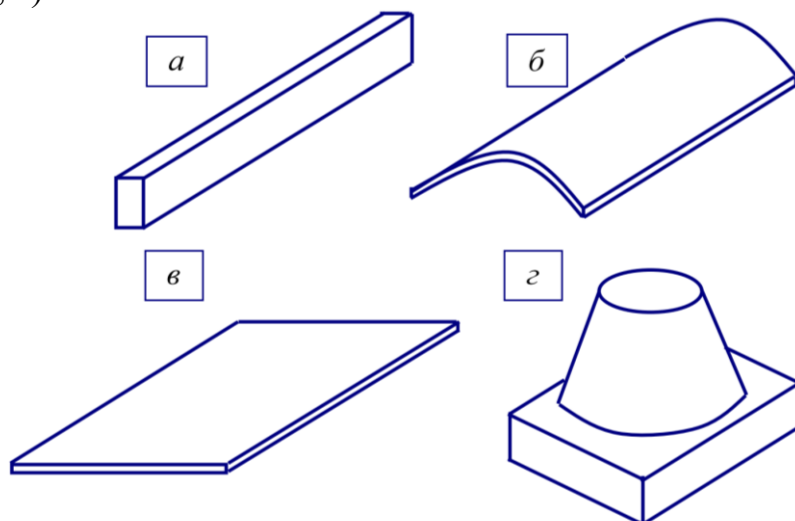


Рис.30

Схематизація по опорним пристроям

Для прикріплення споруди до основи служать опори, що забезпечують нерухомість опорних точок конструкції. Зазвичай в опорі матеріалів розглядають три основні типи опор: шарнірно рухома опора, шарнірно нерухома опора і жорстке защемлення.

На рис. 31, а зображена найпростіша схема пристрою шарнірно рухомої опори, а на рис. 31, б - її умовне зображення. рухома опора допускає обертання навколо осі, що проходить через центр шарніра k опори, і поступальне переміщення по лінії kl . У шарнірно рухомий опорі виникає реакція R_k , нормальна до напрямку переміщення ковзанок.

Шарнірно нерухома опора (рис. 31, в) забезпечує обертання верхнього балансира K навколо осі, що проходить через центр шарніра k , і не допускає лінійних переміщень. У розрахунковій схемі вона представляється двома опорними стержнями (рис. 31, г). У шарнірно нерухомій опорі виникає похила реакція, вертикальна і горизонтальна складові якої (R_k і H_k) показані на рис. 31, г.

Жорстке заземлення (рис. 31, д, е, ж) не допускає будь-яких лінійних переміщень і повороту. У затисканні виникають дві складові R_k , H_k і реактивний момент M_k (рис. 31, е). Жорстке заземлення еквівалентно трьом опорним стержням - рис. 31, з).

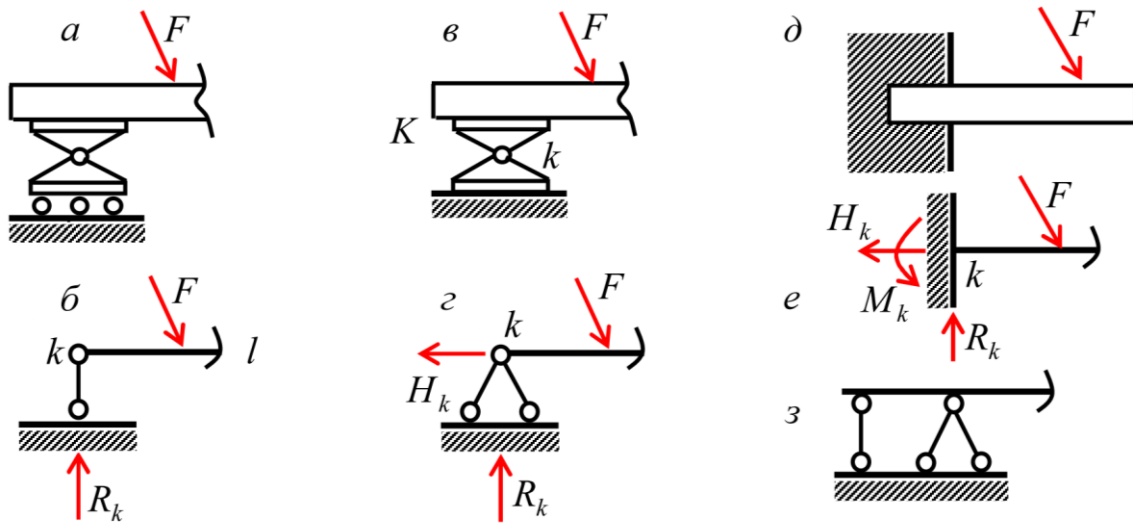


Рис.31

Схематизація по навантаженню

Розподілені навантаження можуть бути поверхневими (тиск вітру, води на стінку) або об'ємними (сила тяжіння, сили інерції). якщо тиск q_1 (Н/м²) передається на елемент конструкції через площадку, розміри якої дуже малі в порівнянні з розмірами всього елемента ($a \ll l$), то його на підставі принципу Сен-Венана (див. нижче) можна привести до зосередженої сили F (рис. 32).

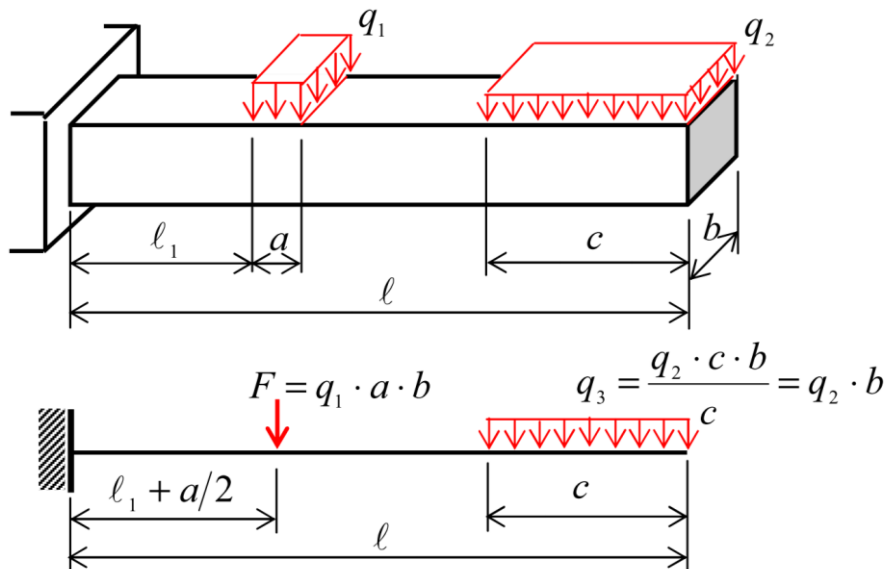


Рис.32

Зосереджена сила F вимірюється в ньютонах (Н), кілоньютонах (кН). Подібним чином вводяться поняття зосереджених згинальних і крутильних моментів. Якщо тиск q_2 (Н/м^2) передається на елемент конструкції через майданчик, розміри якого можна порівняти з розмірами всього елемента ($c < l$), то його представляють у вигляді розподіленого або погонного навантаження q_3 з розмірністю Н/м (рис. 31). На розрахунковій схемі замість бруса зображується його вісь. Навантаження, розподілені по лінії і зосереджені в точках, реально не існують. Їх можна отримати лише в результаті схематизації реальних навантажень, розподілених за обсягом (об'ємних сил) або по поверхні. Навантаження розрізняються не тільки за способом їх застосування (розподіленні і зосереджені), але також за тривалістю дії (постійні і тимчасові) і характером впливу на конструкцію (статичні і динамічні).

Постійні навантаження (наприклад, власна вага конструкції) діє протягом усього періоду експлуатації конструкції. Тимчасові навантаження (наприклад, вага поїзда) діють протягом обмеженого проміжку часу.

Статичними називаються навантаження, які змінюють свою величину або точку прикладання (або напрям) з дуже невеликою швидкістю, так що виникають при цьому ускореннями можна знехтувати.

Якщо прискорення значні і навантаження змінюється в часі з великою швидкістю, то ми маємо справу з динамічним навантаженням. Дія таких навантажень супроводжується виникненням коливань споруд. При цьому, згідно з другим законом Ньютона, виникають сили інерції, пропорційні масам і прискоренням, якими при розрахунку знехтувати не можна. Тимчасове навантаження може зберігати більш-менш постійну величину протягом всього періоду дії, а може безперервно змінюватися за деяким законом; в останньому випадку воно називається змінним навантаженням. Якщо змінне навантаження змінюється за циклічним законом, то воно називається *циклічним*. Якщо для одного об'єкта може бути запропоновано кілька розрахункових схем, то, з іншого боку, однією розрахунковою схемою може бути поставлено у відповідність багато різних реальних об'єктів.

Основні гіпотези про тіла, що деформуються

Для побудови теорії опору матеріалів приймаються деякі гіпотези і принципи відповідно до структури і властивостей матеріалів, характеру деформацій і напружень, а також діючих сил і геометрії конструкцій.

1. Гіпотеза про суцільність матеріалу. Тіло вважається суцільним, тобто неперервним до деформації залишається неперервним і після деформації (без порожнин, розривів).

2. Гіпотеза про однорідність і ізотропність матеріалу. При цьому вважають, що властивості тіла в будь-якій точці і в будь-якому напрямку однакові.

3. Гіпотези плоских перерізів. Плоскі перерізи, проведені в тілі до деформації, залишаються плоскими і після деформації. Вони залишаються нормальними до осі стержня в процесі деформації. Ця гіпотеза виправдовується дослідом в тому випадку, коли тіло має продовговату форму (стержень, брус).

4. Гіпотеза про Ідеальну пружність і лінійну залежність між напруженнями і деформаціями. Ідеальна пружність - здатність тіла, яке здобуло деформацію, після усунення причин, що спричиняли її, повністю відновити свою початкову форму.

5. Принцип Сен-Венана. В точках тіла, достатньо віддалених від місця прикладання зовнішніх сил, внутрішні зусилля (напруження) дуже мало залежать від способу прикладання цих сил. Такий принцип дозволяє замінити одну систему сил статично її еквівалентною (переміщення сил з верхньої частини балки на нижню, заміна зосередженої сили на групу розподілених і навпаки).

6. Принцип незалежності дії сил (суперпозиції). Ефект від суми впливу дорівнює сумі ефектів від окремого впливу. Згідно з цим принципом переміщення, напруження і деформації навантаженого тіла вважають незалежними від порядку прикладання сил.

Метод перерізів. Внутрішні сили. Напруження. Зовнішні навантаження та їх класифікація.

Зовнішніми називаються сили, що впливають збоку тіл, які не входять до даної системи. Зовнішні сили розподіляються на об'ємні і поверхневі.

Об'ємні сили розподілені за об'ємом тіла і прикладені до кожної його частинки (сила ваги, сила магнітного тяжіння).

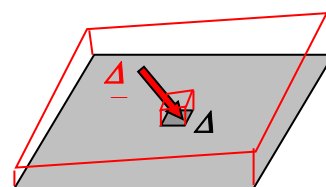


Рис.33

Поверхневі сили прикладені до ділянок поверхні (рис.33) і характеризують безпосередню контактну взаємодію даного об'єкта з навколишніми тілами. Вони можуть бути:

а) *безперервно розподілені по поверхні* (дія води на греблю чи дамбу, рух гусеничного трактора тощо). Інтенсивність вимірюється навантаженням, що припадає на одиницю площі;

б) *безперервно розподілені по лінії* (рис.34). Інтенсивність вимірюється навантаженням, що припадає на одиницю довжини, Н/м;

в) *зосереджені сили або моменти* (тиск, який передається на елемент конструкції через площадку, розміри якої малі в порівнянні з розмірами всього елемента.

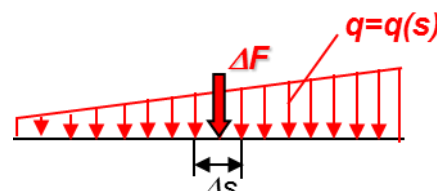


Рис. 34

Наприклад, сили тиску колони чи опори на перекриття, колеса вагона на рейки), Н або Н·м.

За характером впливу на споруди зовнішні сили діляться на статичні і динамічні. **Динамічне навантаження** швидко змінюється в часі (при русі рухомого складу, коливання, удар). При повільній зміні навантаження, можна знехтувати силами інерції і деформаціями, що виникають в об'єкті, і таке навантаження може умовно вважатися **статичним**.

За часом дії на споруди навантаження ділиться на **постійне** (вага несучих конструкцій будівлі, вага мостового полотна) і **тимчасове** (навантаження від рухомого складу, вітрове або снігове навантаження). Тимчасові навантаження регламентуються спеціальними документами (СНиП, ТУ).

До зовнішніх сил включаються і *реакції в'язів*, що доповнюють систему сил до рівнодіючої.

Внутрішні сили в поздовжніх перерізах брусу. Метод перерізів

Нехай стрижень навантажений будь-якою, але взаємно урівноваженою системою сил F_1, F_2, F_n (рис. 35).

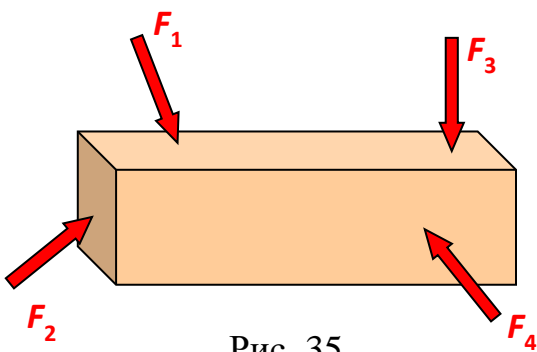


Рис. 35

При збільшенні цих сил може наступити момент, коли стрижень руйнуватиметься або його деформація стане дуже великою. Ці процеси можуть відбуватися тому, що в окремих місцях усередині стрижня виникають зусилля, величини яких досягають величин

Сил між молекулярного зчеплення. Отже, безпосередньою причиною руйнування є ті *внутрішні зусилля*, які

виникають в стрижні при дії заданих навантажень.

Величини внутрішніх зусиль визначаються методом перерізів, який називають також методом **РВЗВ** (за першими буквами слів).

Суть його полягає в наступному:

➤ **Розсікаємо** (у думках) стрижень за перерізом А, в якому слід визначити

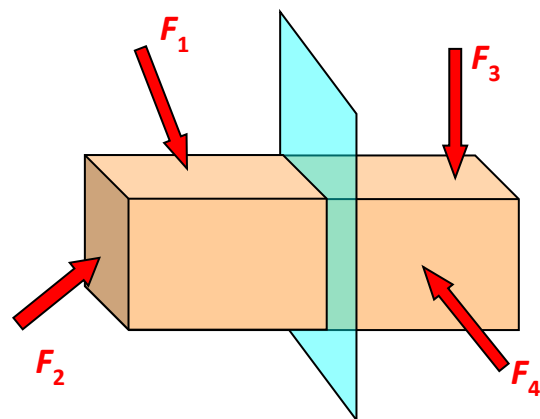


Рис. 36

величину внутрішніх зусиль (рис. 36). Зазвичай стрижень розсікають площиною перпендикулярною до осі стрижня.

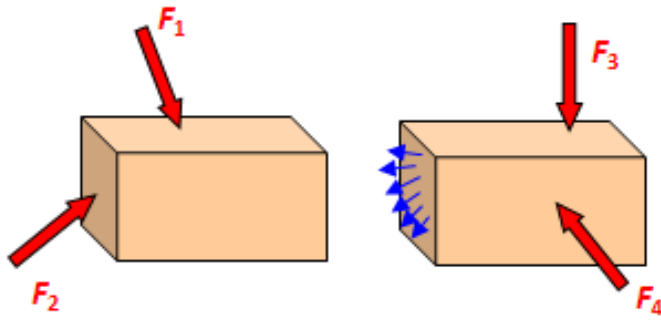


Рис. 37

Відкидаємо яку-небудь частину стрижня (зазвичай ту, до якої прикладено більше сил) і замінимо її дію на частину бруса, що залишилась, сукупністю реактивних сил,

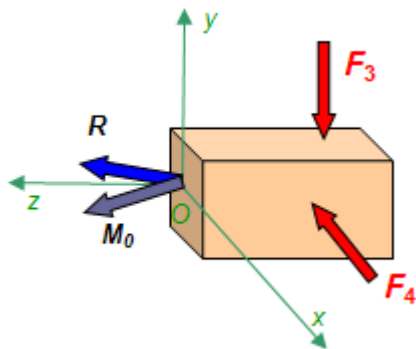


Рис. 38

розподілених деяким чином по поверхні поперечного перерізу (рис. 37).

➤ **Заміняємо** сили, що діють на частину, яка залишилась, головним вектором R і головним моментом M вибравши як центр приведення центр ваги поперечного перерізу (рис. 38).

➤ **Врівноважуємо** частину, що

залишилась, оскільки до розрізу стрижня вона знаходилася в рівновазі. Розкладемо головний вектор і головний момент на складові по осях x, y, z : R_x, R_y, R_z і M_x, M_y, M_z .

Спроектувавши головний вектор і головний момент внутрішніх сил на осі

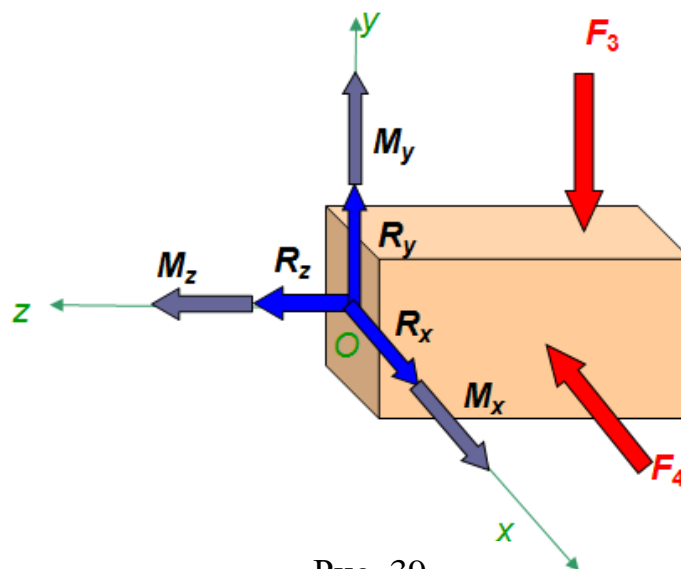


Рис. 39

x, y, z , одержимо шість внутрішніх силових факторів (рис. 39).

Отримані компоненти мають в опорі матеріалів спеціальні назви, що відповідають видам деформації (рис. 40):

$R_z = N$ - *повздожня сила*,

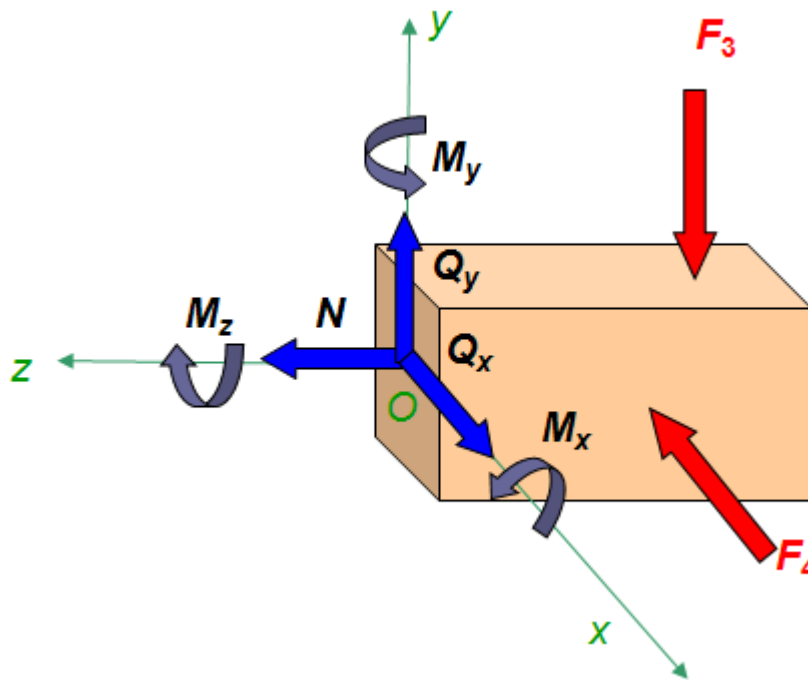


Рис. 40

$R_x = Q_x, R_y = Q_y$ - *поперечні сили*,

M_z - *крутний момент*,

M_x, M_y - *згинальні моменти*.

Цим чотирьом видам внутрішніх зусиль відповідають чотири види деформації стрижня:

1 Розтягування (або стискання), при якому в поперечних перерізах виникає тільки повздожня сила N .

2 Зсув, при якому в поперечних перерізах виникає тільки поперечна сила Q_x (або Q_y).

3 Згинання, при якому в поперечних перерізах виникає тільки M_x або M_y (чисте згинання). Якщо в поперечних перерізах виникає і поперечна сила Q , то такий вид згинання називається поперечним.

4 Кручення, при якому в поперечних перерізах виникає тільки крутний момент $M_z: M_z = M_{кр}$.

Напруження в перерізі.

Щоб охарактеризувати закон розподілу внутрішніх сил за перерізом, необхідно ввести міру їх інтенсивності. За таку міру береться **напруження**.

Напруження є результатом взаємодії частинок тіла при його вантаженні. Зовнішні сили прагнуть змінити взаємне розташування частинок, а виникаюче при цьому напруження перешкоджає зсуву частинок, обмежуючи його в більшості випадків деякою малою величиною.

Напруження - величина, що характеризує розподіл внутрішніх сил по перерізу.

Оскільки внутрішні зусилля представляють собою поверхневі сили, прикладені до поперечного перерізу залишеної частини, то інтенсивність цих сил, назване **повним напруженням**, визначається:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}$$

Розмірність цього напруження збігається з розмірністю поверхневого навантаження (Н/м^2 , $\text{МПа} = 10^6 \text{ Н/м}^2$).

Повне напруження

(рис. 41), як і рівнодіюча внутрішніх сил, прикладених на елементарній площадці, є векторною величиною і може бути розкладене на дві складові: перпендикулярне до розглядуваної площадки - **нормальне напруження** σ_n і дотичне до площадки - **дотичне напруження** τ_n .

Дотичне напруження, в свою чергу, може бути розкладено на дві складові, паралельні координатним осям x та y , пов'язаних з поперечним перерізом - τ_{nx} , τ_{ny} .

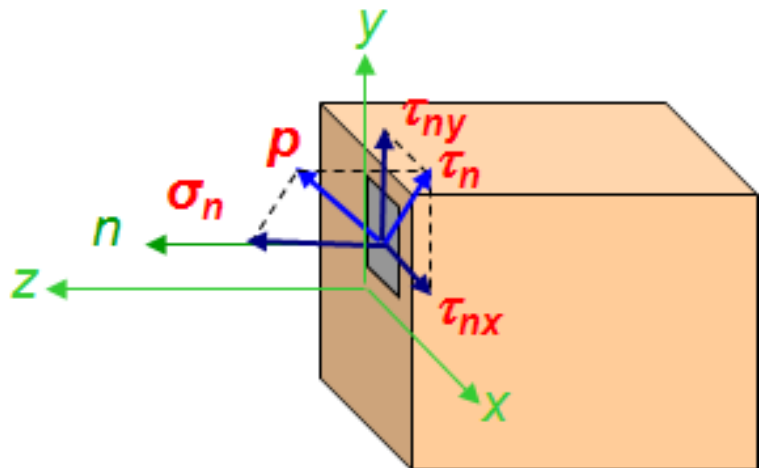


Рис. 41

Напруження має розмірність сили, що ділиться на площу ($\text{Н/м}^2 = \text{Па}$), або ($\text{МН/м}^2 = \text{МПа}$).

Рівнодіюча внутрішніх сил ΔR може бути розкладена на три складові: нормальну ΔN і дві дотичні ΔQ_x і ΔQ_y .

За їх допомогою можна визначити нормальне і дотичне напруження.

Нормальне напруження позначається σ і визначається за формулою:

$$\sigma = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta F}$$

Дотичне напруження τ_x і τ_y визначаються таким чином:

$$\tau_x = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_x}{\Delta F}; \quad \tau_y = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_y}{\Delta F}$$

Якщо через точку в тілі провести іншу січну площину, то повне напруження p набуде іншого значення.

Сукупність напружень, які діють по різних площадках, проведених через дану точку, називається напруженим станом в точці.

У результаті розрахунків потрібно одержати відповідь на питання, задовольняє чи ні конструкція тим вимогам надійності, які до неї висуваються.

Найбільш поширеним методом розрахунку елементів споруд на міцність є *розрахунок за допустимим напруженням*, при якому на підставі аналізу конструкції виявляється в тілі та точка, в якій виникає найбільше напруження. Останнє зіставляється з граничною величиною для даного матеріалу, і потім робиться висновок про міцність конструкції.

У деяких випадках використовується метод *розрахунку за руйнуючими навантаженнями*. У цьому методі шляхом розрахунку не визначається напруження, а знаходиться граничне навантаження, яке може витримати конструкція, не руйнуючись або не змінюючи істотно свою форму.

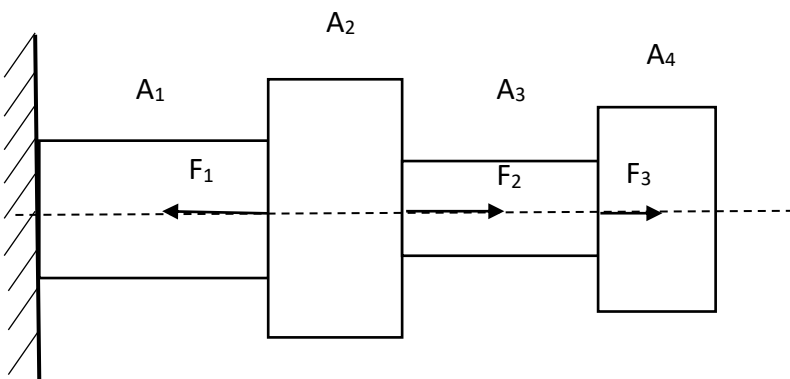
Граничне (що руйнує) навантаження зіставляється з тим, що діє, внаслідок чого робляться висновки про ступінь міцності конструкції в робочих умовах.

Методи розрахунку вибираються залежно від умов роботи конструкції і вимог, які до неї висуваються. Якщо необхідно добитися найменших змін форми конструкції, проводиться *розрахунок за переміщеннями, що допускаються (розрахунок на жорсткість)*. Це не виключає одночасної перевірки конструкції на міцність.

Опір матеріалів дає виклад практично прийнятних засобів для вирішення питань, пов'язаних з визначенням напружень, деформацій і переміщень

7.2. Варіанти завдань №7 до курсової роботи

Скласти епюри поздовжніх сил N_z і нормальних напружень σ , використовуючи метод перерізів. Зробити висновки, а саме – які деформації зазнають ділянки бруса (рисунок), визначити найбільш небезпечні ділянки.



| № варіанта | $A_1, \text{см}^2$ | $A_2, \text{см}^2$ | $A_3, \text{см}^2$ | $A_4, \text{см}^2$ | $F_1, \text{кН}$ | $F_2, \text{кН}$ | $F_3, \text{кН}$ |
|---------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|------------------|------------------|------------------|
| 1 | 8 | 10 | 6 | 5 | 30 | 25 | 15 |
| 2 | 5 | 5 | 5 | 5 | 15 | 10 | 15 |
| 3 | 10 | 8 | 6 | 4 | 24 | 12 | 18 |
| 4 | 8 | 6 | 5 | 4 | 48 | 36 | 12 |
| 5 | 12 | 10 | 8 | 6 | 25 | 15 | 15 |
| 6 | 8 | 5 | 6 | 4 | 35 | 30 | 15 |
| 7 | 10 | 8 | 5 | 6 | 25 | 10 | 20 |
| 8 | 6 | 8 | 5 | 4 | 20 | 30 | 10 |
| 9 | 4 | 8 | 5 | 6 | 40 | 25 | 20 |
| 10 | 5 | 6 | 8 | 4 | 40 | 30 | 40 |
| 11 | 8 | 4 | 5 | 6 | 30 | 25 | 10 |
| 12 | 8 | 6 | 5 | 8 | 45 | 35 | 15 |
| 13 | 10 | 5 | 6 | 8 | 20 | 10 | 15 |

A_1, A_2, A_3, A_4 - площі поперечного перерізу, см^2

F_1, F_2, F_3 – зовнішні сили, кН

7.3 Приклади вирішення завдання №7

Скласти епюри поздовжніх сил N_z і нормальних напружень σ , використовуючи метод перерізу. Зробити висновок, а саме, які деформації зазнають ділянки бруса, визначити найбільш небезпечні ділянки. (F – кН, A – см^2)

$$F_1 = 20$$

$$F_2 = 10$$

$$F_3 = 10$$

$$A_1 = 10$$

$$A_2 = 5$$

$$A_3 = 6$$

$$A_4 = 8$$

1. Проводимо межі ділянок, нумеруємо римськими цифрами, від вільного кінця.
2. Визначаємо значення поздовжньої сили:

$$N_z = \sum F_i$$

$$N_{z_I} = 0$$

$$N_{z_{II}} = \vec{F}_3 = 15 \text{кН}$$

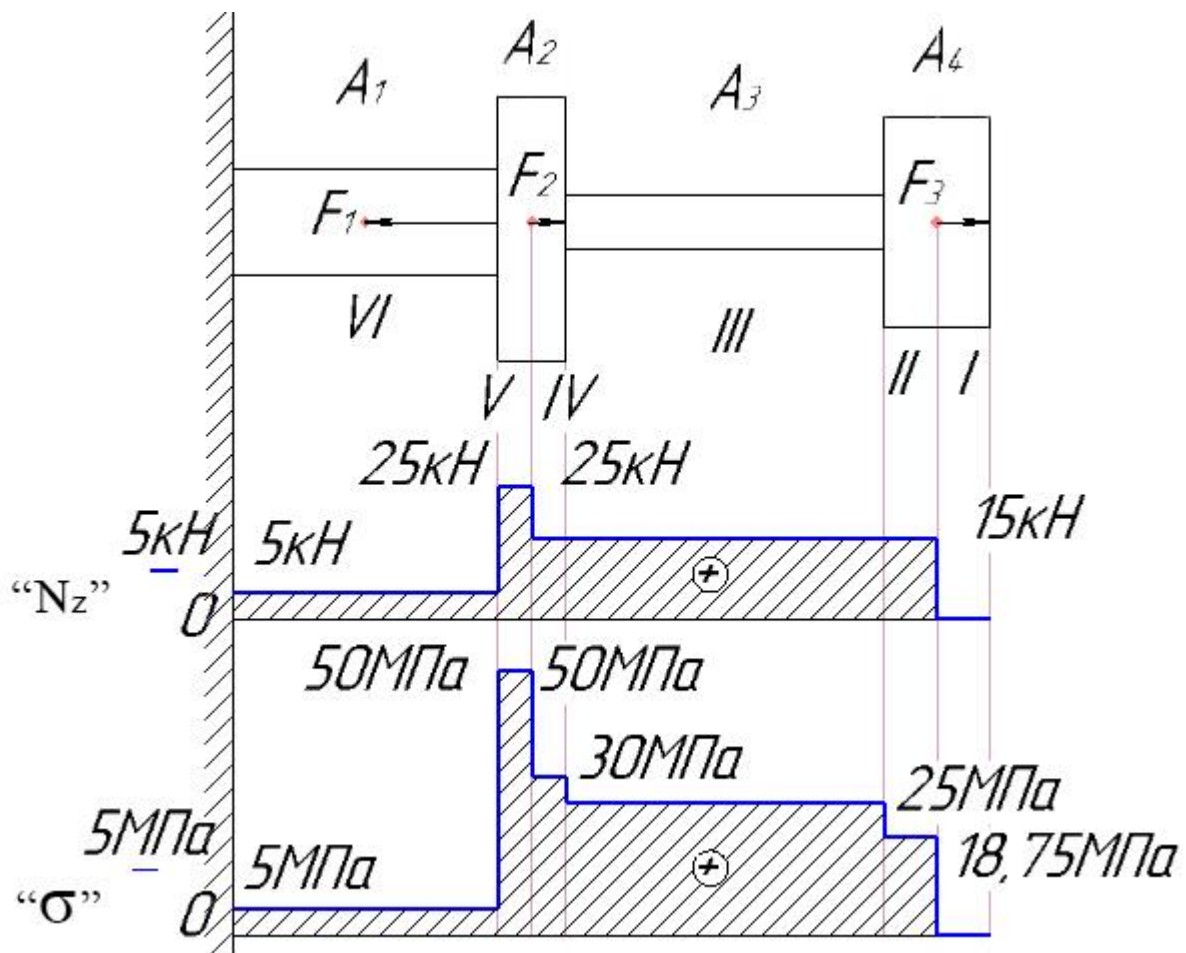
$$N_{z_{III}} = \vec{F}_3 = 15 \text{кН}$$

$$N_{z_{IV}} = \vec{F}_3 = 15 \text{кН}$$

3.

$$N_{z_V} = \vec{F}_3 + \vec{F}_2 = 25 \text{кН}$$

$$N_{z_{VI}} = \vec{F}_3 + \vec{F}_2 - \vec{F}_1 = 5 \text{кН}$$



4. Визначаємо значення нормальних напружів $\sigma = \frac{N_z}{A} = [\text{МПа}] = [\text{Н/мм}^2]$

$$\sigma_I = \frac{N_{zI}}{A_4} = 0$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_{zII}}{A_4} = \frac{15 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^2} = 18,75 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_{zIII}}{A_3} = \frac{15 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^2} = 25 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{IV} = \frac{N_{zIV}}{A_2} = \frac{15 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^2} = 30 \text{ МПа}$$

$$\sigma_V = \frac{N_{zV}}{A_2} = \frac{25 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^2} = 50 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{VI} = \frac{N_{zVI}}{A_1} = \frac{5 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^2} = 5 \text{ МПа}$$

Відповідь 1: Вище базової лінії лежить ділянка з II по VI, вони зазнають розтягування. Ділянка №I не зазнає ніяких деформацій.

Відповідь 1: На основі епюри нормальних напружень, найбільш небезпечна є ділянка №V, так як має максимальне значення 50 Мпа, на цій ділянці існує вірогідність розриву (достовірну відповідь можна дати тільки знаючи матеріал, з якого виконано брус).

8.Вимоги до оформлення курсової роботи

При виконанні курсової роботи необхідно дотримуватись наступних вимог:

1. Завдання вибирати і виконувати згідно з номером варіанту. В іншому випадку робота повертається без перевірки і КР вважається не зарахованою;
2. Студенти усіх форм навчання виконують завдання на листах А4 згідно з ДСТУ 3008:2015 (зразок заповнення титульної сторінки додається).
3. Вирішення кожного нового завдання починається з нової сторінки незалежно від того, де закінчено вирішення попереднього. Вказується номер завдання, умова. Потім зображується рисунок, що виконується в суворій відповідності з умовою завдання, при цьому геометричні та силові параметри повинні відповідати цим умовам. Рисунок має бути читким. Необхідно обов'язково показати всі вектори сил і навантажень, моменти сил, лінійні розміри, кути нахилу, осі координат та ін.
4. Робота має містити обов'язкові розділи (послідовність не змінюється), а саме титульна сторінка, листок завдання на КР, зміст, основна частина, список використаної літератури.
5. Кожне завдання підлягає захисту та зарахуванню.

Черкаський державний технологічний університет
(повне найменування вищого навчального закладу)
Приладобудування, мехатроніки та комп'ютеризованих технологій
(повна назва кафедри, циклової комісії)

КУРСОВА РОБОТА

з дисципліни «Теоретична та прикладна механіка з КР»
(назва дисципліни)
Варіант 1

Студента _____ курсу _____ групи

Спеціальність _____

Глушко Наталії Володимирівни

(прізвище та ініціали)

Керівник к.т.н доцент Кісіль Т.Ю

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

Національна шкала _____

Кількість балів: _____

Оцінка: ECTS _____

Члени комісії _____ Бондаренко Ю.Ю.
(підпис) (прізвище та ініціали)

_____ Гальченко В.Я.
(підпис) (прізвище та ініціали)

_____ Кісіль Т.Ю.
(підпис) (прізвище та ініціали)

м. Черкаси- 2018 рік

Рекомендована література

1. Кирсанов М.П. Теоретическая механика: Решебник / Под ред. А.И. Кириллова. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 384 с.
2. Манжосов В.К., Новикова О. Д. Задания для самостоятельной работы по теоретической механике. Кинематика: Методические указания. - Ульяновск: УлГТУ, 2009. - 80 с.
3. Рындина Т.В., Толмачев В.Н. Статика. Плоская и пространственная системы сил: Задания для проведения контроля знаний по теоретической механике. - Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2009. - 24 с.
4. Терминология и рекомендуемые обозначения величин. Теоретическая механика: метод. указ. / сост.: В.И. Галаев. - Тамбов: Издательство ТГТУ, 2010. - 32 с.
5. Тихонов А.А. Векторная алгебра - язык современной механики: учебное пособие / ГОУ ВПО СПбГТУРП. - СПб., 2008. - 30 с.
6. Черняховская Л.Б., Шабанов Л.А. Плоскопараллельное движение твердого тела: Учебное пособие. - Самара: СамГТУ, 2008. - 36 с.
7. Шорохов А.В. Кинематика: Учебное пособие. - Саранск: Изд-во Мордовского университета. 2010. - 52 с.
8. Лекции по устойчивости стержневых систем: методические указания для магистров, обучающихся по направлению 27010068 "Строительство" по программе "Теория и проектирование зданий и сооружений" / составитель А. А. Битюрин. - Ульяновск: УлГТУ, 2011. - 63 с.
9. Яковенко Г.Н. Краткий курс теоретической механики: учебное пособие. - 2-е изд., испр. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. - 116 с.: ил.
10. Сидорчук В.К., Петренко А.К. Растяжение-сжатие: Учебное пособие / РХТУ им. Д.И. Менделеева, Новомосковский институт. - Новомосковск, 2003. - 56 с.
11. Техника построения эпюр на стержнях, балках и рамах. Ч. 1: Методические указания к практическим и самостоятельным занятиям по курсу "Сопротивление материалов / Сост. А.А. Снежин. - Ульяновск: УлГТУ, 2011. - 85 с.
12. Кауров П.В., Шемякин Э.В. Определение геометрических характеристик плоских фигур: учебно-методическое пособие. - ГОУ ВПО СПбГТУРП. - СПб., 2006. - 48 с.
13. Гафаров Р.Х. Сопротивление материалов: конспект лекций / Р.Х. Гафаров; Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. - Уфа: УГАТУ, 2009. - 220 с.
14. Гребенюк Г.И., Валиев Ф.С., Яньков Е.В. Определение внутренних усилий в поперечных сечениях стержней: Методические указания по сопротивлению материалов. - Новосибирск: НГАСУ, 2003. - 49 с.