

**ISSN 2078-4481**

Міністерство освіти і науки України  
Херсонський національний технічний університет

# **ВІСНИК**

**Херсонського національного  
технічного університету**

**2(69)**

**частина 3**

Рекомендовано до друку Вченою радою  
Херсонського національного технічного університету  
(протокол № 7 від 5 липня 2019 року)

---

Журнал включено до Переліку наукових фахових видань України  
(наказ Міністерства освіти і науки України від 11.07.2016 №820), у яких можуть  
публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів  
доктора та кандидата технічних наук

Журнал включено до наукометричних баз, електронних бібліотек та репозитаріїв:  
Google Scholar, National Library of Ukraine (Vernadsky),  
РИНЦ (eLibrary)

**Херсон 2019**

## Редакційна рада

### Головний редактор

Литвиненко В.І.

д.т.н., професор,

завідувач кафедри інформатики і комп'ютерних наук

### Відповідальний секретар

Дяченко Л.М.

начальник навчально-наукового відділу

## Редакційна колегія

Баганов Є.О.

Букетов А.В.

Дімітрова В.Я. (Болгарія)

Жарікова М.В.

Зайцева О.І.

Коган О.Г. (Білорусь)

Куник О.М.

Партицький С. (Польща)

Повстяной В.М.

Савіна Г.Г.

Сарібекова Д.Г.

Сарібекова Ю.Г.

Семешко О.Я.

Сошко В.О.

Сошко О.І.

Хрущ Н.А.

Чурсіна Л.А.

Шарко М.В.

Шерстюк В.Г.

к.т.н., доцент

д.т.н., професор

д.н., доцент

к.т.н., доцент

к.е.н., доцент

д.т.н., професор

к.т.н., старший викладач

д.с.н., професор

к.х.н., доцент

д.е.н., професор

д.т.н., професор

д.т.н., професор

к.т.н., с.н.с.

к.т.н., доцент

д.т.н., професор

д.е.н., професор

д.т.н., професор

д.е.н., професор

д.т.н., професор

**ISSN 2078-4481**

Министерство образования и науки Украины  
Херсонский национальный технический университет

# **ВЕСТНИК**

**Херсонского национального  
технического университета**

**2(69)**

**часть 3**

Рекомендовано к печати Ученым советом  
Херсонского национального технического университета  
(протокол № 7 от 5 июля 2019 года)

---

Журнал включен в Перечень научных специализированных изданий Украины  
(приказ Министерства образования и науки Украины от 11.07.2016 №820),  
в которых могут публиковаться результаты диссертационных работ на соискание  
ученых степеней доктора и кандидата технических наук

Журнал включен в наукометрические базы, электронные библиотеки и репозитории:  
Google Scholar, National Library of Ukraine (Vernadsky),  
РИНЦ (eLibrary),

**Херсон 2019**

## Редакционный совет

### Главный редактор

Литвиненко В.И.

д.т.н., профессор,

заведующий кафедрой информатики и компьютерных наук

### Ответственный секретарь

Дяченко Л.Н.

начальник учебно-научного отдела

## Редакционная коллегия

Баганов Е.А.

к.т.н., доцент

Букетов А.В.

д.т.н., профессор

Димитрова В.Я. (Болгария)

д.н., доцент

Жарикова М.В.

к.т.н., доцент

Зайцева Е.И.

к.э.н., доцент

Коган А.Г. (Беларусь)

д.т.н., профессор

Куник А.Н.

к.т.н., старший преподаватель

Партицкий С. (Польша)

д.с.н., профессор

Повстяной В.М.

к.х.н., доцент

Савина Г.Г.

д.э.н., профессор

Сарибекова Д.Г.

д.т.н., профессор

Сарибекова Ю.Г.

д.т.н., профессор

Семешко О.Я.

к.т.н., с.н.с.

Сошко А.И.

д.т.н., профессор

Сошко В.А.

к.т.н., доцент

Хрущ Н.А.

д.э.н., профессор

Чурсина Л.А.

д.т.н., профессор

Шарко М.В.

д.э.н., профессор

Шерстюк В.Г.

д.т.н., профессор



**ISSN 2078-4481**

Ministry of Education and Science of Ukraine  
Kherson National Technical University

**VISNYK**

**of Kherson National  
Technical University**

**2(69)**

**part 3**

Recommended for publication by the Academic Council of  
Kherson National Technical University  
(minutes № 7 on 5th July 2019)

---

The journal is included in the List of scientific professional publications of Ukraine  
(Order №820 of the Ministry of Education and Science of Ukraine dated 11 July 2016) where  
the results of the theses of Doctor and Candidate of Engineering Science can be published

The journal is included in the scientometric bases, electronic libraries and repositories:  
Google Scholar, National Library of Ukraine (Vernadsky),  
RSCI (eLibrary)

**Kherson 2019**

## Editorial Board

### Editor-in-Chief

Litvinenko V.I.

Doctor of Engineering Science, Professor

Head of the Department of Informatics and Computer Science

### Executive Secretary

Dyachenko L.N.

Head of Academic and Scientific Department

## Members of Editorial Board

**Baganov Ye.A.**

Ph.D., Associate Professor

**Buketov A.V.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Dimitrova V.Ya.** (Bulgaria)

Ph.D., Associate Professor

**Zharikova M.V.**

Ph.D., Associate Professor

**Zaitseva E.I.**

Ph.D., Associate Professor

**Kogan A.G.** (Belarus)

Doctor of Engineering Science, Professor

**Kunik A.N.**

Ph.D., Senior Lecturer

**Partitsky S.** (Poland)

Doctor of Social Sciences, Professor

**Povstyanoy V.M.**

Ph.D., Associate Professor

**Savina G.G.**

Doctor of Economics, Professor

**Saribekova D.G.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Saribekova Yu.G.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Semeshko O.Ya.**

Ph.D., Senior Researcher

**Soshko A.I.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Soshko V.A.**

Ph.D., Associate Professor

**Khrushch N.A.**

Doctor of Economics, Professor

**Chursina L.A.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Sharko M.V.**

Doctor of Economics, Professor

**Sherstyuk V.G.**

Doctor of Engineering Science, Professor

## ЗМІСТ

## ФУНДАМЕНТАЛЬНІ НАУКИ

<b>Г.С. АБРАМОВ, В.В. ЧЕРНЯВСЬКИЙ, В.М. КУКЛІН</b> ПРО ПРИРОДУ ВИНИКНЕННЯ І ЕВОЛЮЦІЇ АНОМАЛЬНО ВИСОКИХ ХВИЛЬ В ОКЕАНІ .....	11
<b>О.О. АРШАВА, А.П. ХАРЧЕНКО, О.В. БАБАЄВА</b> СТАТИСТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ВЛАСОВА-ЕЙЛЕРА .....	20
<b>М.Г. БЕРДНИК</b> МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ І МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛООБМІНУ ОДНОПОРОЖНИННОГО ГІПЕРБОЛОЇДА ОБЕРТАННЯ ..	28
<b>Ю.В. БРАЗЛУК, О.І. ГУБІН, Є.О. ДІДІНСЬКА, Д.В. ЄВДОКИМОВ</b> ПРО ОДИН ВИПАДОК ТЕЧІЇ ПУАЗЕЙЛЯ .....	37
<b>В.О. ВАХНЕНКО</b> ПЕТЛЕПОДІБНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЛЯ ДЕЯКИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ .....	46
<b>Т.Г. ВОЙТІК, Г.С. ПОЛСТАЄВ, С.А. ЯЦЕНКО</b> СПЕЦІАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ СПОРІДНЕНИХ ЗАДАЧІ РІМАНА-ГІЛЬБЕРТА-ПРИВАЛОВА РІВНЯНЬ З ВЗАЄМНО ЗВОРОТНИМИ РАЦІОНАЛЬНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ .....	53
<b>В.І. ДУБИНКО, О.С. МАЗМАНШВІЛІ, Д.В. ЛАПТЄВ</b> ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТУНЕЛЮВАННЯ ЧАСТИНКИ В ДВОХ'ЯМНОМУ ПОТЕНЦІАЛІ .....	62
<b>Т.С. КАГАДІЙ, О.В. БІЛОВА, І.В. ЩЕРБИНА</b> ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ МАЛОГО ПАРАМЕТРУ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ В'ЯЗКОПРУЖНОСТІ .....	69
<b>О.С. МАЗМАНШВІЛІ, Г.Ю. СИДОРЕНКО</b> ЗАСТОСУВАННЯ РЕВЕРСНИХ ФУНКЦІЙ В ЗАДАЧІ ПРО РОЗПОДІЛ ІМОВІРНостей ВИПАДКОВОГО ФУНКЦІОНАЛА-ЗГОРТКИ ВІД НОРМАЛЬНОГО МАРКІВСЬКОГО ПРОЦЕСА .....	76
<b>О.А. НАЗАРЕНКО, А.О. СТЕХУН</b> ВИВЧЕННЯ ВПЛИВУ ХВИЛІ КРУЧЕННЯ НА ЖОРСТКИЙ СФЕРИЧНИЙ ДЕФЕКТ В ПРУЖНОМУ ОДНОРІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ .....	83
<b>А.Н. ХОМЧЕНКО, О.І. ЛИТВИНЕНКО, І.О. АСТІОНЕНКО</b> ЙМОВІРНІСНІ МОДЕЛІ У НЕЙМОВІРНІСНИХ ЗАДАЧАХ .....	88

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ І  
ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ І ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

<b>С.Г. БЛАЖЕВСЬКИЙ</b> МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОГО ТЕРМОПРУЖНОГО ПОЛЯ У ДВОВИМІРНОМУ СИМЕТРИЧНОМУ ПРОСТОРІ .....	93
<b>О.М. ВАСИЛЬЄВ, І.В. ВАСИЛЬЄВА</b> ОСОБЛИВОСТІ СТВОРЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ У ЛІНГВІСТИЦІ .....	99
<b>С.І. ВЯТКІН, А.Н. РОМАНЮК, О.М. РЕЙДА, О.О. ЯКОВЕНКО</b> ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ТРИВИМІРНИХ ОБ'ЄКТІВ З ВИКОРИСТАННЯМ АНАЛІТИЧНОГО ЗАВДАННЯ ОСВІТЛЕННЯ НАВКОЛИШНЬОГО СЕРЕДОВИЩА .....	106
<b>О.П. ДЕМ'ЯНЧЕНКО, В.П. ЛЯШЕНКО</b> ТЕПЛОВА УМОВА СПРЯЖЕННЯ У ДВОШАРОВІЙ ОБЛАСТІ .....	112
<b>А.О. КАРПІК, Ю.С. ВОРОБІЙОВ</b> АНАЛІЗ НАПРУЖЕНЬ ЛОПАТКИ КОМПРЕСОРА ПІД ДІЄЮ ПОВЕРХНЕВОГО РОЗПОДІЛЕНОГО ТИСКУ НА ОСНОВІ ГАЗОДИНАМІЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПОТОКУ .....	118
<b>П.В. КАШТАЛЬЯН</b> МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ СУДНО-ХОДОВОЙ МОСТИК .....	123
<b>Л.І. КОРОТКА, Є.А. КОРОТКА</b> ЗАСТОСУВАННЯ ЕВРИСТИЧНИХ АЛГОРИТМІВ В ЗАДАЧАХ МАРШРУТИЗАЦІЇ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ .....	134
<b>О.М. ЛЕНЮК, О.М. НІКІТІНА, М.І. ШИНКАРИК</b> МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ БЕССЕЛЯ-ЕЙЛЕРА НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ .....	140
<b>О.В. МАЧУЛЯНСЬКИЙ, Б.Б. БАБИЧ, В.О. МАЧУЛЯНСЬКИЙ</b> АПРОКСИМАЦІЙНІ МОДЕЛІ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ СИСТЕМ З НАНОКОМПЗИТНИМИ КОМПОНЕНТАМ .....	145
<b>В.О. ПОЛЯКОВ, М.М. ХАЧАПУРИДЗЕ</b> МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ МАГНІТОЛЕВІТУЮЧОГО ПОЇЗДА: РАЦІОНАЛІЗАЦІЯ ВИКОРИСТАННЯ .....	151
<b>В.О. РОМАНОВ, І.С. ЧУРИЛОВИЧ, О.О. БРОВАРЕЦЬ</b> НЕОБХІДНІСТЬ ІНФОРМАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ ВИОКРЕМЛЕННЯ ТА ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЗОН НЕОДНОРІДНОСТІ АГРОБІОЛОГІЧНОГО СТАНУ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ УГІДЬ НА КОСМІЧНИХ ЗНІМКАХ З ВИКОРИСТАННЯМ ВАЛІДАЦІЇ ДАНИХ СУПУТНИКОВОГО ТА НАЗЕМНОГО МОНІТОРИНГУ .....	158

<b>А.В. СОХАЦЬКИЙ, М.С. АРСЕНЮК</b> ЗАСТОСУВАННЯ ОСЕРЕДНЕНИХ ЗА РЕЙНОЛЬДСОМ РІВНЯНЬ НАВ'Є-СТОКСА ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ АЕРОДИНАМІКИ ТРАНСПОРТНОГО ЗАСОБУ MAGLEV .....	165
<b>С.В. ТАРАСОВ, Д.О. РЕДЧИЦЬ, А.С. ТАРАСОВ, С.В. МОІСЕСЕНКО</b> МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ОБТІКАННЯ СИМЕТРИЧНИХ І НЕСИМЕТРИЧНИХ ПРОФІЛІВ .....	172
<b>Н.К. ТИМОФІЄВА</b> МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В КОМБІНАТОРНІЙ ОПТИМІЗАЦІЇ ...	179
<b>А.В. УСОВ, Ю.Є. СІКІРАШ</b> МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В ОБ'ЄКТАХ, ЩО ЗАЗНАЮТЬ ТЕПЛОВОГО ВПЛИВУ .....	185
<b>О.В. ЧОПОРОВА, С.В. ЧОПОРОВ, А.О. ЛІСНЯК</b> ВИКОРИСТАННЯ МАШИННОГО НАВЧАННЯ ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КВАДРАТНОЇ ПЛАСТИНКИ .....	192
<b>Г.Г. ШВАЧИЧ, Б.І. МОРОЗ, І.М. УДОВИК, С.Д. ПРИХОДЧЕНКО</b> РОЗПОДІЛЕНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ ВЕКТОРІВ РОЗВ'ЯЗКІВ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ .....	202
<b>Г.Г. ШВАЧИЧ, І.А. ПОБОЧИЙ, О.В. ІВАЩЕНКО, Л.Ф. СУШКО</b> МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОФІЗИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛІВ ОБЕРНЕНИМИ МЕТОДАМИ .....	210
<b>А.Г. ШПОРТА, Т.С. КАГАДІЙ</b> МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЗАДАЧАХ ЕЛЕКТРОПРУЖНОСТІ .....	216
<b>Е.В. ШВЕЦОВА, В.Н. ШУТЬ</b> АЛГОРИТМ СОСТАВЛЕНИЯ ПЛАНА ПЕРЕВОЗОК НА ГОРОДСКИХ ЛИНИЯХ В ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ БЕСПИЛОТНЫМИ ТРАНСПОРТНЫМИ СРЕДСТВАМИ .....	222

## **ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРИЯ ТА КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ**

<b>А.С. БОГАЦЬКА, Д.В. ВОРОНЦОВА, А.О. ДАШКЕВИЧ</b> 3D РЕКОНСТРУКЦІЯ ПАМ'ЯТНИКА АРХІТЕКТУРИ НА ОСНОВІ НАБОРІВ ФОТОГРАФІЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ .....	231
<b>О.Ю. БРАЛОВ, В.І. ПАНЧЕНКО</b> АНАЛІТИЧНА ОСНОВА ГЕОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ ВИМІРЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ НЕДОСЯЖНОЇ ТОЧКИ .....	237
<b>В.В. ВАНІН, Г.А. ВІРЧЕНКО, А.Й. НЕЗЕНКО</b> ДЕЯКІ ПИТАННЯ ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХНІ КРИЛА ЛІТАКА ПРОТЯГОМ ЖИТТЄВОГО ЦИКЛУ ВИРОБУ ...	244
<b>О.В. ВОРОНЦОВ, Л.О. ТУЛУПОВА, І.В. ВОРОНЦОВА</b> ВИЗНАЧЕННЯ АПЛІКАТ ВНУТРІШНІХ ВУЗЛІВ ДИСКРЕТНИХ КАРКАСІВ ПОВЕРХОНЬ ПАРАЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСУ ЯК СУПЕРПОЗИЦІЙ ЗАДАНИХ АПЛІКАТ ОПОРНОГО КОНТУРУ .....	249
<b>О.М. ГУМЕН, О.О. ЛЕБЕДЄВА</b> ДОСЛІДЖЕННЯ ЧОРНОТИ ПОВЕРХНІ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ РОЗПОДІЛУ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ ВИРОБНИЧОГО ПРИМІЩЕННЯ ...	254
<b>В.М. КОМЯК, О.М. ДАНІЛІН, В.В. КОМЯК, С.С. ГОВАЛЕНКОВ, К.Т. КЯЗІМОВ</b> ФОРМАЛІЗАЦІЯ ТА ПРИКЛАДИ ЗАДАЧІ РОЗБИТТЯ ОБЛАСТІ НА ПІДОБЛАСТІ ЗА ВИЗНАЧЕНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ .....	259
<b>Т.А. КРЕСАН, С.Ф. ПИЛИПАКА, І.Ю. ГРИЩЕНКО, В.М. БАБКА, Т.П. ФЕДОРИНА</b> НЕРУХОМИЙ І РУХОМИЙ АКСОЇДИ СУПРОВІДНОГО ТРИГРАННИКА ФРЕНЕ ПРОСТОРОВОЇ КРИВОЇ УКОСУ .....	265
<b>О.М. ЛИТВИН, Ю.І. ПЕРШИНА, І.В. ЦАРЬОВ</b> ВІДНОВЛЕННЯ ВНУТРІШНЬОЇ СТРУКТУРИ ТРИВИМІРНОГО ОБ'ЄКТА З ВИКОРИСТАННЯМ НЕВЕЛИКОЇ КІЛЬКОСТІ ДАНИХ .....	274
<b>О.А. НІКІТЕНКО, Г.В. КОВАЛЬОВА, О.О. КАЛІНІН, Т.О. КАЛІНІНА</b> ВИЗНАЧЕННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ ЛІНІЙ НА ЦИКЛІЧНІЙ ГВИНТОВІЙ ПОВЕРХНІ .....	279
<b>О.М. СОБОЛЬ, С.Я. КРАВЦІВ</b> МЕТОД ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПОКРИТТЯ ЗАДАНИХ ОБЛАСТЕЙ З УРАХУВАННЯМ ОБМЕЖЕНЬ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИДУ .....	285
<b>Є.В. СТЕГАНЦЕВ, М.О. ГРЕЧНЄВА</b> ЗАЛЕЖНІСТЬ МІЖ КРИВИНОЮ І СКРУТОМ СФЕРИЧНОЇ І КОНІЧНОЇ КРИВИХ .....	294

---



---

**CONTENTS**


---



---

**FUNDAMENTAL SCIENCES**

<b>G.S. ABRAMOV, V.V. CHERNYAVSKY, V.M. KUKLIN</b> THE NATURE OF ANOMALOUS AMPLITUDE OCEAN WAVE EMERGENCE AND EVOLUTION .....	11
<b>E.A. ARSHAVA, A.P. KHARCHENKO, E.V. BABAEVA</b> STATISTICAL SOLUTIONS OF THE SYSTEM OF VLASOV-EULER EQUATIONS .....	20
<b>M.H. BERDNYK</b> THE MATHEMATIC MODEL OF AND METHOD FOR SOLVING A GENERALIZED MIXED BOUNDARY PROBLEM OF HEAT EXCHANGE FOR THE EMPTY ISOTROPIC ROTARY HYPERBOLOID .....	28
<b>Іu.V. BRAZALUK, O.I. GUBIN, Ye.O. DIDINSKA, D.V. YEVDOKYMOV</b> ON ONE CASE OF POISEULLE FLOW .....	37
<b>V.O. VAKHNENKO</b> LOOP-LIKE SOLUTIONS IN SOME EVOLUTION EQUATIONS .....	46
<b>T.G. VOYTIK, G.S. POLETAEV, S.A. YATSENKO</b> SPECIAL THE SOLUTION OF RELATED RIEMANN-HILBERT-PRIVALOV PROBLEM EQUATIONS WITH MUTUALLY INVERSE RATIONAL COEFFICIENTS .....	53
<b>V.S. DUBINKO, A.S. MAZMANISHVILI, D.V. LAPTEV</b> NUMERICAL MODELING OF THE PARTICLE TUNNELING IN THE DOUBLE-WELL POTENTIAL .....	62
<b>T.S. KAGADIY, O.V. BELOVA, I.V. SHCERBINA</b> APPLICATION OF A METHOD OF SMALL PARAMETER AT MODELLING PROBLEMS OF THE THEORY VISCOELASTICITY .....	69
<b>A.S. MAZMANISHVILI, A.Yu. SIDORENKO</b> APPLICATION OF REVERSE FUNCTIONS IN THE DISTRIBUTION TASK PROBABILITIES OF RANDOM CROSS-FUNCTIONAL FROM NORMAL MARKOV PROCESS .....	76
<b>O.A. NAZARENKO, A.A. STEKHUN</b> STUDYING THE INFLUENCE OF TORSION WAVE ON A HARD SPHERICAL DEFECT IN AN ELASTIC HOMOGENEOUS ENVIRONMENT .....	83
<b>A.N. KHOMCHENKO, O.I. LITVINENKO, I.O. ASTIONENKO</b> PROBABILISTIC MODELS AND NONPROBABILISTIC PROBLEMS .....	88

**MATHEMATICAL MODELING OF PHYSICAL AND  
TECHNOLOGICAL PROCESSES AND TECHNICAL SYSTEMS**

<b>S.G. BLAZHEVSKIY</b> MODELING OF THE DYNAMIC THERMO-ELASTIC FIELD IN TWO-LAYER SYMMETRIC SPACE .....	93
<b>O.M. VASYLIEV, I.V. VASYLIEVA</b> PECULIARITIES OF CREATION OF MATHEMATICAL MODELS IN LINGUISTICS .....	99
<b>S.I. VYATKIN, O.N. ROMANYUK, O. M. REIDA, O.O. YAKOVENKO</b> VISUALIZATION OF THREE-DIMENSIONAL OBJECTS USING AN ANALYTICAL TASK OF ILLUMINATION THE ENVIRONMENT .....	106
<b>O. DEMYANCHENKO, V. LYACHENKO</b> DETERMINATION CONDITION AT HEAT EXCHANGER IN TWO-DIMENSIONAL AREA .....	112
<b>A. KARPIK, Yu. VOROBIEV</b> STRESS ANALYSIS OF THE COMPRESSOR BLADE UNDER ACTION OF DISTRIBUTED PRESSURE BASED ON GAS DYNAMIC FLOW SIMULATION .....	118
<b>P.V. KASHTALYAN</b> THE MATHEMATICAL MODEL OF WHEELHOUSE-VESSEL SYSTEM DYNAMICS .....	123
<b>L.I. KOROTKA, Y.A. KOROTKA</b> APPLICATION OF HEURISTIC ALGORITHMS IN THE TASKS OF VEHICLE ROUTING .....	134
<b>O.M. LENYUK, O.M. NIKITINA, M.I. SHYNKARYK</b> MODELING OF DYNAMIC PROCESSES BY THE METHOD OF HYBRID INTEGRAL TRANSFORM OF BESSEL-EULER TYPE ON THE POLAR AXIS .....	140
<b>O.V. MACHULIANSKYI, B.B. BABYCH, V.O. MACHULIANSKYI</b> APPROXIMATION MODELS OF FUNCTIONAL SYSTEMS WITH NANOCOMPOSITE COMPONENTS .....	145
<b>V.A. POLYAKOV, N.M. KHACHAPURIDZE</b> MAGNETICALLY LEVITATED TRAIN'S DYNAMIC'S MODEL: RATIONALIZATION OF USE .....	151
<b>V.O. ROMANOV, I.S. CHURILOVYCH, O.O. BROWSING</b> NEED INFORMATION SYSTEM ISOLATING AND IDENTIFYING AREAS OF HETEROGENEITY AGROBIOLOGICAL FARMLAND ON SPACE IMAGES WITH VALIDATION OF SATELLITE DATA AND GROUND MONITORING .....	158
<b>A.V. SOKHATSKY, M.S. ARSENUK</b> APPLICATION OF THE NAVIER - STOKES EQUATIONS AVERAGED BY REYNOLDS FOR MODELING OF AERODYNAMICS OF TRANSPORT VEHICLE OF MAGLEV .....	165

<b>S.V. TARASOV, D.O. REDCHYTS, A.S. TARASOV, S.V. MOISEENKO</b> NUMERICAL RECONSTRUCTION OF A TURBULENT FLOW AROUND CYLINDER AND AERODYNAMIC AIRFOIL WITH A LAMINAR-TURBULENT TRANSITION .....	172
<b>N.K. TYMOFLJEVA</b> MATHEMATICAL MODELING IN COMBINATORIAL OPTIMIZATION .....	179
<b>A.V. USOV, Yu.Ye. SIKIRASH</b> METHODS OF IDENTIFICATION OF MATHEMATICAL MODELS OF THERMOMECHANICAL PROCESSES IN OBJECTS UNDER THERMAL INFLUENCE .....	185
<b>O. V. CHOPOROVA, S. V. CHOPOROV, A. O. LISNIAK</b> USING MACHINE LEARNING TO PREDICT THE STRESS-STRAIN STATE OF A SQUARED PLATE .....	192
<b>G.G. SHVACHYCH, B.I. MOROZ, I.M. UDovyk, S.D. PRYKHODCHENKO</b> DISTRIBUTED MODELLING OF VISUALIZATION OF VECTORS FOR APPLIED TASKS' SOLUTIONS .....	202
<b>G.G. SHVACHYCH, I.A. POBOCHII, O.V. IVASCHENKO, L.F. SUSHKO</b> MATHEMATICAL MODELING OF THERMOPHYSICAL PROPERTIES OF MATERIALS USING INVERSE METHODS .....	210
<b>A.H. SHPORTA, T.S. KAGADIY</b> MATHEMATICAL MODELING IN PROBLEMS OF ELECTRIC ELASTICITY .....	216
<b>A. SHVIATSOVA, V. SHUTS</b> THE ALGORITHM OF DEVELOPMENT A DELIVERY PLAN ON URBAN LINES IN AN INTELLEAGENT MANAGEMENT SYSTEM OF UNMANNED VEHICLES ....	222

### **APPLIED GEOMETRY AND COMPUTER TECHNOLOGIES**

<b>A.S. BOGATSKA., D.V. VORONTSOVA, A.O. DASHKEVICH</b> 3D RECONSTRUCTION OF HISTORICAL BUILDING BASED ON SETS OF IMAGES .....	231
<b>A. Yu. BRAILOV, V. I. PANCHENKO</b> THE ANALYTICAL FOUNDATION THE GEOMETRICAL MODEL FOR THE MEASUREMENTS OF PARAMETERS OF AN INACCESSIBLE POINT .....	237
<b>V.V. VANIN, G.A. VIRCHENKO, A.J. NEZENKO</b> SOME QUESTIONS OF GEOMETRIC MODELING OF THE AIRPLANE WING SURFACE DURING THE LIFE CYCLE OF THE PRODUCT .....	244
<b>O.V. VORONTSOV, L.A. TULUPOVA, I.V. VORONTSOVA</b> DETERMINATION OF INTERNAL KNOTS COORDINATES OF DISCRETE FRAMES OF PARALLEL TRANSFER SURFACES AS SUPERPOSITIONS OF SET SUPPORTING CONTOUR APPLICATES .....	249
<b>O.M. GUMEN, O.O. LEBEDIEVA</b> STUDY OF SURFACE EMISSIVITY IN MODELLING THE DISTRIBUTION OF TEMPERATURE FIELDS IN INDUSTRIAL PREMISES .....	254
<b>V.M. KOMYAK, A.N. DANILIN, V.V. KOMYAK, S.S. HOVALENKOV, K.T. KYAZIMOV</b> FORMALIZATION AND EXAMPLES OF PROBLEMS OF PARTITIONING OF THE AREA AT THE APPROACH FOR THE RESTRICTIONS DEFINED .....	259
<b>T.A. KRESAN, S.F. PYLYPAKA, I.YU. GRISCHENKO, V.M. BABKA, T.P. FEDORINA</b> IMMOVABLE AND MOVABLE AXOID OF ACCOMPANYING TREE-EDGE OF FRENET OF THE SPATIAL SLOPE CURVE .....	265
<b>O.M. LYTVYN, I.I. PERSHYNA, I.V. TSAREV</b> RESTORATION OF THE INTERNAL STRUCTURE OF THREE-DIMENSIONAL OBJECTS USING A SMALL AMOUNT OF DATA .....	274
<b>O.NIKITENKO, G. KOVALOVA, A. KALININ, T. KALININA</b> DEFINING OF GEODESIC LINES ON THE CYCLIC HELICOCID .....	279
<b>O. SOBOL, S. KRAVTSIV</b> THE METHOD OF GEOMETRIC MODELING OF THE COVERING OF PROVIDED AREAS WITH A TYPE OF RESTRICTIONS OF SPECIAL TYPE .....	285
<b>E.V. STEGANTSEV, M.A. GRECHNEVA</b> THE RELATION BETWEEN THE CURVATURE AND THE TORSION OF THE SPHERICAL CURVE AND THE CONIC CURVE .....	294

## ФУНДАМЕНТАЛЬНІ НАУКИ

УДК 551, 466.3, 519.6

АБРАМОВ Г.С., ЧЕРНЯВСКИЙ В.В.

Херсонская государственная морская академия

КУКЛИН В.М.

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина

**О ПРИРОДЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ И ЭВОЛЮЦИИ АНОМАЛЬНО ВЫСОКИХ ВОЛН В ОКЕАНЕ**

*В работе проведен анализ процессов модуляционной неустойчивости и интерференционных явлений как механизма возникновения волн аномальной амплитуды в океане. Показано, что волны аномальной амплитуды являются долгоживущими образованиями. Они дрейфуют в направлении волнового движения с групповой скоростью волнового пакета, которая вдвое меньше фазовой скорости основной волны. Размах волны (расстояние от горба до впадины) аномальной амплитуды в результате модуляционной неустойчивости, более чем втрое превосходит среднее значение размахов волнового движения. В результате модуляционной неустойчивости этой волны формируется спектр возмущения, энергия которого вдвое больше энергии основной волны в развитом режиме процесса. Расстояние, которое проходит волновой пакет с сохраняющимся аномальным размахом, по крайней мере равно нескольким сотням длин волн и может достигать сотен километров.*

*Ключевые слова:* долгоживущая волна аномально большой амплитуды, океанское волнение, модуляционная неустойчивость.

АБРАМОВ Г.С., ЧЕРНЯВСКИЙ В.В.

Херсонська державна морська академія

КУКЛІН В.М.

Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна

**ПРО ПРИРОДУ ВИНІКНЕННЯ І ЕВОЛЮЦІЇ АНОМАЛЬНО ВИСОКИХ ХВИЛЬ В ОКЕАНІ**

*В роботі проведено аналіз процесів модуляційної нестійкості і інтерференційних явищ як механізму виникнення хвиль аномальної амплітуди в океані. Показано, що хвилі аномальної амплітуди є довгоживучими утвореннями. Вони дрейфують в напрямку хвильового руху з груповою швидкістю хвильового пакета, яка вдвічі менше фазової швидкості основної хвилі. Розмах хвилі (відстань від горба до западини) аномальної амплітуди в результаті модуляційної нестійкості, більша ніж втричі перевершує середнє значення розмахів хвильового руху. В результаті модуляційної нестійкості цієї хвилі формується спектр збурення, енергія якого вдвічі більше енергії основної хвилі в розвиненому режимі процесу. Відстань, яку проходить хвильової пакет зі збереженням аномальним розмахом дорівнює кільком сотням довжин хвиль і може досягати сотень кілометрів.*

*Ключові слова:* довгоживуча хвиля аномально великої амплітуди, океанські хвилі, модуляційна нестійкість.

ABRAMOV G.S., CHERNYAVSKY V.V.

Kherson State Maritime Academy

KUKLIN V.M.

Kharkov National University. V.N. Karazin

**THE NATURE OF ANOMALOUS AMPLITUDE OCEAN WAVE EMERGENCE AND EVOLUTION**

*An urgent problem with the safety of navigation and oil and gas production in the oceans and seas is to determine the conditions for the appearance of surface waves of anomalous amplitude that can lead to major catastrophes and accidents. Previously, when the intensity of shipping and oil and gas production was not so intense, the occurrence of such waves was considered rare enough, and their appearance and impact simply was not considered necessary to take into account. However, with the increasing number of vessels and personnel, numerous sightings of such anomalous waves appeared. Not only are shipwrights and maritime transport workers disturbed by the discovery of waves with such anomalous amplitude, it is also necessary to find out the features of the life cycle of such waves, how long they are able to exist and whether they can travel. The purpose of this work is to attempt to elucidate the existence of anomalous amplitude waves, the nature of their appearance, and the dynamics of their propagation.*

*The paper analyzes the processes of modulation instability and interference phenomena as a mechanism of anomalous amplitude waves in the ocean. Waves of anomalous amplitude are shown to be long-lived formations. They drift in the direction of wave motion at a group velocity of the wave packet that is half the phase velocity of the main wave. The wave sweep (distance from the hump to the depression) of anomalous amplitude waves as a result of modulation instability exceeds by more than three times the mean value of the wave motion. As a result of the modulation instability of this wave, a perturbation spectrum is formed, carrying twice the energy of the main wave in the developed process mode. The spatial size of the wave packet practically does not change, the amplitude of the magnitude at the maximum first increases, then gradually decreases. The distance traveled by a wave packet with a continuing anomalous range is at least equal to several hundred wavelengths and can reach hundreds of kilometers.*

*Keywords: long-lived anomalously large amplitude wave, ocean wave, modulation instability.*

**Постановка проблемы.** До сравнительно недавнего времени учёные считали, что волны высотой больше 25-ти метров в океанах Земли существовать не могут, хотя ещё в 1840 году на заседании Французского географического общества мореплаватель Дюмон Дюрвиль заявил, что своими глазами видел 35-метровую волну. Однако он был осмеян и предан остракизму. В 1933 году волна высотой 35 метров обрушилась на корабль ВМС США «Рамапо». История о встрече лайнера «Королева Мария» с волной 28 метров легла в основу голливудского фильма «Посейдон».

За 20 последних лет жертвами бродячих волн-убийц (ВУ) стали не меньше 200 судов, среди них 22 громадных, казалось бы, непотопляемых супертанкеров. Более 600 человек утонули. В 1980 году у берегов Японии британский сухогруз «Derbyshire» (длина судна 250 метров) настигла ВУ, пробила главный грузовой люк и залила трюм. Ни шторма, ни цунами во время гибели судна не наблюдалось. Экспертная комиссия в 2000 году пришла к выводу: сухогруз столкнулся с гигантской волной одиночкой. Возрастающая статистика таких необычных морских крушений вынудила учёных серьёзно заняться проблемой аномально высоких волн. Всего за 3 недели наблюдений в 2004 году приборы зафиксировали 10 наблюдений ВУ высотой больше 30-ти метров. Наиболее ярким наблюдением можно считать так называемую «январскую волну» 1 января 1995-го года. Она обрушилась на газодобывающую платформу «Драупег» в Северном море и смыла оборудование, стоявшее на высоте 31 метр.

По наблюдениям Национального управления океанических и атмосферных исследований США волны с аномально большой амплитудой, волны-убийцы (ВУ) могут быть не рассеивающимися, способными на путь по морю до 10-ти миль. По наблюдениям моряков ВУ иногда возникают словно ниоткуда – мгновенно. Некоторые размером с 10-этажный дом. Внезапно появляются – внезапно исчезают. Статистика внезапно исчезнувших по неизвестным причинам судов продолжает нарастать.

Таким образом, актуальной проблемой безопасности судоходства и нефтегазодобычи в океанах и морях является определение условий появления поверхностных волн аномальной амплитуды, способных привести к крупным катастрофам и авариям. Изучение ВУ крайне важно как для судоводителей (в связи с вероятностью встречи с ними), так и для судостроителей, в связи с необходимостью обеспечения живучести судов при нагрузках, многократно превышающих средненормативные. Это также важно для инженеров-гидротехников, проектирующих нефтяные платформы на морских шельфах. Ранее, когда интенсивность судоходства и нефтегазодобычи были не столь интенсивными, возникновение таких волн считалось достаточно редким, и учитывать их появление и воздействие попросту не считали нужным. Однако при росте численности судов и их персонала появились многочисленные свидетельства появления таких аномальных волн. Судоводителей и работников морского транспорта тревожит не только обнаружение таких волн аномальной амплитуды, необходимо выяснить также особенности жизненного цикла таких волн, насколько долго они способны существовать и могут ли они перемещаться.

**Анализ публикаций и достижений.** Проблеме возникновения ВУ посвящена достаточно обширная литература, среди которой можно выделить несколько обстоятельных обзоров [1-4]. Развита достаточно многочисленная теоретическая модели [5-10], которые используются для интерпретации наблюдаемых аномальных волн и оценки времени их жизни. Однако до настоящего времени нет полной ясности относительно природы и механизма возникновения ВУ и физической закономерности их эволюции. Хотя сейчас мареографами надёжно регистрируются ВУ в различных областях мирового океана, обнаруживаются со спутников, экспериментальной базы всё-таки недостаточно. Поэтому основным методом исследования является математическое моделирование. В качестве основных механизмов формирования ВУ большинство исследователей рассматривают:

1. Пространственно-временная фокусировка поверхностных гравитационных волн;
2. Дисперсионное сжатие волновых пакетов;
3. Трансформация и усиление поверхностных гравитационных волн на горизонтально-неоднородных течениях в океане;



#### 4. Нелинейное взаимодействие и модуляционная неустойчивость поверхностных гравитационных волн.

В предшествующей работе авторов [11] рассмотрен процесс модуляционной неустойчивости как возможный механизм формирования ВУ. В работе [12] рассмотрен вопрос о частоте и пространственной периодичности появления ВУ.

**Целью данной работы** является выяснение условий существования волн аномальной амплитуды и их пространственно-временной эволюции.

**Основная часть** *Волны аномальной амплитуды в океане.* По внешнему виду аномально высокие волны (экстремальные волны, rogue waves, abnormal waves, exceptional waves, giant waves, steep wave events) на поверхности глубокой воды (это т.н. гравитационные поверхностные волны, длина такой волны много меньше глубины океана, кстати, с уменьшением глубины скорость волны замедляется) делятся на три основных типа: "белая стена", "три сестры" (группа из трех волн), одиночная волна ("одиночная башня") [1-5]. Высота волны обычно указывается именно как расстояние от высшей точки гребня до низшей точки впадины. Ширина цуга гигантских волн может достигать нескольких сотен метров до километра, что больше длин таких волн. В ряде случаев направление распространения таких волн, часто сбивающихся в группы по две-три волны, отличалось от основного направления движения волн вплоть до десятков градусов.

Аномально высокими волнами считаются волны, высота которых более чем в два раза превышает значимую высоту волн. Значимая высота волн рассчитывается для заданного периода в заданном регионе. Для этого отбирается треть всех зафиксированных волн, имеющих наибольшую высоту, и находится их средняя высота. Большинство современных судов может выдержать нагрузку до 15 тонн на квадратный метр и, в случае даже сильного волнения, это соответствует более чем двукратному запасу прочности, однако аномально большие волны способны вызвать давление до 100 тонн на квадратный метр [13]. Все это внушает более чем обоснованную обеспокоенность судоводителям и работникам морского транспорта. Поэтому предпринимаются попытки выяснить области образования, определить частоту возникновения таких волн и разработать способы предупреждения об их появлении. На основании данных полученных со спутников удалось составить приблизительную карту, которая поможет судоводителям избегать опасных районов. Европейцев волнует, прежде всего, восточное побережье Южной Африки, Бискайский залив и Северное море. Есть и другие опасные регионы – это южная часть побережья Латинской Америки. Сомневаясь в возможности раннего предупреждения, шведские специалисты рекомендуют создавать виртуальные карты Мирового океана с обозначением на них скользящих «треугольников смерти» - участков, где в определенное время года и при определенных условиях наиболее вероятно появление ВУ. Области морских течений рассматривались и ранее как области наиболее вероятного появления ВУ [15]. Авторы [4,16] полагали, что вероятность случайных возвышений морской поверхности  $P(H)$  подчиняется Рэлеевскому распределению:

$$P(H) = \exp\left\{-2\frac{H^2}{H_s^2}\right\}, \quad (1)$$

где  $H_s$  – средняя высота-размах одной трети самых высоких волн. Можно показать, что такие волны могут появляться довольно часто. Волной с размахом  $2H_s$  по их расчетам будет примерно каждая из  $3 \cdot 10^3 - 10^4$  волн (волны в океане вдали от берегов имеют длины вплоть до 100 метров и выше, а скорости порядка 10 м/с.), что не противоречило некоторым экспериментальным данным. Однако, если использовать значение этой вероятности, то для  $3H_s$ , получим, что волна такой высоты может наблюдаться один раз в 20 лет. Весьма часто появляющимися, в сравнении с оценкой (1) оказались волны с амплитудой, превышающей  $2H_s$ . Вместе с тем, по данным наблюдения проекта MaxWave морской поверхности из космоса наблюдалась волна с  $A = H/H_s = 2,9$ . За 793 часа наблюдений волн в Северном море зарегистрирована волна с  $A = 3,19$  [17]. Такая неожиданно частая регистрация экстремальных волн привела к необходимости серьезного пересмотра подходов к применимости классической статистической модели в области высоких волн. Случайный механизм образования аномальных волн оказался не корректным, поэтому основное внимание было уделено другим механизмам, которые в большинстве своем основаны на результатах развития теории модуляционной неустойчивости гравитационных поверхностных волн на глубокой воде, представленной ниже.

Для определения зон мирового океана, где с большой вероятностью ожидается появление аномальных волн, необходимо на базе разработанных математических моделей определить условия, частоту и значения аномальных волн, используя характеристики внешней среды. Мониторинг, который состоит в проверке ряда критических показателей, должен быть основан на результатах моделирования. Для наблюдаемых аномально больших волн с крутизной

$$(2 \div 3) \frac{2|A_0|}{2\pi} k_0 \propto 0,13,$$

при которой нет обрушения [17,18], средняя высота волн равна  $2|A_0| \propto (0,07 \div 0,04) \cdot \lambda_0$ . Длина волны связана с периодом колебаний соотношением  $\lambda_0 \propto 1,6 \cdot T^2$  и для волн с периодом 10 сек., волнение океана отвечает высотам волн, сравнимым с 10 м. Отношение максимального инкремента модуляционной неустойчивости к частоте колебаний порядка  $\alpha$ , где  $\alpha = k_0^2 |A_0|^2 \approx (0,04 \div 0,02)$ . Другими словами, характерное время процесса (обратный инкремент) при этом можно оценить, как 6-12 минут. За время менее часа можно будет наблюдать неустойчивость на её развитой нелинейной стадии. При ветровом возбуждении (скорость ветра должна превосходить фазовую скорость гравитационных поверхностных волн, равную примерно 10-15 м/с, но если есть встречное течение, то скорость ветра может быть даже меньше этой величины на значении скорости течения) зона развитой модуляционной неустойчивости находится в 50-100 км от границы зоны ветрового возбуждения.

**Модуляционная неустойчивость гравитационных волн на поверхности воды.** Для гравитационных поверхностных волн на глубокой воде, представляющих интерес для судоходства в районах с высоким уровнем возбуждения океанского волнения, справедливо следующее выражение для частоты волн большой амплитуды [19]

$$\omega = \sqrt{g \cdot k} \cdot \{1 + |A|^2 k^2 / 2\}, \quad (2)$$

где  $A$  – отклонение поверхности,  $g$  – ускорение свободного падения. Данные экспериментальных наблюдений и исследований [19] указывают на следующие характеристики таких волн: максимальная крутизна для устойчивых длинных (гравитационных) волн на глубокой воде до их обрушения  $H/\lambda \approx 0.11 \div 0.13$ , где  $H = 2|A|$  – крутизна волны, то есть расстояние между верхней точкой гребня волны и нижней точкой впадины волны,  $\lambda = 2\pi/k_0$  – длина волны большой амплитуды. Откуда  $(k_0 A)^2 < 0.12 \div 0.17$ . Важно отметить, что волны с большей амплитудой не существуют из-за эффекта обрушения. В отсутствие модуляции  $|A_0|$  – средняя амплитуда,  $\bar{H} = 2|A_0|$  – средняя крутизна. Для аномально больших волн их крутизна достигает  $(2 \div 3) \cdot 2|A_0|$ , причем для наиболее высоких неразрушающихся волн должно быть выполнено условие:

$$(2 \div 3) \frac{2|A_0|}{2\pi} k_0 < 0,11 - 0,13.$$

Анализируя эти данные, легко видеть, что ширина пространственного спектра неустойчивости в этих условиях не мала. Именно поэтому уравнение для комплексной медленной меняющейся (здесь исключена зависимость  $\propto \exp\{-i\omega_0 t\} = \exp\{-igk_0 t\}$ ) амплитуды поля представляется в виде (S-теория):

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_k}{\partial t} &= -\delta A_k - i(\sqrt{g(k_0 + K)} - \sqrt{gk_0}) A_k - i\sqrt{g(k_0 + K)} \frac{(k_0 + K)^2}{2} \{|A|^2 A\}_k = \\ &= -\delta A_k - i(\sqrt{g(k_0 + K)} - \sqrt{gk_0}) A_k - i\sqrt{g(k_0 + K)} \frac{(k_0 + K)^2}{2} \cdot \\ &\cdot \{A_k [2|A_0|^2 + 2 \sum_{K \neq K, 0} |A_{K'}|^2 + |A_K|^2] + A_{-K}^* \{A_0^2 + \sum_{K \neq K, 0} A_K \cdot A_{-K}\}\}, \end{aligned} \quad (3)$$

Можно определить средний размах всех волн  $H = U_{CP}$  и средние значения размаха трети самых больших  $H = U_{SWH}$ , а также самый большой размах волны из ансамбля  $H = U_{Max}$ .

В наиболее простом случае плоского фронта волны поле возмущений запишется в виде:

$$A(\zeta, \tau) = \left( u_0 + \sum_{K > 0} [u_K \cdot \exp\{+iK\zeta + i(\phi_K - \phi_0)\} + u_{-K} \cdot \exp\{-iK\zeta + i(\phi_{-K} - \phi_0)\}] \right), \quad (4)$$

где использованы следующие обозначения:  $A_K/|A_0| = a_K = |a_K| \exp(i\phi_K) = u_K \exp(i\phi_K)$ ,  $k_0 \xi = \zeta$ ,

$$\alpha = k_0^2 |A_0|^2, \quad \tau = t \cdot \sqrt{gk_0} \frac{\alpha}{2}, \quad K \rightarrow K/K_0, \quad 2\phi_0 - \phi_K - \phi_{-K} = \Phi_K = \Phi_{-K}$$

Моды спектра располагаем в интервалах  $0 < K < 2K_{max}$  и  $-2K_{max} < -K < 0$ .  $K = 0.3 \frac{i}{N}$ ,

$i = \pm(1, 2, \dots, N)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $N=100$ . Начальные амплитуды  $u_K(\tau=0) = 10^{-3}$   $0 < K < 2K_{max}$ , а их фазы  $\phi_K(\tau=0)$  случайно распределены в интервале от 0 до  $2\pi$ .

Окончательно, система уравнений, описывающая модуляционную неустойчивость волны большой амплитуды, принимает вид для основной моды

$$\frac{\partial u_0}{\partial \tau} + \delta u_0 + 2u_0 \sum_{K>0} u_K u_{-K} \sin \Phi_K = \delta \quad (5)$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial \tau} = -u_0^2 - 2 \sum_{K>0} (u_K^2 + u_{-K}^2) - 2 \sum_{K>0} u_K u_{-K} \cos \Phi_K \quad (6)$$

и для мод спектра развивающейся в этом случае модуляционной неустойчивости [9]

$$\frac{\partial \phi_K}{\partial \tau} = -\frac{2[\sqrt{1+K}-1]}{\alpha} - (1+K)^{2.5} \left\{ 2 \sum_{K' \neq K} u_{K'}^2 + u_K^2 + \frac{u_{-K}}{u_K} \cdot \sum_{K \neq K'} u_K u_{-K} \cos(\Phi_K - \Phi_{K'}) \right\} \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_K}{\partial \tau} = -\delta u_K + (1+K)^{2.5} \cdot \left[ u_{-K} u_0^2 \sin \Phi_K + 2u_{-K} \sum_{K>0} u_K u_{-K} \sin(\Phi_K - \Phi_{K'}) \right] \quad (8)$$

Здесь использовано описание в рамках так называемой модифицированной S-теории [10], при этом взаимодействие происходит только между симметричными по отношению к накачке модами спектра.

В представленной модели характерный пространственный масштаб соотносится с длиной волны, то есть  $k_0 \xi = \zeta$ , временной масштаб определяется соотношением  $\tau = t \frac{\alpha \cdot \omega}{2}$ , то есть единица измерения в пространстве – длина волны, а единица измерения во времени – период колебания, умноженный на  $\alpha \cdot \pi$ .

**Моделирование процесса образования волн аномальной амплитуды.** Для каждого момента времени рассчитывалось  $A$  при  $-1047 < \zeta < 1047$  (около 333 длин волн). Размах  $H$  – разница соседних максимума и минимума. Для каждого момента времени вычислялся  $H_{rel}$  – относительный максимальный размах: отношение максимального размаха  $H_{max}$  к среднему  $H_{av}$ , по всему пространству.

На начальном этапе развития неустойчивости происходит выход на квазистационарный режим со средним размахом волнового движения, близким к единице, что примерно в два раза меньше начального значения для основной волны. Наибольшие размахи волны достигаются в момент времени  $\tau = 425$  в области вблизи  $\zeta = -482$  а также в момент времени  $\tau = 888$  вблизи  $\zeta = 956$ . Например, можно представить фазовые диаграммы и вид поля в окрестности максимумов размахов (рис.1).

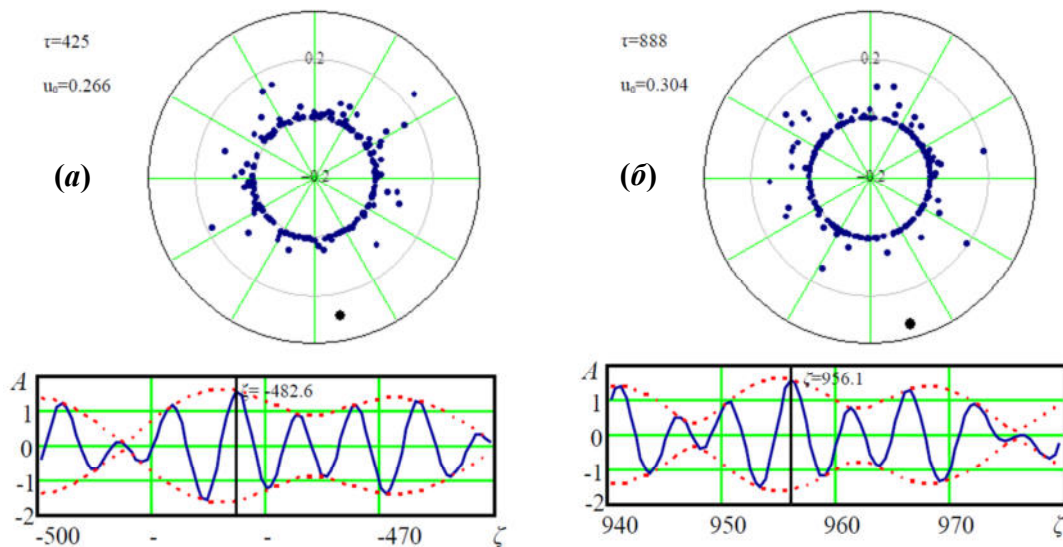


Рис. 1. Фазовые диаграммы и вид поля вблизи максимумов размахов для первого максимума  $H_{max1} = 3.118$   $H_{rel1} = 3.253$  (а) и  $H_{max1} = 3.035$   $H_{rel1} = 3.094$  (б)

Обращает на себя внимание следующее обстоятельство: хотя амплитуда основной волны (жирная точка) не мала, она уже теряет управление неустойчивостью. Действительно, как показало моделирование, в развитом режиме энергия основной волны оказывается вдвое меньше энергии спектра, что, кстати, характерно для развитых режимов модуляционной неустойчивости и в других случаях [14]. Представляет интерес движение волновых пакетов с максимальной амплитудой в пространстве и во времени (рис.2.)

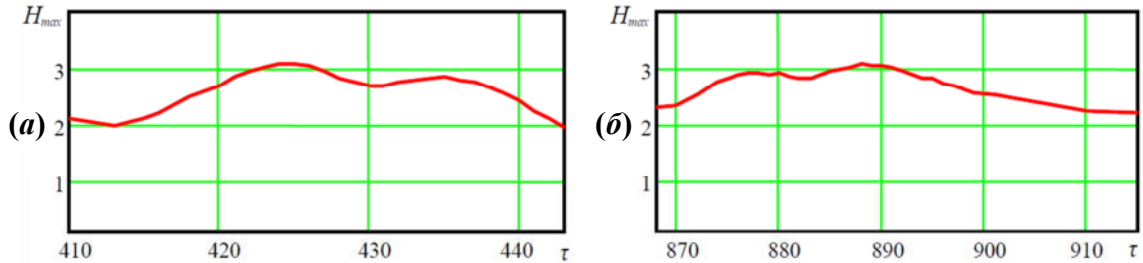


Рис. 2. Изменение со временем максимальной амплитуды волновых пакетов вблизи максимумов размахов для первого максимума  $H_{max1} = 3.118$   $H_{rel1} = 3.253$  (а) и  $H_{max1} = 3.035$   $H_{rel1} = 3.094$  (б)

Для первого пакета (а) скорость движения максимума (в единицах модели) равна 21.6, для второго пакета (б) скорость движения максимального размаха равна 21.7. То есть движение гребня аномальной волны происходит практически с одной скоростью. Эта скорость является групповой скоростью пакета, что легко увидеть, рассматривая соотношение:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} = \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{k_0}{\omega \cdot (\alpha/2)} = \frac{v_g}{v_{ph}} \cdot \frac{2}{\alpha} = 21.6, \text{ откуда } \frac{v_g}{v_{ph}} \approx 0.54$$

Из рисунка 2 видно, что время существования волны аномальной амплитуды в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью пакета, не превышает 40 единиц в рассматриваемой модели. Учитывая ее скорость, волна может пройти сотни длин волн (рис.4). Обращает внимание то обстоятельство, что в рассмотренном численном эксперименте в один момент времени возникли две волны аномальной амплитуды из 333 волн в области наблюдения, и за время порядка 40 единиц новых волн не возникло, то есть, люди в море могут столкнуться с этой же волной не один раз.

В лабораторной системе координат изменение амплитуды гребня волны аномальной амплитуды более ярко выражено (рис.3).

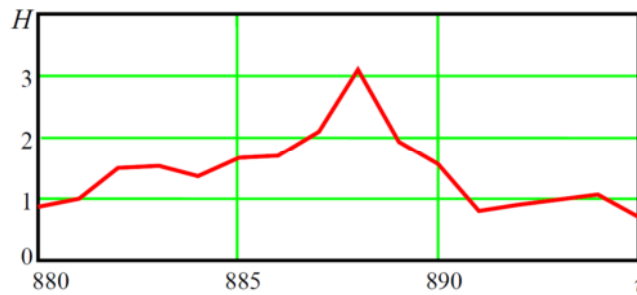


Рис. 3. Изменение размаха волны аномальной амплитуды для второго пакета, ( $H_{max1} = 3.035$   $H_{rel1} = 3.094$  )

На рис.4 представлена динамика движения волнового пакета, максимальный размах которого достигал наибольшего значения в момент времени  $\tau = 425$  в области вблизи  $\zeta = -482$ .

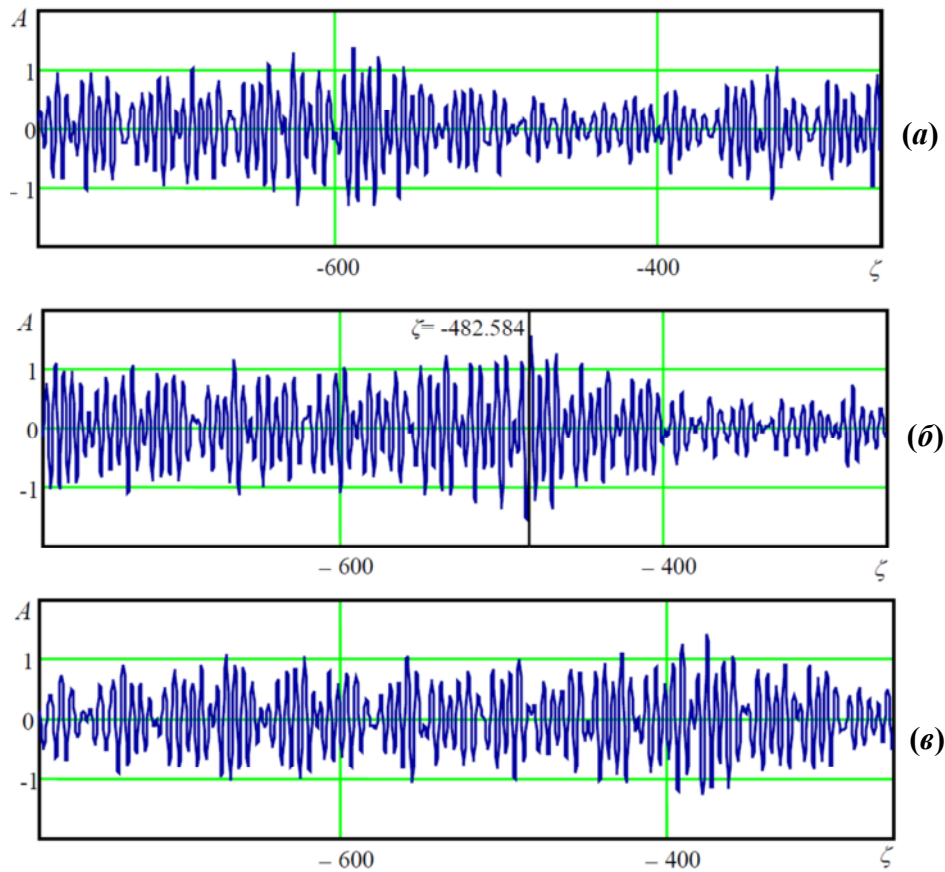


Рис.4. Динамика движения волнового пакета, максимальный размах которого достигал наибольшего значения в момент времени  $\tau = 425$  в области вблизи  $\zeta = -482$  для моментов времени (а)  $\tau = 420$ , (б)  $\tau = 425$ , (в)  $\tau = 430$ .

**Выводы.** Волны аномальной амплитуды, как оказалось, являются долгоживущими образованиями, дрейфующими в направлении волнового движения с групповой скоростью волнового пакета, которая вдвое меньше фазовой скорости основной волны. Продольный размер волнового пакета практически не меняется, амплитуда размаха в максимуме сначала нарастает, потом постепенно убывает. Расстояние, которое проходит волновой пакет с сохраняющимся аномальным размахом, по крайней мере равно нескольким сотням длин волн и для 300 метровых волн может достигать сотен километров.

Важно отметить, что волна, возбуждаемая в результате ветрового воздействия в результате модуляционной неустойчивости, формирует спектр возмущения, энергия которого вдвое превосходит энергию основной волны в развитом режиме неустойчивости. Именно интерференция мод этого спектра формирует причудливую волновую картину, где время от времени появляются волны аномальной амплитуды.

Авторы выражают надежду на заинтересованные отклики капитанов дальнего плавания и всех тех, чьи наблюдения могут оказать бесценную помощь в идентификации моделей и углублении наших представлений о физике формирования и эволюции волн аномальной амплитуды. Такое сотрудничество способствовало бы организации эффективной системы мониторинга за появлением ВУ и разработке практических рекомендаций по предотвращению нежелательных встреч с ними во время рейсов.

#### Список использованной литературы

1. Куркин А.А., Пелиновский Е.Н. Волны-убийцы: факты, теория и моделирование. Изд. 2-е, М.–Берлин. Директ-Медиа., 2016. 178 с.
2. Доценко С.Ф., Иванов Д.А. Волны-убийцы.– Морской гидрофизический институт НАН Украины. Севастополь, 2006. 43 с.
3. Kharif C., Pelinovsky E. Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon. *Eur. J. Mech. B-Fluid*. 2006. V. 22(6). P. 603-633.
4. Kharif C., Pelinovsky E., Slunyaev A. *Rogue Waves in the Ocean*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009.
5. Yeom D.-I., Eggleton B.J. Photonics: rogue waves surface in light. *Nature*. 2007. V.450. P. 953-962.



6. Lighthill M.J. Contribution to the theory of waves in nonlinear dispersive system. *J.Inst. Math. Appl.* 1965. Vol.1, No.2. P. 269-306.
7. Belkin E.V. The mathematical models of modulation instability processes of waves in media with cubic nonlinearity. Manuscript. PhD-thesis by speciality 01.05.02 . Mathematical modeling and computational methods. V.N. Karasin Kharkiv National University, Kharkiv, 2010. 150 P.
8. Белкин Е.В., Киричок А.В., Куклин В.М. Модуляционная неустойчивость волн, поддерживаемых внешним источником в среде с поглощением. *ВАНТ, Сер. «Плазменная электроника и новые методы ускорения»*. 2010. No.4(68)). С. 291-295.
9. Belkin, E. V., Kirichok, A.V., Kuklin V. M., Priymak A.V. Anomalous waves in a modulationally unstable wave field. *East Eur. J. Phys.* 2014. V.1. №.2. P. 4-39.
10. Chernousenko V.M., Kuklin V.M., Panchenko I.P., Vorob'ev V.M. Spatial Dissipative Structures. *Nonlinear World (IV Int. Workshop on Nonlinear and Turbulent Proc. In Physics.)*. Singapore, World Scientific 1990. V. 2. P. 776- 803.
11. Абрамов Г.С., Чернявский В.В., Куклин В.М. Модуляционная неустойчивость как механизм возникновения аномально высоких волн в океане. Материалы XI Международной научно-практ. конференции «Современные информационные и инновационные технологии на транспорте» (MINTT–2019). 2019. С.133–139.
12. Kuklin V.M., Poklonskiy E.V. On frequency and spatial periodicity of the waves of the anomalous amplitude in the ocean. *East european journal of physics*. 2019. Vol.6. N4. P. 135-142.
13. Бердичевский А. Гигантские волны-убийцы все еще представляют опасность для судоходства. РИА новости, 2007. Режим доступа: <http://transbez.com/info/sail/wave-killer.html>.
14. Куклин В. М. Избранные главы (теоретическая физика). X. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2018. 224 с.
15. Lavrenov I.V. The wave energy concentration at the Agulhas current of South Africa. *Natural Hazards*. 1998. Vol.17. P. 117-127.
16. Бадулин С., Иванов А., Островский А. Влияние гигантских волн на безопасность морской добычи и транспортировки углеводородов. *Технологии, ТЭК*. 2005. № 2.
17. Dyachenko AI, Zakharov V.E. Modulation instability of stokes wave – Freak wave. *JETP Lett.* 2005. Vol.81(6). P. 255-259.
18. Schwartz L.W., Fenton J.D. Strongly nonlinear waves . *Ann. Rev. Fluid. Mech.* 1982. Vol.14. P. 39-60.
19. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука. 1973. 175 с.

#### References

1. Kurkin A.A., Pelinovsky E.N. Volnyi-ubiytsyi: faktyi, teoriya i modelirovanie. Izd. 2-e, M.–Berlin. Direkt-Media., 2016, 178 s.
2. Dotsenko S.F., Ivanov D.A. Volnyi-ubiytsyi.– Morskoy gidrofizicheskiy institut NAN Ukrainyi. Sevastopol. 2006. 43 s.
3. Kharif C., Pelinovsky E. Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon. *Eur. J. Mech. B-Fluid*. 2006. V. 22(6). P. 603-633.
4. Kharif C., Pelinovsky E., Slunyaev A. Rogue Waves in the Ocean. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009.
5. Yeom D.-I., Eggleton B.J. Photonics: rogue waves surface in light. *Nature*. 2007. V.450. P.953-962.
6. Lighthill M.J. Contribution to the theory of waves in nonlinear dispersive system. *J.Inst. Math. Appl.* - 1965. Vol.1, No.2. P. 269-306.
7. Belkin E.V. The mathematical models of modulation instability processes of waves in media with cubic nonlinearity. Manuscript. PhD-thesis by speciality 01.05.02 . Mathematical modeling and computational methods. V.N. Karasin Kharkiv National University, Kharkiv, 2010. 150 P.
8. Belkin E.V., Kirichok A.V., Kuklin V.M. Modulyatsionnaya neustoychivost voln, podderzhivaemyih vneshnim istochnikom v crede s pogloscheniem. *VANT, Ser. «Plazmennaya elektronika i novyye metodyi uskoreniya»*. 2010. No.4(68)). S. 291-295.
9. Belkin, E. V., Kirichok, A.V., Kuklin V. M., Priymak A.V. Anomalous waves in a modulationally unstable wave field. *East Eur. J. Phys.* 2014. V.1 #.2. P. 4-39.
10. Chernousenko V.M., Kuklin V.M., Panchenko I.P., Vorob'ev V.M. Spatial Dissipative Structures. // *Nonlinear World (IV Int. Workshop on Nonlinear and Turbulent Proc. In Physics.)*. Singapore, World Scientific 1990. – V. 2, – P.776- 803.
11. Abramov G.S., Chernyavskiy V.V., Kuklin V.M. Modulyatsionnaya neustoychivost kak mehanizm vzniknoveniya anomalno vyisokih voln v okeane. *Materialyi XI Mezhdunarodnoy nauchno-prakt. konferentsii «Sovremennyye informatsionnyie i innovatsionnyie tehnologii na transporte» (MINTT–2019)*. 2019, s.133–139.

12. Kuklin V.M., Poklonskiy E.V. On frequency and spatial periodicity of the waves of the anomalous amplitude in the ocean. *East european journal of physics*. 2019. V.6. N4. P.135-142.
13. Berdichevskiy A. Gigantskie volny-ubiytsyi vse esche predstavlyayut opasnost dlya sudohodstva. *RIA novosti*, 2007. Rezhim dostupa: <http://transbez.com/info/sail/wave-killer.html>.
14. Kuklin V. M. Izbrannyye glavyyi (teoreticheskaya fizika). H. : HNU imeni V. N. Karazina, 2018. 224 s.
15. Lavrenov I.V. The wave energy concentration at the Agulhas current of South Africa. *Natural Hazards*. 1998. Vol.17. P. 117-127.
16. Badulin S., Ivanov A., Ostrovskiy A. Vliyanie gigantskiykh voln na bezopasnost morskoy dobyichi i transportirovki uglevodorodov. *Tehnologii, TEK*. 2005. No.2.
17. Dyachenko AI, Zakharov V.E. Modulation instability of stokes wave – Freak wave. *JETP Lett*. 2005. Vol.81(6). P. 255-259.
18. Schwartz L.W., Fenton J.D. Strongly nonlinear waves. *Ann. Rev. Fluid. Mech.* 1982. Vol.14. P. 39-60.
19. Karpman V.I. Nelineynyye volny v dispergiruyuschiykh sredah. M.: Nauka. 1973. 175 s.

УДК 519.9; 537.84

Е.А. АРШАВА, А.П. ХАРЧЕНКО, Е.В. БАБАЕВА  
Харьковский национальный университет строительства и архитектуры**СТАТИСТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ  
ВЛАСОВА-ЭЙЛЕРА**

*Эффекты турбулентности играют большую роль в плазме, встречающейся в природе. Случайный характер турбулентных процессов плазмы указывает на то, что для определения средних величин целесообразно использовать статистическое описание турбулентности. В работе рассматривается одна из гидродинамических моделей плазмы – модель, описываемая системой Власова-Эйлера. Для такой системы уравнений в ограниченной области с условием полного отражения частиц на границе области, построена мера Радона на множестве обобщенных решений, позволяющая математически корректно определять вероятностные средние определенного класса функционалов от решений этих уравнений. В работе используется конструкция статистических решений Арсеньева А.А., позволяющая осреднять нелокальные по времени функционалы от решений системы Власова-Эйлера для зависящих от случая начальных данных и внешних сил.*

*Ключевые слова:* мера, инвариантность, сходимость, пространство, топология

О.О. АРШАВА, А.П. ХАРЧЕНКО, О.В. БАБАЄВА  
Харківський національний університет будівництва та архітектури**СТАТИСТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ВЛАСОВА-ЭЙЛЕРА**

*Эффекты турбулентности відіграють велику роль в плазмі, що зустрічається в природі. Випадковий характер турбулентних процесів плазми вказує на те, що для визначення середніх величин доцільно використовувати статистичний опис турбулентності. В роботі розглядається одна із гідродинамічних моделей плазми – модель, яка описується системою Власова-Ейлера. Для такої системи рівнянь в обмеженій області за умови повного відображення частинок на границі області, побудована міра Радона на множині узагальнених розв'язків, що дозволяє математично коректно визначати ймовірнісні середні певного класу функціоналів від розв'язків цих рівнянь. В роботі використовується конструкція статистичних рішень Арсеньєва О.О., що дозволяє осереднювати нелокальні за часом функціонали від розв'язків системи Власова-Ейлера для залежних від випадкових початкових даних і зовнішніх сил.*

*Ключові слова:* міра, інваріантність, збіжність, простір, топологія

E.A. ARSHAVA, A.P. KHARCHENKO, E.V. BABAEVA  
Kharkiv National University of Construction and Architecture**STATISTICAL SOLUTIONS OF THE SYSTEM OF VLASOV-EULER EQUATIONS**

*The effects of turbulence play a big role in the plasma that occurs in nature. Here it is should be noted studies of the plasma of the ionosphere, plasma near-earth space, the plasma of the radiation belts of the Earth and, in part, the interplanetary plasma. At present, the large role of turbulent processes in the acceleration of particles of radiation belts, the formation of polar auroras, the dynamics of the Earth's magnetosphere, and other processes is clear. Turbulent plasma motion takes place in MHD generators and plasma engines. Gradually, the conviction is strengthened that the effects of turbulence play a fundamental role in the plasma. All the variety of physical phenomena in a plasma requires for their explanation the attraction of ideas about turbulence. This circumstance made the problems of plasma turbulence and questions of its stability basic in plasma physics. The random nature of the turbulent plasma processes indicates that it is expedient to use the statistical description of turbulence to determine the average values. Average values of the investigated quantities are used to describe turbulence. In this paper we consider one of the plasma models, the conductive fluid model, described by the system of MHD equations. From a mathematical point of view, we encounter the following problem: a function describing a random process is sought as a generalized solution of a nonlinear differential equation. There are in general many solutions to the differential equation and they do not depend continuously on the data of the problem. The question is whether the equation has measurable solutions and how to describe the measure induced on the set of solutions by the initial probability measure. In this paper, for a system of Vlasov-Euler equations in an bounded domain, we construct a Radon measure on the set of generalized solutions that allows us to determine mathematically the probability averages of a certain class of functionals from the solutions of these equations. In this paper we use the construction of statistical solutions*



A.A. Arsenev, which allows us to average nonlocal functionals from the solutions of the Vlasov-Euler system for the case-dependent initial data and external forces.

Keywords: measure, invariance, convergence, space, topology

### Постановка проблемы

1. Эволюция плотности электронов  $F^-(x, p, t)$  и ионов  $F^+(x, p, t)$  достаточно разреженной плазмы в приближении самосогласованного поля описывается системой уравнений Власова. Однако, в некоторых задачах физики плазмы рассматривают модель, в которой одно из уравнений (для плотности электронов или ионов) заменяют гидродинамическим уравнением. Такую модель называют гидродинамической. Рассмотрим краевую задачу для системы уравнений, описывающую такую модель.

В ограниченной области  $\Omega \subset R^2$  с границей  $\partial\Omega$  рассмотрим следующую систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{m} \left( p, \frac{\partial F}{\partial x} \right) + e \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial p} \right) &= 0, \quad t > 0 \\ -\Delta \varphi &= 4\pi e \rho(x, t), \quad \rho(x, t) = \int F(x, p, t) dp - \rho_0, \\ \rho_0 \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x_2} &= -\frac{\rho_0 e}{mc} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ F(x, p, t) &= F_0(x, p), \\ \psi(x, 0) &= \psi_0(x), \\ x \in \Omega, \quad p \in R^2. \end{aligned} \tag{1}$$

где:  $x, p$  – точки двумерного евклидова пространства  $R^2$ ;  $\frac{\partial}{\partial x}$  – оператор градиента,  $\Delta$  – оператор

Лапласа;  $(, )$  – скалярное произведение в  $R^2$ ;  $\psi(x, t)$  – функция тока, через которую выражается скорость ионов

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1},$$

где  $v_1, v_2$  составляющие вектора скорости  $v$ ;  $m, c, \rho_0$  – положительные константы, имеющие физический смысл массы электрона, скорости света и плотности ионов;  $e$  – величина заряда электрона. Функция  $\varphi(x, t)$  – потенциал самосогласованного электрического поля.

Считаем границу  $\partial\Omega$  идеально отражающей частицы плазмы.

### Анализ последних исследований и публикаций

Ранее [1] было анонсировано существование статистических решений – мер Радона, аналогов мер Гиббса на пространстве обобщенных решений системы МГД. Краткое изложение этого вопроса приведено в [2,3]. Более детально результаты представлены в [4,5].

### Формулирование цели исследования

Цель работы состоит в доказательстве существования меры, сосредоточенной на множестве обобщенных решений системы (1), индуцированной исходной вероятностной мерой. Такую меру называют статистическим решением системы (1). При этом следуем концепции статистических решений, предложенной Арсеньевым А.А. [6,7].

### Изложение основного материала исследования

2. Рассмотрим вспомогательную задачу.

Пусть  $u(x)$  – неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция в  $\Omega$ , причем

$$u(x) \rightarrow +\infty, \quad d(x, \partial\Omega) \rightarrow 0,$$

где  $d(A, B)$  – евклидово расстояние между множествами  $A, B \subset R^2$ . Функции, удовлетворяющие сформулированным условиям, называют вспомогательными потенциалами.

Пусть  $T$  – произвольное положительное число,  $B(Q_T)$  – банахово пространство, являющиеся пополнением множества дважды непрерывно дифференцируемых в цилиндре  $Q_T = \Omega \times [0, T]$  функций по норме

$$\|\varphi\| = \sup_{\substack{x \in \Omega \\ 0 \leq t \leq T}} \left( \left| \partial_t \varphi(x, t) \right| + \sum_{|m| \leq 2} \left| D_x^m \varphi(x, t) \right| \right),$$

$$D_x^m = \partial_{x_1}^{m_1} \partial_{x_2}^{m_2}, |m| = m_1 + m_2$$

Символом  $D(\delta, R)$  обозначим подмножество в  $\Omega \times R^2$  вида

$$D(\delta, R) = \{x, p : d(x, \partial\Omega) > \delta, |p| < R\}.$$

Известно [8] утверждение

Теорема 1. Пусть  $\varphi(x, t) \in B(Q_T)$ , функция  $f_0(x, p)$  неотрицательна, дважды непрерывно-дифференцируема по  $x, p$ , и носитель ее содержится в множестве  $D(\delta, R)$ , тогда классическое решение задачи в некотором множестве

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{m} \left( p, \frac{\partial f}{\partial x} \right) + e \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial p} \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial p} \right) = 0 \tag{2}$$

$$f(x, p, 0) = f_0(x, p), \quad x \in \Omega, \quad p \in R^2.$$

Существует и его носитель по  $x, p$ , который содержится в некотором множестве  $D(\delta', R')$ , причем константы  $\delta', R'$  сверху и снизу ограничены величинами, которые от потенциала  $\varphi(x, t)$  зависят только посредством  $\|\varphi\|$ .

Пусть  $f(x, p, t)$  является решением уравнения (2) и выполнены условия теоремы 1.

Положим

$$E(f) = \frac{1}{2m} \int p^2 f(x, p, t) dx dp + \int u(x) f(x, p, t) dx dp,$$

$$N(f) = \int f(x, p, t) dx dp$$

Имеет место

Лемма 1. Справедливы оценки

$$1. \quad 0 \leq f(x, p, t) \leq \sup_{\substack{x \in \Omega \\ p \in R^2}} f_0(x, p),$$

$$2. \quad N(f) = N(f_0), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$3. \quad E(f) \leq \left( E(f_0) + \frac{|e|}{2m} TN(f_0) \sup_{\substack{x \in \Omega \\ 0 \leq t \leq T}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|^2 \right) \exp(|e|T)$$

Пусть  $\{\psi_i\}$  – полная ортонормированная в  $L_2(\Omega)$  система собственных функций оператора Лапласа

$$-\Delta \psi_i = \lambda_i \psi_i, \quad \psi_i(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

и  $\nu > 0$ . Положим

$$G_\nu(x, x') = \sum_{\lambda_i} \lambda_i^{-1} \psi_i(x) \psi_i(x') \exp(-\nu \lambda_i)$$

и определим отображение

$$S : \varphi(x, t) \rightarrow \tilde{\varphi}(x, t)$$

из  $B(Q_T)$  в  $B(Q_T)$  по следующему правилу.

По заданной функции  $\varphi(x, t)$  построим функцию  $F(x, p, t)$  как классическое решение задачи Коши

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{m} \left( p, \frac{\partial F}{\partial x} \right) + e \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial p} \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial p} \right) = 0$$

$$F(x, p, 0) = F_0(x, p), \quad x \in \Omega, \quad p \in R^2, \quad t > 0,$$

где  $F_0(x, p)$  удовлетворяет условиям теоремы 1.

Затем положим

$$\rho(x, t) = \int F(x, p, t) dp - \rho_0$$

$$\tilde{\varphi}(x, t) = 4\pi e \int G_v(x, x') \rho(x', t) dx'$$

Лемма 2. Отображение  $S$  непрерывно.

Лемма 3 Отображение имеет неподвижную точку

Отметим, что неподвижная точка отображения  $S$  удовлетворяет системе

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{m} \left( p, \frac{\partial F}{\partial x} \right) + e \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial p} \right) - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial p} \right) = 0, t > 0$$

$$-\Delta \varphi = 4\pi e \rho(x, t), \quad \rho(x, t) = \int F(x, p, t) dp - \rho_0,$$

$$\rho_0 \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x_2} = -\frac{\rho_0 e \partial \varphi}{m c \partial x}, \tag{3}$$

$$F(x, p, 0) = F_0(x, p), \quad F|_{\partial \Omega} = 0$$

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \psi|_{\partial \Omega} = 0$$

$$x \in \Omega, \quad p \in R^2,$$

где  $F$  – классическое решение задачи Коши для первого уравнения, а  $\psi$  – обобщенное решение последнего уравнения, определение которого будет дано ниже. Существование обобщенного решения для последнего уравнения доказано в [9].

3. Рассмотрим совокупность всех функций, имеющих в  $\bar{\Omega}$  непрерывное по  $x_1, x_2$  до порядка  $k$  включительно, и введем в эту совокупность норму

$$\|\psi\|_{W_p^{(k)}(\Omega)} = \left\{ \int \left[ \sum_{l=0}^k \sum_{\alpha_1, \alpha_2=1}^r \left( \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_{\alpha_1} \partial x_{\alpha_2}} \right)^2 \right]^{\frac{p}{2}} \right\}^{1/p},$$

Считая  $p > 1$ .

Замыкание этого множества по указанной норме назовем пространством  $W_p^{(k)}(\Omega)$ .

Обозначим через  $\mathring{D}(\Omega)$  – замыкание совокупности всех непрерывно-дифференцируемых в  $\Omega$  функций, равных нулю вблизи границы  $\Omega$ , в норме  $W_2^{(1)}(\Omega)$ . В силу полноты пространства  $W_2^{(1)}(\Omega)$ , функции из  $\mathring{D}(\Omega)$  принадлежат  $W_2^{(1)}(\Omega)$ , и  $\mathring{D}(\Omega)$  является подпространством пространства  $W_2^{(1)}(\Omega)$ .

Рассмотрим теперь линейное пространство  $U$  двухкомпонентных функций

$$W(x, p) = \{F(x, p), \psi(x)\}, \quad x \in \Omega, \quad p \in R^2$$

и превратив его в гильбертово, положив его по определению

$$\langle w_1, w_2 \rangle_U = \langle F_1, F_2 \rangle + (\psi_1, \psi_2)_{W_2^1(\Omega)},$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle_U$ ,  $(\cdot, \cdot)_{W_2^1(\Omega)}$  – скалярные произведения в  $L_2(\Omega \times R^2)$  и  $W_2^{(1)}(\Omega)$  соответственно. Определим на  $U$  функционалы:

$$N(w) = \int F(x, p) dx dp,$$

$$B(w) = \text{vrai sup}_{x \in \Omega, p \in R^2} F(x, p),$$

$$l(w) = \text{vrai inf}_{x \in \Omega, p \in R^2} F(x, p),$$

$$\rho(w)(x) = \int F(x, p) dp - \rho_0,$$

$$\varepsilon_\nu(w) = \frac{1}{2m} \int p^2 F(x, p) dx dp + \frac{1}{2} \int \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 dx + 2\pi e^2 \int G_\nu(x, x') \rho(w)(x) \rho(w)(x') dx dx'$$

$$\varepsilon(w) = \lim_{\nu \rightarrow +0} \varepsilon_\nu(w).$$

Лемма 3. Множества вида

$$K_0 = \left\{ w : N(w) = c_1, B(w) \leq c_2, l(w) \geq 0, \varepsilon_\nu(w) \leq c_3, \psi|_{\partial\Omega} = 0, \int \nabla \psi \nabla \Phi dx = \int \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx \right\},$$

где  $\Phi \in \overset{\circ}{D}(\Omega)$  – компакты в слабой топологии  $U$ .

Компакты, описанные в лемме 3 будем называть стационарными компактами.

Символом  $C(R^1, U)$  обозначим топологическое векторное пространство непрерывных функций  $R^1 \rightarrow U$  слабая топология. База окрестностей в  $C(R^1, U)$  состоит из множеств вида

$$L(\varepsilon, \{w_i\}) = \left\{ w_i : \sup_{0 \leq t \leq T} | \langle w, w_i \rangle_U | < \varepsilon \right\},$$

где  $\varepsilon > 0$ ,  $\{w_i\}$  – произвольное конечное подмножество из  $U$ ,  $T < \infty$ .

Лемма 4. Подмножество  $K \subset C(R^1, U)$ , состоящее из всех элементов, удовлетворяющих условиям:

1.  $\forall w \in K, |t| \leq T, w(t) \in K_0$ , где  $K_0$  – стационарный компакт в  $U$ ;
2. Каков бы не был элемент  $w_\alpha \in U$  с финитными компонентами  $\{F_\alpha, \psi_\alpha\}$

$$\forall w \in K : | \langle w(t + \Delta t) - w(t), w_\alpha \rangle_U | \leq C(w_\alpha) |\Delta t|$$

компактно в  $C(R^1, U)$ .

Компакты описанного в лемме вида будем называть эволюционными компактами.

Лемма 5. Пусть  $K$  – эволюционный компакт,  $w_n = \{F_n, \psi\} \subset K, w_n \rightarrow w = \{F, \psi\}$  в  $C(R^1, U)$ .

Тогда  $F_n \rightarrow F$  слабо равномерно по  $t$  в  $L^q(\Omega \times R^2)$ ,  $1 \leq q < \infty$ .

4. Напомним, что под решением регулированной задачи (3) понимаем пару  $\{F, \psi\}$ , где  $F$  – классическое решение задачи первого уравнения (3), а  $\psi$  – обобщенное решение последнего уравнения в следующем смысле: функция  $\psi(x, t)$  при каждом фиксированном  $t$  принадлежит  $K_0$  и удовлетворяет следующему интегральному тождеству

$$-\int \Delta \psi_0 \Phi(x, 0) dx + \int \int_0^T \left[ -\Delta \psi \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Delta \psi \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) \right] = \int \int_0^T \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Phi dx dt$$

для любой гладкой в  $Q_T = \Omega \times [0, T]$  функции  $\Phi(x, t)$ , причем  $\Phi(x, T) = \Phi|_{\partial\Omega} = 0$ .

Лемма 6. Пусть выполнены условия теоремы 1 и функция  $w(t) = \{F, \psi\}$  является решением системы (3), тогда справедливы следующие оценки

$$\varepsilon_\nu(w) + \int u(x)(F(x, p, t) + N_0) dx dp = \varepsilon_\nu(w|_{t=0}) + \int u(x)(F_0(x, p) + N_0) dx dp;$$

$$N(w) = N(w|_{t=0});$$

$$l(w) \geq 0;$$

$$B(w) \leq (w|_{t=0}).$$

Построим теперь последовательность вспомогательных потенциалов  $u^{(n)}(x)$ , которые удовлетворяют следующим условиям:

1.  $u^{(n+1)}(x) \leq u^{(n)}(x)$ ,

2. для любого компакта  $\Omega_0 \subset \Omega$ , существует такое  $n(\Omega_0)$ , что  $u^{(n)}(x) \equiv 0$  при  $x \in \Omega_0$  и  $n > n(\Omega_0)$ ;

3.  $u^{(n)}(x) \equiv 0$ ,  $\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} \equiv 0$  при  $x \in \sup p(w_0)_n$ .

Затем, фиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$  и  $\nu \in (0, \nu(\varepsilon))$ , где  $\nu(\varepsilon)$  удовлетворяет условию

$$\varepsilon_\nu(w_n) \leq \varepsilon(w_0) + \varepsilon.$$

Пусть  $w_n^\nu = \{F_n, \psi\}$  – решение системы (3), в которой  $u = u^{(n)}$ .

Лемма 7. Пусть  $w_n^\nu = \{F_n, \psi\}$  – построенная выше последовательность. Тогда для любого элемента  $w = \{\Phi^F, \Phi^\psi\}$  с финитными компонентами существует такая независимая от  $n$  и  $\nu$  константа, что

$$|\langle w_n^\nu(t + \Delta t) - w_n^\nu(t), w \rangle_U| \leq C(w) |\Delta t|.$$

Из леммы 7 вытекает, что последовательность  $w_n^\nu(t)$  в некотором независимом от  $n$  и  $\nu$  эволюционном компакте. Отсюда следует

Лемма 8. Из последовательности  $w_n^\nu$  можно выбрать сходящуюся в  $C(R^1, U)$  подпоследовательность.

5. Определение 1. Вектор-функцию  $\Phi(x, p, \tau) = \{\Phi^F(x, p, \tau), \Phi^\psi(x, \tau)\}$  будем называть пробной, если:

1.  $\Phi(x, p, \tau)$  – непрерывно-дифференцируема по  $x, p, \tau$ ;

2. Ограничена вместе с производными в  $\Omega \times R^2 \times [0; T]$ ;

3. Существует такая окрестность  $O(\partial\Omega)$  границы  $\Omega$ , что

$$\frac{\partial \Phi^F(x, p, \tau)}{\partial p} \equiv 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad p \in R^2, \quad 0 \leq \tau \leq T$$

4.  $\Phi^\psi(x, T) = 0$ ,  $\Phi^\psi(x, \tau)|_{\partial\Omega} = 0$ .

Лемма 9. Функция  $w^\nu = \{F^\nu, \psi\}$  удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int \left[ \Phi^F(x, p, t) F(x, p, t) - \Phi^F(x, p, 0) F_0(x, p) \right] dx dp = \\ & = \int_0^t d\tau \int F^\nu(x, p, \tau) \left[ \frac{\partial \Phi^F}{\partial \tau} + \frac{1}{m} \left( p, \frac{\partial \Phi^F}{\partial x} \right) - e \left( 4\pi e \frac{\partial}{\partial x} G_\nu \rho(w), \frac{\partial \Phi^F}{\partial x} \right) \right] dx dp = 0, \end{aligned}$$

$$\rho(w) = \int F^\nu dp - \rho_0, \quad 0 < t < T$$

и соотношениям

$$N(w^v) = N(w_0), \quad B(w^v) \leq B(w_0), \quad e(w^v) \geq 0, \\ \varepsilon(w^v) \leq \varepsilon(w_0) + \varepsilon.$$

Приведенные выше рассуждения позволяют из последовательности  $w^{(v)}(t)$  выбрать сходящуюся в  $C(R^1, U)$  подпоследовательность. Обозначим через  $w(t)$  предел такой последовательности. Получим, что элемент  $w(t) = \{F(x, p, t), \psi(x, p, t)\}$  удовлетворяет интегральным тождествам

$$\int \left[ \Phi^F(x, p, t)F(x, p, t) - \Phi^F(x, p, 0)F_0(x, p) \right] dx dp = \\ = \int_0^t d\tau \int F(x, p, \tau) \left[ \frac{\partial \Phi^F}{\partial \tau} + \frac{1}{m} \left( p, \frac{\partial \Phi^F}{\partial x} \right) - \right. \\ \left. - e \left( 4\pi e \frac{\partial}{\partial x} \int G_0(x, x') [F(x', p', \tau) - \rho_0] dx' dp'_x + \frac{\partial \Phi^F}{\partial p} \right) \right] dx dp, \quad 0 < t < T. \\ -\rho_0 \int \Delta \psi_0 \Phi^\psi(x, 0) dx + \int_0^t \int \left[ -\Delta \psi \frac{\partial \Phi^\psi}{\partial t} + \Delta \psi \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi^\psi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi^\psi}{\partial x_1} \right) \right] dx dt = 0, \quad 0 < t < T.$$

Определение 2. Обобщенным решением системы (1) называем такой элемент  $w = \{F, \psi\} \in K$ , где  $K$  – эволюционный компакт в  $C(R^1, U)$ , который для любых пробных функций удовлетворяет интегральным тождествам, приведенным в лемме 9.

Таким образом доказана

Теорема 2. Пусть граница  $\partial\Omega$  области дважды непрерывно-дифференцируема, и пусть элемент  $w_0 = \{F_0, \psi_0\} \in K_0$ , где  $K_0$  – стационарный компакт в  $U$ . Тогда на любом интервале  $[0, T]$  существует обобщенное решение системы (1).

6. В гильбертовом пространстве  $U$  введем оператор  $A$ , который на функции с финитными компонентами действует так

$$A(w)^F = -\frac{1}{m} \left[ \left( p, \frac{\partial F}{\partial x} \right) - e \left( 4\pi e \frac{\partial}{\partial x} \int G_0(x, x') [F(x', p') - \rho_0] dx' dp' \right), \frac{\partial F}{\partial p} \right], \\ A(w)^F = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x_2}.$$

Пусть  $\Lambda$  – подмножество из  $C(R^1, U)$  состоящее из элементов с непрерывно-дифференцируемыми и ограниченными по  $x, p, \tau$  компонентами  $\Phi^F(x, p, \tau)$ ,  $\Phi^\psi(x, \tau)$ , причем каждая функция  $\Phi^F(x, p, \tau)$  и  $\Phi^\psi(x, \tau)$  имеет компактный носитель по  $\tau$  и для  $\Phi^F(x, p, \tau)$  найдется такая окрестность  $O(\partial\Omega)$  границы  $\partial\Omega$ , что

$$\frac{\partial \Phi^F}{\partial p} \equiv 0, \quad x \in O(\partial\Omega), \quad p \in R^2, \quad -\infty \leq \tau \leq +\infty, \\ \text{а } \Phi^\psi(x, \tau) = 0 \text{ и } \Phi^\psi(x, \tau)|_{\partial\Omega} = 0$$

Пусть  $K_0$  – стационарный компакт, а  $K$  – эволюционный компакт.

Определение 3. Неотрицательную меру Радона  $\mu$  на компакте  $K$  мы называем статистическим решением системы (1), если она удовлетворяет требованиям

$$\forall \tilde{f} \in C(K), \Phi \in \Lambda :$$

$$\int_K \tilde{f}(w) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \Phi'_\tau, w \rangle_U + \langle \Phi, A(w) \rangle_U \right] d\mu = 0$$

Все сказанное выше позволяет сформулировать основной результат работы

Теорема 3. Если  $K$  – достаточно большой эволюционный компакт, то на  $K$  существует статистическое решение системы (1) для любой вероятностной меры  $\mu_0$ .

#### Выводы

Таким образом, доказана теорема о существовании меры, сосредоточенной на множестве обобщенных решений системы (1), индуцированной исходной вероятностной мерой. Такую меру называют статистическим решением системы (1).

#### Список использованной литературы.

1. Харченко А.П., Поклонский Е.В. О мерах, порождаемых системой уравнений магнитной гидродинамики. *Сборник тезисов докладов международной конференции "Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях"*. Харьков. 2011. С.251-252.
2. Харченко А.П., Поклонский Е.В. Однородные статистические решения систем МГД. *Сборник тезисов докладов международной конференции «Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях. Тараповские чтения -2012»*. Харьков. 2012. С.123.
3. Харченко А.П., Поклонский Е.В., Немцева А.В. Описание множества статистических решений системы уравнений магнитной гидродинамики. *Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. Воронеж: Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова*. 2015. Т.3, № 8-4 (9-14). С.318-322.
4. Аршава Е.А., Харченко А.П., Поклонский Е.В., Бабаева Е.В. Инвариантные меры системы уравнений магнитной гидродинамики. *Вестник ХНТУ*. Херсон. 2017, №3(62), Т.1. С.13-17.
5. Аршава Е.А., Харченко А.П., Поклонский Е.В., Бабаева Е.В. Инвариантные меры системы уравнений магнитной гидродинамики. *Вестник ХНТУ*. Херсон. 2018. №3(66), Т.1.С.11-16.
6. Арсеньев А.А. Построение турбулентной меры для системы уравнений Навье-Стокса. *ДАН СССР*. 1975. Т. 225, № 1. С. 18–20.
7. Арсеньев А.А. О статистических решениях нелинейного волнового уравнения. – М.: *Институт прикладной математики АН СССР*, 1978. (Препринт №81).
8. Арсеньев А.А. О существовании обобщенных и стационарных статистических решений системы уравнений Власова в ограниченной области. М.: *Институт прикладной математики АН СССР*, 1976. (Препринт №107).
9. Юдович В.И. Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*,3:6 (1963) –С.1032-1066.

#### References

1. Harchenko A.P., Poklonskiy E.V. O merah, porozhdaemyih sistemoy uravneniy magnitnoy gidrodinamiki. *Sbornik tezisev dokladov mezhdunarodnoy konferentsii "Sovremennyye problemy matematiki i ee prilozheniya v estestvennyih naukah i informatsionnyih tehnologiyah"*. Harkov. 2011. S.251-252.
2. Harchenko A.P., Poklonskiy E.V. Odnorodnyie statisticheskie resheniya sistem MGD. *Sbornik tezisev dokladov mezhdunarodnoy konferentsii «Sovremennyye problemy matematiki i ee prilozheniya v estestvennyih naukah i informatsionnyih tehnologiyah. Tarapovskie chteniya -2012»*. Harkov. 2012. C.123.
3. Harchenko A.P., Poklonskiy E.V., Nemtseva A.V. Opisaniye mnozhestva statisticheskikh resheniy sistemy uravneniy magnitnoy gidrodinamiki. *Aktualnyie napravleniya nauchnyih issledovaniy XXI veka: teoriya i praktika. – Voronezh: Voronezhskiy gosudarstvenniy lesotekhnicheskii universitet im. G.F. Morozova. – 2015. T.3, # 8-4 (9-14). S.318-322.*
4. Arshava E.A., Harchenko A.P., Poklonskiy E.V., Babaeva E.V. Invariantnyie meryi sistemy uravneniy magnitnoy gidrodinamiki. *Vestnik HNTU. Herson. 2017, #3(62), T.1. S.13-17.*
5. Arshava E.A., Harchenko A.P., Poklonskiy E.V., Babaeva E.V. Invariantnyie meryi sistemy uravneniy magnitnoy gidrodinamiki. *Vestnik HNTU. Herson. 2018. #3(66), T.1.S.11-16.*
6. Arsenev A.A. Postroenie turbulentoynoy meryi dlya sistemy uravneniy Nave-Stoksa. *DAN SSSR*. 1975. T. 225, # 1. S. 18–20.
7. Arsenev A.A. O statisticheskikh resheniyah nelineynogo volnovogo uravneniya. – M.: *Institut prikladnoy matematiki AN SSSR*, 1978. (Preprint #81).
8. Arsenev A.A. O suschestvovanii obobschennyih i statsionarnyih statisticheskikh resheniy sistemy uravneniy Vlasova v ogranichennoy oblasti. M.: *Institut prikladnoy matematiki AN SSSR*, 1976. (Preprint #107).
9. Yudovich V.I. Nestatsionarnyye techeniya idealnoy neszhimaemoy zhidkosti. *Zh. vyichisl. matem. i matem. fiz.*,3:6 (1963) –S.1032-1066.



УДК 536.24

М. Г. БЕРДНИК

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», Україна

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ І МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛООБМІНУ ОДНОПОРОЖНИННОГО ГІПЕРБОЛОЇДА ОБЕРТАННЯ

*Мета.* Побудова нової узагальненої просторової математичної моделі розрахунку температурних полів в тонкостінному однопорожнинному гіперболоїді обертання, що обертається з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді змішаної крайової задачі математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності, а також знаходження рішень отриманої крайової задачі.

*Методика.* Використання відомих інтегральних перетворень Лапласа, Фур'є, а також розробленого нового інтегрального перетворення для двовимірного кінцевого простору.

*Результати.* Знайдено нестационарне температурне поле в тонкостінному однопорожнинному гіперболоїді обертання, який обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі  $OZ$ , з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла за умови, що теплофізичні властивості тіла є постійними, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура тіла є постійною, а на зовнішній поверхні тіла відомі значення температури і теплових потоків.

*Наукова новизна.* Вперше побудована узагальнена математична модель розрахунку температурних полів в тонкостінному однопорожнинному гіперболоїді у вигляді змішаної крайової задачі для гіперболічного рівняння теплопровідності. В роботі побудовано нове інтегральне перетворення для двовимірного кінцевого простору, із застосуванням якого знайдено температурне поле в вигляді збіжних рядів по функціям Фур'є.

*Практична значимість.* Знайдений розв'язок узагальненої крайової задачі теплообміну у тонкостінному однопорожнинному гіперболоїді може знайти застосування при модулюванні температурних полів, які виникають в градирнях подібної форми, виконані з металопрокату або збірного залізобетону, які широко використовуються в атомній енергетиці, хімічній і металургійній промисловості а також в градирнях зі склопластику які знаходять застосування на цукрових заводах, заводах з переробки м'яса, риби, фруктів і овочів, молокозаводах, пивоварнях і інших підприємствах.

*Ключові слова:* комплексний ряд Фур'є, змішана крайова задача, інтегральне перетворення Лапласа, час релаксації

М. Г. БЕРДНИК

Национальный технический университет «Днепро́вская политехника», Украина

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛООБМЕНА ОДНОПОЛОСТНОГО ГИПЕРБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ

*Цель.* Построение новой обобщенной пространственной математической модели расчета температурных полей в тонкостенном однополостном гиперболоиде вращения, который вращающимся с постоянной угловой скоростью, с учетом конечной скорости распространения тепла в виде смешанной краевой задачи математической физики для гиперболического уравнения теплопроводности, а также нахождение решений полученной краевой задачи.

*Методика.* Использование известных интегральных преобразований Лапласа, Фурье, а также разработанного нового интегрального преобразования для двумерного конечного пространства.

*Результаты.* Найдено нестационарное температурное поле в тонкостенном однополостном гиперболоиде вращения, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси  $OZ$ , с учетом конечной скорости распространения тепла при условии, что теплофизические свойства тела являются постоянными, а внутренние источники тепла отсутствуют. В начальный момент времени температура тела является постоянной, а на наружной поверхности тела известны значения температуры и тепловых потоков.

*Научная новизна.* Впервые построена обобщенная математическая модель расчета температурных полей в тонкостенном однополостном гиперболоиде в виде смешанной краевой задачи для гиперболического уравнения теплопроводности. В работе построено новое интегральное преобразование для двумерного конечного пространства, с применением которого найдено температурное поле в виде сходящихся рядов по функциям Фурье.

*Практическая значимость.* Найденное решение обобщенной краевой задачи теплообмена в тонкостенном однополостном гиперболоиде может найти применение при моделировании температурных полей, возникающих в градирнях образной формы, выполненные из металлопроката или сборного желе-



зобетона, которые широко используются в атомной энергетике, химической и металлургической промышленности, а также в градирнях с стеклопластика, которые находят применение на сахарных заводах, заводах по переработке мяса, рыбы, фруктов и овощей, молокозаводах, пивоварнях и других предприятиях.

*Ключевые слова:* комплексный ряд Фурье, смешанная краевая задача, интегральное преобразование Лапласа, время релаксации.

M.H. Berdnyk

National Technical University Dnipro Polytechnic, Dnipro, Ukraine

### THE MATHEMATIC MODEL OF AND METHOD FOR SOLVING A GENERALIZED MIXED BOUNDARY PROBLEM OF HEAT EXCHANGE FOR THE EMPTY ISOTROPIC ROTARY HYPERBOLOID

**Objective.** Building a new generalized spatial mathematical model for calculating temperature fields in a thin-walled single-cavity hyperboloid of rotation, which rotates with a constant angular velocity, taking into account the final rate of heat propagation in the form of a mixed boundary value problem of mathematical physics for the hyperbolic heat equation, and finding solutions to the resulting boundary value problem.

**Method.** The use of well-known integral Laplace transforms, Fourier transform, as well as the developed new integral transform for a two-dimensional finite space.

**Results.** A non-stationary temperature field was found in a thin-walled single-cavity hyperboloid of rotation that rotates at a constant angular velocity around the OZ axis, taking into account the finite rate of heat propagation, provided that the thermal properties of the body are constant and there are no internal heat sources. At the initial moment of time, the body temperature is constant, and the values of temperature and heat fluxes are known on the outer surface of the body.

**Scientific novelty.** For the first time, a generalized mathematical model for calculating temperature fields in a thin-walled single-cavity hyperboloid was constructed in the form of a mixed boundary value problem for a hyperbolic heat equation. A new integral transform for a two-dimensional finite space was constructed in the work, using which a temperature field was found in the form of convergent series in Fourier functions.

**Practical significance.** The found solution of the generalized boundary value problem of heat transfer in a thin-wall single-cavity hyperboloid can be applied in modeling temperature fields arising in cooling towers of a figurative shape made of rolled metal or prefabricated ferro-concrete, which are widely used in atomic energy, chemical and metallurgical industry, and also in cooling towers with fiberglass, which are used in sugar mills, factories for the processing of meat, fish, fruits and vegetables, dairies, breweries and other prep you two

*Keywords:* complex Fourier series, mixed boundary value problem, Laplace integral transform, relaxation time.

**Постановка проблеми.** Застосування гіперболічних поверхонь в будівельній справі стало великим технічним проривом. В роботі [1] узагальнені найважливіші їх властивості. По-перше, вони приємні для людського ока. Ажурний каркас вежі на основі однопорожнинного гіперболоїда обертання, незвичайна форма оболонки на основі гіперболічного параболоїда дуже ефектно виглядають, а також гармонійно вписуються в навколишній ландшафт. По-друге, геометричні властивості цих поверхонь обґрунтовують їх конструкційні якості. Можливість створення каркаса з прямих балок - найголовніша особливість споруд на основі гіперболічних поверхонь. По-третє, майже всі поверхні, які утворюються в результаті перетину гіперболічних поверхонь з іншими поверхнями, зберігають їх властивості - жорсткість і міцність. З цієї причини в одній споруді можна поєднувати різні види поверхонь.

Градирні подібної форми, виконані з металопрокату або збірного залізобетону, армованого в напрямку меридіанів і паралелей, широко використовуються в атомній енергетиці, хімічній і металургійній промисловості. Градирні зі склопластику знаходять застосування на цукрових заводах, заводах з переробки м'яса, риби, фруктів і овочів, молокозаводах, пивоварнях і інших підприємствах. Склопластик проявляє високу стійкість до високих температур, ультрафіолетового випромінювання і стирання, що дозволяє використовувати градирні навіть в найважчих умовах експлуатації.

Практика проектування споруд на основі гіперболічних поверхонь, потребує аналізу їх термоміцності, термовипучиванія.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Як показує огляд літератури теплообмін в тонкостінних однопорожнинних гіперболоїдів вивчений ще недостатньо [2]. Показано, що чисельні методи дослідження нестационарних неосесиметричних задач теплообміну, які обертаються, є не завжди ефективними, якщо мова йде про обчислення при великих швидкостях обертання.

Так, доводиться [2], що умови стійкості обчислень в методі скінчених елементів і методі кінцевих різниць, що застосовуються до розрахунку нестационарних неосесиметричних температурних полів циліндрів, які обертаються, визначаються аналогічними характеристиками. Ці умови мають вигляд:

$$1 - \frac{\Delta F_0}{\Delta \varphi^2} \geq 0 \quad \text{і} \quad \frac{1}{\Delta \varphi} - \frac{Pd}{2} \geq 0.$$

Якщо  $Pd = 10^5$ , що відповідає кутовій швидкості обертання металевого циліндра  $\omega = 1,671 \text{ сек}^{-1}$  радіусом 100 мм, змінні  $\Delta \varphi$  і  $\Delta F_0$  повинні бути підпорядковані таким умовам:

$$\Delta \varphi \leq 2 \cdot 10^{-5} \quad \text{і} \quad \Delta F_0 \leq 2 \cdot 10^{-10}.$$

Для рівномірно охолоджуваного циліндра за умови  $Bi = 5$  час необхідний для того, щоб температура досягла 90% стаціонарного стану, дорівнює  $Fo \approx 0.025$  [2]. Це означає, що потрібно принаймні здійснити  $1.3 \cdot 10^8$  операцій по часу для того, щоб було досягнуто стаціонарний розподіл температури.

Більше того, потрібно відзначити, що протягом одного циклу обчислень потрібно здійснити  $3.14 \cdot 10^5$  обчислень, так як внутрішній стан у кільці характеризується  $3.14 \cdot 10^5$  точками. У результаті видно, що число обчислень, необхідних для отримання чисельного результату видається нереальним.

Тому, для вирішення крайових задач, які виникають при математичному моделюванні тривимірних нестационарних процесів теплообміну в тілах, які обертаються, будемо застосовувати інтегральні перетворення.

**Мета статті.** Побудова нової просторової математичної моделі розрахунку температурних полів в тонкостінному однопорожнинному гіперboloїді обертання з відомими рівняннями твірних ліній в циліндричній системі координат, що обертається з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді змішаної крайової задачі математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності, а також знаходження рішень отриманої крайової задачі.

**Постановка задачі.** Розглянемо розрахунок температурного поля у тонкостінному однопорожнинному гіперboloїді обертання (рис. 1) який обмежений двома торцями (при  $z=-c$  і  $z=c$ ). Рівняння твірних ліній у циліндричній системі координат  $(\rho, \varphi, z)$  для зовнішній і внутрішній бічних поверхнях відповідно є:

$$r = b \left( 1 + \frac{z^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad r = b_1 \left( 1 + \frac{z^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{де } b_1 < b.$$

Гіперboloїд обертається навколо осі OZ з постійною кутовою швидкістю  $\omega$ , а швидкість поширення тепла є відомою величиною.

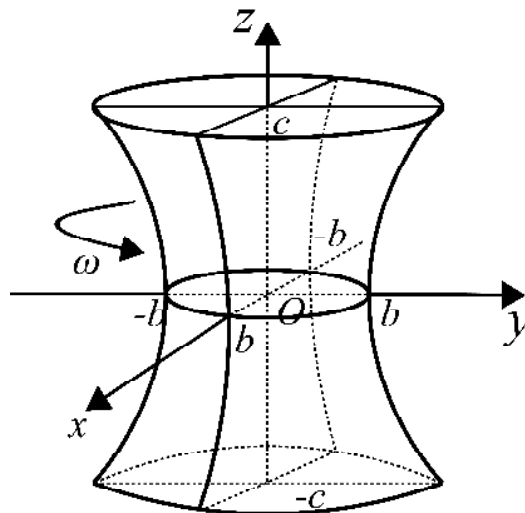


Рис. 1. Тонкостінний однопорожнинний гіперboloїд обертання.

Теплофізичні властивості тіла не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура тіла постійна  $G_0$ , а на зовнішній і внутрішній бічних поверхнях

тіла відоме значення температури  $V(\varphi, z)$  і  $V_1(\varphi, z)$  відповідно. На торцях відомі значення теплового потоку  $G_1(r, \varphi)$  і  $G_2(r, \varphi)$  при  $z=-c$  і  $z=c$  відповідно.

**Викладення основного матеріалу дослідження** В [2] отримано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла. Згідно [2] узагальнене рівняння балансу енергії твердого тіла, яке обертається, з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі OZ, теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні приймає вигляд:

$$\gamma c_t \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} + \omega \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \tau_r \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \omega \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi \partial t} \right] \right\} = \lambda \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right], \quad (1)$$

де  $\gamma$  – щільність середовища;  $c_t$  – питома теплоємність;  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності;  $T(\rho, \varphi, z, t)$  – температура середовища;  $t$  – час;  $\tau_r$  – час релаксації.

Математично задача визначення температурного поля циліндра складається в інтегруванні диференціального рівняння теплопровідності (1) в області

$D = \{(r, \varphi, z, t) | r \in (\zeta_1(z), \zeta_2(z)), \varphi \in (0, 2\pi), z \in (0, h), t \in (0, \infty)\}$ , що з урахуванням прийнятих допущень запишеться у виді:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \omega \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + \tau_r \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \tau_r \omega \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi \partial t} = a \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right] \quad (2)$$

с початковими умовами

$$\theta(r, \varphi, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta(r, \varphi, z, 0)}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

і граничними умовами

$$\theta(\zeta_1(z), \varphi, z, t) = \Psi(\varphi, z), \quad \theta(\zeta_2(z), \varphi, z, t) = G(\varphi, z), \quad (4)$$

$$\begin{cases} \int_0^t \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0} e^{\frac{\zeta-t}{\tau_r}} d\zeta = \Theta(r, \varphi) \\ \int_0^t \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=h} e^{\frac{\zeta-t}{\tau_r}} d\zeta = \Lambda(r, \varphi), \end{cases} \quad (5)$$

де  $\theta = \frac{T(r, \varphi, z, t) - T_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}}$  – відносна температура тіла;  $a = \frac{\lambda}{c_t \gamma}$  – коефіцієнт температуропровідності;

$$\zeta_1(z) = b \left( 1 + \frac{(z+c)^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad \zeta_2(z) = b_1 \left( 1 + \frac{(z+c)^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad T_{\max} = \max_{\varphi, z} \{ V(\varphi, z), V_1(\varphi, z) \};$$

$$T_{\min} = \max_{\varphi, z} \{V(\varphi, z), V_1(\varphi, z), G_0\}; \quad \Lambda(r, \varphi) = \frac{G_2(r, \varphi)\tau_r}{\lambda(T_{\max} - T_{\min})}; \quad h = 2c;$$

$$\Psi(\varphi, z), G(\varphi, z), \Theta(r, \varphi), \Lambda(r, \varphi) \in C(0, 2\pi).$$

Тоді рішення крайової задачі (2)-(5)  $\theta(r, \varphi, z, t)$  є двічі неперервно диференційованим по  $r, \varphi, z$  і один раз по  $t$  в області  $D$  і неперервним на  $\bar{D}$  [3], тобто  $\theta(r, \varphi, z, t) \in C^{2,1}(D) \cap C(\bar{D})$ , а функції  $G(\varphi, z), \Psi(\varphi, z), \Theta(r, \varphi), \Lambda(r, \varphi), \theta(r, \varphi, z, t)$  можуть бути розкладені в комплексний ряд Фур'є [3]:

$$\begin{pmatrix} \theta(r, \varphi, z, t) \\ G(\varphi, z) \\ \Psi(\varphi, z) \\ \Theta(r, \varphi) \\ \Lambda(r, \varphi) \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \theta_n(r, z, t) \\ G_n(z) \\ \Psi_n(z) \\ \Theta_n(r) \\ \Lambda_n(r) \end{pmatrix} \cdot \exp(in\varphi), \quad (6)$$

де

$$\begin{pmatrix} \theta_n(r, z, t) \\ G_n(z) \\ \Psi_n(z) \\ \Theta_n(r) \\ \Lambda_n(r) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \theta(r, \varphi, z, t) \\ G(\varphi, z) \\ \Psi(\varphi, z) \\ \Theta(r, \varphi) \\ \Lambda(r, \varphi) \end{pmatrix} \cdot \exp(-in\varphi) d\varphi;$$

$$\begin{aligned} \theta_n(r, z, t) &= \theta_n^{(1)}(r, z, t) + i\theta_n^{(2)}(r, z, t); & G_n(z) &= G_n^{(1)}(z) + iG_n^{(2)}(z); & \Psi_n(z) &= \Psi_n^{(1)}(z) + i\Psi_n^{(2)}(z); \\ \Theta_n(\rho) &= \Theta_n^{(1)}(\rho) + i\Theta_n^{(2)}(\rho); & \Lambda_n(\rho) &= \Lambda_n^{(1)}(\rho) + i\Lambda_n^{(2)}(\rho). \end{aligned}$$

З огляду на те, що  $\theta(r, \varphi, z, t)$  функція дійсна, обмежимося надалі розглядом  $\theta_n(r, z, t)$  для  $n=0, 1, 2, \dots$ , тому що  $\theta_n(r, z, t)$  і  $\theta_{-n}(r, z, t)$  будуть комплексно спряженими [3]. Підставляючи значення функцій з (6) у (2)-(5), у результаті одержимо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial \theta_n^{(i)}}{\partial t} + g_n^{(i)} \theta_n^{(m_i)} + \tau_r \frac{\partial^2 \theta_n^{(i)}}{\partial t^2} + \tau_r g_n^{(i)} \frac{\partial \theta_n^{(m_i)}}{\partial t} = a \left[ \frac{\partial^2 \theta_n^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_n^{(i)}}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \theta_n^{(i)} + \frac{\partial^2 \theta_n^{(i)}}{\partial r^2} \right] \quad (7)$$

с початковими умовами

$$\theta_n^{(i)}(r, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta_n^{(i)}(r, z, 0)}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

і граничними умовами

$$\theta_n^{(i)}(\zeta_1(z), z, t) = \Psi_n^{(i)}(z) \quad \theta_n^{(i)}(\zeta(z), z, t) = G_n^{(i)}(z), \quad (9)$$

$$\begin{cases} \int_0^t \frac{\partial \tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial r} \Big|_{z=0} e^{\tau r} d\zeta = \Theta_n^{(i)}(r) \\ \int_0^t \frac{\partial \tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial r} \Big|_{z=1} e^{\tau r} d\zeta = \Lambda_n^{(i)}(r), \end{cases} \quad (10)$$

де  $g_n^{(1)} = -\omega n$ ;  $g_n^{(2)} = \omega n$ ;  $m_1 = 2$ ,  $m_2 = 1$ ;  $i = 1, 2$ .

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (7) з умовами (8)-(10) інтегральне перетворення Лапласа[4]:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} d\tau.$$

В результаті одержуємо систему диференціальних рівнянь:

$$s \tilde{\theta}_n^{(i)} + g_n^{(i)} (\tilde{\theta}_n^{(m_i)} + \tau_r s \tilde{\theta}_n^{(m_i)}) + \tau_r s^2 \tilde{\theta}_n^{(i)} = a \left[ \frac{\partial^2 \tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \tilde{\theta}_n^{(i)} + \frac{\partial^2 \tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial z^2} \right] \quad (11)$$

с граничними умовами

$$\tilde{\theta}_n^{(i)} \Big|_{r=\zeta_1(z)} = \tilde{\Psi}_n^{(i)}(z), \quad \tilde{\theta}_n^{(i)} \Big|_{r=\zeta(z)} = \tilde{G}_n^{(i)}(z), \quad (12)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial z} \Big|_{z=0} = \tilde{\Theta}_n^{(i)}(r), \quad \frac{\partial \tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial z} \Big|_{z=h} = \tilde{\Lambda}_n^{(i)}(r), \quad (13)$$

де  $\tilde{\Theta}_n^{(i)}(r) = \tilde{\Theta}_n^{(i)}(r) \cdot \left(1 + \frac{1}{s\tau_r}\right)$ ;  $\tilde{\Lambda}_n^{(i)}(r) = \tilde{\Lambda}_n^{(i)}(r) \cdot \left(1 + \frac{1}{s\tau_r}\right)$ ,  $(i = 1, 2)$ .

Для розв'язання крайової задачі (11)-(13) застосовуємо інтегральне перетворення:

$$\tilde{f}(\mu_{n,k}) = \iint_D \phi(r, z, \mu_{n,k}) \cdot r \cdot f(r, z) d\sigma \quad (14)$$

де  $\phi(r, z, \mu_{n,k})$ ,  $\mu_{n,k}$  – власні функції і власні значення.

Класична проблема власних значень і власних функцій формулюється як задача про визначення значень числових параметрів (власні значення)  $\mu_{n,k}$  і функцій (власні функції)  $\phi(x, y, \mu_{n,k})$ , які тотожно нерівні нулю в області  $\Xi = \{(x, y) \mid y \in (0, h), x \in (\zeta_1(z), \zeta(z))\}$ , та задовольняють рівнянню:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{n^2}{x^2} \phi + \mu_{n,k} \cdot \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (15)$$

і допоміжним умовам

$$\phi(\zeta_1(z), y, \mu_{n,k}) = 0, \quad \phi(\zeta(z), y, \mu_{n,k}) = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=h} = 0, \quad (17)$$

де  $\phi(x, y, \mu_n) \in C^2(\Xi) = \{u(x, y) \in C(\Xi) : \partial_\alpha u(x, y) \in C(\Xi), \forall \alpha, |\alpha| \leq 2\}$ ;  $\partial_\alpha u(x, y) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x, y)}{\partial x^{\alpha_1} \partial x^{\alpha_2}}$ ;

$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$  – мультиіндекс, компоненти якого є цілі невід’ємні числа.

Власні значення  $\mu_{n,k}$  і власні функції  $\phi(x, y, \mu_{n,k})$  знаходяться із розв’язку задачі (15)-(17) за допомогою методів кінцевих елементів і Гальоркіна[4], а формула оберненого перетворення має вигляд:

$$f(r, z) = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{\phi(r, z, \mu_{n,k})}{\|\phi(\rho, z, \mu_{n,k})\|^2} \bar{f}(\mu_{n,k}). \tag{18}$$

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (11) с граничними умовами (12)-(13) інтегральне перетворення (14) в результаті одержуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно  $\bar{\theta}_n^{(i)}$ :

$$s \bar{\theta}_n^{(i)} + g_n^{(i)}(\bar{\theta}_n^{(m_i)} + \tau_r s \bar{\theta}_n^{(m_i)}) + \tau_r s^2 \bar{\theta}_n^{(i)} = q_{n,k} \left( \frac{\tilde{\Omega}_{n,k}^{(i)}}{\mu_{n,k}} - \bar{\theta}_n^{(i)} \right), \tag{19}$$

де

$$\tilde{\Omega}_{n,k}^{(i)} = \int_0^h \left[ \zeta_1(z) \cdot \frac{\partial \phi(\mu_n, \rho, z)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\zeta_1(z)} \cdot \tilde{\Psi}_n^{(i)}(z) - \zeta(z) \cdot \frac{\partial \phi(\mu_{n,k}, \rho, z)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\zeta(z)} \cdot \tilde{G}_n^{(i)}(z) \right] \cdot dz + \oint_L \rho \left( Q(\mu_{n,k}, \rho, z) \frac{\partial \tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial z} - \tilde{\theta}_n^{(i)} \frac{\partial Q(\mu_{n,k}, \rho, z)}{\partial z} \right) d\rho; \quad q_{n,k} = a \mu_{n,k}; \quad i = 1, 2.$$

Криволінійний інтеграл обчислюється по замкнутому додатно орієнтованому контуру ABCD (рис.2.):

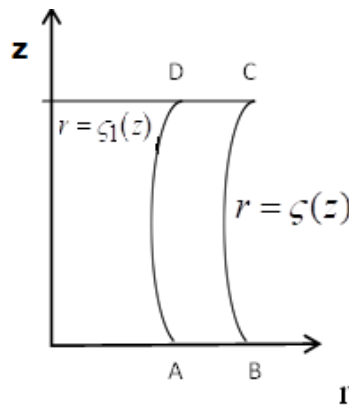


Рис. 2. Замкнутий контур з твірними лініями  $r = \zeta_1(z)$ ,  $r = \zeta(z)$ .

Розв’язавши систему рівнянь (23) одержуємо:

$$\bar{\theta}_n^{(i)} = a \frac{\tilde{\Omega}_{n,k}^{(i)} (\tau_r s^2 + s + q_{n,k}) + (-1)^{i+1} \omega n \tilde{\Omega}_{n,k}^{(m_i)} (1 + s \tau_r)}{(\tau_r s^2 + s + q_{n,k})^2 + \omega^2 n^2 (1 + s \tau_r)^2}, \tag{24}$$

де  $(i = 1, 2)$ .

Застосовуючи до зображення функцій (24) формули оберненого перетворення Лапласа [5] одержуємо оригінали функцій:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k}, t) &= \sum_{j=1}^2 \zeta_{n,k}(s_j) \left\{ \tilde{\Omega}_{n,k}^{(1)}(s_j) \cdot [(2\tau_r s_j + 1) + \tau_r \omega n i] + \tilde{\Omega}_{n,k}^{(2)}(s_j) \cdot [\tau_r \omega n - (2\tau_r s_j + 1)i] \right\} \cdot \\ &\left( e^{s_j t} - 1 \right) + \sum_{j=3}^4 \zeta_{n,k}(s_j) \cdot \left\{ \tilde{\Omega}_{n,k}^{(1)}(s_j) \cdot [(2\tau_r s_j + 1) - \tau_r \omega n i] + \tilde{\Omega}_{n,k}^{(2)}(s_j) \cdot [\tau_r \omega n + (2\tau_r s_j + 1)i] \right\} \cdot \\ &\cdot \left( e^{s_j t} - 1 \right), \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k}, t) &= \sum_{j=1}^2 \zeta_{n,k}(s_j) \cdot \left\{ \tilde{\Omega}_{n,k}^{(2)}(s_j) \cdot [(2\tau_r s_j + 1) + \tau_r \omega n i] - \tilde{\Omega}_{n,k}^{(1)}(s_j) \cdot [\tau_r \omega n - (2\tau_r s_j + 1)i] \right\} \cdot \\ &\left( e^{s_j t} - 1 \right) + \sum_{j=3}^4 \zeta_{n,k}(s_j) \cdot \left\{ \tilde{\Omega}_{n,k}^{(2)}(s_j) \cdot [(2\tau_r s_j + 1) - \tau_r \omega n i] - \tilde{\Omega}_{n,k}^{(1)}(s_j) \cdot [\tau_r \omega n + (2\tau_r s_j + 1)i] \right\} \cdot \\ &\left( e^{s_j t} - 1 \right), \end{aligned} \tag{26}$$

де  $\zeta_{n,k}(s_j) = \frac{0.5s_j^{-1}a}{(2\tau_r s_j + 1)^2 + (\tau_r \omega n)^2}$ , а значення  $s_j$  для  $j=1,2,3,4$  визначаються за формулами:

$$s_{1,2} = \frac{(\tau_r \omega n i - 1) \pm \sqrt{(1 + \tau_r \omega n i)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}, s_{3,4} = \frac{(\tau_r \omega n i + 1) \pm \sqrt{(1 - \tau_r \omega n i)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}.$$

Таким чином з урахуванням формул обернених перетворень (6) і (19) одержуємо температурне поле в тонкостінному однопорожнинному гіперболоїді обертання, яке обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі OZ, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла:

$$\theta(r, \varphi, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k}, t) + i \cdot \bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k}, t) \right] \frac{Q(\mu_{n,k}, r, z)}{\|Q(\mu_{n,k}, r, z)\|^2} \right\} \cdot \exp(in\varphi),$$

де значення  $\bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k}, t)$  і  $\bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k}, t)$  визначаються по формулам (25),(26).

**Висновки.** Вперше побудована математична модель розрахунку полів температури у тонкостінному однопорожнинному гіперболоїді обертання з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, який обертається, у вигляді змішаної крайової задачі математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності. Побудоване інтегральне перетворення для двовимірного кінцевого простору, із застосуванням якого знайдено температурне поле у тонкостінному однопорожнинному гіперболоїді обертання у вигляді збіжних рядів по функціям Фур'є. Знайдений розв'язок узагальненої крайової задачі може знайти застосування при модулюванні температурних полів в градириях подібної форми, виконані з металопрокату або збірного залізобетону, які широко використовуються в атомній енергетиці, хімічній і металургійній промисловості а також в градириях зі склопластику які знаходять застосування на цукрових заводах, заводах з переробки м'яса, риби, фруктів і овочів, молокозаводах, пивоварнях і інших підприємствах.

#### Список використаної літератури

1. Ахметзянов Р.И., Данченко Л.В., Рыбалкина Р.И. Геометрические и конструктивные особенности ги перболоидных конструкций // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. – 2014. – № 4. – С. 59–64.
2. Berdnyk M.H. Thematic model of and method for solving the neumann generalized heat-exchange problem for a cylinder with homogeneous lay-ers / М. Н. Berdnyk // Power Engineering and Information Technologies in Technical Objects Controls: Taylor & Francis Group, London. – 2016. – pp. 53-59.
3. Маркович Б. М. Рівняння математичної фізики / Маркович Б. М. - Львів: Видавництво Львівської політехніки. - 2010. - 384 с.

4. Berdnyk M. The mathematic model and method for solving the dirichlet heat- exchange problem for empty isotropic rotary body / M. Berdnyk // Non-Traditional Technologies in the Mining Industry. Solid State Phenomena Vol. 277 – Trans Tech Publications, Switzerland– 2018 - pp 168-177.
5. Лопушанська Г.П. Перетворення Фур'є, Лапласа: узагальнення та застосування /Г.П. Лопушанська, А.О., Лопушанський, О.М. М'яус. - Львів.: ЛНУ ім. Івана Франка -2014. -152 с.

### References

1. Ahmetzjanov R.I., Danchenko L.V., Rybalkina R.I. Geometricheskie i konstruktivnye osobennosti giperboloidnyh konstrukcij // Izvestija Kazanskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta. – 2014. – № 4. – S. 59–64.
2. Berdnyk M.H. Thematic model of and method for solving the neumann generalized heat-exchange problem for a cylinder with homogeneous layers / M. H. Berdnyk // Power Engineering and Information Technologies in Technical Objects Controls: Taylor & Francis Group, London. – 2016. – pp. 53-59.
3. Markovych B. M. Rivnjannja matematychnoi' fizyky / Markovych B. M. - L'viv: Vydavnytvo L'vivs'koi' politehniky. - 2010. - 384 с.
4. Berdnyk M. The mathematic model and method for solving the dirichlet heat- exchange problem for empty isotropic rotary body / M. Berdnyk // Non-Traditional Technologies in the Mining Industry. Solid State Phenomena Vol. 277 – Trans Tech Publications, Switzerland– 2018 - pp 168-177.
5. Lopushans'ka G.P. Peretvorennja Fur"je, Laplasa: uzagal'nennja ta zastosuvannja /G.P. Lopushans'ka, A.O., Lopushans'kyj, O.M. M"jaus. - L'viv.: LNU im. Ivana Franka -2014. -152 s.



УДК 532.5

Ю.В. БРАЗАЛУК, А.И. ГУБИН, Е.О. ДИДИНСКАЯ, Д.В. ЕВДОКИМОВ  
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара**ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ**

*В работе сформулирована математическая модель течения Пуазейля в канале со сложным многосвязным поперечным сечением. Отличительной особенностью рассматриваемого случая является возможное продольное движение трубок и других цилиндрических объектов вдоль канала. Профиль скорости в таком течении описывается задачей Дирихле для уравнения Пуассона. Для решения указанной задачи в работе использовался метод граничных элементов. В отличие от традиционного течения Пуазейля, зависящего только от одного параметра – градиента давления, рассматриваемый случай является многопараметрическим. Влияние дополнительных параметров на структуру течения и расход жидкости проанализировано на аналитическом решении для коаксиальных цилиндров и на численных решениях для случаев произвольной геометрии.*

*Ключевые слова: течение Пуазейля, метод граничных элементов, уравнение Пуассона, сопротивление трения, коаксиальные цилиндры, управляющие параметры, профиль скорости*

Ю.В. БРАЗАЛУК, О.І. ГУБІН, Є.О. ДІДІНСЬКА, Д.В. ЄВДОКИМОВ  
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара**ПРО ОДИН ВИПАДОК ТЕЧІЇ ПУАЗЕЙЛЯ**

*В роботі сформульована математична модель течії Пуазейля в каналі зі складним багатозв'язним поперечним перерізом. Відмінною особливістю даного випадку є можливий подовжній рух трубок та інших циліндричних об'єктів уздовж каналу. Профіль швидкості в такій течії описується задачею Діріхле для рівняння Пуассона. Для розв'язання зазначеної задачі у роботі використовувалася метод граничних елементів. На відміну від традиційної течії Пуазейля, що залежить тільки від одного параметра – градієнта тиску, розглянутий випадок є багатопараметричним. Вплив додаткових параметрів на структуру течії і витрату рідини проаналізовано на аналітичному розв'язку для коаксіальних циліндрів і на чисельних розв'язках для випадків довільної геометрії.*

*Ключові слова: течія Пуазейля, метод граничних елементів, рівняння Пуассона, опір тертя, коаксіальні циліндри, управляючі параметри, профіль швидкості*

Yu.V. BRAZALUK, O.I. GUBIN, Ye.O. DIDINSKA, D.V. YEVDOKYMOV  
Oles Honchar Dnipro National University**ON ONE CASE OF POISEUILLE FLOW**

*The term Poiseuille flow is traditionally connected with stationary laminar flow of viscous fluid in circular cylindrical tubes. However the simplicity of a Poiseuille flow idea gives an opportunity to generalize this approach on stationary laminar flows of viscous fluids in channels of arbitrary, but constant in longitudinal direction cross-section. Thus, the problem is reduced to Dirichlet problem for a Poisson equation in the cross-section of the channel. The cross-section has, generally speaking, arbitrary and, as rule as, enough complex geometrical shape. Boundary element method was proposed and adopted as a numerical solution tool for the obtained boundary-value problems in previous papers of the authors of the present work. High effectiveness of boundary element method for the considered problems was confirmed in the same works. A generalized Poiseuille flows is described and investigated in the present work. In contrast to the traditional Poiseuille flows, the generalized one supposes that the isolated cylindrical bodies inside the channel can move in longitudinal direction with a prescribed velocity. The generalized Poiseuille flows is described by the same mathematical model with only difference in Dirichlet boundary condition on the moving surfaces. However this specific feature of generalized flow leads to very sufficient hydrodynamic effects, in contrast to ordinary Poiseuille flows. The introduced velocities of the internal bodies can be considered as additional control parameters, which can sufficiently change the structure of flow velocity profile till arising of opposite direction of part of the general flow. It is managed to construct an analytical solution for special case of Poiseuille flows between two coaxial cylinders and to give its qualitative analysis. Boundary element method in previously developed algorithmic realizations is applied for numerical solutions in general case of arbitrary channel cross-section shape. The used numerical approach provides similar qualitative information as an analytical one. Thus the desirable problem can be considered as solved completely. An additional important hydrodynamic effect in generalized Poiseuille flow is connected with substance transfer processes in such flows. In fact, the admixture can be*

*transferred in opposite direction or can be remained unmovable near point of zero velocity in dependent on its initial positions. The obtained results present practical interest in many branches of industry.*

*Key words: Poiseuille flow, boundary element method, Poisson equation, frictional resistance, coaxial cylinders, control parameters, velocity profile*

### **Введение**

Задачи о течении вязкой жидкости даже в простейшем случае ламинарного течения несжимаемой жидкости, как правило, не допускают ни аналитического решения, ни сколько-нибудь существенных упрощений, позволяющих без труда решить эти задачи численно. К редким и приятным исключениям из этого правила относится течение Пуазейля – ламинарное течение вязкой жидкости в канале постоянного поперечного сечения. В простейшем случае круглой трубы задача о течении Пуазейля имеет элементарное аналитическое решение. В общем же случае профиль скорости в поперечном сечении канала, в котором происходит течение Пуазейля, описывается задачей Дирихле для уравнения Пуассона с постоянной в правой части. Понятно, что последняя краевая задача не вызывает каких-либо исключительных вычислительных трудностей. Более того, простота выбранной математической модели позволяет применить для расчета метод граничных элементов, благодаря чему удастся существенно продвинуться в другой проблеме, как правило, вызывающей вычислительные затруднения, а именно решению задач в областях сложной геометрической формы. Под сложной геометрической формой в данном случае имеется в виду не только сложное поперечное сечение канала, но и наличие в канале практически любого числа цилиндрических объектов произвольного поперечного сечения.

Традиционно задача о течении Пуазейля не выходила за рамки описанных выше формулировок, однако в последнее время в разного рода приложениях все чаще встречается необходимость учесть продольное движение цилиндрических объектов, расположенных в канале параллельно стенкам последнего. Как будет показано ниже, учет такого рода движений можно без труда осуществить путем очевидной и элементарной модификации граничных условий упомянутой выше задачи Дирихле. Вместе с тем, простота и очевидность изменения математической модели течения, в определенной мере, камуфлируют значительное усложнение физики задачи, действительно, скорость движения каждого из внутренних цилиндрических объектов выступает дополнительным определяющим параметром структуры течения, что автоматически делает задачу многопараметрической со всеми вытекающими отсюда сложностями анализа.

Кроме того, внимание исследователей нередко привлекает процесс переноса субстанции течением Пуазейля. Нельзя сказать, что эта задача является принципиально новой, скорее наоборот. В теории теплообмена хорошо известна задача об установившемся температурном поле в течении Пуазейля в трубе, получившая название задачи Герца. Однако, значительные расширения форм поперечных сечений каналов, разнообразие жидких сред, в них прокачиваемых, наконец, упомянутые выше продольные движения внутренних цилиндрических объектов, которым посвящена настоящая работа, заставляют сформировать новый, более общий взгляд на течение Пуазейля не только как способ транспортировки жидкости в трубах при малых и умеренных расходах, соответствующих ламинарному режиму течения, но и в качестве механизма транспортировки желательных и нежелательных примесей.

Вышеизложенные обстоятельства служат основанием для пересмотра трактовки течения Пуазейля в современной гидромеханике, заставляя рассматривать таковое как объект численного, а не аналитического анализа, связанный с моделированием значительного числа специфических физических эффектов.

### **Постановка проблемы**

Даже в каналах произвольного, многосвязного, но постоянного по длине поперечного сечения математическая модель течения Пуазейля оказывается столь проста, что допускает весьма эффективное численное нахождение решения. Данное обстоятельство стимулировало в последнее время множество попыток обобщить течение Пуазейля, и настоящая работа целиком соответствует этой тенденции. Большинство подобных обобщений относят к течениям Куэтта-Пуазейля, впрочем, этот термин представляется не совсем удачным, поскольку вносит терминологическую путаницу. Поэтому здесь и далее будем использовать термин обобщенное течение Пуазейля. Появление в задаче, по крайней мере, еще одного дополнительного управляющего параметра (связанного с продольным движением внутреннего сонаправленного цилиндра) существенно расширяет спектр исследуемых гидродинамических эффектов, что представляет несомненный интерес как с теоретической, так и с практической точек зрения.

Традиционно процессам переноса в течении Пуазейля не уделяли много внимания, хотя, как отмечалось выше, задача эта хорошо известна и актуальна. Действительно, в подавляющем большинстве трубных течений движение жидкости происходит в турбулентном режиме, то есть, моделью течения Пуазейля не описывается, а само течение Пуазейля для таких приложений может служить не более чем

модельной задачей. Правда, в последние десятилетия в связи с тенденцией миниатюризации техники, особенно в системах электроники и микроэлектроники, течение Пуазейля встречается все чаще, но, как видно из названий областей применения, течения Пуазейля не могут там играть определяющую роль. Однако, рассматриваемое в настоящей статье обобщенное течение Пуазейля, согласно которому, как будет показано ниже, жидкость в канале может двигаться в разные стороны, ставит вопрос о процессах переноса в таковом не только более общим образом, но и с совершенно иной точки зрения, открывая широкий спектр ранее не исследованных гидродинамических эффектов. Сколько-нибудь детальное изучение специфических эффектов переноса в обобщенном течении Пуазейля далеко выходит за рамки настоящей работы, поскольку требует разработки специализированного вычислительного инструментария и является очевидной тематикой последующих исследований авторов. Столь широкий спектр гидродинамических эффектов, который открывает рассматриваемое обобщение модели течения Пуазейля, предполагает возможности их практического использования, которые пока еще не совсем ясны и заслуживают специальных изысканий, также далеко отстоящих от целей настоящей работы и применяемых в ней методик исследования, однако результаты проводимого исследования неизбежно станут теоретическими основами и прикладным инструментарием для разработки указанных приложений. По-прежнему неясным остается вопрос об устойчивости течения Пуазейля. Как известно, при росте числа Рейнольдса до некоторого, определяемого экспериментально значения, ламинарное течение в трубе (канале), частным случаем которого является течение Пуазейля, теряет устойчивость, в результате чего в течении возникает переходной режим, а при дальнейшем росте числа Рейнольдса переходной режим сменяется турбулентным. Несмотря на беспрецедентные по размаху исследования, механизм потери устойчивости при возникновении турбулентности так и остался необъясненным до сих пор. В рассматриваемом частном случае вопрос должен быть поставлен несколько иначе: как форма канала и дополнительное движение цилиндрических объектов влияют на потерю устойчивости течения в канале. Разумеется, вопрос такой сложности и масштабности не может быть разрешен в ограниченных рамках настоящей работы, однако авторы надеются, что результаты данной работы будут полезны при проведении исследований в рассматриваемом направлении.

#### **Анализ последних исследований и публикаций**

Задача о течении Пуазейля в традиционной постановке подробно описана как в классических книгах по гидромеханике [1–3], так и в специализированных монографиях и статьях [4–8]. Более полный соответствующий анализ освещения вопросов, связанных с течением Пуазейля, но в рамках так же публикаций [1–8], приведен в предшествующей работе авторов [9]. Здесь же отметим только, что рассматриваемое в настоящей работе обобщенное течение Пуазейля, связанное с продольным движением содержащихся в канале цилиндрических объектов, ранее в литературе, посвященной течениям Пуазейля, не встречалось. В целом, настоящая работа является логическим продолжением и обобщением работы [9]. В частности, далее будет применен вычислительный инструментарий, описанный в статье [9] и основанный на классических алгоритмах метода граничных элементов [10, 11] с использованием приемов, предложенных в предшествующих работах авторов настоящей статьи [12–16]. Однако, позиционирование настоящего исследования принципиально отличается от работы [9]. Если последняя развивала идею, высказанную в статье [17] о целесообразности использования метода граничных элементов для решения линейных краевых задач в областях сложной геометрической формы, то настоящая работа, формально оставаясь в том же классе задач, направлена на численное моделирование специфических гидродинамических эффектов, присущих рассматриваемому обобщенному течению Пуазейля.

#### **Цель исследования**

Основываясь на вышеизложенном, цель данного исследования можно сформулировать следующим образом: обобщение классической математической модели течения Пуазейля и изучение особенностей таких течений путем аналитического анализа частных случаев геометрии области и численного эксперимента.

#### **Изложение основного материала исследования**

Поскольку настоящая работа является естественным продолжением статьи [9], представляется целесообразным использовать те же обозначения, что и в работе [9], а математическую постановку задачи привести кратко, следуя тому же источнику, подробно останавливаясь только на различиях в постановках, то же самое имеет место и для метода решения задачи.

**Математическая постановка задачи.** Введем в канале, где происходит течение Пуазейля, декартову ортогональную систему координат  $(x, y, z)$  направив ось  $Oz$  вдоль образующей канала, а оси  $Ox$  и  $Oy$  в плоскости его поперечного сечения. Обозначим продольную скорость жидкости через  $w$ , а давление через  $p$ . Тогда

$$\mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (1)$$

где  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости. При этом в сечении канала

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

и

$$\frac{\partial p}{\partial z} = const, \quad (3)$$

поскольку сечение канала не изменяется по длине. В отличие от работы [9] введем внешний контур сечения канала  $\Gamma_{out}$  и внутренние контуры сечения  $\Gamma_i$ , тогда общая граница течения  $\Gamma$  в любом из поперечных сечений канала

$$\Gamma = \bigcup_i \Gamma_i \cup \Gamma_{out}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (4)$$

Полагаем, что

$$\Gamma_{out} \cap \Gamma_i = \emptyset, \quad i = \overline{1, N}; \quad (5)$$

$$\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset, \quad \forall i, j < N, \quad i \neq j. \quad (6)$$

Граничные условия:

$$w|_{\Gamma_{out}} = 0, \quad (7)$$

$$w|_{\Gamma_i} = U_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (8)$$

где  $U_i$  – известная скорость продольного движения внутренних контуров, содержащихся в канале. На каждый из контуров действует сила

$$F_{out} = \mu \int_{\Gamma_{out}} \frac{\partial w}{\partial n} dS, \quad F_i = \mu \int_{\Gamma_i} \frac{\partial w}{\partial n} dS, \quad (9)$$

но поскольку  $\frac{\partial w}{\partial \tau} = 0$  (где  $\tau$  – время), то

$$\frac{\partial p}{\partial z} = F_{out} - \sum_{i=1}^N F_i \quad (10)$$

так как силы, действующие на жидкость, уравновешены.

Таким образом, основным отличием приведенной выше задачи по сравнению с формулировкой, данной в работе [9], являются граничные условия (8).

Поскольку входящая в уравнение (1) величина  $\mu$  достаточно мала, следует ожидать, что продольная скорость будет существенно зависеть от  $\frac{\partial p}{\partial z}$ . Нулевая скорость в граничном условии (7) не является принципиальным моментом, однако в практических приложениях такое движение трудно себе представить.

**Простейший частный случай обобщенного течения Пуазейля.** Рассмотрим течение между двумя соосными цилиндрами радиусов  $R_1$  (внешний цилиндр) и  $R_2$  (внутренний цилиндр). Полагаем, что внешний цилиндр неподвижен, а внутренний движется со скоростью  $U$  (по понятным причинам здесь нет никакой необходимости приписывать скорости некий индекс). В силу очевидной симметрии уравнение (1) примет вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (11)$$

и граничные условия:

$$w(r = R_1) = 0, \quad (12)$$

$$w(r = R_2) = U. \quad (13)$$

Очевидно, что краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения (11)–(13) легко интегрируется в квадратурах. Действительно, первый интеграл уравнения (11) имеет вид

$$w = \frac{r^2}{4} \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + c_1 \ln r + c_2, \quad (14)$$

и, подставляя граничные условия, получим значения неизвестных постоянных:

$$c_1 = \frac{U - \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (R_2^2 - R_1^2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}},$$

$$c_2 = -\frac{R_1^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{U - \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (R_2^2 - R_1^2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln R_1.$$

Очевидно, что если скорость течения, вызванного перепадом давления  $\frac{\partial p}{\partial z}$ , и скорость  $U$  противоположно направлены, то обязательно найдется такая координата  $r_0$ , что

$$w(r_0) = 0. \quad (15)$$

Последнее условие означает, что одна из точек торможения сместилась внутрь канала, а вторая осталась на месте при  $r = R_1$ . Найдем расход через сечение рассматриваемого канала, которое обозначим  $D$ :

$$Q = \iint_D w dx dy = \int_0^{R_1} \int_{R_2}^{R_1} w r dr d\varphi = 2\pi \int_{R_2}^{R_1} w r dr, \quad (16)$$

с учетом зависимости  $w(r)$  (14)

$$Q = \frac{\pi}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (R_1^4 - R_2^4) + c_1 \left( \frac{R_1^2}{2} \left( \ln R_1 - \frac{1}{2} \right) - \frac{R_2^2}{2} \left( \ln R_2 - \frac{1}{2} \right) \right) + \frac{c_2}{2} (R_1^2 - R_2^2). \quad (17)$$

Для рассмотренного выше случая разнонаправленных течений, вызванных перепадом давления и движением внутреннего цилиндра, можно найти такой режим, что  $Q = 0$ . В этом случае при заданной геометрии (радиусах  $R_1$  и  $R_2$ ) уравнение (17) можно рассматривать как функциональное соотношение между  $U$  и  $\frac{\partial p}{\partial z}$ . Режим  $Q = 0$  потенциально представляет интерес в разного рода приложениях, хотя авторам на сегодняшний день подобные попытки не известны. Более того, при любом заданном расходе  $Q_d$  из (17) можно получить зависимость

$$U = f \left( \frac{\partial p}{\partial z}, Q_d \right), \quad (18)$$

и обратную ей

$$\frac{\partial p}{\partial z} = f'(U, Q_d). \quad (19)$$

На самом деле определение функций  $f$  и  $f'$  не представляет собой никакого труда, поскольку с учетом явного вида (17) и представления постоянных  $c_1$  и  $c_2$  не трудно видеть, что  $\frac{\partial p}{\partial z}$  и  $U$  входят в (17) линейно, то есть,  $f$  и  $f'$  – линейные зависимости.

Явное представление (14) позволяет достаточно просто определить положение максимума модуля скорости в потоке (в принципе их может быть два при наличии разнонаправленного движения), который может располагаться как внутри потока, так и на поверхности внутреннего цилиндра. Наличие и влияние экстремумов скорости, равно как и нулей скорости, имеет существенное значение для процессов переноса в обобщенном течении Пуазейля, и даже более того, если имеет место перенос твердых частиц, то сила Магнуса, действующая на эти частицы в сдвиговом потоке, зависит от расположения частицы по отношению к экстремуму скорости и от градиента скорости в поперечном сечении. Однако последние

затронутые вопросы далеко выходят за рамки целей настоящей работы и, скорее, могут быть отнесены к тематике дальнейших перспективных исследований.

Важным частным случаем рассмотренной задачи является  $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$  (случай  $U = 0$  столь тривиален и хорошо изучен, скажем, в теории теплообменников, что излагать его здесь просто нерационально). В рассматриваемом случае движение жидкости в канале кольцевого течения вызвано только продольным движением внутреннего цилиндра. Количественные соотношения для этого случая получаются из соотношений (14), (17) прямой подстановкой условия  $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$  и достаточно элементарны.

На основании вышеизложенного можно заключить, что параметры  $\frac{\partial p}{\partial z}$  и  $U$  при фиксированных геометрических размерах  $R_1$  и  $R_2$  можно трактовать как управляющие параметры течения Пуазейля с учетом полученных явных зависимостей от них поля скоростей (14) и расхода (17).

Хотя задача о течении Пуазейля в канале кольцевого поперечного сечения, вообще говоря, не нова, в той или иной форме упоминается почти во всех работах [1–8], постановка (11)–(13) и следующий за ней анализ по общности не имеют аналогов в указанных работах и содержат несомненные элементы научной новизны.

**Метод численного решения.** Для численного решения поставленной задачи (1), (7), (8) был использован метод граничных элементов [10, 11] в алгоритмической реализации, предложенной в работе [9]. Предложенный в [9] подход был реализован в составе комплекса программ, разработанного в предыдущих исследованиях авторов и описанного в статьях [12–16]. Поэтому ограничимся далее только основными расчетными формулами, так как их обоснование и объяснение приведено в работе [9]. Чтобы избежать разночтений сохраним обозначения из статьи [9].

Для функции

$$u = w - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} u_0, \tag{20}$$

где

$$u_0(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{4}, \tag{21}$$

интегральный аналог уравнения (1) имеет вид

$$c(x_0, y_0)u(x_0, y_0) = \int_{\Gamma} g(x, x_0, y, y_0) \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) dS(x, y) - \int_{\Gamma} u(x, y) \frac{\partial g(x, x_0, y, y_0)}{\partial n(x, y)} dS(x, y), \tag{22}$$

здесь  $\Gamma$  – граница области течения  $D$  в сечении канала, определяемая соотношением (4),

$$c(x_0, y_0) = \begin{cases} 1, & (x_0, y_0) \in D; \\ 1/2, & (x_0, y_0) \in \Gamma; \\ 0, & (x_0, y_0) \notin D, (x_0, y_0) \notin \Gamma, \end{cases}$$

$g$  – фундаментальное решение уравнения Лапласа в плоском случае

$$g(x, x_0, y, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \tag{23}$$

При  $(x_0, y_0) \in \Gamma$  соотношение (22) представляет собой сингулярное граничное интегральное уравнение, дальнейшая дискретизация которого проводилась традиционным способом [10, 11], что было сделано в работе [9] для метода граничных элементов нулевого порядка с аппроксимацией границы области решения прямолинейными граничными элементами. Получена следующая система линейных алгебраических уравнений

$$c(x_{0m}, y_{0m})u(x_{0m}, y_{0m}) = \sum_{k=1}^K \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{k \Gamma_k} \int_{\Gamma_k} g(x, x_{0m}, y, y_{0m}) dS(x, y) - \int_{\Gamma} u(x, y) \frac{\partial g(x, x_{0m}, y, y_{0m})}{\partial n(x, y)} dS(x, y), \tag{24}$$

где  $K$  – число граничных элементов. Последний интеграл в правой части уравнения (24) не был аппроксимирован в силу граничных условий (7), (8), согласно которым  $u$  на границе является известной



функцией. В работе [9] приведены также следующие соотношения для точек, лежащих внутри области течения  $D$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_0}(x_0, y_0) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial g(x, x_0, y, y_0)}{\partial x_0} \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) dS(x, y) - \int_{\Gamma} u(x, y) \frac{\partial^2 g(x, x_0, y, y_0)}{\partial x_0 \partial n} dS(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial y_0}(x_0, y_0) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial g(x, x_0, y, y_0)}{\partial y_0} \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) dS(x, y) - \int_{\Gamma} u(x, y) \frac{\partial^2 g(x, x_0, y, y_0)}{\partial y_0 \partial n} dS(x, y), \end{aligned} \quad (25)$$

позволяющие (с учетом соотношения (20)) качественно исследовать поле скоростей в сечении канала, определить точки экстремумов скорости и кривую, на которой скорость равна 0. Все эти операции выполнены на основе градиентного алгоритма. Кроме того, в работе [9] дана весьма простая и удобная формула для расчета расхода жидкости в рассматриваемом течении.

Не вдаваясь в детали анализа поля скоростей рассматриваемого течения, которые подробно приведены в работе [9], отметим только, что описанный выше алгоритм численного расчета позволяет получить для поля течения такой же объем информации, как и приведенное выше аналитическое решение задачи, с возможным рассмотрением всех тех же частных случаев, например,  $Q = Q_d$  или  $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$  и так далее.

#### Анализ полученных результатов

В соответствии с основной целью предлагаемой работы – теоретическим исследованием предложенного в ней обобщения течения Пуазейля – к основным ее результатам следует отнести: постановку задачи о течении Пуазейля в канале многосвязного поперечного сечения с продольно движущимися цилиндрическими объектами (1)–(10); построение аналитического решения для частного случая соосных цилиндров, внутренний из которых подвижен; качественный анализ полученного решения; применение к рассматриваемой задаче в общем случае ранее разработанного алгоритма метода граничных элементов; количественный анализ полученных численных решений. При этом проведенные в ходе исследования численные расчеты носили, скорее, иллюстративный характер, нежели содержали принципиальные результаты анализа подлежащей изучению системы.

Основным теоретическим и потенциально практическим результатом работы является доказательная демонстрация возможности перехода от однопараметрического течения Пуазейля в канале заданной геометрии (управляющий параметр – перепад давления) к многопараметрическому обобщенному течению Пуазейля в канале той же геометрии (дополнительные управляющие параметры – скорости продольного движения цилиндрических объектов, находящихся в канале). При этом управляющие параметры входят как в аналитические, так и в численные представления решений линейным образом, что значительно облегчает изучение подобных систем.

#### Выводы

Возможность управления количественными и качественными характеристиками установившегося ламинарного течения в канале многосвязного поперечного сечения, включающего конечное число непересекающихся цилиндрических объектов, образующие которых параллельны стенкам канала и которые могут двигаться в продольном направлении, относится к главным выводам настоящей работы.

Параллельно в настоящей работе был еще раз подтвержден сформулированный в работе [9] тезис об эффективности применения метода граничных элементов для расчета течения Пуазейля.

С практической точки зрения, интерес вызывает не только возможность управления расходом рассмотренного обобщенного течения Пуазейля, но и управление процессами переноса в таком течении. Вообще говоря, в свете результатов настоящей работы представляется, что процессы переноса в течении Пуазейля не столь тривиальны, как это принято было считать при изучении традиционных течений Пуазейля.

**Перспективы дальнейших исследований.** Из последнего замечания очевидно следует, что наиболее важным и с теоретической, и с практической точки зрения является изучение процессов переноса в обобщенных течениях Пуазейля, что и станет предметом дальнейших исследований.

#### Список использованной литературы

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика: монография. М.: Физматгиз, 1965. Т. 1, 758 с. Т. 2, 772 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: монография. М.: Наука, 1970. 904 с.
3. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости: монография. М.: Мир, 1976. 756 с.
4. Шиллер Л. Движение жидкостей в трубах: монография. М.-Л.: ОНТН, 1932. 230 с.

5. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах: монография. М.: Энергия, 1967. 412 с.
6. Павловський В.Г. Особливості гідродинаміки і теплообміну в некруглих каналах: монографія. Харків: НТУ «ХПІ», 2006. 104 с.
7. Гаев Е.А., Бердник О.М. Моделирование стабилизированного потока вязкой жидкости в некруглых каналах с легкопроницаемой шероховатостью. *Прикладна гідромеханіка*. 2011. Том 13, № 2. С. 3–16.
8. Деменок С.Л., Медведев В.В. Теплообмен и гидравлическое сопротивление в трубах и каналах: монография / науч. ред. В.В. Медведев. Санкт-Петербург: Н-Пром Бюро, 2012. 285 с.
9. Бразалук Ю.В., Евдокимов Д.В., Кочубей А.А., Шульга Р.А. Применение метода граничных элементов для расчета течения Пуазейля в каналах сложного поперечного сечения. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2018. № 3 (66), том 1. С. 24–31.
10. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов: монография. М.: Мир, 1987. 524 с.
11. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках: монография. М.: Мир, 1984. 494 с.
12. Поляков Н.В., Евдокимов Д.В. Вычислительная теория потенциала. Современное состояние и перспективы использования в механике сплошной среды. Часть 1. Линейные задачи. *Вісник Дніпропетровського університету. Сер. Механіка*. 2006. № 2/1. С. 7–25.
13. Евдокимов Д.В. Об одном варианте регулярного метода граничных элементов. *Вісник Дніпропетровського університету. Механіка*. 1999. Выпуск 2, том 1. С. 150–156.
14. Евдокимов Д.В. Разработка прямых регулярных алгоритмов вычислительной теории потенциала с точками коллокации внутри области решения. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2015. № 2/7 (74). С. 16–25.
15. Бразалук Ю.В., Евдокимов Д.В., Поляков Н.В. Численная реализация обобщенного метода Блоха-Гиневского. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія Механіка*. Д., 2013. Вип. 17, т. 1. С. 35–51.
16. Бразалук Ю.В., Евдокимов Д.В., Поляков Н.В. Совместное применение метода малого параметра и метода граничных элементов для численного решения эллиптических задач с малыми возмущениями. *Вісник ХНУ*. Харків, 2005. № 703. С. 50–66.
17. Евдокимов Д.В., Кочубей А.А., Поляков Н.В. Анализ тенденций развития современного математического и численного моделирования. *Вісник Дніпропетровського університету, серія «Модельовання»*. 2009. Выпуск 1, № 8. С. 5–17.

#### References

1. Kochin N.E., Kibel I.A., Roze N.V. *Teoreticheskaya gidromekhanika: monografiya*. M.: Fizmatgiz, 1965. T. 1, 758 s. T. 2, 772 s.
2. Loytsyanskiy L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza: monografiya*. M.: Nauka, 1970. 904 s.
3. Betchelor Dzh. *Vvedenie v dinamiku zhidkosti: monografiya*. M.: Mir, 1976. 756 s.
4. Shiller L. *Dvizhenie zhidkostey v trubah: monografiya*. M.-L.: ONTN, 1932. 230 s.
5. Petuhov B.S. *Teploobmen i soprotivlenie pri laminarnom techenii zhidkosti v trubah: monografiya*. M.: Energiya, 1967. 412 s.
6. Pavlovskiy V.H. *Osoblyvosti gidrodynamiky i teploobminu v nekruglykh kanalakh: monografiya*. Kharkiv: NTU «KhPI», 2006. 104 s.
7. Gaev E.A., Berdnik O.M. *Modelirovanie stabilizirovannogo potoka vyazkoy zhidkosti v nekruglykh kanalakh s legkopronitsaemoy sherohovatostyu. Prykladna hidromekhanika*. 2011. Tom 13, № 2. S. 3–16.
8. Demenok S.L., Medvedev V.V. *Teploobmen i gidravlichesкое soprotivlenie v trubah i kanalakh: monografiya / nauch. red. V.V. Medvedev. Sankt-Peterburg: N-Prom Byuro, 2012. 285 s.*
9. Brazaluk Iu.V., Yevdokymov D.V., Kochubei O.O., Shulha R.O. *Primenenie metoda granichnykh elementov dlya rascheta techeniya Puazeylya v kanalakh slozhnogo poperechnogo secheniya. Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu*. 2018. № 3 (66), том 1. S. 24–31.
10. Brebbiya K., Telles Zh., Vroubel L. *Metody granichnykh elementov: monografiya*. M.: Mir, 1987. 524 s.
11. Benerdzhi P., Batterfild R. *Metod granichnykh elementov v prikladnykh naukah: monografiya*. M.: Mir, 1984. 494 s.
12. Poliakov M.V., Yevdokymov D.V. *Vyichislitel'naya teoriya potentsiala. Sovremennoe sostoyanie i perspektivy ispolzovaniya v mehanike sploshnoy sredy. Chast 1. Lineynyye zadachi. Visnyk Dnipropetrovskoho universytetu. Ser. Mekhanika*. 2006. № 2/1. S. 7–25.
13. Yevdokymov D.V. *Ob odnom variante regul'yarnogo metoda granichnykh elementov. Visnyk Dnipropetrovskoho universytetu. Mekhanika*. 1999. Vypusk 2, том 1. S. 150–156.



14. Yevdokymov D.V. Razrabotka pryamyih regulyarnyih algoritmov vyichislitelnoy teorii potentsiala s tochkami kollokatsii vnutri oblasti resheniya. *Vostochno-Evropeyskiy zhurnal peredovyih tehnologiy*. 2015. № 2/7 (74). S. 16–25.

15. Brazaluk Iu.V., Yevdokymov D.V., Poliakov M.V. Chislennaya realizatsiya obobschennogo metoda Bloha-Ginevskogo. *Visnyk Dnipropetrovskoho universytetu. Seriya Mekhanika*. D., 2013. Vyp. 17, t. 1. S. 35–51.

16. Brazaluk Iu.V., Yevdokymov D.V., Poliakov M.V. Sovmestnoe primenenie metoda malogo parametra i metoda granichnyih elementov dlya chislennogo resheniya ellipticheskikh zadach s malymi vozmuscheniyami. *Visnyk KhNU*. Kharkiv, 2005. № 703. S. 50–66.

17. Yevdokymov D.V., Kochubei O.O., Poliakov M.V. Analiz tendentsiy razvitiya sovremennoho matematicheskogo i chislennogo modelirovaniya. *Visnyk Dnipropetrovskoho universytetu, seriya «Modeliuvannia»*. 2009. Vypusk 1, № 8. S. 5–17.

УДК 539.3

В.О. ВАХНЕНКО

Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, Київ, Україна

**ПЕТЛЕПОДІБНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЛЯ ДЕЯКИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ**

*Петлеподібні солітони – клас хвильових явищ, які мають місце в деяких нелінійних системах. В роботі розглядається гомоклінний підхід для знаходження розв'язків рівняння Вахненка-Паркеса. Гомоклінна тестова функція дає можливість знайти бризерні розв'язки. Обговорюється питання переходу бризерних розв'язків у блукаючу хвилю. Відомо, що блукаючі хвилі виникають не тільки в океані, але також і в нелінійно фізичних системах, таких як плазма, Бозе-Ейнштейнівський конденсат, нелінійна оптика, гідродинаміка. Дослідження блукаючої хвилі вказує на те, що вона виникає нізвідки та дисипує безслідно. Амплітуда таких хвиль значно перевищує амплітуду відомих хвиль. Розв'язки для блукаючих хвиль вказують на локалізацію хвиль як в просторі, так і в часі. Це зумовлює їх непередбачуваність. Вивчення бризерних хвиль, зокрема блукаючих хвиль, набуває важливого значення з точки зору їх взаємодії з іншими збуреннями, що вже вивчені для рівняння, що аналізується. Відмічено, що ми ще далекі від повного усвідомлення фізичних процесів, які можна описати петлеподібними розв'язками.*

*Ключові слова: нелінійні еволюційні рівняння, гомоклінний метод, петлеподібні розв'язки, бризер.*

В.А. ВАХНЕНКО

Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, Київ, Україна

**ПЕТЛЕПОДОБНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ**

*Петлеподобные солитоны - класс волновых явлений, которые имеют место в некоторых нелинейных системах. В работе рассматривается гомоклиный подход для нахождения решений уравнения Вахненко-Паркеса. Гомоклиная тестовая функция дает возможность найти бризерные решения. Обсуждается вопрос перехода бризерных решений в блуждающую волну. Известно, что блуждающие волны возникают не только в океане, но также и в нелинейных физических системах, таких как плазма, Бозе-Ейнштейновский конденсат, нелинейная оптика, гидродинамика. Исследования блуждающей волны указывают на то, что она возникает из ниоткуда и исчезает бесследно. Амплитуда таких волн значительно превышает амплитуду известных волн. Решения для блуждающих волн указывают на локализацию волн как в пространстве, так и во времени. Изучение бризерных волн, в частности блуждающих волн, приобретает важное значение с точки зрения их взаимодействия с другими возмущениями, что уже изучены для анализируемого уравнения. Отмечается, что мы еще далеки от полного осознания физических процессов, которые можно описать с помощью петлеподобных решений.*

*Ключевые слова: нелинейные эволюционные уравнения, гомоклиный метод, петлеподобные решения, бризер.*

V.O. VAKHNENKO

Subbotin Institute of Geophysics, Kyiv, Ukraine

**LOOP-LIKE SOLUTIONS IN SOME EVOLUTION EQUATIONS**

*Loop-like solitons are a class of interesting wave phenomena, which take place in some nonlinear systems. This interest is consisted not only in the interpretation of the solutions obtained, but also in the explanation of the experimental results. One of these equations is the Vakhnenko equation. From a mathematical point of view, loop-like solutions are multi-valued functions between variables. These solutions should be described with multi-valued functions. Sazonov, Ustinov (JETP, 2017) have found the breather solutions for the Vakhnenko equation. These breathers at some parameters have a loop-like form. It is noted some important remarks on the existence and uniqueness theorem. If the conditions of the existence and uniqueness theorem break down, then nevertheless, this does not restrict the existence of solutions. Hence, the solutions can exist, for example, the multi-valued solutions. The homoclinic approach is considered to find solutions for the Vakhnenko-Parkes equation. The homoclinic test function enables one to obtain the breather solutions. The transformation of breather solution into rogue wave solution is discussed. It is known that rogue waves arise not only in the ocean, but also in nonlinearly physical systems such as plasma, Bose-Einstein condensate, nonlinear optics, hydrodynamics. The study of the rogue wave indicates that these waves appear from nowhere and disappears without a trace. The amplitude of this wave exceeds the amplitude of the known waves. The solutions for rogue*

waves point at the localization of waves both in space and in time. These imply their unpredictability. The study of breather waves, in particular rogue waves, becomes important with respect to interaction of these waves with other perturbations that have already been studied for the analyzed equation. It is noted that we are a long way still from complete awareness of physical processes which can be described by loop-like solutions. However, the approach, considered here, will hopefully be interesting and useful in understanding the birth and death process for particles, since the mass and momentum of individual loop-like soliton are zero. Furthermore, the investigations in optics, magnetism, hydrodynamics clearly indicate the acceptability of the approach on loop-like solitons. Indeed, the phase shifts observed at interaction of solitons can be explained by means of loop-like solutions.

*Keywords: nonlinear evolution equations, homoclinic method, loop-like solution, breather.*

Фізичні явища, що відбуваються в природі, загалом ускладнюються проявом нелінійності. Існує великий інтерес до дослідження таких систем, а також розробки методів знаходження розв'язків еволюційних рівнянь. Дослідження точних розв'язків нелінійних еволюційних рівнянь відіграють значну роль у вивченні фізичних явищ. Низка фізичних задач приводить до рівняння Вахненка (the Vakhnenko equation (VE)) [1]

$$(u_t + uu_x)_x + u = 0. \quad (1)$$

Однією з чудових особливостей VE є те, що воно утримує петлеподібні солітонні розв'язки. Петлеподібні солітони – клас цікавих хвильових явищ та притаманні деяким нелінійним системам. З точки зору математики, петлеподібні розв'язки є багатозначними функціями між змінними. Отже, ці розв'язки повинні описуватися багатозначними функціями. Рівняння VE може бути записане в альтернативній формі, яка відома як рівняння Вахненка-Паркеса (VPE) [1,2], шляхом зміни незалежних змінних [3,4]

$$W_{XXT} + (1 + W_T)W_X = 0. \quad (2)$$

Важлива особливість перетворення полягає в тому, що воно забезпечує розв'язок, в якому обидві як залежна змінна, так і незалежна змінна наводяться в термінах деякого параметра (однозначні функції) [3,4].

Для нелінійної оптики рівняння VE було отримано в роботі [5] під час дослідження гранично коротких імпульсів, коли не мають сенсу поняття звичайної і незвичайної хвиль. В той же час в роботі [6] рівняння VE одержано при дослідженні розповсюдження гранично коротких імпульсів в умовах двопробеневого заломлення, яке наведене паралельними електричним і магнітним полями. Розв'язки рівняння VE, зокрема, періодичні і однопетлеві розв'язки були отримані в роботі [2]. Також в цій роботі були знайдені двопетлеві розв'язки. Важливою особливістю цих розв'язків є те, що вони утримують властивість структурної стійкості так само, як і солітонні розв'язки нелінійних рівнянь, що інтегруються методом оберненої задачі розсіяння (ОЗР). Як відомо, визначальна властивість таких нелінійних рівнянь полягає в можливості їх представити у вигляді умови сумісництва перевизначеної системи лінійних рівнянь (пара Лакса).

За допомогою методу Хіроті, який тісно пов'язаний з методом ОЗР, з врахуванням змінення незалежних змінних (перехід в інші координати) в [3,4] побудовані двопетлеві та багатопетлеві розв'язки рівняння VE, які також утримують властивість солітонів. Ця властивість явно вказує на інтегровність VE методом ОЗР. Крім того, інтегровність рівняння VE була доведена в роботі [7], де було показано, що це рівняння пов'язане з рівнянням Цицейка [8], (інколи цитується як рівняння Додда-Буллафа [9]). Перетворення Беклунда і пара Лакса для рівняння VPE наводяться в [2]. В той же час, бризерні розв'язки для рівняння VE були знайдені тільки в роботі [6]. В цій роботі формули (63), (85)–(88) визначають параметрично 1-бризерний розв'язок рівняння VE. Графіки 1-бризерного розв'язку для деяких значень параметрів, які взяті з роботи [6], подані на рис. 1.

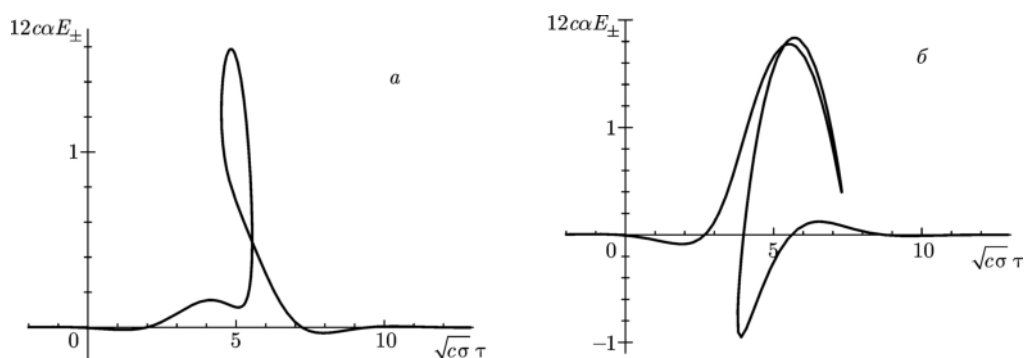


Рис.1. Бризерні розв'язки для VE з [6].

Таким чином в [6] доведено, що обмежений 1-бризерний розв'язок рівняння  $VE$  являється неоднозначним при довільних значеннях своїх параметрів. Як показало дослідження в роботі [6], умову однозначності задовольняють тільки скінченнозонні розв'язки, що відповідають періодичним стаціонарним розв'язкам скалярної версії  $VE$ .

Ми маємо багатозначні розв'язки, зокрема, петлеподібні розв'язки. Зробимо зауваження щодо теореми існування та однозначності. У [10] формулюється теорема існування та однозначності для системи (одного) диференціальних рівнянь. Петлеподібні розв'язки мають місце на біжучих хвилях. У цьому випадку початкове еволюційне рівняння зводиться до звичайного диференціального рівняння ( $ЗДР$ ). Тепер зробимо деякі важливі зауваження. Зокрема, для того, щоб дослідити  $ЗДР$  (розв'язок на біжучих хвилях), все таки необхідно узгодити цей розв'язок з початковою задачею, яка описується диференціальним рівнянням в частинних похідних (еволюційне рівняння). Отже, неоднозначні розв'язки для  $ЗДР$  під час їх реконструкції в початкові координати повинні бути перевірені за допомогою деяких обмежувальних умов, які наведені нижче.

Слід зазначити, що якщо умови теореми існування та однозначності не задовольняються, тоді все це не обмежує існування розв'язків. Отже, розв'язки можуть існувати, наприклад, багатозначні розв'язки. Тут ми відмічаємо приклад: точні розв'язки рівняння Камасса-Холма (СНЕ) і рівняння Дегасперіс-Процесі (DPE) можна побудувати з окремих частин (гілок) розв'язків (див. [11]).

Розв'язки повинні відповідати таким умовам:

1. У точці  $\eta = 0$  розв'язок повинен пройти по еліпсу (див. рів. (4.3)  $(z^2 + 2v\eta^2)_{\eta\eta} = 0$  в [12]);
2. Відповідно до закону збереження  $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx = const \equiv 0$  для  $t > 0$ . "Маса" окремого солітона дорівнює нулю. Ця умова виконується, якщо умова 1 виконується;
3. Як відомо [12], врахування дисипації у фізичному процесі дозволяє вибрати розв'язок з можливих розв'язків, які властиві рівнянню без дисипації. Ця умова також вибирає розв'язок у відповідності до пункту 1, якщо  $\alpha \rightarrow 0$ ;
4. Під час взаємодії солітонів [2] необхідно враховувати всі частини петлеподібного солітона. Солітон має форму, що задовольняє пункту 2.

Таким чином, ми не можемо довільно об'єднати розв'язок в точці  $\eta = 0$ . Розв'язок, зокрема, солітони, повинні мати спеціальну петлеподібну форму.

Особливості петлеподібних розв'язків проявляються під час взаємодії солітонів. Зараз більш детально обговоримо розв'язки для двох солітонів для  $VE$ . На рис. 2, який взято з [2], наведена взаємодія двох солітонів в координатах, що рухається зі сталою швидкістю  $v = 0.5(v_1 + v_2)$ , де  $v_1$  і  $v_2$  – початкові швидкості солітонів.

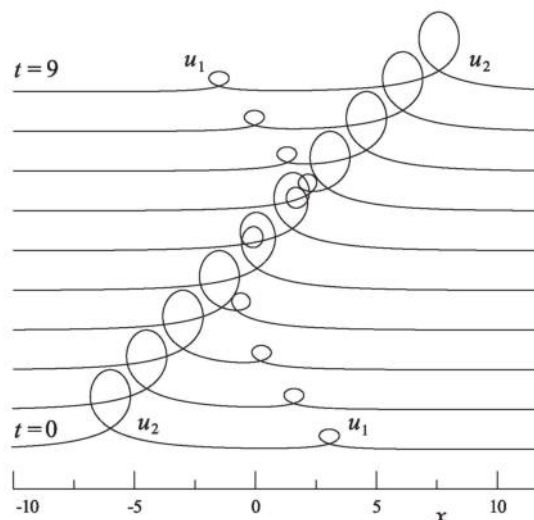


Рис.2. Взаємодії двох солітонів для  $VE$ .

У наведеному випадку обидва солітони мають фазовий зсув вперед. На перший погляд може здатися, що така поведінка суперечить закону збереження 'імпульсу'. Однак, така взаємодія все ж можлива, оскільки

‘маса’  $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx$  та ‘імпульс’  $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)^2 dx$  індивідуального солітона тотожно дорівнюють нулю.

Тобто, закон збереження ‘імпульсу’ не порушується під час взаємодії солітонів.

Зробимо важливе зауваження. Якщо в результаті взаємодії збурень спостерігається зсув фаз вперед, то це однозначно вказує на петлеподібні розв’язки. Такий приклад взаємодії для насичених феромагнетиків поданий нижче (див. рис. 4).

Звертаємо увагу, що для рівняння *VPE* (2) в *OЗР* досліджено тільки випадок полюсів у зв’язаній (дискретній) частині спектру, а також подібний (в математичному сенсі) сингулярний спектр, що утримує  $\delta$ -функції у неперервній частині спектру [2,13–15]. Нам вдалося дослідити не тільки прості полюси, якими, як правило, обмежені відомі дослідження, а також полюси другого порядку [16]. Все ж таки, в недавніх дослідженнях [17] знайдені розв’язки для *VPE* (відмітимо, що не методом *OЗР*) не вдається звести до розв’язків, що відповідають дослідженим на цей час спектральним даним.

Розглянемо гомоклінний підхід [18] та застосуємо його до *VPE*. Рівняння *VPE* (2) потрібно переписати у білінійній формі Хіроти [2]

$$(D_X^3 D_T + D_X^2) f \cdot f = 0 \tag{3}$$

через  $W$ , що визначається як  $W_X = u$ ,  $W = 6(\ln f)_X$ . Тут

$$D_X^m D_T^n f(X,T) \cdot g(X,T) = \left( \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial X'} \right)^m \left( \frac{\partial}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial T'} \right)^n (f(X,T)g(X',T')) \Big|_{X'=X, T'=T}, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} (D_X^3 D_T) f \cdot f &= 2(f_{XXX} f - 3f_{XXT} f_X + 3f_{XT} f_{XX} - f_{XXX} f_T), \\ (D_X^2) f \cdot f &= 2(f_{XT} f - f_X f_T). \end{aligned} \tag{5}$$

Гомоклінна тестова функція подається у вигляді

$$f(X,T) = \exp[-p_1(X - w_1 T)] + c_1 \cos[p_2(X + w_2 T)] + c_2 \exp[p_1(X - w_1 T)]. \tag{6}$$

Підстановка цієї функції в рівняння (3) з урахуванням (5) дає співвідношення, в якому, прирівнявши коефіцієнти при  $\exp[jp_1(X - w_1 T)]$ ,  $j = -1, 0, +1$ ,  $\cos[p_2(X + w_2 T)]$ ,  $\sin[p_2(X + w_2 T)]$  до нуля, отримуємо зв’язки між  $p_i, c_i, w_i$  для  $i = 1, 2$ . Якщо визначальними змінними вважати  $p_1, p_2, c_1$ , тоді згідно з [19] маємо функціональні залежності для інших змінних

$$w_1 = w_2 = (p_2^2 + p_1^2)^{-1}, \quad c_2 = -c_1 \frac{p_2^2(-3p_2^2 + p_1^2)}{4p_1^2(3p_1^2 - p_2^2)}. \tag{7}$$

Таким чином, гомоклінна тестова функція дає можливість знайти розв’язки *VPE*, зокрема, бризерні розв’язки. На рис. 3 поданий графік бризера.

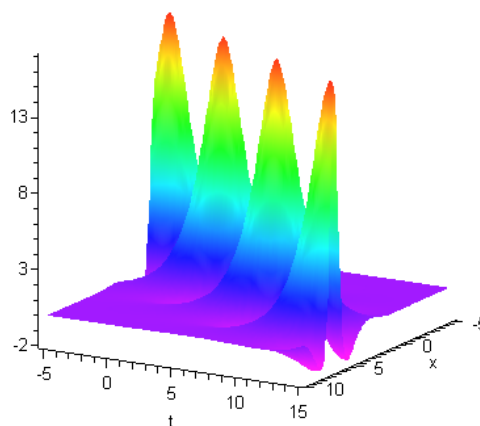


Рис. 3. Бризерні хвилі для *VPE* з  $p_1 = 0.95$ ,  $p_2 = 1.23$ ,  $c_1 = 0.5$ .

В граничному випадку наведені розв'язки переходять у блукаючу хвилю (інколи її ще називають як величезна хвиля, хвиля-вбивця (rogue wave або huge wave)). Значні зусилля було прикладено, щоб зрозуміти та вивчити природу утасмненого явища, яким вважається блукаюча хвиля. Зараз відомо, що блукаючі хвилі виникають не тільки в океані, але також і в нелінійних фізичних системах, таких як плазма [20], Бозе – Ейнштейнівський конденсат [21], а також досліджуються в нелінійній оптиці [22–25], гідродинаміці [26–29]. Дослідження блукаючої хвилі вказує, що вона виникає нізвідки та дисипує безслідно. Амплітуда таких хвиль значно перевищує амплітуду відомих хвиль. Розв'язки для блукаючих хвиль вказують на локалізацію хвиль як в просторі, так і в часі. Це зумовлює їх непередбачуваність.

Було доведено, що розв'язок через гомокліну функцію (6), (7) не може бути зведений до спектру тільки полюсів у зв'язаному спектрі та  $\delta$ -функцій у неперервному спектрі. Саме такі спектри та розв'язки для цих спектрів нами були раніше вивчені [2,13–15]. Тут доречно звернутися до досліджень рівняння  $KdV$ . Дослідження, що пов'язані зі скінченнозонними розв'язками для  $KdV$ , вказують на суттєве розширення класу можливих розв'язків. Для скінченнозонних розв'язків  $KdV$  одержано формули через  $\theta$ -функції Рімана [30–33]. Тут ми звертаємо увагу на співвідношення (4). Ось в чому ключове твердження: для (2) складна залежність розв'язку від координат та часу можливо може бути подібною до співвідношень для розв'язків  $KdV$ , отриманих для скінченнозонних потенціалів.

Скінченнозонні розв'язки пов'язані з рімановими поверхнями, що виникають як важливий атрибут в підході Рімана – Гільберта. В [33] стверджується, що ріманова поверхня відіграє таку ж саму роль для скінченнозонних розв'язків, що і спектр для початкової задачі (мається на увазі спектр в методі  $OZP$ ). В [34] розвивається підхід Рімана – Гільберта для  $VE$ , який базується на парі Лакса. Який з підходів: чи підхід Рімана – Гільберта, пов'язаний з поверхнею Рімана, чи, можливо, підхід, в якому потрібно розглядати скінченнозонні потенціали, виявиться більш придатним? З вирішенням цього питання ми пов'язуємо можливості дослідження взаємодії солітонів, бризерів та періодичних хвиль.

Обговорюючи результати, що пов'язані з неодіозними розв'язками, відмітимо, що петлеподібні солітони є класом цікавих хвильових явищ, які мають місце в деяких нелінійних системах. Цей інтерес полягає не тільки в інтерпретації отриманих розв'язків, але і в поясненні результатів експериментів. Неоднозначна структура петлеподібних розв'язків аналогічна розв'язкам рівняння, що моделює розтягнутий канат [35]. Петлеподібні солітони на вихорових нитках були досліджені в роботах [36,37]. Крім того, петлеподібні розв'язки з'являються під час опису низки фізичних явищ, зокрема, електромагнітних терагерцових імпульсів в асиметричних молекулах [6], високочастотних збурень в релаксуючому середовищі [3,38,39], а також солітонів у феритах [40,41]. Як типова багатозна структура [42], петлевий солітон, обговорюється в деяких фізичних областях, включаючи фізику частинок [43] і квантову теорію поля [44].

Потрібно визнати, що ми ще далекі від повного усвідомлення фізичних процесів, які можуть описуватися петлеподібними розв'язками. Однак підхід, розглянутий тут, будемо сподіватися, буде цікавим

і корисним для розуміння процесу утворення і анігіляції частинок, оскільки маса і імпульс індивідуального петлеподібного солітона дорівнює нулю. Крім того, дослідження в оптиці, магнетизмі, гідродинаміці чітко вказують на прийнятність підходу, в якому з'являються петлеподібні солітони. Дійсно, фазові зсуви незвичні для  $KdV$ , які спостерігаються при взаємодії солітонів, можна пояснити за допомогою петлеподібних розв'язків (див. рис.4, який запозичено з [41]).

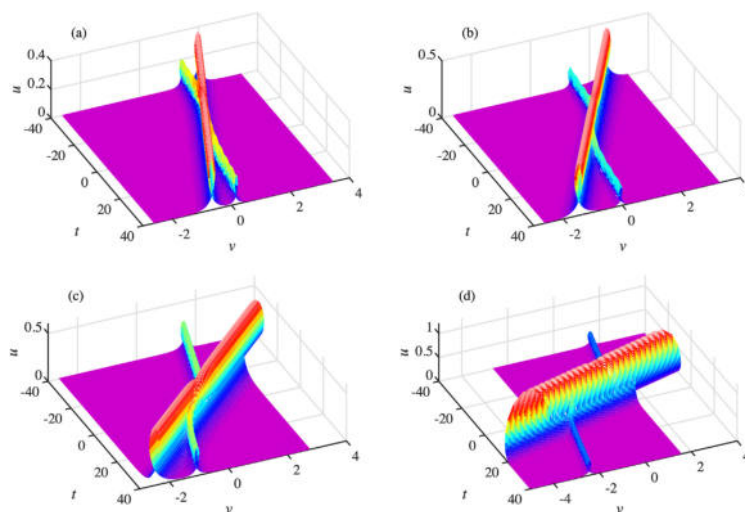


Рис.4. Петлеподібні солітони у ферромагнетиках (з роботи [41]).



## Список використаної літератури

1. Vakhnenko V. A. Solitons in a nonlinear model medium. *J. Phys.A: Math.Gen.* 1992. Vol. 25. P. 4181–4187.
2. Vakhnenko V. O., Parkes E. J. Approach in theory of nonlinear evolution equations: the Vakhnenko–Parkes equation, *Advances in Mathematical Physics*. 2016. Vol.2016, Article ID 2916582. 39 p.
3. Vakhnenko V. O., Parkes E. J. The two loop soliton solution of the Vakhnenko equation. *Nonlinearity*. 1998. Vol. 11. P.1457–1464.
4. Morrison A. J., Parkes E. J., Vakhnenko V. O. The N loop soliton solution of the Vakhnenko equation. *Nonlinearity*. 1999. Vol. 12. P. 1427–1437.
5. Sazonov S. V., Ustinov N. V. Extremely short vector solitons under the conditions of conical refraction. *JETP Letters*. 2014. Vol. 99, no. 9. P. 503–507.
6. Sazonov S. V., Ustinov N. V. Nonlinear Propagation of Vector Extremely Short Pulses in a Medium of Symmetric and Asymmetric Molecules. *JETP*. 2017. Vol. 124, no. 2. P. 213–230.
7. Manna M.A., Neveu A. Short-wave dynamics in the Euler equations. *Inverse Problems*. 2001. Vol. 17. P. 855–861.
8. Tzitzéica G. Sur une nouvelle classe de surfaces. *Comptes Rendus des Seances de l'Academie des Sciences Paris*. 1907. Vol. 144. P. 1257–1259.
9. Dodd R. K., Eilbeck J. C., Gibbon J. D., Morris H. C. Solitons and Nonlinear Wave Equations. London et al.: Academic Press, 1982. 630 p.
10. Pontryagin L. Ordinary differential equations. London: Addison-Wesley Publishing Company, 1962. 298 p.
11. Lenells J. Traveling wave solutions of the Camassa-Holm equation. *J. Diff.Eq.* 2005. Vol. 217. P. 393–430.
12. Vakhnenko V. High-frequency soliton-like waves in a relaxing medium. *J. Math. Phys.* 1999. Vol. 40. P. 2011–2020.
13. Vakhnenko V. O., Parkes E. J. Solutions Associated with Discrete and Continuous Spectrums in the Inverse Scattering Method for the Vakhnenko – Parkes Equation. *Progr. Theor. Phys.* 2012. Vol. 127, no. 4. P. 593–613.
14. Vakhnenko V. O., Parkes E. J. Special singularity function for continuous part of the spectral data in the associated eigenvalue problem for nonlinear equations. *JMP*. 2012. Vol. 53, no. 6. P. 063504.
15. Vakhnenko V. O., Parkes E. J. The singular solutions of a nonlinear evolution equation taking continuous part of the spectral data into account in inverse scattering method. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2012. Vol. 45. P. 846–852.
16. Vakhnenko V. O., Parkes E. J. The inverse problem for some special spectral data. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2016. V. 82. P. 116–124.
17. Mukam S. P. T., Kuetche V. K., Bouetou T. B. Localized waves in a general coupled nonlinear Schrödinger equation. *Eur. Phys. J. Plus*. 2017. Vol. 132. P. 182–188.
18. Dai Z. D., Jiang M. R., Dai Q. Y., Li S. L. Homoclinic bifurcation for the Boussinesq equation with even constraints. *Chin. Phys. Lett.* 2006. Vol. 23, no. 5. P. 1065–1067.
19. Abdou M. A., Soliman A. A., Elgarayhi A. New periodic solitary wave solutions for an extended generalization of Vakhnenko equation. *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*. 2015. Vol. 18. P. 99–101.
20. Bailung H., Sharma S. K., Nakamura Y. Observation of Peregrine Solitons in a Multicomponent Plasma with Negative Ions. *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 107. P. 255005.
21. Bludov Y. V., Konotop V. V., Akhmediev N. Matter rogue waves. *Phys. Rev.A*. 2009. Vol. 80. P. 033610.
22. Chabchoub A., Hoffmann N., Onorato M., Akhmediev N. Super Rogue Waves: Observation of a Higher-Order Breather in Water Waves. *Phys. Rev. X*. 2012. Vol. 2. P. 011015.
23. Chabchoub A., Hoffmann N., Onorato M., Slunyaev A., Sergeeva A., Pelinovsky E., Akhmediev N. Observation of a hierarchy of up to fifth-order rogue waves in a water tank. *Phys. Rev. E*. 2012. Vol. 86. P. 056601.
24. Lecaplain C., Grelu Ph., Soto-Crespo J. M., Akhmediev N. Dissipative Rogue Waves Generated by Chaotic Pulse Bunching in a Mode-Locked Laser. *Phys. Rev. Lett.* 2012. Vol. 108. P. 233901.
25. Pisarchik A. N., Jaimes-Retegui R., Sevilla-Escoboza R., Cuellar G., Taki M. Rogue Waves in a Multistable System. *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 107. P. 274101.
26. Onorato M., Residori S., Bortolozzo U., Montina A., Arecchi F. T. Rogue waves and their generating mechanisms in different physical contexts. *Phys. Rep.* 2013. Vol. 528. P.47.
27. Solli D. R., Ropers C., Koonath P., Jalali B. Optical rogue waves. *Nature*. 2007. Vol. 450. P. 1054–1057.

28. Chabchoub A., Hoffmann N. P., Akhmediev N. Rogue Wave Observation in a Water Wave Tank. *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 106. P. 204502.
29. Kibler B., Fatome J., Finot C., Millot G., Dias F., Genty G., Akhmediev N., Dudley J. M. Observation of Kuznetsov-Ma soliton dynamics in opti-cal fibre. *Nat. Phys.* 2010. Vol. 6. P. 790–795.
30. Dubrovin B A. Theta functions and non-linear equations. *Russian Mathematical Surveys.* 1981. Vol.36, no. 2. P. 11–92.
31. Novikov S. P. A Method of Solving the Periodic Problem for the KDV Equation and Its Generalization. *Solitons* / eds. Bullough R.K., Caudrey P. Berlin Heidelberg: Springer–Verlag, 1980. P. 325–338.
32. Novikov S., Manakov S.V., Pitaevskii L.P., Zakharov V.E. Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method. Publisher: Springer, 1984. 276 p.
33. Newell A. C. Solitons in mathematics and physics, Philadelphia, Pa.: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1985. 244 p.
34. Boutet de Monvel A., Shepelsky D. The Ostrovsky – Vakhnenko equation by a Riemann – Hilbert approach. *J. Phys. A: Math. Theor.* 2015. Vol. 48. P. 035204.
35. Konno K., Ichikawa Y., Wadati M. A loop soliton propagating along a stretched rope. *J. Phys. Soc. Japan.* 1981. Vol. 50. P. 1025–1026.
36. Hasimoto H. A soliton on a vortex filament. *J. Fluid Mech.* 1972. Vol. 51. P. 477–485.
37. Lamb G. Jr. Solitons on moving space curves. *J. Math. Phys.* 1977. Vol. 18. P. 1654–1661.
38. Kraenkel R., Leblond H., Manna M. An integrable evolution equation for surface waves in deep water. *J. Phys. A: Math. Theor.* 2014. Vol. 47. P. 025208(17).
39. Kuetche V. Barotropic relaxing media under pressure perturbations: Nonlinear dynamics. *Dynamics Atmosph. Oceans.* 2015. Vol. 72. P. 21–37.
40. Kuetche V. Inhomogeneous exchange within ferrites: Magnetic solitons and their interactions. *J. Magnetism Magnetic Materials.* 2016. Vol. 398. P. 70–81.
41. Hui-Lin Si, Bang-Qing Li. Two types of soliton twining behaviors for the Kraenkel–Manna–Merle system in saturated ferromagnetic materials. *Optik.* 2018. Vol. 166. P. 49–55.
42. Dai C.-Q., Fan Y., Zhang N. Re-observation on localized waves constructed by variable separation solutions of (1+1)-dimensional coupled integrable dispersionless equations via the projective Riccati equation method. *Applied Mathematics Letters.* 2019. Vol. 96. P. 20-26.
43. Schleif M., Wunsch R. Thermodynamic properties of the SU(2)(f) chiral quark-loop soliton. *Eur. Phys. J. A.* 1998. Vol. 1. P. 171–186.
44. Matsutani S. The relation of lemniscate and a loop soliton as 3/2 and 1 spin fields along the modified Korteweg-de Vries equation. *Mod. Phys. Lett. A.* 1995. Vol. 10. P. 717–721.



513.88:517.44: 539.3

Т.Г. ВОЙТИК

Одесский национальный морской университет

Г.С. ПОЛЕТАЕВ

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

С.А. ЯЦЕНКО

Национальный университет "Одесская морская академия"

**СПЕЦИАЛЬНЫЕ (\*) – РЕШЕНИЯ РОДСТВЕННЫХ ЗАДАЧЕ РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА-ПРИВАЛОВА УРАВНЕНИЙ С ВЗАИМНО ОБРАТНЫМИ РАЦИОНАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

*Продолжено изучение, родственных краевым условиям задач Римана-Гильберта из теории аналитических функций, уравнений с взаимно обратными рациональными коэффициентами. Уравнения выражают, в частности, краевые условия соответствующих родственных задач, которые задаются на сомкнутой вещественной оси. При однозначной разрешимости уравнений в рассматриваемом кольце рациональных функций, установлены формулы взаимосвязи специальных решений одного вида. При правильной факторизации коэффициента получены также формулы их вычисления и приведен иллюстративный пример. Метод основан на результатах, второго автора для уравнений в кольце с факторизационной парой подколец. Процедура свободна от теории интегралов типа Коши и Фурье, требования гёльдеровости функций, индекса.*

*Ключевые слова:* Задача Римана, уравнение, факторизация, кольцо, проектор, факторизационная пара.

Т.Г. ВОЙТИК

Одеський національний морський університет

Г.С. ПОЛЕТАЄВ

Одеська державна академія будівництва та архітектури

С.А. ЯЦЕНКО

Національний університет "Одеська морська академія"

**СПЕЦІАЛЬНІ (\*) – РОЗВ'ЯЗКИ СПОРІДНЕНИХ ЗАДАЧІ РИМАНА-ГІЛЬБЕРТА-ПРИВАЛОВА РІВНЯНЬ З ВЗАЄМНО ЗВОРОТНИМИ РАЦІОНАЛЬНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ**

*Продовжено дослідження, споріднених крайовим умовам задач Римана-Гильберта з теорії аналітичних функцій, рівнянь з взаємно оберненими раціональними коефіцієнтами. Рівняння виражають, зокрема, крайові умови відповідних споріднених задач, які задаються на зімкнутій дійсній вісі. При однозначній розв'язності рівнянь в розглянутому кільці раціональних функцій, встановлено формули взаємозв'язку спеціальних рішень одного виду. При правильній факторизації коефіцієнта отримано також формули їх обчислень і наведено ілюстративний приклад. Метод заснований на результатах другого автора для рівнянь в кільці з факторизаційною парою. Процедура вільна від теорії інтегралів типу Коші та Фур'є, індекса; - вимог виконання умов гольдеровості функцій.*

*Ключові слова:* Задача Римана, рівняння, факторизація, кільце, проектор, факторизаційна пара.

T.G. VOYTIK

Odessa National Maritime University

G.S. POLETAEV

Odessa State Academy of Buildings and Architecture

S.A. YATSENKO

National University "Odessa Maritime Academy"

**SPECIAL (\*) – THE SOLUTION OF RELATED RIEMANN-HILBERT-PRIVALOV PROBLEM EQUATIONS WITH MUTUALLY INVERSE RATIONAL COEFFICIENTS**

*To the related for the boundary conditions the Riemann-Hilbert (Riemann-Hilbert-Privalov) problems equations with mutually inverse rational coefficients continued study. The importance of the Riemann- Hilbert*

problem for analytic functions is known. A problem of the Riemann - Hilbert - Privalov, from the theory of analytic functions, arises or is used in different theoretical and applied branches of mathematics, of mechanics and their proposals. Including in the theory elasticity, and the problems of torsion. Arises in the theory of certain types of differential equations, of integral equations of convolution type, in the study of the corresponding of differential equations of mathematical physics. Therefore, relevant research related to this problem. In particular, the study related problems. In article, the object of consideration is the following equations with mutually inverse coefficients:

$$A(z)X^+(z)+Y_-(z)=B(z); z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \tag{1}$$

$$A^{-1}(z)X_1^+(z)+Y_{1-}(z)=B_1(z); z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}. \tag{2}$$

These equations with  $z = x \in \{-\infty, \infty\}$  express the boundary conditions of the corresponding related problems. The boundary conditions are set on the closed real axis. Special solutions of equations (1), (2) are sought. Namely, solutions of equations (1), (2), with corresponds to the right side:

$$B(z) = A_*(z) = A_+(z) + A_-(z) := [A(z)]_+ + [A(z)]_-, \quad B_1(z) = A_*^{-1}(z) := [A^{-1}(z)]_* =$$

$$= [A^{-1}(z)]_+ + [A^{-1}(z)]_-, \text{ where the indices plus or minus denote the action of the respective}$$

projectors on subrings of the factorization pair or on the belonging to the corresponding subring. In the case of the correct factorization of the coefficient  $A(z)$ , the formulas for calculating the desired specialty solutions equations (1), (2) installed. Independently, in the case of the unique solvability in the considered ring of rational functions of equations (1), (2), formulas for relationship of these special solutions are obtained.

The illustrative examples are examined. Procedure is free from the theory of Cauchy and Fourier integrals, Holder requirements and index.

Keywords: the Riemann problem, equation, factorization, ring, projector, factorization pair.

### Постановка проблемы

Известна [1-3] важность теории уравнений, в том числе, выражающих краевые условия из задачи Римана (Римана-Гильберта, Римана-Гильберта-Привалова) для аналитических функций. Напомним, что она возникает или используется в разделах математики, механики, их приложений;- в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, интегральных уравнений типа свёртки, при изучении соответствующих дифференциальных уравнений математической физики, в теории упругости, задачах о кручении [1-22]. Поэтому актуальны исследования общих положений о разрешимости связанных с нею уравнений и задач. В частности, условий разрешимости, формул специальных решений, важных для построений в замкнутой форме общих решений и их взаимосвязи при правых частях из широких классов функций; - исследования таких вопросов для уравнений, соответствующих задаче нахождения рациональных функций с полюсами из разных полуплоскостей по линейным уравнениям с рациональными взаимно обратными правильно факторизуемыми коэффициентами. В статье отыскиваются специальные (\*) – решения в соответствующем кольце рациональных функций уравнений:

$$A(z)X^+(z)+Y_-(z)=B(z); z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \tag{1}$$

$$A^{-1}(z)X_1^+(z)+Y_{1-}(z)=B_1(z); z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \tag{2}$$

выражающих при  $z = x \in \{-\infty, \infty\}$  краевые условия для двух следующих задач.

**Задача 1.** "Для заданных рациональных функций – коэффициентов  $A(x), B(x)$ ,  $-\infty < x < \infty$  найти пару рациональных функций  $X^+(z) \in \mathfrak{R}_r^+, Y_-(z) \in \mathfrak{R}_{r-}$ , все полюсы первой из которых, при существовании, расположены в нижней, а второй – в верхней полуплоскостях, соответственно, и удовлетворяющих на сомкнутой вещественной оси линейному уравнению:

$$A(x)X^+(x)+Y_-(x)=B(x); x \in \{-\infty; \infty\}."$$

**Задача 2.** "Для заданных рациональных функций – коэффициентов  $A(x), B(x)$ ,  $-\infty < x < \infty$  найти пару рациональных функций  $X_1^+(z) \in \mathfrak{R}_r^+, Y_{1-}(z) \in \mathfrak{R}_{r-}$ , все полюсы первой из которых, при

существовании, расположены в нижней, а второй – в верхней полуплоскостях, соответственно, и удовлетворяющих на сомкнутой вещественной оси линейному уравнению:

$$A^{-1}(x)X_1^+(x) + Y_{1-}(x) = B(x); x \in \{-\infty; \infty\}." \tag{4}$$

Здесь и далее,  $A^{-1}(x) := [A(x)]^{-1}, x \in \{-\infty; \infty\}; A^{-1}(z) := [A(z)]^{-1}, z \in \mathbb{C}$ . Контуром выступает сомкнутая вещественная ось [5]. Специальные (\*) – решения (1), (2) соответствуют  $B(z) = A_*(z), B_1(z) = A_*^{-1}(z) := [A^{-1}(z)]_*$ .

**Анализ исследований и публикаций**

Как отмечалось [1-3], существующие, точные методы изучения задачи Римана – Гильберта восходят, в частности, к исследованиям И.И. Привалова, Ф.Д. Гахова, Ю.И. Черского, М.Г. Крейна и другим. На связь теории интегральных уравнений на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов и этой задачей, впервые, обратил внимание И.М. Рапопорт (1948). В силу указанного в [5] (с. 114), со ссылкой на книгу Н.И. Мухелишвили (1945), можно заключить, что, обычно, эту задачу решали в предположении выполнения для соответствующих функций дополнительного условия Гёльдера на контуре. Часто использовался аппарат теории интеграла типа Коши, понятие индекса. Такие подходы могут приводить к необходимости преодоления значительных аналитических трудностей. Не всегда оправданных. Новые идеи и возможные пути исследования, в иных предположениях, без требования гёльдеровости функций, появились в [5]. Среди работ, связанных с задачей Римана-Гильберта, интегральными уравнениями типа свёртки, но посвящённых абстрактным уравнениям в ассоциативных кольцах со специальной парой подколец, а также реализациям их в конкретных кольцах, укажем [11-18, 20-22]. Публикации, в том числе [9], подтверждают сохранение актуальности использования аппарата задачи Римана. Наряду с другими, важен случай, когда в такого типа задаче Римана-Гильберта-Привалова коэффициенты являются рациональными функциями [4-7, 19]. В [19], этот случай возникает в связи с исследованием дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами на оси. В рассматриваемой ниже ситуации, от задачи Римана-Гильберта-Привалова можно перейти к родственным задачам 1, 2. Считая, при этом, коэффициенты и искомые функции, принадлежащими соответствующим подмножествам рациональных. Однако, свободных от использования аппарата интегралов типа Коши, достаточно простых и исчерпывающих, строго изложенных методов исследования такого типа задач не известно. Поэтому, актуальны исследования, в частности, родственных задач с взаимно обратными рациональными правильно факторизуемыми коэффициентами, поиски специальных (\*) – решений уравнений (1), (2) и их взаимосвязи.

**Цель исследования**

Целью статьи является установление формул специальных (\*) – решений абстрактных уравнений (1), (2) и их взаимосвязи. Эти специальные решения из рассматриваемого ниже кольца рациональных функций удовлетворяют уравнениям (1), (2) с правыми частями  $B(z) = A_*(z),$

$B_1(z) = A_*^{-1}(z) := [A^{-1}(z)]_*$ , соответственно. В этом случае (1), (2) приобретают вид:

$$A(z)X_{A_*}^+(z) + Y_{A_*-}(z) = A_*(z); z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \tag{5}$$

$$A^{-1}(z)X_{A_*^{-1}}^+(z) + Y_{A_*^{-1}-}(z) = A_*^{-1}(z); z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}. \tag{6}$$

Специальные решения важны, в частности, для построений решений, соответствующих произвольным функциям из подмножества рациональных в правых частях (1), (2). Цель достигается использованием соответствующих положений и теорем с формулами решений, установленных, например, в [1-3, 11].

**Изложение основного материала исследования**

1. Будем использовать основные положения, обозначения и определения из [1-3, 11-18, 20 - 22].

1.1. Через  $R$  обозначим произвольное коммутативное ассоциативное кольцо с единицей  $e$ . Пусть  $p^+, p^-$  – коммутирующие проекторы, т. е. аддитивные и идемпотентные отображения  $R \rightarrow R$ .

Положим:  $p^0 := p^+ p^- (= p^- p^+)$ ,  $p_{\mp} := p^{\mp} - p^0$ ,  $p_* := p_+ - p_-$ . Для любого подмножества  $B \subseteq R$  обозначим  $B^{\mp,0} := p^{\mp,0} B$ ;  $B_{\mp} := p_{\mp} B$ ;  $B^* = B^+ + B^-$ ;  $B_* = B_+ + B_-$ . Для любого элемента  $x \in R$  полагаем  $x^{\mp,0} := p^{\mp,0} x$ ;  $x_{\mp} := p_{\mp} x$ ,  $x_* := p_* x$ .

**Определение 1.** Пару подколец  $(R^+, R^-)$  коммутативного кольца  $R$  с единицей  $e$  будем называть его факторизационной парой (**ФП**), если она порождена действующими в  $R$  коммутирующими проекторами  $p^+$ ,  $p^- : R^{\mp} = p^{\mp}(R)$ , и выполняются следующие аксиомы (ср. [13]):

$$e \in R^0 (= R^{\mp} \cap R^{\pm}); \quad (*) \quad p^0 (= p^{\mp} p^{\pm}) - \text{кольцевой гомоморфизм } R^+ \text{ и } R^- \text{ в } R^0; \quad (**)$$

$$R^+ R^- \subseteq R^+ + R^- \quad (:= R^*). \quad (***)$$

**Определение 2.** Всякое кольцо  $R$  с единицей  $e$ , рассматриваемое вместе с фиксированной **ФП** подколец  $(R^+, R^-) [\equiv (R^-, R^+)]$ , т.е. подколец, обладающих аксиоматически заданными свойствами  $(*)$ ,  $(**)$ ,  $(***)$ , будем называть «кольцом с факторизационной парой». Кратко, кольцом с **ФП**.

**1.2.** Будем говорить, что элемент  $a \in R$  допускает в коммутативном кольце  $R$  факторизацию по факторизационной паре  $(R^+, R^-)$  (- по **ФП**  $(R^+, R^-)$ ), если существуют элементы  $r^+ \in R^+$ ,  $s^0 \in R^0$ ,  $t^- \in R^-$  такие, что:  $a = r^+ s^0 t^-$ . Эта факторизация называется: правильной факторизацией (**н.ф.**), если  $r^+ \in R^+$ ,  $s^0 \in R^0$ ,  $t^- \in R^-$  – обратимы в своих подкольцах; - нормированной факторизацией (**н.ф.**), если  $t^0 = r^0 = e$ ; - нормированной правильной факторизацией (**н.н.ф.**), если она является (**н.ф.**) и  $t^0 = r^0 = e$ . Известно, что правильную факторизацию элемента из  $R$  по **ФП**  $(R^+, R^-)$  можно нормировать. Нормированная правильная факторизация единственна.

**1.3.** Обозначим через  $\mathfrak{R}_r$  совокупность всех рациональных функций, вообще, комплексного переменного  $z \in C$ , все полюсы которых, при существовании, конечны и не вещественны. Пределы функций из  $\mathfrak{R}_r$  на бесконечности существуют и конечны. Пусть  $\mathfrak{R}_r^+$  ( $\mathfrak{R}_r^-$ ) - совокупности функций из  $\mathfrak{R}_r$ , все полюсы которых, при существовании, расположены внутри нижней (верхней) полуплоскости  $\Pi_-$  ( $\Pi_+$ ), соответственно (Ср. [5]; с.13,14). Проверяется, что  $\mathfrak{R}_r$  - ассоциативное коммутативное кольцо с мультипликативной единицей  $e = f(z) := 1, z \in C$  относительно обычных операций сложения и умножения функций, а  $\mathfrak{R}_r^+, \mathfrak{R}_r^-$  - его подкольца с единицей. Проекторы на подкольца:  $\mathfrak{R}_r \rightarrow \mathfrak{R}_r^{\mp}$  обозначим  $p^{\mp}$ , соответственно. Эти проекторы коммутирующие. Проектор  $p^+$  (проектор  $p^-$ ) каждой функции из  $\mathfrak{R}_r$  ставит в соответствие часть её, оставшуюся после удаления из разложения этой функции в сумму константы и простейших дробей первого и второго типов всех слагаемых с полюсами из  $\Pi_+$ , (из  $\Pi_-$ ), соответственно. Полагаем:  $p^0 (= p^{\mp} p^{\pm})$ ,  $p_+ := p^+ - p^0$ ,  $p_- := p^- - p^0$ ,  $p_* := p_+ - p_-$ ,  $\mathfrak{R}_r^{\pm,0} = p^{\pm,0}(\mathfrak{R}_r)$ , где  $\mathfrak{R}_r^0 = \mathfrak{R}_r^+ \cap \mathfrak{R}_r^-$ . Можно показать, что  $\mathfrak{R}_r$  - кольцо с **ФП**  $(\mathfrak{R}_r^+, \mathfrak{R}_r^-)$ . Для любой функции  $A(z) \in \mathfrak{R}_r$  справедливо разложение:  $A(z) := A^0 + A_+(z) + A_-(z)$ .

**2.** Под специальными понимаются такие решения указанных **Задач 1., 2.** и соответствующих им уравнений (1), (2), через которые можно находить их решения при произвольных правых частях краевых условий (3), (4) и уравнений (1), (2), соответственно, из весьма широкого подмножества рациональных функций. Это, например, решения, соответствующие каждой из правых частей:  $B(z) = B_1(z) = 1$ ;  $B(z) = A_*(z) = A_+(z) + A_-(z) := [A(z)]_+ + [A(z)]_-$ ,  $B_1(z) = A_*^{-1}(z) := [A^{-1}(z)]_* = [A^{-1}(z)]_+ + [A^{-1}(z)]_-$ . Для  $B(z) = B_1(z) = 1$  к такому выводу можно прийти, применяя к рассматриваемым уравнениям, в соответствующей постановке задачи их разрешимости, общие результаты [11]. Для  $B(z) = A_*(z) := [A(z)]_*$ ,  $B_1(z) = A_*^{-1}(z) := [A^{-1}(z)]_*$ , аналогичное заключение можно получить, учитывая связь решений (1),

соответствующих  $B(z) = 1$  и решений, соответствующих  $B(z) = A_*(z)$  [2], а также связь решений уравнения вида (2), соответствующих  $B_1(z) = 1$  и решений, соответствующих  $B_1(z) = A_*^{-1}(z)$ . Таким образом, можно заключить, что решение  $X_{A_*}^+(z) \in \mathfrak{R}_r^+$ ,  $Y_{A_*-}(z) \in \mathfrak{R}_{r-}$  для уравнения (5) и решение  $X_{A_*^{-1}}^+(z) \in \mathfrak{R}_r^+$ ,  $Y_{A_*^{-1}-}(z) \in \mathfrak{R}_{r-}$  для уравнения (6), соответственно, являются специальными. Будем называть их специальными (\*) – решениями соответствующих уравнений и задач. Установим формулы вычислений и взаимосвязи этих специальных (\*) – решений.

**3. Глав н ы й р е з у л ь т а т 3.1.** Воспользуемся следующим утверждением [1].

**Теорема.** Пусть функция  $A(z) \in \mathfrak{R}_r$  не имеет вещественных нулей и  $\lim_{z \rightarrow \infty} A(z) = const \neq 0$ .

Если, при этом,  $A^{-1}(z)$  допускает нормированную правильную факторизацию по факторизационной паре  $(\mathfrak{R}_r^+, \mathfrak{R}_r^-)$ :  $A^{-1}(z) = \Gamma^+(z)S^0(z)T^-(z)$ ;  $z \in C$ , тогда уравнения (1), (2) и **Задачи 1., 2.**, относительно  $X^+(z), X_1^+(z) \in \mathfrak{R}_r^+$ ;  $Y_-(z), Y_{1-}(z) \in \mathfrak{R}_{r-}$ , соответственно, при любых правых частях  $B(z), B_1(z) \in \mathfrak{R}_r$  в  $\mathfrak{R}_r$  однозначно разрешимы. Их решения можно найти по формулам, соответственно:

$$X^+(z) = \Gamma^+(z)S^0[T^-(z)B^+(z)]^+, Y_-(z) = B_-(z) + (T^-(z))^{-1}[T^-(z)B^+(z)]_-; \quad (7)$$

$$X_1^+(z) = (\Gamma^+(z)S^0)^{-1}[(T^-(z))^{-1}B_1^+(z)]^+, Y_{1-}(z) = B_{1-}(z) + T^-(z)[(T^-(z))^{-1}B_1^+(z)]_-; \quad (8)$$

где  $S^0 := S^0(z) = const$ .

**3.2.** При выполнении условий теоремы, с помощью формул (8), устанавливаются такие формулы вычислений специальных (\*) – решений уравнений (1), (2) и **Задач 1., 2.** в  $\mathfrak{R}_r$  при  $B(z) = A_*(z)$ ,

$B_1(z) = A_*^{-1}(z) := [A^{-1}(z)]_*$ , то есть решений в  $\mathfrak{R}_r$  уравнений (5), (6), соответственно:

$$\begin{aligned} X_{A_*}^+(z) &= \Gamma^+(z)S^0 [T^-(z)A_+(z)]^+ = 1 - \Gamma^+(z)S^0 A^0, \\ Y_{A_*-}(z) &= ((T^-(z))^{-1} [T^-(z)A_*(z)]_- = -(T^-(z))^{-1} T_-(z)A^0; \\ X_{A_*^{-1}}^+(z) &= (\Gamma^+(z)S^0)^{-1} [(T^-(z))^{-1}(A^{-1}(z))_+]^+ = 1 - [\Gamma^+(z)S^0 A^0]^{-1}, \\ Y_{A_*^{-1}-}(z) &= T^-(z) [(T^-(z))^{-1}(A^{-1}(z))_*]_- = -T^-(z)[(T^-(z)A^0)^{-1}]_-, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $X_e^+(z) = \Gamma^+(z)S^0$  составляющая решения в  $\mathfrak{R}_r$  уравнения (1), соответствующая  $B(z) = 1$ , а

$X_{1e}^+(z) = (\Gamma^+(z)S^0)^{-1}$  составляющая решения в  $\mathfrak{R}_r$  уравнения (2), соответствующая  $B_1(z) = 1$ .

**3.3.** Предположим, что оба уравнения (5), (6) однозначно разрешимы в  $\mathfrak{R}_r$  и имеют своими единственными в этом кольце решениями функции  $X_{A_*}^+(z) \in \mathfrak{R}_r^+$ ,  $Y_{A_*-}(z) \in \mathfrak{R}_{r-}$ ; - функции  $X_{A_*^{-1}}^+(z) \in \mathfrak{R}_r^+$ ,  $Y_{A_*^{-1}-}(z) \in \mathfrak{R}_{r-}$ , соответственно. Тогда, в силу равенств (5), (6), с учётом того, что  $A(z) = A^0 + [A(z)]_*$ ,  $A^{-1}(z) = (A^{-1})^0 + [A^{-1}(z)]_* = (A^0)^{-1} + A_*^{-1}(z) := (A^0)^{-1} + [A^{-1}(z)]_*$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} A(z)[1 - X_{A_*}^+(z)] &= A^0 + Y_{A_*-}(z); z \in \square \cup \{\infty\}, \\ A^{-1}(z)[1 - X_{A_*^{-1}}^+(z)] &= (A^0)^{-1} + Y_{A_*^{-1}-}(z); z \in \square \cup \{\infty\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Перемножая, соответственно, левые и правые части (10), получаем:



$$[1 - X_{A^+}^+(z)] \cdot [1 - X_{A^{-1}}^+(z)] = [A^0 + Y_{A^-}(z)] \cdot [(A^0)^{-1} + Y_{A^{-1}-}(z)]; z \in \square \cup \{\infty\}. \tag{11}$$

Левая часть равенства (11) принадлежит подкольцу  $\mathfrak{R}_r^+$ , а правая подкольцу  $\mathfrak{R}_r^-$ . Стало быть, обе они равны одной и той же функции из  $\mathfrak{R}_r^0$ , то есть равны одному и тому же комплексному числу. Это число оказывается равным единице. Последнее заключение легко получить, применяя к (11) кольцевой гомоморфизм  $p^0$ :

$$p^0 \{ [1 - X_{A^+}^+(z)] \cdot [1 - X_{A^{-1}}^+(z)] \} = p^0 \{ [A^0 + Y_{A^-}(z)] \cdot [(A^0)^{-1} + Y_{A^{-1}-}(z)] \} = \\ = p^0 \{ [A^0 + Y_{A^-}(z)] \} \cdot p^0 \{ [(A^0)^{-1} + Y_{A^{-1}-}(z)] \} = A^0 \cdot (A^0)^{-1} = 1; z \in \square \cup \{\infty\},$$

где  $A^0 := [A(z)]^0, (A^{-1})^0 := [A^{-1}(z)]^0$ .

Таким образом, при сделанных предположениях, установлено соотношение:

$$[1 - X_{A^+}^+(z)] \cdot [1 - X_{A^{-1}}^+(z)] = [A^0 + Y_{A^-}(z)] \cdot [(A^0)^{-1} + Y_{A^{-1}-}(z)] = 1; z \in \square \cup \{\infty\}.$$

Из этого последнего соотношения следуют искомые в статье формулы, связывающие специальные (\*) – решения уравнений (1), (2) в  $\mathfrak{R}_r$  при  $B(z) = A_*(z)$ ,

$B_1(z) = A_*^{-1}(z) := [A^{-1}(z)]_*$ , то есть решений в  $\mathfrak{R}_r$  уравнений (5), (6):

$$[1 - X_{A^+}^+(z)] \cdot [1 - X_{A^{-1}}^+(z)] = 1, \\ [A^0 + Y_{A^-}(z)] \cdot [(A^0)^{-1} + Y_{A^{-1}-}(z)] = 1; z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}. \tag{12}$$

### 3.4. Иллюстративный пример

1. Найдём специальные (\*) – решения уравнений (1), (2) в  $\mathfrak{R}_r$ , то есть решения в  $\mathfrak{R}_r$  уравнений (5), (6) при:

$$A(z) = \frac{3z^2 + 27}{2z^2 + 8}; B(z) = A_*(z) = \frac{15}{2(z^2 + 4)}; B_1(z) = A_*^{-1}(z) = [A^{-1}(z)]_* = -\frac{10}{3(z^2 + 9)}.$$

В этом случае,

$$A_*(z) = A_+(z) + A_-(z) = \frac{15i}{8(z+2i)} - \frac{15i}{8(z-2i)}; A^0 = \frac{3}{2}; A^{-1}(z) = \frac{2z^2 + 8}{3z^2 + 27};$$

$$A_*^{-1}(z) = [A^{-1}(z)]_+ + [A^{-1}(z)]_- = -\frac{5i}{9(z+3i)} + \frac{5i}{9(z-3i)} = -\frac{10}{3(z^2 + 9)};$$

$$A^{-1}(z) = \frac{z+2i}{z+3i} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{z-2i}{z-3i}; \Gamma^+(z) = \frac{z+2i}{z+3i}; S^0 = \frac{2}{3}; T^-(z) = \frac{z-2i}{z-3i}.$$

По формулам (9) находим:

$$X_{A^+}^+(z) = 1 - \Gamma^+(z)S^0A^0 = \frac{i}{z+3i}, Y_{A^-}(z) = -(T^-(z))^{-1}T_-(z)A^0 = -\frac{3i}{2(z-2i)};$$

$$X_{A^{-1}}^+(z) = 1 - [\Gamma^+(z)S^0A^0]^{-1} = -\frac{i}{z+2i}, Y_{A^{-1}-}(z) = -T^-(z)[(T^-(z)A^0)^{-1}]_- = \frac{2i}{3(z-3i)}.$$

Непосредственно подстановкой проверяется, что полученные функции доставляют решение в  $\mathfrak{R}_r$  уравнений (5), (6), соответственно:

$$\begin{aligned}
A(z)X_{A_*}^+(z) + Y_{A_*-}(z) &= \frac{3z^2 + 27}{2z^2 + 8} \cdot \frac{i}{z + 3i} + \left(-\frac{3i}{2(z - 2i)}\right) = \\
&= \frac{3}{2} \left[ \frac{zi + 3 - zi + 2}{z^2 + 4} \right] = \frac{15}{2(z^2 + 4)} = A_*(z); z \in \square \cup \{\infty\}; \\
A^{-1}(z)X_{A_*^{-1}}^+(z) + Y_{A_*^{-1}-}(z) &= \frac{2z^2 + 8}{3z^2 + 27} \cdot \left(-\frac{i}{z + 2i}\right) + \frac{2i}{3(z - 3i)} = \\
&= \frac{2}{3} \left[ \frac{-zi - 2 + zi - 3}{z^2 + 9} \right] = -\frac{10}{3(z^2 + 9)} = A_*^{-1}(z); z \in \square \cup \{\infty\}.
\end{aligned}$$

2. Приведём проверку того, что соотношения (12) здесь выполняются:

$$\begin{aligned}
[1 - X_{A_*}^+(z)] \cdot [1 - X_{A_*^{-1}}^+(z)] &= \left[1 - \frac{i}{z + 3i}\right] \cdot \left[1 - \left(-\frac{i}{z + 2i}\right)\right] = 1, \\
[A^0 + Y_{A_*-}(z)] \cdot [(A^0)^{-1} + Y_{A_*^{-1}-}(z)] &= \left[\frac{3}{2} + \left(-\frac{3i}{2(z - 2i)}\right)\right] \cdot \left[\frac{2}{3} + \frac{2i}{3(z - 3i)}\right] = 1; z \in \square \cup \{\infty\}.
\end{aligned}$$

### Выводы

Рассмотрены родственные краевым условиям задачи Римана-Гильберта-Привалова уравнения (1), (2) в  $\mathfrak{R}_r$  с взаимно обратными рациональными коэффициентами. Установлены формулы важных в теории и конкретных примерах специальных (\*) – решений. Из формул взаимосвязи специальных (\*) – решений в  $\mathfrak{R}_r$ , легко получить формулы вычислений специального (\*) – решения уравнения (2) в  $\mathfrak{R}_r$  через известное соответствующее специальное (\*) – решение уравнения (1) в  $\mathfrak{R}_r$  и наоборот. В перспективе, - построение, при общих условиях, формул решений, соответствующих произвольным, из весьма широкого подмножества рациональных функций, правым частям (1), (2) через специальные (\*) – решения. Интересны и вопросы построений факторизаций коэффициентов через специальные решения, а также применения.

### Список использованной литературы

1. Войтик Т.Г., Полетаев Г.С., Яценко С.А. Родственные типу Римана-Гильберта-Привалова задачи со взаимно обратными рациональными правильно факторизуемыми коэффициентами. Вестник Херсонского национального технического университета. Херсон : ХНТУ, 2017. Вып. 3(62). Т. 1. С. 43-50.
2. Войтик Т.Г., Полетаев Г.С., Яценко С.А. Два специальных решения родственной типа Римана-Гильберта-Привалова краевой задачи с рациональными коэффициентами. Вестник Херсонского национального технического университета. Херсон : ХНТУ, 2018. Вып. 3(66). Т. 2. С. 37-43.
3. Войтик Т.Г., Полетаев Г.С., Яценко С.А. Метод нахождения рациональных функций с полюсами из разных полуплоскостей по уравнению с правильно факторизуемым коэффициентом. НАУКОВІ НОТАТКИ. Луцьк, 2016. Вип. 54. С. 65-70.
4. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. Москва : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. 640 с.
5. Крейн М.Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов. Успехи мат. наук. 1958. Т. 13. Вып. 5(83). С. 3-120.
6. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Москва : Наука, 1968. 512 с.
7. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. Москва : Наука, 1978. 296 с.
8. Мхитарян С.М. О некоторых плоских контактных задачах теории упругости с учётом сил сцепления и связанных с ними интегральных и дифференциальных уравнениях. Изв. АН Армянской ССР. Серия : Механика. 1968. Т. XXI. №5–6. С. 3-20.
9. Акопян В.Н., Даштоян Л.Л. Замкнутые решения некоторых смешанных задач для ортотропной плоскости с разрезом. Современные проблемы механики деформируемого твердого тела, дифференциальных и интегральных уравнений : Тезисы докладов международной научной конференции. Одесса : ОНУ. 23-26 августа 2013 г. Одесса, 2013. С. 12.

10. Черский Ю.И., Керекеша П.В., Керекеша Д.П. Метод сопряжения аналитических функций с приложениями. Одесса : Астропринт, 2010. 552 с.
11. Полетаев Г.С. Об уравнениях и системах одного типа в кольцах с факторизационными парами. Киев : Институт математики. АН УССР, 1988. 20 с. (Препринт. АН УССР, Институт математики : 88.31).
12. Полетаев Г.С. Об однопроекторных второго порядка уравнениях с правильно факторизуемыми коэфф. в кольце с факторизационной парой. Вестник Херсонского государственного технического университета. Херсон : ХГТУ, 2000. Вып. 2(8). С. 191-195.
13. McNabb A., Schumitzky A. Factorization of Operators I : Algebraic Theory and Examples. J. Functional Analysis. 1972. Vol. 9. № 3. P. 262-295.
14. Войтик Т.Г., Полетаев Г.С., Яценко С.А. Нахождение двух рациональных функций с полюсами из полуплоскостей по линейному уравнению с правильно факторизуемым коэффициентом. Глушковські читання : Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції (Київ, 10-13 вересня 2013 р.). НТУУ "КПІ". Киев, 2013. С. 74-77.
15. Полетаев Г.С. Подвид двупроекторных первого порядка уравнений с правильно факторизуемым коэффициентом в кольце с факторизационной парой. XVII International Conference "Dynamical System Modelling and Stability Investigation" : Abstracts of conference reports (Kiev, Ukraine. May 27-29, 2015). НТУУ "КПІ". Киев, 2015. С. 46.
16. Полетаев Г.С. Метод решения абстрактных уравнений с двумя неизвестными из подколец факторизационной пары. Математика в сучасному технічному університеті : Матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції (Київ, 24-25 грудня 2015 р.). НТУУ "КПІ". Киев, 2015. С. 85-88.
17. Войтик Т.Г., Полетаев Г.С., Яценко С.А. Проекторный поход к нахождению двух рациональных линейно связанных на оси функций с полюсами из разных полуплоскостей. Необратимые процессы в природе и технике : Труды 8-ой Всероссийской конференции. Часть II. (Москва, 27-29 января 2015 г.). МГТУ им. Н.Э. Баумана. Москва, 2015. С. 125-129.
18. Полетаев Г.С. Общее свойство решений родственных Римана-Гильберта-Привалова задач с взаимно обратными рациональными коэффициентами. НАУКОВІ НОТАТКИ. Луцьк, 2016. Вип. 56. С. 187-192.
19. Попов Г.Я., Керекеша П.В., Круглов В.Е.; под ред. проф. Г.Я. Попова. Метод факторизации и его численная реализация. Одесса : ОГУ, 1976. 82 с.
20. Полетаев Г.С. Абстрактный аналог парного уравнения типа свертки в кольце с факторизационной парой. Укр. матем. журнал. 1991. Т. 43. № 9. С. 1201-1213.
21. Полетаев Г.С. Некоторые результаты о парных уравнениях в кольцах с факторизационными парами. Вісник Харківського національного ун-ту. Серія : Математика, прикладна математика і механіка. Харків : ХНУ, 2003. Вип.52. № 582. С. 143-149.
22. Voytik T.G., Poletaev G.S., Yatsenko S.A. Projector approach to the general linear equation with variables from the subring of the rational functions and a factorable coefficient. J. of Physics : Conf. Series. 2017. Vol. 918 (2017) 012032 doi:10.1088/1742-6596/918/1/012032 Scopus. - P. 1-5.

### References

1. Vojtik T.G., Poletaev G.S., Yacenko S.A. Rodstvennye tipu Rimana-Gilberta-Privalova zadachi so vzaimno obratnymi racionalnymi pravilno faktorizuemymi koefficientami. Vestnik Hersonskogo nacionalnogo tehničeskogo universiteta. Herson : HNTU, 2017. Vyp. 3(62). T. 1. S. 43-50.
2. Vojtik T.G., Poletaev G.S., Yacenko S.A. Dva specialnyh resheniya rodstvennoj tipa Rimana-Gilberta-Privalova kraevoj zadachi s racionalnymi koefficientami. Vestnik Hersonskogo nacionalnogo tehničeskogo universiteta. Herson : HNTU, 2018. Vyp. 3(66). T. 2. S. 37-43.
3. Vojtik T.G., Poletaev G.S., Yacenko S.A. Metod nahozhdeniya racionalnyh funkcij s polyusami iz raznyh poluploskostej po uravneniyu s pravilno faktorizuemym koefficientom. NAUKOVI NOTATKI. Luck, 2016. Vip. 54. S. 65-70.
4. Gahov F.D. Kraevye zadachi. Moskva : Gos. izd-vo fiz.-mat. lit., 1963. 640 s.
5. Krejn M.G. Integralnye uravneniya na polupryamoj s yadrami, zavisyashimi ot raznosti argumentov. Uspehi mat. nauk. 1958. T. 13. Vyp. 5(83). S. 3-120.
6. Mushelishvili N.I. Singulyarnye integralnye uravneniya. Moskva : Nauka, 1968. 512 s.
7. Gahov F.D., Cherskij Yu.I. Uravneniya tipa svertki. Moskva : Nauka, 1978. 296 s.
8. Mhitaryan S.M. O nekotoryh ploskih kontaknyh zadachah teorii uprugosti s uchyotom sil sčepeniya i svyazannyh s nimi integralnyh i differencialnyh uravneniyah. Izv. AN Armyanskoy SSR. Seriya : Mehanika. 1968. T. XXI. №5-6. S. 3-20.
9. Akopyan V.N., Dashtoyan L.L. Zamknutyje resheniya nekotoryh smeshannyh zadach dlya ortotropnoj ploskosti s razrezom. Sovremennye problemy mehaniki deformiruемого tverdogo tela, differencialnyh i



- integralnyh uravnenij : Tezisy dokladov mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii. Odessa : ONU. 23-26 avgusta 2013 g. Odessa, 2013. S. 12.
10. Cherskij Yu.I., Kereksha P.V., Kereksha D.P. Metod sopryazheniya analiticheskikh funkcij s prilozheniyami. Odessa : Astroprint, 2010. 552 s.
11. Poletaev G.S. Ob uravneniyah i sistemah odnogo tipa v kolcah s faktorizacionnymi parami. Kiev : Institut matematiki. AN USSR, 1988. 20 s. (Preprint. AN USSR, Institut matematiki : 88.31).
12. Poletaev G.S. Ob odnoproektnykh vtorogo poryadka uravneniyah s pravilno faktorizuemyimi koeff. v kolce s faktorizacionnoj paroj. Vestnik Hersonskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta. Herson : HGТУ, 2000. Vyp. 2(8). S. 191-195.
13. McNabb A., Schumitzky A. Factorization of Operators I : Algebraic Theory and Examples. J. Functional Analysis. 1972. Vol. 9. № 3. R. 262-295.
14. Vojtik T.G., Poletaev G.S., Yacenko S.A. Nahozhdenie dvuh racionalnykh funkcij s polyusami iz poluploskostej po linejnomu uravneniyu s pravilno faktorizuemyim koefficientom. Glushkovski chitannya : Materiali Vseukrayinskoyi naukovopraktichnoyi konferenciyi (Kiyiv, 10-13 veresnya 2013 r.). NTUU "KPI". Kiev, 2013. S. 74-77.
15. Poletaev G.S. Podvid dvuproektnykh pervogo poryadka uravnenij s pravilno faktorizuemyim koefficientom v kolce s faktorizacionnoj paroj. XVII International Conference "Dynamical System Modelling and Stability Investigation" : Abstracts of conference reports (Kiev, Ukraine. May 27-29, 2015). NTUU "KPI". Kiev, 2015. C. 46.
16. Poletaev G.S. Metod resheniya abstraktnykh uravnenij s dvumya neizvestnyimi iz podkolec faktorizacionnoj pary. Matematika v suchasnomu tehničnomu universiteti : Materiali IV Mizhnarodnoyi naukovopraktichnoyi konferenciyi (Kiyiv, 24-25 grudnya 2015 r.). NTUU "KPI". Kiev, 2015. S. 85-88.
17. Vojtik T.G., Poletaev G.S., Yacenko S.A. Proektnyj pohod k nahozhdeniyu dvuh racionalnykh linejno svyazannykh na osi funkcij s polyusami iz raznykh poluploskostej. Neobratimye processy v prirode i tehnikе : Trudy 8-oj Vserossijskoj konferencii. Chast II. (Moskva, 27-29 yanvarya 2015 g.). MGTU im. N.E. Bauman. Moskva, 2015. S. 125-129.
18. Poletaev G.S. Obshee svojstvo reshenij rodstvennykh Rimana-Gilberta-Privalova zadach s vzaimno obratnymi racionalnymi koefficientami. NAUKOVI NOTATKI. Luck, 2016. Vip. 56. S. 187-192.
19. Popov G.Ya., Kereksha P.V., Kruglov V.E.; pod red. prof. G.Ya. Popova. Metod faktorizacii i ego chislennaya realizaciya. Odessa : OGU, 1976. 82 s.
20. Poletaev G.S. Abstraktnyj analog parnogo uravneniya tipa svertki v kolce s faktorizacionnoj paroj. Ukr. matem. zhurnal. 1991. T. 43. № 9. S. 1201-1213.
21. Poletaev G.S. Nekotorye rezultaty o parnykh uravneniyah v kolcah s faktorizacionnymi parami. Visnik Harkivskogo nacionalnogo un-tu. Seriya : Matematika, prikladna matematika i mehanika. Harkiv : HNU, 2003. Vip. 52. № 582. S. 143-149.
22. Vojtik T.G., Poletaev G.S., Yatsenko S.A. Projector approach to the general linear equation with variables from the subring of the rational functions and a factorable coefficient. J. of Physics : Conf. Series. 2017. Vol. 918 (2017) 012032 doi:10.1088/1742-6596/918/1/012032 Scopus. - P. 1-5.

УДК 519.688

В.І. ДУБИНКО, А.С. МАЗМАНИШВИЛІ  
Национальный Научный Центр «ХФТИ» НАНУ, Харьков, Украина

Д.В. ЛАПТЕВ

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Веркіна НАНУ, Харків, Україна

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУННЕЛИРОВАНИЯ ЧАСТИЦЫ В ДВУХЪЯМНОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

*Работа посвящена изложению математической модели и результатов численных расчетов по туннелированию волновой функции в двухъямном потенциале. Предложен и использован биквадратичный потенциал двухъямного вида. На основе математической модели временной эволюции волновой функции построен численный алгоритм и создана программа решения уравнения Шредингера, описывающего временную эволюцию волновой функции частицы. Физическая задача основывается на включении в потенциал временной зависимости синусоидального вида, содержащую частоту и индекс модуляции. Таким образом, реализуется случай параметрической накачки квантовой системы – частицы в нестационарном потенциале. Данная модель может описывать поведение биологических систем, в которых осуществляется туннелирование протонов между биологически активными участками сложных органических молекул вследствие влияния температурных флуктуаций, облучения электромагнитными волнами и др. В результате численных экспериментов получены режимы модуляции, при которых имело место туннелирование. Проведена проверка отсутствия туннелирования в режиме, когда отключена синусоидальная модуляция. Для различных случаев частотной модуляции приведены результаты численного моделирования процесса туннелирования. Показана возможность регулировки эффективности туннелирования путем выбора частоты модуляции. Путем направленного изменения параметров модуляции возможно регулировать скоростью туннелирования волновой функции частицы. Проведено исследование зависимости скорости туннелирования частицы через потенциальный барьер от параметров потенциала (высота и ширина барьера, кривизна ям, характеризующая собственной частотой параболического приближения в окрестности ям), а также от параметров начального состояния частицы, а именно начальной координаты центра масс и начальной дисперсии, которая описывает степень локализации волнового пакета.*

*Ключевые слова: уравнение Шредингера, туннелирование волновой функции, математическое моделирование.*

В.І. ДУБИНКО, О.С. МАЗМАНИШВИЛІ

Національний Науковий Центр «ХФТИ» НАНУ, Харків, Україна

Д.В. ЛАПТЕВ

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Веркіна НАНУ, Харків, Україна

## ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТУНЕЛЮВАННЯ ЧАСТИНКИ В ДВОХ'ЯМНОМУ ПОТЕНЦІАЛІ

*Работа посвящена викладенню математичної моделі і результатів чисельних розрахунків по тунелюванню хвильової функції в двох'ямному потенціалі. Запропоновано і використано биквадратичний потенціал двох'ямного виду. На основі математичної моделі хвильової функції створено чисельний алгоритм і побудована програма розв'язку рівняння Шредингера, що описує часову еволюцію хвильової функції частинки. Фізична задача базується на включенні в потенціал часової залежності синусоїдального виду, що містить частоту і індекс модуляції. Таким чином, реалізується випадок параметричної накачки квантової системи – частинки у нестационарному потенціалі. Дана модель може описувати поведінку біологічних систем, в яких здійснюється тунелювання протонів між біологічно активними ділянками складних органічних молекул внаслідок впливу температурних флуктуаций, випромінювання електромагнітними хвилями та ін. В результаті чисельних експериментів отримано режими модуляції, при яких має місце тунелювання. Проведена перевірка відсутності тунелювання в режимі, коли відключена синусоїдальна модуляція. Для різних випадків частотної модуляції були наведені результати чисельного моделювання процесу тунелювання. Показана можливість регулювання ефективності тунелювання шляхом вибору частоти модуляції. Шляхом направленої зміни параметрів модуляції можливо регулювати швидкість тунелювання хвильової функції частинки. Проведено дослідження залежності швидкості тунелювання частинки крізь потенційний бар'єр від параметрів потенціалу (висота та ширина бар'єра, кривизна ям, що характеризується власною частотою параболического наближення в околиці ям), а та-*

кож від параметрів початкового стану частинки, а саме від початкової координати центра мас та початкової дисперсії, що описує локалізацію хвильового пакета.

Ключові слова: рівняння Шредингера, тунелювання хвильової функції, математичне моделювання.

V.S. DUBINKO, A.S. MAZMANISHVILI

National Science Center “Kharkov Institute of Physics & Technology” NASU, Kharkov, Ukraine

D.V. LAPTEV

B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering NASU, Kharkov, Ukraine

## NUMERICAL MODELING OF THE PARTICLE TUNNELING IN THE DOUBLE-WELL POTENTIAL

*The paper is devoted to the presentation of the mathematical model and the numerical calculations results for the tunneling of the wave function in a double-well potential. The biquadratic potential of a double-well form is proposed and used. Based on a mathematical model of the time evolution of the wave function, a numerical algorithm has been developed and a program has been created for solving the Schrödinger equation, which describes the time evolution of the particle's wave function. The physical problem is based on the inclusion in the potential of the time dependency of the sinusoidal form, containing the frequency and modulation index. Thus, the case of a parametric pumping of a quantum system – a particle in a nonstationary potential – is realized. This model can describe the behavior of biological systems in which protons are tunneling between the biologically active sites of complex organic molecules due to the influence of temperature fluctuations, electromagnetic wave irradiation, etc. As a result of numerical experiments, modulation regimes were obtained at which tunneling took place. The absence of tunneling was checked in the regime when sinusoidal modulation was disabled. For various cases of frequency modulation, the results of numerical simulation of the tunneling process are presented. The possibility of adjusting the tunneling efficiency by selecting the modulation frequency is shown. By the directional change of the modulation parameters, it is possible to control the particle wave function tunneling rate. The dependency of the particle tunneling rate through the potential barrier on the potential parameters (barrier height and width, well curvature, characterized by the eigenfrequency of the parabolic approximation in the vicinity of the wells), as well as the initial state parameters of the particle such as the initial spatial coordinate and the initial dispersion, which describes degree of localization of the wave packet.*

Keywords: Schrödinger equation, wave function tunneling, mathematical modeling.

### Постановка проблеми

Квадратичний потенціал в квантовій теорії має важке значення, як при аналізі спектрів излучения, так і в качестве примера, допускающего точные и пригодные для анализа решения соответствующего уравнения Шредингера. Явные решения в таком потенциале и его обобщения позволяют проанализировать динамику волновых функций и связанных с ней квантово-механических средних. В практике применения уравнения Шредингера наиболее часто используется стационарный случай, для которого коэффициенты уравнения постоянны. Двухъямный потенциал традиционно применяется в задачах туннелирования квантово-механических частиц и связанных с ними волновых пакетов.

### Анализ последних результатов и публикаций

Реакции переноса протонов были популярной областью исследований в течение многих лет [1-3]. В таких реакциях протон движется вдоль потенциала, содержащего одну или две ямы. В случае двухъямного потенциала, разница энергий двух ям является важным параметром, как это связано с относительной популяцией АН-В и А-НВ таутомеров. Скорость, с которой протон может переходить из одной ямы в другую, сильно зависит от высоты энергетического барьера, который отделяет их [3-5]. При этом также важными являются и другие характеристики потенциала, такие как ширина барьера. Квантово-механические методы позволяют рассчитать энергию любой конфигурации ядер [6,7].

### Формулирование цели исследования

Целью работы являлось изучение явления туннелирования квантово-механической частицы в двухъямном потенциале в том случае, когда высота барьера между ямами значительно превосходит начальную энергию частицы. Предмет исследования состоит в применении частотного (квадрупольного) механизма модуляции потенциала для обеспечения устойчивого туннелирования волновой функции. Объектом исследования служила временная эволюция формы и места волновой функции квантово-

механической частицы в зависимости от параметров синусоидальной модуляции потенциала. Средством исследования служили численный алгоритм и построенная на основе математической модели программа решения уравнения Шредингера, описывающего временную эволюцию волновой функции частицы. Физическая задача основывается на включении в потенциал временной зависимости синусоидального вида, содержащую частоту и индекс модуляции.

### Основной материал

В работе для исследования эффекта туннелирования рассмотрено уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t) + V(x,t)\psi(x,t), \quad (1)$$

в котором использован двухъямный потенциал выбранного вида. В качестве примера общего случая был рассмотрен потенциал четвертой степени вида

$$V(x,t) = \frac{\hbar\omega_0}{2} \left[ a(t) \left( \frac{x}{\xi} \right)^4 - b(t) \left( \frac{x}{\xi} \right)^2 + \frac{b^2(t)}{4a(t)} \right], \quad a(t) = \frac{\alpha - \beta \cos(\varepsilon\omega_0 t)}{2\sqrt{\alpha}}, \quad b(t) = \frac{\sqrt{\alpha - \beta \cos(\varepsilon\omega_0 t)}}{2\sqrt{\alpha}}. \quad (2)$$

Если разложить в ряд Тейлора функцию  $V(x,t)$  вблизи одного из минимумов и ограничиться членами второй степени (т.е. аппроксимировать кривую параболой), а также считать, что параметры потенциала слабо меняются со временем (параметр  $\beta/\alpha \ll 1$  мал), то в главном приближении по малому параметру  $\beta/\alpha$  величина  $\omega_0$  будет играть роль собственной частоты параболического потенциала. Таким образом, параметр  $\omega_0$  это собственная частота колебаний в яме, если её заменить параболой, что справедливо при малых колебаниях у дна ямы. Параметры потенциала изменяются со временем таким образом, что энергия, соответствующая минимумам и максимуму потенциала, не меняется, при этом происходит периодическое изменение  $x$ -координат минимумов  $x_{\min}^{(-)}$ ,  $x_{\min}^{(+)}$  (и соответственно расстояния между минимумами),  $x$ -координата максимума не меняется со временем,  $x_{\max} = 0$ .

Высота барьера  $\Delta V(t)$  и положения минимумов  $x_{\min}^{(-)}$ ,  $x_{\min}^{(+)}$  определяются соотношениями:

$$\frac{\Delta V(t)}{(\hbar\omega_0/2)} = \frac{b^2(t)}{4a(t)} = \frac{1}{8\sqrt{\alpha}} = const, \quad \frac{x_{\min}^{(\pm)}(t)}{\xi} = \pm \sqrt{\frac{b(t)}{2a(t)}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha - \beta \cos(\varepsilon\omega_0 t)}}. \quad (3)$$

В случае  $\beta = 0$  для положения минимумов (3) получаем:  $x_{\min}^{(\pm)}(t)/\xi = \pm(4\alpha)^{-1/4}$ . Параметр  $\xi$  пропорционален среднеквадратичной флуктуации (среднеквадратичному отклонению) нулевых колебаний линейного осциллятора в стационарном случае  $\delta x = \sqrt{\langle (\Delta x)^2 \rangle} = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ . Заметим, что среднеквадратичное отклонение атомов – это экспериментально измеримая квантовая характеристика колебаний атомов в кристаллической решётке,  $\xi = \sqrt{\hbar/m\omega_0} = \sqrt{2}\delta x_0$ .

Переходя к безразмерным переменным:

$$\tau = \frac{\omega_0 t}{2}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{\xi} = \frac{x}{\sqrt{\hbar/m\omega_0}}, \quad u(\tilde{x}, \tau) = \frac{V(x/\xi, \omega_0 t/2)}{(\hbar\omega_0/2)} = \frac{V(\tilde{x}, \tau)}{(\hbar\omega_0/2)}, \quad (1)$$

приходим к уравнению Шредингера (1) в безразмерном виде:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{x}^2} + u(\tilde{x}, \tau)\psi, \quad (2)$$

где потенциал в безразмерных переменных имеет вид:

$$u(\tilde{x}, \tau) = a(\tau)\tilde{x}^4 - b(\tau)\tilde{x}^2, \quad a(\tau) = \frac{\alpha - \beta \cos(\varepsilon\tau)}{2\sqrt{\alpha}}, \quad b(\tau) = \frac{\sqrt{\alpha - \beta \cos(\varepsilon\tau)}}{2\sqrt{\alpha}}. \quad (3)$$

Для проведения численных экспериментов были выбраны значения глобальных параметров  $\alpha = 0.0005$ ,  $\beta = 0.0001$  и  $\omega_0 = 1$ . При этом координаты минимумов потенциала находится в точках  $x_{\min}^{(\pm)}(t)/\xi = \pm(4\alpha)^{-1/4} = \pm 4.729$ . Параметр  $\varepsilon$  подбирался при оптимизации туннелирования и равнял-

ся 0.0, 2.0 и 1.7. В работе проведены численные расчёты квантово-механических средних: полной энергии частицы и плотности энергии по формулам:

$$E(\tau) = \xi \int_{-\infty}^{+\infty} w(\tilde{x}, \tau) d\tilde{x}, \quad w(\tilde{x}, \tau) = \frac{\hbar \omega_0}{2} \left\{ \left| \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}} \right|^2 + u(\tilde{x}, \tau) |\psi|^2 \right\}. \quad (4)$$

Координата частицы измерялась в единицах величины  $\xi$ , время измеряется в единицах собственных периодов  $T = 2\pi/\omega_0$  параболического потенциала, соответствующего дну ямы, энергия изменяется в единицах энергии нулевых колебаний  $\hbar \omega_0/2$  в одной из ям.

На рис. 1 показана форма потенциала на старте  $\tau = 0$ . Кроме потенциала показан квадрат модуля (умноженный на 5)  $p(\tilde{x}, 0) = |\psi(\tilde{x}, 0)|^2$  волновой функции

$$\psi(\tilde{x}, 0) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi \xi^2}} \exp\left(-\frac{(\tilde{x} - \tilde{x}_{\min})^2}{2}\right). \quad (8)$$

Для нахождения решений уравнения (1) с начальным условием (4) была использована построенная пошаговая Маткад-программа, основанная на методе Рунге-Кутты 4-го порядка, а также встроенные методы программного пакета для решения дифференциальных уравнений в частных производных.

В отсутствие модуляции волновая функция локализуется в левой яме. На рис. 2 приведена временная зависимость плотности  $p(\tilde{x}, \tau) = |\psi(\tilde{x}, \tau)|^2$  на временном интервале  $0 \leq \tau \leq 2500$ . Небольшие колебания плотности связаны с отличием потенциала в левой яме от параболической формы. Высота барьера составляет  $h_b = 1/8\sqrt{\alpha} = 5.590$ , а энергия  $E$  частицы в начальный момент равнялась 0.456. Погрешность полученных результатов не превышала 0.0008.

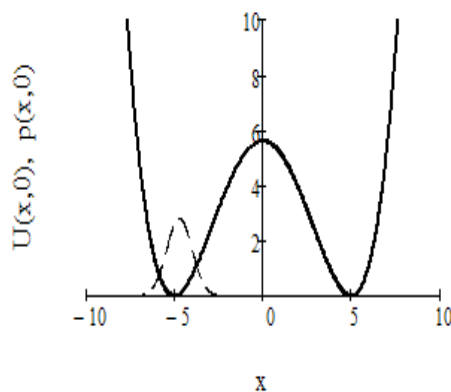


Рис. 1. Форма потенциала на старте и квадрат модуля (умноженный на 5) волновой функции (пунктир)

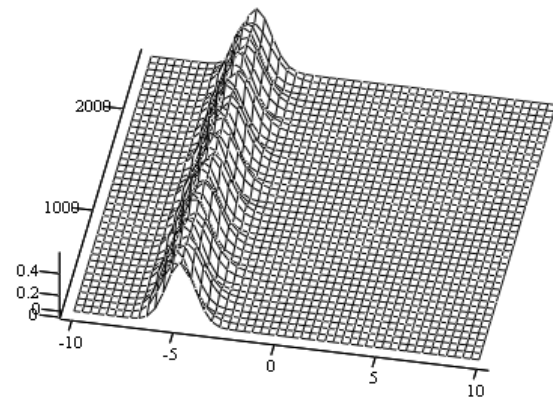


Рис. 2. Эволюция плотности  $p(\tilde{x}, \tau)$  на временном интервале  $0 \leq \tau \leq 2500$

### Моделирование туннелирования частиц

Для различных случаев частотной модуляции приведены результаты численного моделирования процесса туннелирования. На рис. 3, 4 показаны результаты моделирования при  $\varepsilon = 2.0$  на временном интервале  $0 \leq \tau \leq 2500$ .



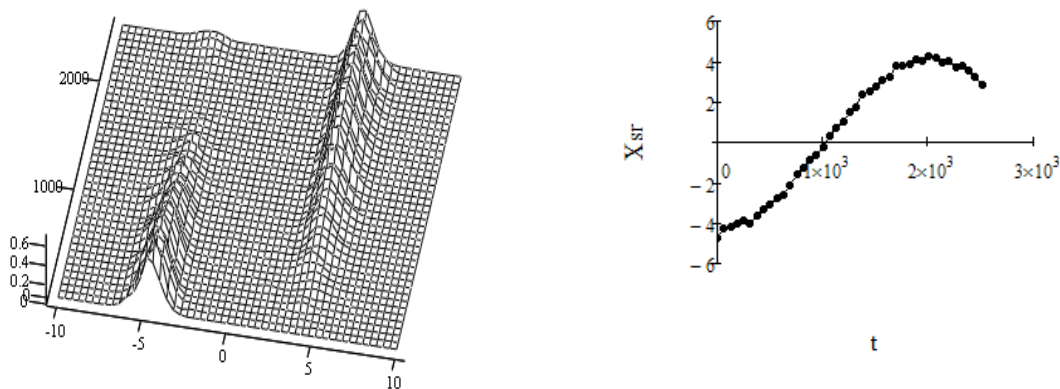


Рис. 3. Моделирование эффекта туннелирования,  $\varepsilon = 2.0$ .

Слева – эволюция плотности распределения. Справа – динамика средней координаты частицы  $X_{sr}$

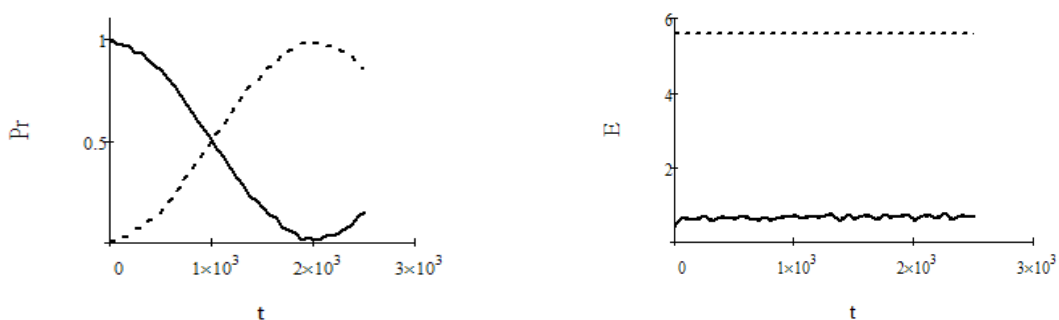


Рис. 4. Моделирование эффекта туннелирования,  $\varepsilon = 2.0$ .

Слева – эволюция относительных долей плотности, относящихся к левой яме (сплошная линия) и к правой (пунктир).

Справа – динамика энергии частицы  $E$ , пунктиром показана высота энергетического барьера  $h_b = 5.590$

Из приведенных зависимостей видно, что имеет место устойчивое туннелирование частицы из левой ямы потенциала в правую яму.

В одноямом параболическом потенциале при  $\varepsilon = 2$  осуществляется эффективная раскачка размеров волновой функции вместе со значительным ростом её энергии. Спектр собственных колебаний в двухъямном потенциале отличается от спектра в одноямом. С помощью построенного программного средства был проведен поиск такого значения частотного параметра  $\varepsilon$ , при котором эффективность туннелирования повышается.

На рис. 5, 6 показаны результаты моделирования на временном интервале  $0 \leq \tau \leq 2500$  при  $\varepsilon = 1.7$ . Видно, что количество переходов частицы на этом временном интервале превышает семи.

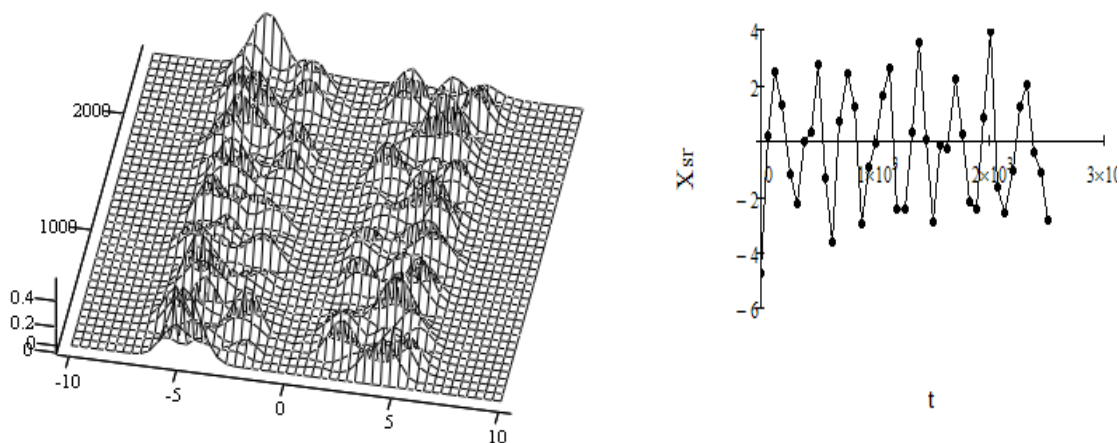
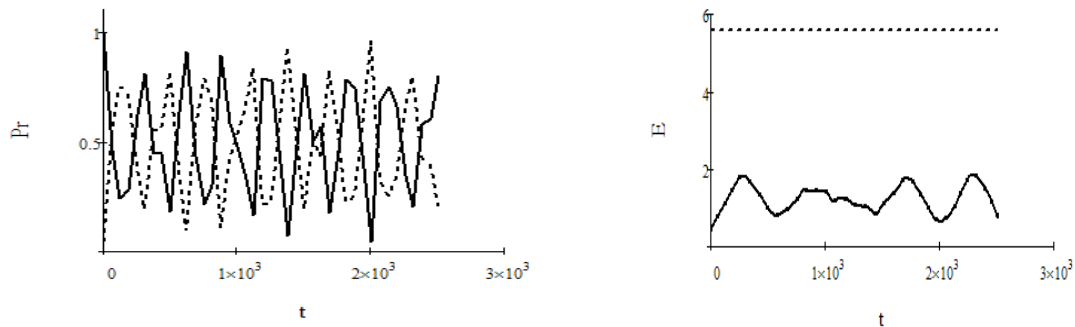


Рис. 5. Моделирование эффекта туннелирования,  $\varepsilon = 1.7$ .Слева – эволюция плотности распределения. Справа – динамика средней координаты частицы  $X_{sr}$ Рис. 6. Моделирование эффекта туннелирования,  $\varepsilon = 1.7$ .

Слева – эволюция относительных долей плотности, относящихся к левой яме (сплошная линия) и к правой (пунктир).

Справа – динамика энергии частицы  $E$ , пунктиром показана высота энергетического барьера  $h_b = 5.590$ 

Скорость и эффективность туннелирования при  $\varepsilon = 1.7$  заметно выше, чем при  $\varepsilon = 2.0$ . Аналогичное явление было обнаружено при  $\varepsilon = 0.9$ . Путем варьирования значения глобальных параметров  $\alpha$  и  $\beta$  вместе с локальным параметром  $\varepsilon$  были получены другие режимы туннелирования с эволюцией волновой функции.

### Выводы

В работе изложены результаты численных расчетов по туннелированию волновой функции в двухъямном потенциале. Предложен и использован биквадратичный потенциал двухъямного вида. На основе математической модели временной эволюции волновой функции построен численный алгоритм и программа решения уравнения Шредингера. Предложено использовать потенциал, содержащий временную зависимость синусоидального вида с частотой и индексом модуляции. Проведена проверка отсутствия туннелирования в режиме, когда отключена синусоидальная модуляция. Численно получены режимы модуляции, при которых имело место туннелирование с различной степенью интенсивности. Показана возможность регулировки эффективности туннелирования путем выбора частоты модуляции. Путем направленного изменения параметров модуляции возможно регулировать эффективность туннелирования волновой функции частицы.

### Список использованной литературы

1. Winful H.G. Tunneling time, the Hartman effect, and superluminality: A proposed resolution of an old paradox / H.G. Winful// *Phys. Reports* – 2006. – 436. – 1 – 69.
2. Buttiker M. Traversal Time for Tunneling / M. Buttiker and R. Landauer// *Phys. Rev. Lett.* – 1982. – V. 49, №23. – P. 1739–1742.
3. Antoniou D. Internal Enzyme Motions as a Source of Catalytic Activity: Rate-Promoting Vibrations and Hydrogen Tunneling / D. Antoniou and S.D. Schwartz// *J. Phys. Chem. B* – 2001. – 105. – P. 5553–5558.
4. Craven G.T. Electron transfer across a thermal gradient / G.T. Craven and A. Nitzan// *PNAS* – 2016. – 113(34). – P. 9421– 9429.
5. Klinman JP. Hydrogen tunneling links protein dynamics to enzyme catalysis / JP. Klinman, A. Kohen// *Annu Rev Biochem* – 2013. – 82. – P. 471–496.
6. Dubinko V.I. Chemical and nuclear catalysis driven by localized anharmonic vibrations / V.I. Dubinko, D.V. Laptev// *Letters on materials* 6 (1) (2016) 16-21.

### References

1. Winful H.G. Tunneling time, the Hartman effect, and superluminality: A proposed resolution of an old paradox / H.G. Winful// *Phys. Reports*. – 2006.-436.-pp.1-69.
2. Buttiker M. Traversal Time for Tunneling / M. Buttiker and R. Landauer// *Phys. Rev. Lett.* – 1982. – V. 49, №23. – P. 1739–1742.
3. Antoniou D. Internal Enzyme Motions as a Source of Catalytic Activity: Rate-Promoting Vibrations and Hydrogen Tunneling / D. Antoniou and S.D. Schwartz// *J. Phys. Chem. B* – 2001.-105.-pp.-5553-5558.

4. Craven G.T. Electron transfer across a thermal gradient / G.T. Craven and A. Nitzan// *PNAS* – 2016.- 113(34).-pp.-9421-9429.
5. Klinman JP. Hydrogen tunneling links protein dynamics to enzyme catalysis / JP. Klinman, A. Kohen// *Annu Rev Biochem.* – 2013.-82.-pp.-471–496.
6. Dubinko V.I. Chemical and nuclear catalysis driven by localized anharmonic vibrations / V.I. Dubinko, D.V. Laptev// *Letters on materials.* – 2016.-6(1)-pp.-16-21.



УДК 539.3

Т.С. КАГАДІЙ  
НТУ Дніпровська політехніка  
О.В. БЕЛОВА, І.В. ЩЕРБИНА  
Національна металургійна академія України

### ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ МАЛОГО ПАРАМЕТРУ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ В'ЯЗКОПРУЖНОСТІ

*При побудові моделей складних задач теорії пружності і в'язкопружності доводиться вдаватися до спрощення дозвільних систем рівнянь. Одним з ефективних підходів є методи малих параметрів [1]. У даній роботі описаний метод збурень коли малий параметр являє собою відношення характеристик жорсткості. Початкові ідеї методу викладені в [2]. У даній роботі метод узагальнено на випадок просторових задач лінійної теорії в'язкопружності. Вдалося не просто розщепити напружено-деформований стан на три складові з різними властивостями, але і зберегти зв'язок між цими станами, що підвищує якість математичної моделі і наближає її до реальної задачі. Для демонстрації ефективності роботи даного методу наведено розв'язання модельної задачі для в'язкопружного ортотропного тіла з циліндричною анізотропією.*

*Ключові слова: асимптотичний метод, метод малого параметра, ортотропний матеріал, в'язкопружність, циліндрична анізотропія, модельна задача*

Т.С. КАГАДИЙ  
НТУ Днепровская политехника  
О.В. БЕЛОВА, И.В. ЩЕРБИНА  
Национальная металлургическая академия Украины

### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

*При построении моделей сложных задач теории упругости и вязкоупругости приходится прибегать к упрощению разрешающих систем уравнений. Одним из эффективных подходов являются методы малых параметров [1]. В данной работе описан метод возмущений когда малый параметр представляет собой отношение жесткостных характеристик. Первоначальные идеи метода изложены в [2]. В данной работе метод обобщен на случай пространственных задач линейной теории вязкоупругости. Удалось не просто расщепить напряженно-деформированное состояние на три составляющие с различными свойствами, но и сохранить связь между этими состояниями, что повышает качество математической модели и приближает ее к реальной задаче. Для демонстрации эффективности работы данного метода приведено решение модельной задачи для вязкоупругого ортотропного тела с цилиндрической анизотропией.*

*Ключевые слова: асимптотический метод, метод малого параметра, ортотропный материал, вязкоупругость, цилиндрическая анизотропия, модельная задача*

T.S.KAGADIY  
NTU Dnieper Polytechnic  
O.V. BELOVA, I.V. SHCERBINA,  
National Metallurgical Academy Ukraine

### APPLICATION OF A METHOD OF SMALL PARAMETER AT MODELLING PROBLEMS OF THE THEORY VISCOELASTICITY

*At construction of models of challenges of the theory of an elasticity and viscoelasticity is necessary to resort to simplification of resolving set of equations. One of effective approaches is method of small parameters [1]. In the given work the method of perturbations is described when the small parameter represents the ration stiff performances. Initial ideas of a method are stated in [2]. In the given work the method is generalized on a case of spatial problems of the linear theory viscoelasticity. It was possible to split not simply the intense-deformed condition on three components with various properties, but also to keep connection between these conditions that raise quality of mathematical model and approximates it to a real problem. For demonstrating an overall performance of the given method the solution of a modelling problem for a viscoelastic orthotropic skew field with cylindrical anisotropy is reduced. At mathematical modelling the intense-deformed condition of viscoelastic skew fields with switch connections or battening plates it is possible to use various methods, both analytical, and numerical (for example, a finite element method). To shortages of numerical methods it is possible to refer complexities in view of strong anisotropy of a material. At a solution of a problem*

an asymptotic method applied by authors nuances of a select of small parameter give a boomerang effect. The more strongly anisotropy of a material, the more precisely received solutions. Earlier the given method has been applied to a solution of contact problems about a load transmission from elastic switch connections to elastic plates with curvilinear anisotropy.

The analysis of the differential equations of the spatial theory viscoelasticity an orthotropic skew field is lead. The intense-deformed condition of such skew field is split on three components with various properties which are connected through boundary conditions on shearing stresses. The solution of an initial problem is in the form of superposition of components.

The possibility of a statement of boundary conditions for searching trial functions that reduces a solution of a spatial problem of the theory viscoelasticity to sequentially solved boundary value problems of a potential theory is shown.

As the received solutions represent transforms of Laplace the method of returning to pre-images by means of two-point approximant Pade and limit representations of required magnitudes is offered. Effectiveness of such approach is shown on a modelling problem.

Keywords: asymptotic method, orthotropic material, viscoelasticity, rectilinear anisotropy, cylindrical anisotropy, modelling problem

Розглянемо в'язкопружне тіло, матеріал якого є ортотропним щодо як пружних, так і в'язкопружних властивостей. Головні напрямки анізотропії збігаються з декартовими осями координат  $x, y, z$ . Співвідношення між деформаціями і напруженнями в цьому випадку можуть бути записані таким чином:

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= \frac{1}{E_1} \left( \sigma_{11} + \int_0^t K_{11}(t-r) \sigma_{11} dr \right) - \nu_{12} \frac{1}{E_2} \left( \sigma_{22} + \int_0^t K_{12}(t-r) \sigma_{22} dr \right) - \frac{\nu_{13}}{E_3} \left( \sigma_{33} + \int_0^t K_{13}(t-r) \sigma_{33} dr \right) \\
 e_{22} &= -\frac{\nu_{21}}{E_1} \left( \sigma_{11} + \int_0^t K_{21}(t-r) \sigma_{12} dr \right) + \frac{1}{E_2} \left( \sigma_{22} + \int_0^t K_{22}(t-r) \sigma_{22} dr \right) - \frac{\nu_{23}}{E_3} \left( \sigma_{33} + \int_0^t K_{23}(t-r) \sigma_{33} dr \right), \\
 e_{33} &= -\frac{\nu_{31}}{E_1} \left( \sigma_{11} + \int_0^t K_{31}(t-r) \sigma_{11} dr \right) - \frac{\nu_{32}}{E_2} \left( \sigma_{22} + \int_0^t K_{32}(t-r) \sigma_{22} dr \right) + \frac{1}{E_3} \left( \sigma_{33} + \int_0^t K_{33}(t-r) \sigma_{33} dr \right), \\
 e_{23} &= \frac{1}{G_{23}} \left( \sigma_{23} + \int_0^t K_1(t-r) \sigma_{23} dr \right), \quad e_{13} = \frac{1}{G_{13}} \left( \sigma_{13} + \int_0^t K_2(t-r) \sigma_{13} dr \right), \\
 e_{12} &= \frac{1}{G_{12}} \left( \sigma_{12} + \int_0^t K_3(t-r) \sigma_{12} dr \right)
 \end{aligned} \tag{1}$$

При цьому  $\nu_{12}E_1 = \nu_{21}E_2, \nu_{23}E_2 = \nu_{32}E_3, \nu_{31}E_3 = \nu_{13}E_1,$   
 $K_{12} = K_{21}, K_{23} = K_{32}, K_{31} = K_{13}.$

Тут  $E_1, E_2, E_3 (G)$  - миттєві модулі пружності (зсуву),  $\nu_{ij}$  - коефіцієнти Пуассона,  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$  - нормальні напруження,  $\sigma_{12} = \sigma_{21}, \sigma_{13} = \sigma_{31}, \sigma_{23} = \sigma_{32}$  - дотичні напруження,  $K_{ij}(t-r)$  - ядра повзучості,  $t$ -час. Для апроксимації ядер повзучості використовуються наступні аналітичні вирази [2]:

$$\begin{aligned}
 K_{ij}(t-r) &= k_{ij}(t-r)^{\alpha_{ij}-1} \exp[-\beta_{ij}(t-r)], \\
 K_i(t-r) &= k_i(t-r)^{\alpha_i^*-1} \exp[-\beta_i^*(t-r)], \quad (0 < \alpha_{ij}, \alpha_i^* \leq 1)
 \end{aligned} \tag{2}$$

Компоненти тензора деформацій  $e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{23}, e_{13}, e_{12}$  виражаються через проекції вектора переміщень за формулами :

$$e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, e_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}, e_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}, e_{23} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, e_{13} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, e_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3)$$

Застосовуючи перетворення Лапласа за часом з параметром  $p$  до співвідношень (1) і розв'язуючи їх щодо трансформант напружень, отримаємо

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11} &= E_1 E_{11}(p) \left[ \tilde{e}_{11} + \nu_{12} F_{12}(p) \tilde{e}_{22} + \nu_{13} F_{13}(p) \tilde{e}_{33} \right], \\ \tilde{\sigma}_{22} &= E_2 E_{22}(p) \left[ \nu_{21} F_{21}(p) \tilde{e}_{11} + \tilde{e}_{22} + \nu_{23} F_{23}(p) \tilde{e}_{33} \right], \\ \tilde{\sigma}_{33} &= E_3 E_{33}(p) \left[ \nu_{31} F_{31}(p) \tilde{e}_{11} + \nu_{32} F_{32}(p) \tilde{e}_{22} + \tilde{e}_{33} \right], \\ \tilde{\sigma}_{23} &= G_{23} F_1(p) \tilde{e}_{23}, \quad \tilde{\sigma}_{13} = G_{13} F_2(p) \tilde{e}_{13}, \quad \tilde{\sigma}_{12} = G_{12} F_3(p) \tilde{e}_{12}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$F_{ii}(p) = \frac{1}{1 + f_{ii}(p)}, \quad F_{ij}(p) = \frac{1 + f_{ij}(p)}{1 + f_{jj}(p)}, \quad F_i(p) = \frac{1}{1 + f_i(p)}, \quad (i=1,2,3),$$

$$f_{ij}(p) = k_{ij} \Gamma(\alpha_{ij}) (p + \beta_{ij})^{-\alpha_{ij}}, \quad f_i(p) = k_i \Gamma(\alpha_i^*) (p + \beta_i^*)^{-\alpha_i^*}, \quad (i, j=1,2,3).$$

Тепер питання про напружено-деформований стан тривимірного в'язкопружного ортотропного тіла може бути зведено до інтегрування рівнянь

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{xx} + \varepsilon \tilde{u}_{yy} + \varepsilon l_1 \tilde{u}_{zz} + \varepsilon m \tilde{v}_{xy} + \varepsilon m_1 l_1 \tilde{\omega}_{xz} &= 0, \\ \varepsilon \tilde{v}_{xx} + q \tilde{v}_{yy} + \varepsilon l_2 \tilde{v}_{zz} + \varepsilon m_2 \tilde{u}_{xy} + \varepsilon m_3 l_2 \tilde{\omega}_{yz} &= 0, \\ \varepsilon l_1 \tilde{\omega}_{xx} + \varepsilon l_2 \tilde{\omega}_{yy} + q_1 \tilde{\omega}_{zz} + \varepsilon m_4 l_1 \tilde{u}_{xz} + \varepsilon m_5 l_2 \tilde{v}_{yz} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$q = \frac{E_2 F_{22}(p)}{E_1 F_{11}(p)}, \quad q_1 = \frac{E_3 F_{33}(p)}{E_1 F_{11}(p)}, \quad \varepsilon = \varepsilon_* \frac{F_3(p)}{F_{11}(p)}, \quad \varepsilon_* = \frac{G_{12}}{E_1}.$$

$$l_2 = \frac{G_{23} F_1(p)}{G_{12} F_3(p)}, \quad l_1 = \frac{G_{13} F_2(p)}{G_{12} F_3(p)}, \quad m = 1 + \mu, \quad m_i = 1 + \mu_i,$$

$$\mu = \nu_{12} \varepsilon^{-1} F_{12}(p), \quad \mu_1 = \nu_3 F_{13}(p) (\varepsilon l_1)^{-1}, \quad \mu_2 = \nu_{21} F_{21}(p) q \varepsilon^{-1},$$

$$\mu_3 = \nu_{23} F_{23}(p) q (\varepsilon l_2)^{-1}, \quad \mu_4 = \nu_{31} F_{31}(p) q_1 (\varepsilon l_1)^{-1}, \quad \mu_5 = \nu_{32} F_{32}(p) q_1 (\varepsilon l_2)^{-1},$$

за відповідними граничними умовами.

Тут і далі індекси  $x, y, z$  позначають диференціювання за відповідними координатами, а тильда над буквами визначає трансформанти Лапласа. Передбачається, що коефіцієнти Пуассона досить малі і нехтується їх творами.

Рівняння (5) аналогічні рівнянням рівноваги в переміщеннях пружного ортотропного тіла і при асимптотичному аналізі цих рівнянь слід вибрати малий параметр. Таким параметром може служити величина  $\varepsilon_*$ , оскільки для реальних ортотропних матеріалів це відношення дійсно є малим. Але якщо параметр перетворення Лапласа  $p$  не збігається з нулями або полюсами функції, то в якості малого параметра може бути обрана величина,  $\varepsilon$  оскільки при цьому відношення  $F_3(p)/F_{11}(p)$  не перевищує одиниці.

Відзначимо, що знайдений розв'язок є трансформанти Лапласа і залишається ще задача знаходження оригіналів. Для малих і великих значень часу оригінали можуть бути побудовані досить просто в явному вигляді

$$\Omega(t) = a_0 + a_1 t + \dots \quad (t \rightarrow 0), \tag{6}$$

$$\Omega(t) = b_0 + b_1 e^{-\beta t} + \dots \quad (t \rightarrow \infty) \tag{7}$$

Однак при цьому залишаються невідомими області малих і великих часів, а також розв'язки, які слід використовувати при довільних значеннях часу. "Гранична" інформація (7), (8) дозволяє судити про поведінку відповідних функцій при будь-яких значеннях часу, якщо використовувати двоточкову апроксиманту Паде [3]. Це функція вигляду

$$T(t) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 t + \beta_1 e^{\beta t} + \dots}{\delta_0 + \gamma_1 t + \delta_1 e^{\beta t} + \dots} \tag{8}$$

Коефіцієнти в (8) знаходяться з точністю до загального множника (покладемо для визначеності  $\delta_0 = 1$ ) і з умов, що при розкладанні в ряди функції (9) при  $t \rightarrow 0$  і  $t \rightarrow \infty$  виходили б асимптотичні вирази (6), (7), тобто

при  $t \rightarrow 0$

$$a_0 + a_1 t = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 t + \beta_1 e^{\beta t}}{1 + \gamma_1 t + \delta_1 e^{\beta t}}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} T(t) = \frac{\alpha_0 + \beta_1}{1 + \delta_1} = a_0,$$

при  $t \rightarrow \infty$

$$b_0 + b_1 e^{-\beta t} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 t + \beta_1 e^{\beta t}}{1 + \gamma_1 t + \delta_1 e^{\beta t}}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = \frac{\beta_1}{\delta_1} = b_0.$$

Привівніючи коефіцієнти при однакових ступенях  $t$  і  $e^{\beta t}$  отримуємо значення коефіцієнтів  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ , що входять в формулу (8).

Запропонований метод може бути застосований для розв'язання осесиметричних задач в яких матеріал тіл є в'язкопружним з циліндричною анізотропією. Як модельну розглянемо задачу про дію зосередженої сили на кордон в'язкопружного ортотропного напівнескінченного тіла з циліндричною анізотропією, обмеженого площиною  $z = 0$  (вісь  $z$  спрямована всередину тіла).

Сила прикладена на початку координат, дорівнює  $P_0$  при  $t \geq 0$  (при  $t < 0$  сила відсутня) і спрямована уздовж осі  $Oz$ . При цьому граничні умови будуть наступними:

$$\sigma_{33} = -\frac{P_0 \delta(r)}{2\pi}, \quad \sigma_{13} = 0 \quad (z = 0)$$

Тут  $\delta(r)$  - функція Дірака. Передбачається, що матеріал тіла має переважно зсувну повзучість.

Використовуючи описаний вище підхід, отримаємо розв'язок у формі ряду за ступенями параметра  $\varepsilon$

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij}^{(0)} + \varepsilon \tilde{\sigma}_{ij}^{(2)} + 0(\varepsilon^2) \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{9}$$

де 
$$\tilde{\sigma}_{11}^{(0)} = E_1 \varepsilon^{1/2} \frac{\partial U^{2,0}}{\partial r} = -\frac{P_0}{2\pi p} \left( \frac{\zeta_2^3 + 2\zeta_2 r^2 - r^2 (\zeta_2^2 + r^2)^{3/2}}{r^2 (\zeta_2^2 + r^2)^{3/2}} \right),$$

$$\tilde{\sigma}_{22}^{(0)} = E_1 \varepsilon^{1/2} \frac{U^{2,0}}{r} = -\frac{P_0}{2\pi p} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\zeta_2}{r^2 \sqrt{\zeta_2^2 + r^2}} \right), \quad \tilde{\sigma}_{33}^{(0)} = E_1 \varepsilon^{1/2} \frac{\partial W^{1,0}}{\partial \zeta_1} = -\frac{P_0}{2\pi p} \frac{\zeta_1}{(\zeta_1^2 + r^2)^{3/2}},$$

$$\tilde{\sigma}_{13}^{(0)} = E \varepsilon \left( \frac{\partial W^{1,0}}{\partial r} + \frac{\partial U^{2,0}}{\partial \zeta_2} \right) = -\frac{P_0 \varepsilon^{1/2}}{2\pi p} \left( \frac{r}{(\zeta_1^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{r}{(\zeta_1^2 + r^2)^{3/2}} \right) = 0,$$

$$\tilde{\sigma}_{11}^{(2)} = E_1 \varepsilon^{1/2} \left( \frac{\partial U^{1,0}}{\partial r} + \mu \left( \frac{U^{2,0}}{r} + \frac{\partial W^{1,0}}{\partial \zeta_1} \right) \right), \quad \tilde{\sigma}_{22}^{(2)} = E_1 \varepsilon^{1/2} \left( \frac{U^{1,0}}{r} + \mu \left( \frac{\partial U^{2,0}}{\partial r} + \frac{\partial W^{1,0}}{\partial \zeta_1} \right) \right),$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{33}^{(2)} &= E_1 \varepsilon^{1/2} \left( \frac{\partial W^{2,0}}{\partial \zeta_2} + \mu \left( \frac{\partial U^{2,0}}{\partial r} + \frac{U^{2,0}}{r} \right) \right), \tilde{\sigma}_{13}^{(2)} = 0, \\ W^{1,0} &= \frac{E_1^{-1} \varepsilon^{-1/2} P_0}{2\pi p} \frac{1}{\sqrt{\zeta_1^2 + r^2}}, U^{1,0} = \frac{E_1^{-1} \varepsilon^{-1/2} P_0}{2\pi p} \frac{\zeta_1}{r\sqrt{r^2 + \zeta_1^2}}, \\ U^{2,0} &= \frac{E_1^{-1} \varepsilon^{-1/2} P_0}{2\pi p} \left( \frac{1}{r} - \frac{\zeta_2}{r\sqrt{\zeta_2^2 + r^2}} \right), W^{2,0} = \frac{mE_1^{-1} \varepsilon^{-1/2} P_0}{2\pi p} \frac{1}{\sqrt{\zeta_2^2 + r^2}}. \end{aligned}$$

При цьому знаходження розв'язків для більш високих наближень є завданням тих же труднощів, що і в нульовому наближенні

Зокрема, для  $\tilde{\sigma}_{33}$  подання (9) записується таким чином:

$$\tilde{\sigma}_{33} = -\frac{P_0}{2\pi p} \left[ \frac{\zeta_1}{(\zeta_1^2 + r^2)^{3/2}} - \varepsilon \frac{\zeta_2}{(\zeta_2^2 + r^2)^{3/2}} + 0(\varepsilon^2) \right] \quad (10)$$

Зворотне перетворення Лапласа визначає напруження як функцію координат і часу. У разі, коли матеріал тіла має переважно зсувною повзучістю

$$\alpha = 1 \quad F(p) = (p + \beta)/(p + \beta + k), \quad \varepsilon = \varepsilon_1 F(p)$$

На лінії дії сили ( $r = 0$ ) вираз (10) набуває вигляду

$$\tilde{\sigma}_{33} = -\frac{P_0 E_1}{2\pi G z^2} \frac{1}{p} \left[ \frac{p + \beta + k}{p + (p + \beta)} - \left( \frac{G}{E_1} \right)^3 \frac{(p + \beta)^2}{p(p + \beta + k)^2} \right] \quad (11)$$

Застосовуючи до останнього висловом зворотне перетворення Лапласа отримаємо

$$\sigma_{33} = -\frac{P_0 E_1}{2\pi G z^2} \frac{1}{p} \left\{ 1 + \frac{k}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) - \left( \frac{G}{E_1} \right)^3 \left[ \left( \frac{\beta}{\beta + k} \right)^2 + \left( -\frac{k^2}{\beta + k} t + \frac{(\beta + k)^2 - \beta^2}{(\beta + k)^2} \right) e^{-(\beta + k)t} \right] \right\}$$

У більш складних задачах знаходження оригіналів викликає значні труднощі. Однак для "малих" і "великих" часів оригінали знаходяться досить просто, якщо трансформанти уявити в формі рядів за малим параметром  $\bar{\varepsilon}$

$$\tilde{T}(p) = (d_0 + d_1 \bar{\varepsilon} + d_2 \bar{\varepsilon}^2 + \dots) / p \quad (12)$$

Для матеріалу з переважно зсувною повзучістю при великих значеннях параметра (що відповідає малим значенням часу  $t$ )  $\bar{\varepsilon} = k/(p + \beta)$ , а при малих  $p$  (що відповідає великим значенням часу)  $\bar{\varepsilon} = \Delta p/(p + \beta)$ ,  $\Delta = -k/(\beta + k)$ . Тоді при  $t \rightarrow 0$  вираз (11) може бути записано у вигляді

$$\tilde{\sigma}_{33} = -\frac{P_0 E_1}{2\pi G_1 z^2} \frac{1}{p} \left[ 1 + \bar{\varepsilon} - \left( \frac{G}{E_1} \right) \frac{1}{(1 + \bar{\varepsilon})^2} \right]$$

Переходячи до оригіналів, отримаємо розкладання для функції

$$\sigma_{33}^* = -\sigma_{33} 2\pi G z^2 / P_0 E_1 \sigma_{33}^* = 1 - \left( \frac{g}{E_1} \right)^3 + k \left( 1 + 2 \left( \frac{G}{E_1} \right)^3 \right) t \quad (t \rightarrow 0) \quad (13)$$

При великих значеннях  $t$  (11) набуває вигляду

$$\tilde{\sigma}_{33} = -\frac{P_0 E_1}{2\pi G z^2} \frac{1}{p} \left[ \frac{k + \beta}{\beta} \left( 1 + \bar{\varepsilon} - \left( \frac{G}{E_1} \right) \left( \frac{\beta}{k + \beta} \right)^2 \frac{1}{(1 + \bar{\varepsilon})^2} \right) \right]$$

Тоді розкладання для оригіналів записується в такий спосіб

$$\sigma_{33}^* = \frac{\beta + k}{\beta} - \left( \frac{G}{E_1} \right) \left( \frac{\beta}{\beta + k} \right)^2 - \frac{k}{k + \beta} \left[ \frac{\beta + k}{\beta} + 2 \left( \frac{G}{E_1} \right) \left( \frac{\beta}{\beta + k} \right)^2 \right] e^{-\beta t} \quad (14)$$

На рисунках 1а) і 1б) показана зміна напруження на лінії дії сили при  $k = 3, \beta = 1$  (рис.1а));  $k=2,5; \beta=0,5$  (рис.1б)).

Криві 1, 2 побудовані відповідно за формулами (13), (14) для малих і великих значень часу, крива 3 отримана в результаті зрощування граничних розкладів за допомогою апроксиманти Паде. Відзначимо, що точні за часом значення напружень  $\sigma_{33}^*$ , повністю збігаються з обчисленими Паде-апроксимаціями. Це ще раз доводить, що апроксиманта Паде дозволяє ефективно будувати розв'язки задачі при довільних значеннях часу, якщо відомі граничні розкладання шуканих функцій.

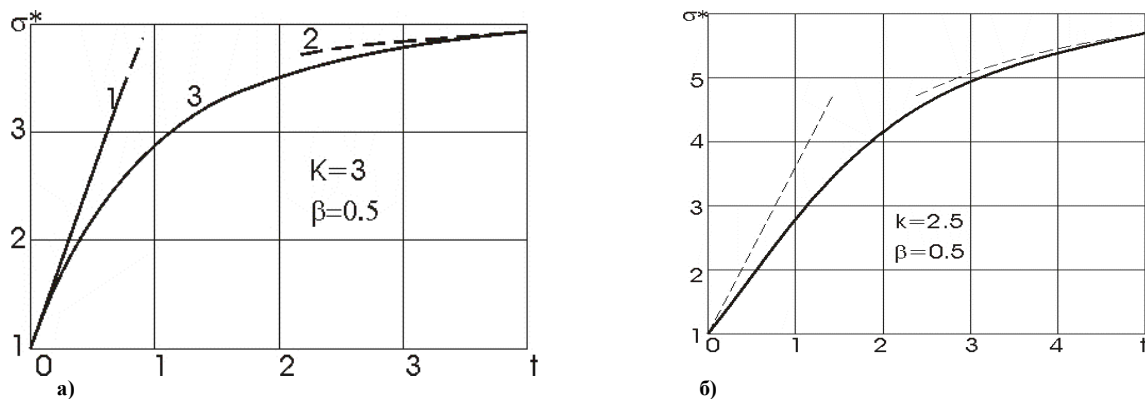


Рис. 1. Зміна нормального напруження

### Висновки

Проведено аналіз диференціальних рівнянь просторової теорії в'язкопружності ортотропного тіла. Напружено-деформований стан такого тіла розщеплюється на три складові з різними властивостями, які пов'язані через граничні умови за дотичними напруженнями. Розв'язок вихідної задачі знаходиться в вигляді суперпозиції складових.

Показана можливість формулювання граничних умов для відшукування основних функцій, що зводить розв'язок просторової задачі теорії в'язкопружності до крайових задач теорії потенціалу що послідовно розв'язуються.

Оскільки отримані розв'язки є трансформантами Лапласа, то запропоновано метод повернення до оригіналів за допомогою двухточкової апроксиманти Паде та граничних уявлень шуканих величин. Ефективність такого підходу показана на модельній задачі.

### Список використаної літератури

1. Manevich L. I., Pavlenko L. I., Koblik S. G. Asymptotic method in the theory of an elasticity of an orthotropic skew field : monography. Kyiv : Vusha shkola, 1982. 152 с.
2. Кагадий Т. С. Метод возмущений в механике упругих (вязкоупругих) анизотропных и композиционных материалов : монографія. Днепропетровск : РИК НГА України, 1998. 260 с.
3. Бейкер Дж., мл., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде : монографія. Москва, 1986. 496 с.
4. Кузьменко В. И., Власенко Ю. Е. Компьютерное моделирование поведения упругопластических оснований сложной структуры. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2008. № 12. С. 113-123.
5. Кир'ян В. І., Осадчук В. А., Николишин М. М. Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій : монографія. Львів : «СПОЛЮМ», 2007. 320 с.

### References

1. Manevich L. I., Pavlenko L. I., Koblik S. G. Asymptotic method in the theory of an elasticity of an orthotropic skew field : monography. Kyiv : Vusha shkola, 1982. 152 s.

2. Kagadiy T. S. Metod vozmuscheniy v mehanike uprugih (vyazkouprugih) anizotropnyih i kompozitsionnyih materialov : monografiya. Dnepropetrovsk : RIK NGA UkraYini, 1998. 260 s.
3. Beyker Dzh., ml., Greyvs-Morris P. Approksimatsii Pade : monografiya. Moskva, 1986. 496 s.
4. Kuzmenko V. I., Vlasenko Yu. E. Kompyuternoe modelirovanie povedeniya uprugoplasticheskikh osnovaniy slozhnoy strukturyi. Problemi obchislyuvalnoYi mehaniki i mItsnosti konstruktsiy. 2008. # 12. S. 113-123.
5. Kir'yan V. I., Osadchuk V. A., Nikolishin M. M. Mehanika ruynuvannya zvarnih z'Ednan metalokonstruktsiy : monografiya. LvIv : «SPOLOM», 2007. 320 s.



УДК 519.2

А.С. МАЗМАНИШВИЛИ

Национальный Научный Центр «ХФТИ» НАНУ

А.Ю. СИДОРЕНКО

Национальный технический университет «Харьковский Политехнический Институт»

## ПРИМЕНЕНИЕ РЕВЕРСНЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА-СВЕРТКИ ОТ НОРМАЛЬНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

*Рассмотрен процесс, обладающий свойствами стационарности, нормальности и марковости. Для заданного временного интервала изучены энергетический функционал и функционал сверточного типа. Предложен и использован подход, основанный на применении реверсных функций, что дало возможность получения аналитического выражения для производящей функции распределения случайных значений функционала-свертки. Проанализированы статистические свойства функционала-свертки. Плотность и интегральный закон распределения получены численно с помощью обратного преобразования Лапласа для выбранных значений времени наблюдения  $T$ , декремента случайного процесса  $\nu$  и его интенсивности  $\sigma_x^2$ . Показано, что увеличение параметра  $T\sigma_x^2$  приводит к расширению значений функционала-свертки в периферийные области больших уклонений. Уменьшение параметра  $\nu T$  приводит к локализации значений функционала-свертки во флуктуационной области  $z \approx 0$ . Плотность  $f(z)$  симметрична относительно  $z = 0$ , имеет единственный максимум, две точки перегиба и экспоненциальную асимптотику на перифериях.*

*Ключевые слова: стационарность, нормальность, марковость, интегральные квадратичные функционалы, энергетический функционал и функционал сверточного типа, статистические свойства.*

A.S. MAZMANISHVILI

National Science Center "Kharkov Institute of Physics &amp; Technology" NASU, 61108, Kharkov, Ukraine

A.Yu. SIDORENKO

National Technical University "Kharkov Polytechnical Institute", 61002, Kharkov, Ukraine

## APPLICATION OF REVERSE FUNCTIONS IN THE DISTRIBUTION TASK PROBABILITIES OF RANDOM CROSS-FUNCTIONAL FROM NORMAL MARKOV PROCESS

*The random Ornstein-Uhlenbeck  $x(t)$  process with the properties of stationarity, normality and Markov property is considered. For a given time interval, the cross-functional  $Z$  of a convolution type  $Z = J[x] = \int_0^T dt x(t)x(T-t)$  with a time parameter  $T$  is studied on the basis of the known properties of the energy quadratic integral functional  $U = \int_0^T dt x^2(t)$ . To describe the properties of such a functional, an analytical approach is proposed based on the use of reverse functions with the property of inversion of functions in time. The developed approach made it possible to obtain an analytical expression for the generating function  $Q_x(\lambda) = \langle \exp(-\lambda Z) \rangle$  of the distribution of random values of the cross-functional from a random process  $x(t)$ . Based on the found generating function  $Q_x(\lambda)$ , the main statistical properties of the cross-functional  $Z$  are analyzed. The density  $f(z)$  of the probability distribution of random values  $Z$  of the functional and the integral law  $F(z)$  of probability distribution are obtained numerically using the inverse Laplace transform. For selected values  $T$  of observation time, decrement  $\nu$  of a random process and its intensity  $\sigma_x^2$ , examples of graphical dependencies are given. It is shown that an increase in the parameter  $T\sigma_x^2$  leads to an expansion of the values  $Z$  of the convolution functional to the peripheral regions of large deviations. A decrease in the parameter  $\nu T$  leads to the localization of the convolution functional values  $Z$  in the fluctuation region  $z \approx 0$ . The density  $f(z)$  of the probability distribution is symmetric with respect to  $z = 0$ , has a single maximum, two inflection points, and exponential asymptotics at the periphery. Using standard replacements and the passage to*

the limit in the found generating function, the characteristic function  $Q_W(\lambda) = \langle \exp(-\lambda Y) \rangle$  of the convolution functional  $Y = J[w] = \int_0^T dt w(t)w(T-t)$  from the Wiener process  $w(t)$  is obtained.

Keywords: stationary, normality, markovity, integral quadratic functional, energy functional and cross-type functional, statistical properties of cross-functional.

О.С. МАЗМАНІШВІЛІ

Національний Науковий Центр «ХФТІ» НАНУ

Г.Ю. СИДОРЕНКО

Національний технічний університет «Харківський Політехнічний Інститут»

### ЗАСТОСУВАННЯ РЕВЕРСНИХ ФУНКЦІЙ В ЗАДАЧІ ПРО РОЗПОДІЛ ІМОВІРНОСТЕЙ ВИПАДКОВОГО ФУНКЦІОНАЛА-ЗГОРТКИ ВІД НОРМАЛЬНОГО МАРКІВСЬКОГО ПРОЦЕСА

Розглядається процес, що володіє властивостями стаціонарності, нормальності та марковості. Для заданого часового інтервалу вивчено енергетичний функціонал та функціонал-згортки. Використаний підхід, заснований на застосуванні реверсних функцій, що дало можливість отримання аналітичного виразу для твірної функції розподілу випадкових значень функціоналу-згортки. Проведено аналіз статистичних властивостей функціоналу-згортки. Щільність розподілу ймовірностей і інтегральний розподіл отримано чисельно з використанням зворотного перетворення Лапласа для вибраних значень часу спостереження  $T$ , декременту випадкового процесу  $\nu$  та його інтенсивності  $\sigma_x^2$ . Показано, що збільшення параметра  $T\sigma_x^2$  приводить до розширення значень функціоналу-згортки в периферійній області більших ухилень. Зменшення параметра  $\nu T$  призводить до локалізації значень функціоналу-згортки в межах флуктуаційної області. Щільність симетрична відносно  $z=0$ , має єдиний максимум, дві точки перегину і експоненціальну асимптотику на периферіях.

Ключові слова: стаціонарність, нормальність, марковість, інтегральні квадратичні функціонали, енергетичний функціонал та функціонал згорткового типу, статистичні властивості.

#### Постановка проблемы

В ряде задач возникает необходимость вычисления случайных величин, которые представляют собой квадратичные функционалы от траекторий нормального марковского процесса. Примером может служить энергетический и сверточный функционалы

$$Y = J_1[x] = \int_0^T x^2(t) dt, \quad Z = J_2[x] = \int_0^T x(t)x(T-t) dt, \quad (1)$$

и различные варианты функционала  $J_1[x]$ , например функционалы корреляционного и интерференционного вида [1-5]. В функционалах (1)  $0 \leq t \leq T$  – временной интервал рассмотрения, а под  $\{x(t)\}$  понимается нормальный процесс Орнштейна-Уленбека (ОУ-процесс) [3-5]. Стационарный, вещественный случайный ОУ-процесс имеет декремент  $\nu$ , интенсивность  $\sigma_x^2$ , а также безусловные математическое ожидание, равное нулю, и дисперсию  $\mathbf{M}[x^2(t)] = \sigma_x^2$ . При этом ОУ-процесс  $x(t)$  удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению с декрементом  $\nu > 0$ :  $\frac{d}{dt}x(t) + \nu x(t) = w(t)$ , а  $w(t)$  – винеровский процесс с корреляционной функцией

$$K_w(t, t') = \mathbf{M}[w(t)w(t')] = \frac{1}{2} \sigma_w^2 \min(t, t').$$

Задача о нахождении статистических свойств функционала  $J_1[x]$  рассматривалась в [4, 5]. Полное описание свойств содержится в полученном выражении для производящей (характеристической) функции  $Q_Y(\lambda)$  случайной величины  $Y = J_1[x]$ . Поставим задачу о нахождении плотности распределения  $f(z)$  случайных значений  $z$  функционала  $Z = J_2[x]$  (1) или, что эквивалентно,

производящей (характеристической) функции (ХФ)  $Q_Z(\lambda)$  распределения вероятностей для случайного функционала-свертки с параметром  $\lambda$  :

$$Q_Z(\lambda) = \left\langle \exp \left( -\lambda \int_0^T x(t)x(T-t) dt \right) \right\rangle. \quad (2)$$

Здесь угловыми скобками обозначено усреднение в пространстве случайных функций  $\{x(t)\}$ . Поставленная задача ранее рассматривалась в работах [6, 7]. В этих работах для вычисления ХФ пришлось преодолеть значительные технические трудности, в частности, найти аналитическое представление для фундаментальной матрицей  $\exp(A)$ , где  $A$  – некоторая построенная  $(4 \times 4)$ -матрица.

### ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ

В настоящей работе предложен и использован подход, основанный на применении реверсных функций. Под реверсной функцией  $R[\varphi(t)]$  будем понимать функцию, обладающей свойством  $R[\varphi(t)] = \varphi(T-t)$ , то есть свойством временной инверсии на интервале  $0 \leq t \leq T$ . Рассматривая функционал  $Z = J_2[x]$  (1) в пространстве, образованном множеством функций  $\{x(t)\}$ , запишем его в виде

$$J_2[x] = \frac{1}{4} \int_0^T \left[ (x(t) + x(T-t))^2 - (x(t) - x(T-t))^2 \right] dt, \quad (3)$$

тогда

$$Q_Z(\lambda) = \left\langle \exp \left\{ -\frac{1}{4} \int_0^T [x(t) + x(T-t)]^2 dt + \frac{1}{4} \int_0^T [x(t) - x(T-t)]^2 dt \right\} \right\rangle. \quad (4)$$

Введем функции  $u(t) = x(t) + x(T-t)$ ,  $v(t) = x(t) - x(T-t)$ . Принимая во внимание явный вид функционала (1), представим его в виде интегралов от суммы квадратичных форм

$$J_2[x] = J_U[x] + J_V[x] = \frac{1}{4} \int_0^T dt [x(t) + R[x(t)]]^2 - \frac{1}{4} \int_0^T dt [x(t) - R[x(t)]]^2. \quad (5)$$

Поскольку для функций  $u(t)$  и  $v(t)$  справедливо  $\langle u(t) \rangle = 0$ ,  $\langle v(t) \rangle = 0$  и  $\langle u(t)v(t) \rangle = 0$ , то они с учетом нормального свойства процесса  $x(t)$  статистически независимы [3]. Отсюда вытекает, что ХФ  $Q_Z(\lambda)$  можно записать в виде

$$Q_Z(\lambda) = Q_U(\lambda) Q_V(\lambda), \quad (6)$$

где

$$Q_U(\lambda) = \left\langle \exp \left\{ -\frac{\lambda}{4} \int_0^T u^2(t) dt \right\} \right\rangle, \quad Q_V(\lambda) = \left\langle \exp \left\{ \frac{\lambda}{4} \int_0^T v^2(t) dt \right\} \right\rangle. \quad (7)$$

В факторизационном представлении (7) для ХФ  $Q_Z(\lambda)$  сначала рассмотрим первый множитель  $Q_U(\lambda)$ . Наряду с множеством функций  $\{u(t)\}$  рассмотрим сопряженное с ним множество функций  $\{p(t)\}$ . Тогда

$$Q_U(\lambda) = \left\langle \exp \left\{ -\frac{\lambda}{4} \int_0^T u^2(t) dt \right\} \right\rangle = \int Dp(t) \left\langle \exp \left\{ -\int_0^T dt p^2(t) + \sqrt{-\lambda} \int_0^T dt p(t)u(t) \right\} \right\rangle, \quad (8)$$

где  $Dp(t)$  – обобщенный дифференциал в пространстве функций  $\{p(t)\}$  [5]. В силу нормальности функций  $\{u(t)\}$  статистическое среднее в (8) равно

$$\left\langle \exp \left\{ \sqrt{-\lambda} \int_0^T dt p(t)u(t) \right\} \right\rangle = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \lambda \int_0^T dt p(t) \int_0^T dt' p(t') \langle u(t)u(t') \rangle \right\}, \quad (9)$$

что после прямого вычисления коррелятора  $K_U(t, t') = \langle u(t)u(t') \rangle$  дает

$$Q_U(\lambda) = \int Dp(t) \left\langle \exp \left\{ - \int_0^T p^2(t) dt - \frac{\lambda}{2} \sigma_x^2 \int_0^T p(t) dt \int_0^T p(t') dt' [\exp(-\nu|t-t'|) + \exp(-\nu|t+t'-T|)] \right\} \right\rangle. \quad (10)$$

*Утверждение 1.*

Статистические средние, основанные на корреляторе  $K_U(t, t') = \langle u(t)u(t') \rangle$  с собственными функциями  $\{\varphi_n(t)\}$  и собственными числами  $\{\Lambda_n\}$ , эквивалентны соответствующим статистическим средним, основанным на корреляторе  $K_X(t, t') = \langle x(t)x(t') \rangle$  с собственными функциями  $\{\psi_n(t)\}$  и собственными числами  $\{\lambda_n\} = \{2\Lambda_n\}$ .

*Доказательство.*

Рассмотрим уравнение для собственных функций  $\{\varphi_n(t)\}$  оператора  $K_U$  с соответствующим им набором собственных чисел  $\{\Lambda_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,

$$\varphi_n(t) = \Lambda_n \int_0^T dt' \varphi_n(t') [\exp(-\nu|t-t'|) + \exp(-\nu|t+t'-T|)]. \quad (11)$$

Коррелятор  $K_U(t, t')$  имеет вид  $K_U(t, t') = \langle x(t)x(t') \rangle + \langle x(t)x(T-t') \rangle$  и выражен через корреляторы исходного случайного ОУ-процесса. Во втором слагаемом под интегралом (11) осуществим реверсную замену во времени  $T-t' = \tau$ , тогда, вновь используя переменную  $t'$ , получим

$$\varphi_n(t) = \Lambda_n \int_0^T dt' [\varphi_n(t') + R[\varphi_n(t')]] \exp(-\nu|t-t'|). \quad (12)$$

Из (12) вытекает, что для реверсной функции справедливо

$$R[\varphi_n(t)] = \varphi_n(T-t) = \Lambda_n \int_0^T dt' [\varphi_n(t') + R[\varphi_n(t')]] \exp(-\nu|t+t'-T|), \quad (13)$$

или

$$R[\varphi_n(t)] = \Lambda_n \int_0^T dt' [R[\varphi_n(t')] + \varphi_n(t')] \exp(-\nu|t-t'|). \quad (14)$$

Складывая (12) и (14), приходим к уравнению

$$\psi_n(t) = 2\Lambda_n \int_0^T dt' \psi_n(t') \exp(-\nu|t-t'|), \quad (15)$$

где  $\psi_n(t) = \varphi_n(t) + R[\varphi_n(t)]$ . В этом уравнении ядром служит уже коррелятор только ОУ-процесса.

Из (12) и (15) можно заключить, что нахождение статистических средних, основанных на корреляторе  $K_U(t, t')$  можно свести к нахождению статистических средних, основанных на корреляторе  $K_X(t, t') = \langle x(t)x(t') \rangle$ . Поэтому

$$Q_U(\lambda) = \left\langle \exp \left\{ - \frac{\lambda}{4} \int_0^T dt [x(t) + x(T-t)]^2 \right\} \right\rangle = \left\langle \exp \left\{ - \frac{\lambda}{2} \int_0^T x^2(t) dt \right\} \right\rangle. \quad (16)$$

В правой части этого выражения получена производящая функция  $Q_Y(\lambda)$  энергетического функционала  $Y = J_1[x]$  (1). Итак, имеем для парциальной производящей функции

$$Q_U(\lambda) = Q_Y(\lambda/2). \quad (17)$$

*Утверждение 2.*

Статистические средние, основанные на корреляторе  $K_V(t, t') = \langle v(t)v(t') \rangle$  с собственными функциями  $\{\varphi_n(t)\}$  и собственными числами  $\{\Lambda_n\}$ , эквивалентны соответствующим статистическим

средним, основанным на корреляторе  $K_X(t, t') = \langle x(t)x(t') \rangle$  с собственными функциями  $\{\psi_n(t)\}$  и собственными числами  $\{\lambda_n\} = \{2\Lambda_n\}$ .

*Доказательство.*

Преобразования, аналогичные выше изложенным, приводят к выражению

$$Q_V(\lambda) = \left\langle \exp \left\{ \frac{\lambda}{2} \int_0^T x^2(t) dt \right\} \right\rangle. \quad (18)$$

Поэтому из (17) и (18) получаем окончательно

$$Q_Z(\lambda) = \left\langle \exp \left\{ -\lambda \int_0^T x(t)x(T-t) dt \right\} \right\rangle = Q_V(\lambda/2) Q_V(-\lambda/2). \quad (19)$$

Для полученных функциональных средних можно использовать ранее найденные аналитические представления [5]. Это окончательно дает для искомой характеристической функции

$$Q_Z(\lambda) = \left( \frac{4r_+ \nu \exp(\nu T)}{(r_+ + \nu)^2 \exp(r_+ T) - (r_+ - \nu)^2 \exp(-r_+ T)} \frac{4r_- \nu \exp(\nu T)}{(r_- + \nu)^2 \exp(r_- T) - (r_- - \nu)^2 \exp(-r_- T)} \right)^{1/2}, \quad (20)$$

где  $r_+ = \sqrt{\nu^2 + \lambda \nu \sigma_X^2}$ ,  $r_- = \sqrt{\nu^2 - \lambda \nu \sigma_X^2}$ .

Факторизация результата (20) позволяет заключить, что пространство, отвечающее функциям  $\{x(t)\}$ , расслаивается на два подпространства, соответствующие функциями  $\{u(t)\}$  и  $\{v(t)\}$  соответственно. Таким образом, ХФ  $Q_Z(\lambda)$  формируется в подпространствах, образованных функциями  $\{u(t)\}$  и  $\{v(t)\}$  совместно, но с вдвое меньшей интенсивностью  $\sigma_X^2$  каждое. При этом их прямое объединение суть пространство, котором действуют функции  $\{x(t)\}$ .

*Замечание.*

После замены в (20)  $2\nu\sigma_X^2 \Rightarrow \sigma_W^2$  и предельного перехода  $\nu \rightarrow 0$  в получившемся выражении приходим к характеристической функции  $Q_W(\lambda) = \langle \exp(-\lambda J[w]) \rangle$  функционала-свертки  $J[w] = \int_0^T dt w(t)w(T-t)$  от винеровского процесса  $w(t)$  [4, 8]:

$$Q_W(\lambda) = \langle \exp(-\lambda J[w]) \rangle = \left( \text{ch}(\sqrt{\lambda} \sigma_W^2 T) \right)^{-1/2}. \quad (21)$$

### Свойства сверточного функционала

Найденная характеристическая функция (20)  $Q_Z(\lambda)$  функционала-свертки  $Z = J_2[x]$  от нормального марковского процесса  $x(t)$  содержит всю статистическую информацию о случайной величине  $Z$ . Плотность  $f(z)$  симметрична относительно линии  $z=0$ . Вместе с тем она удовлетворяет общим требованиям, предъявляемым к плотностям распределений вероятностей интегральных квадратичных функционалов, а именно,  $f(z)$  имеет единственный максимум, две точки перегиба и экспоненциальную асимптотику на перифериях. Информацию о плотности распределения вероятностей  $f(z)$  можно получить с помощью обратного преобразования Лапласа (параметры расчета:  $\sigma_X^2=1$ ,  $T=1$ ,  $\nu=1$ ).

На рис. 1 приведены зависимости плотности  $f(z)$  для указанных значений параметров расчета. Можно показать, что увеличение параметра  $T\sigma_X^2$  приводит к расширению значений функционала-свертки в периферийные области больших уклонений.

На рис. 2 приведены зависимости функции распределения  $F(z)$ . Из расчетов следует, что уменьшение параметра  $\chi = \nu T$ , равного отношению интервала наблюдения  $T$  к длине корреляции

$l_{\text{сорт}} = \nu^{-1}$  ОУ-процесса, приводит к локализации значений функционала-свертки во флуктуационную область  $z \approx 0$ .

Из (20) следует для первого момента, что  $\mathbf{M}[Z] = 0$ , далее, дисперсия функционала-свертки равна

$$\mathbf{M}[Z^2] = (\sigma_x^2 / \nu)^2 (\nu T - 1 + \exp(-\nu T)). \quad (22)$$

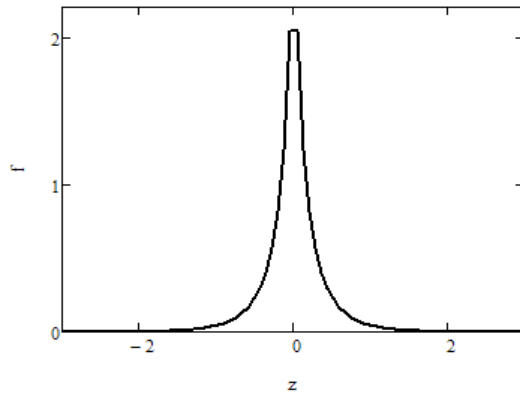


Рис. 1. Плотность распределения вероятностей

$f(z)$

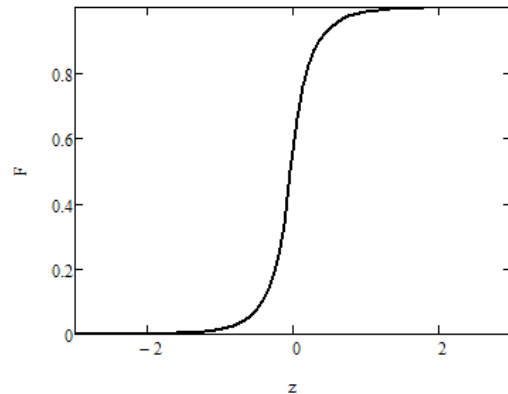


Рис. 2. Функция распределения вероятностей

$F(z)$

### Выводы

В работе рассмотрен случайный процесс Орнштейна-Уленбека, обладающий свойствами стационарности, нормальности и марковости. Для заданного временного интервала изучены энергетический функционал и функционал сверточного типа. Предложен подход, основанный на применении реверсных функций, что дало возможность получить аналитическое выражение для производящей функции  $Q_z(\lambda) = \langle \exp(-\lambda J[x]) \rangle$  распределения случайных значений функционала-свертки  $Z$ . Плотность и интегральный закон распределения получены численно для выбранных значениях времени наблюдения  $T$ , декремента случайного процесса  $\nu$  и его интенсивности  $\sigma_x^2$ . Получено, что увеличение параметра  $T\sigma_x^2$  приводит к расширению значений функционала-свертки в периферийные области больших уклонений. Уменьшение параметра  $\nu T$  приводит к локализации значений функционала-свертки в флуктуационную область  $z \approx 0$ . Плотность  $f(z)$  симметрична относительно линии  $z=0$  и удовлетворяет общим требованиям, предъявляемым к плотностям распределений вероятностей интегральных квадратичных функционалов. С помощью предельного перехода и стандартных замен в производящей функции  $Q_z(\lambda) = \langle \exp(-\lambda J[x]) \rangle$  получена характеристическая функция  $Q_w(\lambda) = \langle \exp(-\lambda J[w]) \rangle$  функционала-свертки, основанном на винеровском процессе  $w(t)$ .

### Список литературы

1. Uhlenbeck G. E., Ornstein L. S. *On the theory of Brownian Motion*. Phys. Rev. 1930. V. 36. P. 823–841.
2. Чандрасекар С. *Стохастические проблемы в физике и астрономии*. Москва: Государственное издательство иностранной литературы. 1947. 168 с.
3. Тихонов В. И., Миронов М. А. *Марковские процессы*. Москва: Сов. Радио. 1977. 488 с.
4. Лэкс М. *Флуктуации и когерентные явления*. Москва: Наука. 1974. 299 с.
5. Мазманишвили А. С. *Континуальное интегрирование как метод решения физических задач*. Киев: Наукова Думка. 1987. 224 с.
6. Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С. Статистические свойства функционала-свертки от нормального марковского процесса. *Доклады Академии Наук УССР*. 1988. № 1. С. 14–16.
7. Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С. Распределение вероятностей случайного функционала-свертки от нормального марковского процесса. *Проблемы передачи информации*. 1990. Т. 26. Вып. 3. С. 96–101.

8. Клячко А. А., Солодянников Ю. В. Вычисление характеристических функций некоторых функционалов от винеровского процесса и броуновского моста. *Теория вероятностей и её применение*. 1986. Т. 31. Вып. 3. С. 569–573.

#### References

1. Uhlenbeck G. E., Ornstein L. S. On the theory of the Brownian Motion. *Phys. Rev.*, 1930, v. 36, pp. 823–841.
2. Chandrasekar S. *Stohasticheskie problemy v fizike i astronomiji* [Stochastic problems in physics and astronomy]. Moscow, GIIL Publ., 1947. 168 p.
3. Tihonov V. I., Mironov M. A. *Markovskie processy* [Process of Markov]. Moscow, Sov. Radio Publ., 1977. 488 p.
4. Lax M. *Fluktuaciya i kogerentnye yavlenia* [Fluctuations and coherent phenomena]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 299 p.
5. Mazmanishvili A. S. *Kontinual'noe integrirovanie kak metod resheniya fizicheskikh zadach* [Path integration as a method for solving physical problem]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1987. 224 p.
6. Virchenko Yu. P., Mazmanishvili A. S. Statisticheskie svoystva funkcionala-svertki ot normalnogo markovskogo processa [Statistical properties of convolutional functional from a normal Markov process]. *Doklady Akademii Nauk USSR*. 1988, issue 1, pp. 14–16.
7. Virchenko Yu. P., Mazmanishvili A. S. Raspredelenie veroyatnostey sluchaynogo funkcionala-svertki ot normalnogo markovskogo processa [Probability distribution of a convolutional functional from a normal Markov process]. *Problemy peredachi informacii*, 1990, issue 26, no. 3, pp. 96–101.
8. Klyachko A. A., Solodyannikov Yu. V. Vychislenie harakteristicheskikh funkciy nekotorykh funkcionarov ot vinerovskogo processa [The calculation of the characteristic functions of some functionals of the Wiener process]. *Teoriya veroyatnostey i primenenie* [Probability theory and its application]. 1986, vol. 31, issue 3, pp. 569–573.



UDK 539.3: 534.1

O.A. NAZARENKO, A.A. STEKHUN  
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture**STUDYING THE INFLUENCE OF TORSION WAVE ON A HARD SPHERICAL DEFECT IN AN ELASTIC HOMOGENEOUS ENVIRONMENT**

*In this article, from the general range of problems associated with the use of shell structures, highlighted the problem concerning the study of the interaction of non-deformed shells surrounding elastic medium. In this paper we developed an approach to the study stationary wave diffraction problems on spherical defects, based on the method of discontinuous solutions and the method of generalized integral transforms. Discontinuous solutions of the wave equation and the three-dimensional equations of the linear theory of elasticity in a spherical coordinate system are constructed. The problems of torsion wave diffraction on the immobility (mobility) spherical bodies of shell type are solved. Integral-differential equations by the reduction method were solved numerically, which allowed calculating the reaction torque for a spherical defect. We investigated the dependence of torque shell switching frequency waves irradiated it, as well as the angle of attack of the wave impact. These results allow us to determine the reactive torque twisting, which should be attached to the inclusion of it to be fixed, the amplitude of the oscillation of the movable switching and thoroughly explore the far zone in an elastic medium.*

*Keywords: the wave equation, elasticity theory, the discontinuous solutions, voltage jump, stationary diffraction, reactive moment of a torsion wave, the spherical coordinate system.*

O.A. НАЗАРЕНКО, А.О. СТЕХУН  
Одеська державна академія будівництва і архітектури**ВИВЧЕННЯ ВПЛИВУ ХВИЛІ КРУЧЕННЯ НА ЖОРСТКИЙ СФЕРИЧНИЙ ДЕФЕКТ В ПРУЖНОМУ ОДНОРІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ**

*Розроблено підхід до дослідження стаціонарних задач дифракції хвиль на сферичних дефектах, заснований на застосуванні методу розривних розв'язків і методу узагальнених інтегральних перетворень. Побудовано розривні розв'язки хвильового і тривимірних рівнянь лінійної теорії пружності в сферичній системі координат. Вирішені завдання дифракції хвилі кручення на жорстких нерухомих (рухливих) сферичних тілах оболонкового типу. Були чисельно вирішені інтегро-диференціальні рівняння методом редуції, що дозволило обчислити реактивний крутний момент для сферичного дефекту. Досліджувалися залежності моменту крутіння оболонкового включення від частоти опромінюються його хвиль, а також кутові атаки хвильового удару.*

*Ключові слова: хвильове рівняння, теорія пружності, розривний розв'язок, стрибок, напруження, стаціонарна дифракція, реактивний момент хвиль скручування, сферичні координати.*

O.A. НАЗАРЕНКО, А.А. СТЕХУН  
Одесская государственная академия строительства и архитектуры**ИЗУЧЕНИЕ ВЛИЯНИЯ ВОЛНЫ КРУЧЕНИЯ НА ЖЕСТКИЙ СФЕРИЧЕСКИЙ ДЕФЕКТ В УПРУГОЙ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ**

*Разработан подход к исследованию стационарных задач дифракции волн на сферических дефектах, основанный на применении метода разрывных решений и метода обобщенных интегральных преобразований. Построены разрывные решения волнового и трехмерных уравнений линейной теории упругости в сферической системе координат. Решены задачи дифракции волны кручения на жестких неподвижных (подвижных) сферических телах оболочечного типа. Были численно решены интегро-дифференциальные уравнения методом редуции, что позволило вычислить реактивный крутящий момент для сферического дефекта. Исследовались зависимости момента кручения оболочечного включения от частоты облучаемых его волн, а также угловые атаки волнового удара.*

*Ключевые слова: волновое уравнение, теория упругости, разрывное решение, скачек, напряжение, стационарная дифракция, реактивный момент волны кручения, сферические координаты.*

**Introduction.** Currently, many important components, parts and whole units, which are the part of modern equipment, facilities, work in a permanent or in abruptly non-stationary modes. Thin-walled structures of shell type are wide class mechanical equipment of modern transportation, rocketry, and, of course, construction. In the operating conditions, with intense loads of a different nature, large stresses arise. Investigation of the interaction of crashworthy shells with the surrounding elastic medium is of practical value due to the increase in the impact resistance of ships with respect to underwater and air explosions, the

improvement of methods and methods of underwater acoustics, and the provision of seismic resistance of certain hydraulic structures and their component parts. Thus, the development of mathematical methods for solving problems on the interaction of non-stationary (stationary) waves with different objects, including the shell type, is topical.

**Analysis of publications.** The development of the theory and methods of problems of the dynamics of bodies interacting with the environment was made by such scientists as Babailov E.P., Babeshko V.A., Babichev A.I., Buriev O.T., Veksler M.D., Guz A.N., Goldenveyzer O.D., Gradstein I.S., Grilitsky D.V., Gorshkov O.G., Kovshov O.M., Kubenko V.D., Seleznev I.T., Tarlakovsky O.V., Popov G.Y. and many others. The methods developed to date for solving three-dimensional boundary value problems in the mechanics of continuous media can be conditionally divided into analytical and numerical ones. Among the analytical methods we can distinguish the following: the method of integral equations (the method of potential), the method of separation of variables and its various modifications (the Fourier method and its generalizations in vector and scalar forms, as well as reduction to infinite systems of algebraic equations), the method of the theory of a function of a complex variable [1-4]. However, these methods are mainly applicable to canonical domains (the equations of their boundary surfaces reduce to standard canonical forms).

At present, various numerical methods of finite differences, finite elements, etc. have begun to be widely applied to the solution of spatial problems. The work is devoted to solving the spatial problem of elasticity theory for a spherical segment by the method of discontinuous solution [5].

**Goals and objectives.** The aim of the work is to transfer the method of discontinuous solutions to the dynamic problems of diffraction of elastic waves on spherical defects. For this purpose, a discontinuous solution of the wave equation and, later, of the three-dimensional equations of motion of the elastic medium for this defect is constructed. Using the constructed discontinuous solution, it was possible to reduce the problems of elastic waves on a spherical defect to the problem of solving integral equations. An effective method of approximate solution of integral equations of the problem of diffraction of torsion waves on a stationary (movable) spherical fine inclusion is developed.

**Main results.** Suppose that in an infinite elastic medium rigid defect having the shape of a spherical segment of a thickness  $h$  is placed perfectly. Suppose also that this heterogeneity is tightly coupled with the surrounding space and is "frozen", motionless in it. It is required to determine the reactive torsion acting on this body, if there is a wave of torsion [6]. The sought solution of the problem will be presented in the form

$$u_{res} = u_{fall} + u_{diffrac} \tag{1}$$

where  $u_{res}$ - resultant displacement of the defect in the environment, according to the statement of the problem it is zero;  $u_{fall}$ - moving the front of the incident wave in the absence of an elastic medium of any obstacles, particularly the defect;  $u_{diffrac}$ - the unknown (required) movement. Relative displacement vector  $\vec{U} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y + u_z \vec{e}_z$  in the case of steady motion and assuming that the body force are absent, the equation according to [1-4] will be written in the form

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \vec{u}) + \rho_m \omega^2 \vec{u} = 0, \tag{2}$$

where  $\mu, \lambda$  the constant Lamé,  $\Delta$  – Laplace operator,  $\nabla$ - nabla operator,  $\rho_m$ - the density of the material The solution of this equation [4] can be represented as

$$\vec{u} = \nabla \Phi + rot \vec{\Psi}, \tag{3}$$

where the scalar  $\Phi$  and the vector  $\vec{\Psi}$  functions are wave. According to [7] in a spherical coordinate system the vector  $\vec{\Psi}$  is conveniently represented in the following way

$$\vec{\Psi} = r \Psi_1 \vec{e}_r + \nabla \times (r \Psi_2 \vec{e}_r), \tag{4}$$

where the functions  $\Psi_1$  and  $\Psi_2$  satisfy the wave equation, and  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$  - the unit vectors tangent to the coordinate lines. Using [7, 8] can be recorded based on the component of displacements and stresses in the environment via three wave functions  $\Phi, \Psi_1, \Psi_2$ . We introduce the notation for the jumps of displacements in spherical coordinates

$$\begin{aligned} \langle u^r(R, \theta, \varphi) \rangle &= u^r(R - 0, \theta, \varphi) - u^r(R + 0, \theta, \varphi); \\ \langle u^\theta(R, \theta, \varphi) \rangle &= u^\theta(R - 0, \theta, \varphi) - u^\theta(R + 0, \theta, \varphi); \\ \langle u^\varphi(R, \theta, \varphi) \rangle &= u^\varphi(R - 0, \theta, \varphi) - u^\varphi(R + 0, \theta, \varphi). \end{aligned} \tag{5}$$

Similar expressions of jumps can be entered for the component of the stress tensor. Adapt to formulas linking the displacement and stress of the wave functions, Fourier transform. Then, directing them  $r$  to  $R-0$  where  $R$ - the radius of the defect, and then  $r$  to  $R+0$  and subtracting from the first second, and using the formulas (5), we can express the jumps of displacements and stresses through the jumps of the wave functions and their normal derivatives. Applying to the obtained results the Legendre transformation in the variable  $\theta$ , and taking into account that the defect is rigidly coupled to an elastic medium, i.e.  $\langle u^r \rangle \equiv \langle u^\theta \rangle \equiv \langle u^\varphi \rangle \equiv 0$ , it is possible to obtain expressions based on the jumps of the wave functions and their normal derivatives jumps of stresses.

Using the method of discontinuous solutions to the wave equation in spherical coordinate system [5, 9, 10], we find that his decision in transformants of Fourier and Legendre takes the form

$$\Psi_{nk}^j(r) = R^2 \left[ \langle \Psi_{nk}^{j'}(R) \rangle \Gamma_{\beta_o}(r, R) - \langle \Psi_{nk}^j(R) \rangle \frac{\partial}{\partial R} \Gamma_{\beta_o}(r, R) \right], \quad (6)$$

$$J=\overline{1,2}; \quad \Gamma_{\beta_o}(r, R) = \frac{\Psi_k^1(r, R)}{\sqrt{rR}}, \quad \overline{\Psi_k^1}(r, R) = \begin{cases} I_\nu(R\beta_o)K_\nu(r\beta_o), & r > R, \\ I_\nu(r\beta_o)K_\nu(R\beta_o), & r < R, \quad \nu = k + 0.5, \end{cases}$$

where  $I_\nu(R\beta_o)$  – the modified Bessel function  $\beta_o = \omega \sqrt{\frac{\rho m}{\mu}}$ ,  $\omega$  – cyclic frequency,  $K_\nu(r\beta_o)$  – the function of MacDonald. Similarly, for a function  $\Phi_{nk}(r)$ , we write

$$\Phi_{nk}(r) = R^2 \left[ \langle \Phi_{nk}'(R) \rangle \Gamma_{\alpha_o}(r, R) - \langle \Phi_{nk}(R) \rangle \frac{\partial}{\partial R} \Gamma_{\alpha_o}(r, R) \right]. \quad (7)$$

In this expression,  $\Gamma_{\alpha_o}(r, R)$  - has exactly the same structure as above, except that instead  $\beta_o$  we should turn the wave number  $\alpha_o = \omega \sqrt{\frac{\rho m}{\lambda + 2\mu}}$ .

Substituting the formulas describing the dependence of the jumps of the functions and their normal derivatives of the stresses in (6) and (7), we obtain the expression of potential  $\Psi^1, \Psi^2, \Phi$  through stress jumps. Thus, it remains to obtain the equation for the jumps of stresses, identifying them from these equations and substituting the result in (6) and (7), we obtain the values of the potential functions in terms of Fourier-Legendre. Carrying out the inverse transform in the corners  $\theta$  and  $\varphi$  with the formulas for the displacements and strains [7], we can define their field in an elastic space. Furthermore, having the values of the jumps of the voltage, you can determine the amount of reactive torsion. Turning to the equations (6) and (7) to the limit, when  $r$  seeking  $R+\theta$  and using formula when the displacement of the wave potentials and their normal derivatives, we can construct a system of 3 equations for the unknown jumps of stresses

$$\begin{cases} \nabla_n \Psi_n^1(R + 0, \theta) = \frac{[\sin\theta u_n^\varphi(R+0, \theta)] + in u_n^\theta(R+0, \theta)}{\sin\theta}; \\ \frac{1}{R} \nabla_n [\Phi_n(R + 0, \theta)] + \nabla_n \left\{ \frac{1}{r} [r \Psi_n^2(r, \theta)]' \right\} \Big|_{r=R+0} = \frac{in u_n^\varphi(R+0, \theta) - [\sin\theta u_n^\theta(R+0, \theta)]}{\sin\theta}; \\ \Phi_n'(R + 0, \theta) + \frac{\nabla_n}{R} \Psi_n^2(R + 0, \theta) = u_n^r(R + 0, \theta), \end{cases} \quad (8)$$

where  $\nabla_n f = \frac{n^2 f}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)$ ,  $f$  – is a somehow function having at least a second continuous derivative on a variable  $\theta$  bar derivative rat a variable point is a derived variable  $\theta$ . Assume that the environment acts on the defect wave torsion created some crotales

$$u_o^\varphi = Ar \sin\theta e^{ir\beta_o \cos\theta}, \quad (9)$$

where  $A$  is the wave amplitude,  $r$  the radius-vector in spherical coordinate system. It should be noted that in this interpretation, the solution of the problem is greatly simplified. In this case  $\Phi \equiv 0$ ,  $\Psi^1 = \Psi^1(r, \theta)$ ,  $\Psi^2 \equiv 0$  and different from zero will be components  $u^\varphi, \tau^{\theta\varphi}, \tau^{r\varphi}$  that will lead to the need to solve only the first equation of system (8), which in view of the symmetry, will take more simple view

$$\nabla_o \Psi_o^1(R + 0, \theta) = 2 \frac{[\sin\theta u_o^\varphi(R+0, \theta)]}{\sin\theta}. \quad (10)$$

Using materials from the papers [7, 8] and introducing notation for the jumps [5, 9, 10], we can express the jump of a function and its normal derivative jump through stresses. Thus, the equation (10) is converted to the form

$$\frac{R^2}{\mu} \int_0^{\omega_o} \langle \tau_n^*(R, \tau) \rangle \sin\tau K_{\beta_o}(r, R, \theta, \tau) \Big|_{r=R+0} d\tau = F_n(\theta), \quad (11)$$

where  $R$  is the radius of the segment,  $\omega_o$  – the angular size of the defect in radians (the corner between  $Oz$  the  $r$ ),  $\tau$ - the angle of the direct Legendre transformation,  $\langle \tau_n^* \rangle \sin\tau = in \langle \tau_n^\theta \rangle + [\langle \tau_n^\varphi \rangle \sin\tau]$ ,  $K_{\beta_o}(r, R, \theta, \tau) = \sum_{k=|n|}^\infty \sigma_{k,|n|} \Gamma_{\beta_o}(r, R) P_k^{|n|}(\cos\theta) P_k^{|n|}(\cos\tau)$ ,  $\sigma_{k,|n|} = \frac{(k-|n|)!}{(k+|n|)!} \cdot \left(k + \frac{1}{2}\right)$ ,  $P_k^{|n|}(\cos\theta)$  – Legendre polynomial,  $F_n(\theta)$  – the right side of the equation (10) in terms of Fourier transform. For the effective solution of the integral equation of the first kind, it is necessary to convert the equation (11) into the integral equation of the second kind [11, 12]. Using [11], we can prove that the following relation is true

$$\Gamma_{\beta_o}(r, R) = \frac{1}{2k+1} - \frac{A_k(R\beta_o)}{2k+1}, \quad (12)$$

where  $A_k(R\beta_o) = (-1)^k \int_0^\pi \Omega_o' \left( 2R\beta_o \cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \right) \sin \left[ \left(k + \frac{1}{2}\right)\alpha \right] d\alpha$  the bar-differentiation with respect to the entire argument within the function  $\Omega_o \left( 2R\beta_o \cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \right) = I_o \left( 2R\beta_o \cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \right) - L_o \left( 2R\beta_o \cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \right)$ , modified Struve function of order zero. 5.14.4 according to the formula (1) from [13] to obtain the relationship between Legendre polynomials and hypergeometric function. Consider the discontinuous integral of Weber-Sonin

$$W_{|n|} \left( tg \frac{\theta}{2}, tg \frac{\tau}{2} \right) = \int_0^\infty J_{|n|} \left( s \cdot tg \frac{\theta}{2} \right) J_{|n|} \left( s \cdot tg \frac{\tau}{2} \right) ds, \tag{13}$$

where  $J_{|n|}(x)$  – is the cylindrical Bessel function. To find the integral (13) we use [13] and, introducing the notation for the jump of stresses  $\chi_n(\tau) = \langle \tau_n^*(R, \tau) \rangle$  and getting rid of the modules in the equation (11), we get

$$\frac{R^2}{\mu} \left\{ \int_0^{\omega_0} W_n \left( tg \frac{\theta}{2}, tg \frac{\tau}{2} \right) \sin \frac{\tau}{2} \chi_n(\tau) d\tau - 2 \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sum_{k=n}^\infty \Lambda_k(R\beta_0) \cdot \int_0^{\omega_0} P_k^n(\cos\theta) P_k^n(\cos\tau) \sin \frac{\tau}{2} \cos \frac{\tau}{2} \chi_n(\tau) d\tau \right\} = F_n(\theta), \tag{14}$$

where  $0 \leq \theta \leq \omega_0$ ,  $n = 0$ . Using (13), we can derive the left of the spectral ratio with non-integral feature of the subject  $\theta \leq \omega_0$

$$\begin{aligned} & \frac{\beta^2}{2} \int_0^{\omega_0} W_n \left( \frac{tg \frac{\theta}{2}}{\beta}, \frac{tg \frac{\tau}{2}}{\beta} \right) \left( \frac{tg \frac{\tau}{2}}{\beta} \right)^{n+1} P_k^{n, -\frac{3}{2}} \left( 1 - 2 \frac{tg^2 \frac{\tau}{2}}{\beta^2} \right) \left( \beta^2 - tg^2 \frac{\tau}{2} \right)^{-\frac{3}{2}} \cos^{-2} \frac{\tau}{2} d\tau = \\ & = \Gamma \left( k - \frac{1}{2} \right) \Gamma \left( n + k + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{tg \frac{\theta}{2}}{\beta} \right)^n P_{k-1}^{n, 1/2} \left( 1 - 2 \frac{tg^2 \frac{\tau}{2}}{\beta^2} \right) \beta^2 \frac{1}{k! 2^k \Gamma(k+1)}, \end{aligned} \tag{15}$$

where  $tg \frac{\omega_0}{2}$ ,  $P_k^{n, -\frac{3}{2}} \left( 1 - 2 \frac{tg^2 \frac{\tau}{2}}{\beta^2} \right)$  – is the Jacobi polynomial. Put in this formula  $P_{-1}^{n, \frac{1}{2}}(1 - 2x^2) \equiv 0$  for  $0 \leq x \leq 1$  and resolve the function  $\chi_n(\tau)$  in a series of Jacobi polynomials

$$\sin \frac{\tau}{2} \chi_n(\tau) = \sum_{p=0}^\infty \chi_n^{(p)} \left( \frac{tg \frac{\tau}{2}}{\beta} \right)^{n+1} P_k^{n, -\frac{3}{2}} \left( 1 - 2 \frac{tg^2 \frac{\tau}{2}}{\beta^2} \right) \frac{1}{2} \beta^2 \left( \beta^2 - tg^2 \frac{\tau}{2} \right)^{-\frac{3}{2}} \cos^{-2} \frac{\tau}{2}. \tag{16}$$

Applying the left spectral ratio (15), and then the ratio of orthogonality for polynomials in spherical coordinates to the equation (14), we get

$$\frac{\Gamma \left( J' + \frac{1}{2} \right) \Gamma \left( J' + \frac{3}{2} \right) \chi_n^{(J'+1)} \beta^3}{J'!(J'+1)!(2J'+\frac{3}{2})} - \frac{1}{2} \sum_{k=n}^\infty \sum_{j=0}^\infty \Lambda_k(R\beta_0) \chi_n^{(j+1)} J_{j',k}^{(n)} J_{j,k}^{(n)} = \tag{17}$$

$$= \frac{\mu}{R^2 \beta^5} \int_0^{\omega_0} tg \frac{\theta}{2} \sqrt{\left( \beta^2 - tg^2 \frac{\theta}{2} \right)} P_{j'+1}^{n, \frac{1}{2}} \left( 1 - 2 \frac{tg^2 \frac{\theta}{2}}{\beta^2} \right) F_n(\theta) \frac{d\theta}{\cos^2 \frac{\theta}{2}},$$

where  $n = 0$ ,  $J_{j',k}^{(n)} = \frac{1}{\beta^{n+5}} \int_0^{\omega_0} \left( tg \frac{\theta}{2} \right)^{n+1} \sqrt{\left( \beta^2 - tg^2 \frac{\theta}{2} \right)} P_{j'+1}^{n, 1/2} \left( 1 - 2 \frac{tg^2 \frac{\theta}{2}}{\beta^2} \right) P_k^n(\cos\theta) \frac{d\theta}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}$

and  $J_{j,k}^{(n)} = \frac{1}{\beta^{n-1}} \int_0^{\omega_0} \left( tg \frac{\tau}{2} \right)^{n+1} P_{j+1}^{n, -\frac{3}{2}} \left( 1 - 2 \frac{tg^2 \frac{\tau}{2}}{\beta^2} \right) P_k^n(\cos\tau) \left( \beta^2 - tg^2 \frac{\tau}{2} \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{d\tau}{\cos^2 \frac{\tau}{2}}$

The equation (17) will be solved using a reduction. Using [10] this equation can lead to more convenient for numerical calculations mind

$$\chi_0^{(j'+1)} - \sum_{j=0}^\infty \chi_0^{(j+1)} C_{jj'}^k = \frac{\mu}{R^2} f^{o, j'+1}, \tag{18}$$

where  $C_{jj'}^k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^\infty \Lambda_k(R\beta_0) J_{j',k}^{(o)'} J_{j,k}^{(o)'}$ ,  $J_{j',k}^{(o)'} = \frac{J_{j',k}^{(o)'}}{\sqrt{N_{j'+1} \sigma_{j'+1}}}$ ,  $J_{j,k}^{(o)'} = \frac{J_{j,k}^{(o)'}}{\sqrt{N_{j+1} \sigma_{j+1}}}$ ,  $(N_{j'+1} \sigma_{j'+1})^{-\frac{1}{2}} =$

$$= \frac{2^{j'} j'!}{(2j'-1)!} \sqrt{\frac{(3+4j')!(j'+1)}{\pi(2j'+1)\beta^3}}. \text{ Changing here formally } J \text{ to } J', \text{ it is possible to get } \sqrt{N_{j+1} \sigma_{j+1}}$$

$$\sum_{l=0}^\infty (2l+1) e^{\frac{lm}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(R\beta_0) \int_0^{\omega_0} tg \frac{\theta}{2} \sqrt{\left( \beta^2 - tg^2 \frac{\theta}{2} \right)} P_{j'+1}^{o, 1/2} \left( 1 - 2 \frac{tg^2 \frac{\theta}{2}}{\beta^2} \right) P_l(\cos\theta) [2\cos\theta - i\beta_0 R \sin^2\theta] \frac{d\theta}{\cos^2 \frac{\theta}{2}},$$

$f^{o, j'+1} = -\frac{R}{\beta^5} \sqrt{\frac{\pi}{2\beta_0 R N_{j'+1} \sigma_{j'+1}}}$ . Using the above, determine the value of the reaction moment that acts on the defect produced by torsion wave

$$M = 2 \pi R^3 \int_0^{\omega_0} \sin^2 \theta \langle \tau_n^\varphi(R, \tau) \rangle d\theta. \tag{19}$$

From the equation (18) to find  $\chi_0^{(j')}$  – the coefficients of functions  $\chi_0(\tau)$  in series of Jacobi polynomials, using the formula (16). However, this feature is associated with a power surge  $\langle \tau_n^* \rangle$ , and thus the required torsion necessary to express through it. This can be done so

$$M = 2 \pi R^3 \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\omega_0} \sin 2\theta \langle \tau_n^*(R, \theta) \rangle d\theta - \cos \omega_0 \int_0^{\omega_0} \sin \theta \langle \tau_n^*(R, \theta) \rangle d\theta \right\}. \tag{20}$$

Substituting in (20) instead of  $\langle \tau_n^*(R, \theta) \rangle$  is its decomposition by the formula (16) and then integrating over the variable  $\theta$  from zero to  $\omega_0$ , we obtain the numerical value of torsion. Thus, the final expression for torsion can be built in the form of

$$M=2 \pi R^3 \beta \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \chi_o^{(m)} \int_0^{\omega_o} \frac{P_m^{0,-\frac{3}{2}} \left( 1 - 2 \frac{tg^2 \frac{\theta}{2}}{\beta^2} \right) tg \frac{\theta}{2} \cos \theta d\theta}{\cos^{\frac{\theta}{2}} \left( \sqrt{\beta^2 - tg^2 \frac{\theta}{2}} \right)^3} - \sum_{m=0}^{\infty} \chi_o^{(m)} \int_0^{\omega_o} \frac{P_m^{0,-\frac{3}{2}} \left( 1 - 2 \frac{tg^2 \frac{\theta}{2}}{\beta^2} \right) tg \frac{\theta}{2} d\theta}{\cos^{\frac{\theta}{2}} \left( \sqrt{\beta^2 - tg^2 \frac{\theta}{2}} \right)} \right\} \quad (21)$$

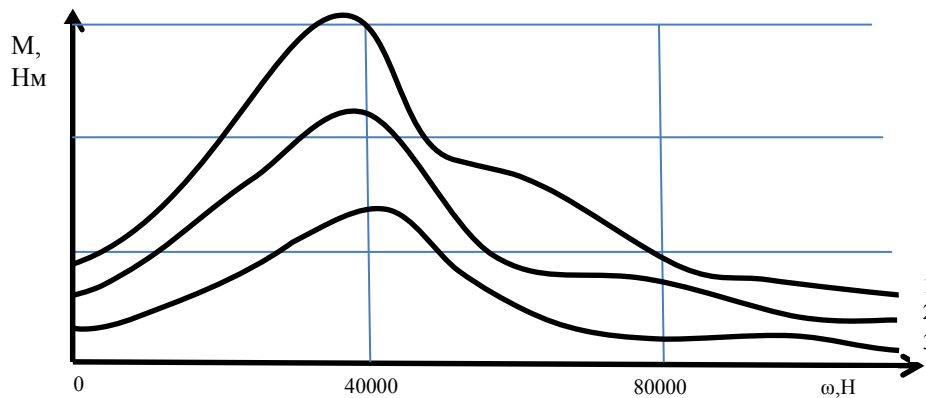


Fig.1. The family of arcs in dependence of the reactive torsion  $M$  of the frequency  $f$ .

When calculating the reactive torsion, the input parameters took the following values: inclusion made of steel, its thickness  $h=5 \cdot 10^{-4}$ , and a radius  $R=0.02$  m, the material of the surrounding elastic medium is calcite with a speed of displacement  $C=1113$  m/s, a density of  $\rho_o=7900$  kg/m<sup>3</sup>, Lamé parameter  $\mu=3.58 \cdot 10^9$  MPa and amplitude of incident wave  $A=0.01$  rad.

Figure 1 the family constructed of curves in dependence of the reactive torsion  $M$  of the frequency  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  for different sizes of a spherical defect  $\omega \approx 23^\circ$  – arc 1;  $\omega \approx 25^\circ$  – arc 2;  $\omega \approx 27^\circ$  – arc 3.

**Conclusions.** Thus, an efficient approximate solution of the problem of diffraction of torsion waves on a completely fixed rigid inclusion and the formula for rocket rotation of time (21) was built. Numerically the equation (18) was solved and the resulting coefficients, which are assembled in a special matrix are got. The software that allowed for gradually extracting the coefficients was created. Use them when solving the equation (21). The results of the calculations displayed in figure 1.

### Literature

1. Amenzade Y. A. Theory of elasticity. Moscow: Vishaya Shkola, 1976. 72 p.
2. Ilyushin A. A. Continuum Mechanics / A. A. Ilyushin. – Ed. 2nd, revised. and add., Moscow: MGU, 1978. 287s.
3. Lyav A. E. H. The Mathematical theory of elasticity / A. E. H. Lyav. – L.: ONTI, 1935. 674 p.
4. Slepyan L. I. Non-stationary elastic waves / L. I. Slepyan. Leningrad: Shipbuilding, 1972. 374p.
5. Popov G. Y. Concentration of elastic stresses near stamps, cuts, thin inclusions and reinforcements. Moscow: Nauka, 1982. 344 p.
6. Grilitskiy D. V. Scattering of transient waves of torsion on fixed rigid sphere in an elastic medium / D. V. Grilitskiy, A. I. Poddubnyak. Izv. AN SSSR, MTT. 1980. No. 5. Pp. 86-92.
7. Guz A. N. Perturbation methods in spatial problems of elasticity theory / A. N. Guz, Y. N. Names. Kyiv: Vyscha Shkola, 1982. 352 p.
8. Guz A. N. Diffraction of elastic waves / A. N. GUZ, A. V. Kubenko, M. A. Cherevko. Kyiv: Naukova Dumka, 1978. 308 p.
9. Popov G. Y. Research method of burst analysis of acoustic wave diffraction on a perfectly rigid obstacle / G. Y. Popov, O. A. Nazarenko // Acoustics and ultrasonic technique. Kiev, 1992, Vol. 27. P. 27-31.
10. Popov G. Y. The Method of analysis of diffraction of acoustic waves at a rigid barrier in close proximity to the hard flat bottom / G. Y. Popov, O. A. Nazarenko // Acoustics and ultrasonic technique. Kiev, 1993, vol. 28. – Pp. 29-35.
11. Popov G. Y. One new approach to the problems of concentration of elastic stresses near cracks / G. Y. Popov // as USSR. PMM. – 1991. – T. 55. – Vol.1. – S. 27.
12. G. Y. Popov. Problems of stress concentration in the neighbourhood of a spherical defect // Advances in Mechanics (advances in Mechanics). 1992. – V. 15. – №1-2. – P. 71-110.
13. A. P. Prudnikov. Integrals and series. Special functions / A. P. Prudnikov, Y. A. Brychkov, O. I. Marinov. – M.: Nauka, 1986. – 800 p.



УДК 519.3

ХОМЧЕНКО А. Н.

Чорноморський національний університет імені Петра Могили, м. Миколаїв

ЛИТВИНЕНКО О.І., АСТИОНЕНКО І.О.

Херсонський національний технічний університет

**ЙМОВІРНІСНІ МОДЕЛІ У НЕЙМОВІРНІСНИХ ЗАДАЧАХ**

*У теорії ймовірностей широко використовуються різноманітні математичні методи. Прикладів проникнення теорії ймовірностей в інші розділи математики небагато, вона неначе відокремлена від іншої математики напівнепроникною плівкою. Яскравим прикладом лишається метод Монте-Карло, який суттєво збагатив сучасну обчислювальну математику і проілюстрував тісний зв'язок між статистичною та геометричною ймовірностями. З 1982 року триває досить успішне використання конструктивних можливостей геометричної ймовірності в задачах лагранжевої та ермітової інтерполяції функцій, зокрема, фінітних функцій метода скінченних елементів.*

*Пошуки прикладів проникнення теорії ймовірностей у класичні розділи вищої та прикладної математики є досить цікавою задачею. Результати таких пошуків наведені в даній роботі. Стаття ілюструє нетрадиційний підхід до розв'язання класичних задач аналітичної геометрії. Природним узагальненням і розширенням поняття класичної ймовірності на нескінченну множини точок є геометрична ймовірність, що обчислюється як відношення мір (довжин, площ, об'ємів) в одно-, дво- і тривимірних випадках. Ймовірність влучити в будь-яку частину області пропорційна мірі цієї частини (довжині, площі, об'єму) і не залежить від її розташування і форми.*

*Наведено приклади використання геометричної ймовірності у якості засобу побудови рівнянь прямої на площині і у просторі, а також рівнянь площини. На основі ймовірнісної інтерпретації сконструйовано наступні моделі: рівняння прямої, що проходить через дві точки на площині і у просторі, рівняння прямої у відрізках, нормальне рівняння прямої, рівняння площини у відрізках, нормальне рівняння площини. Варто зауважити, що ймовірнісна інтерпретація здатна створити особливі умови для виникнення інших розділів математики. Дидактичними перевагами методу ймовірнісних інтерпретацій є наочність, зрозумілість, стислість та зручність.*

*Ключові слова: аналітична геометрія, рівняння прямих і площин, геометрична ймовірність, ймовірнісний зміст лінійних рівнянь в декартових координатах.*

ХОМЧЕНКО А. Н.

Чорноморський національний університет імені Петра Могили, г. Николаев

Е.И. ЛИТВИНЕНКО, И.А. АСТИОНЕНКО

Херсонский национальный технический университет

**ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ В НЕВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАДАЧАХ**

*В теории вероятностей широко используются разнообразные математические методы. Примеров проникновения теории вероятностей в другие разделы математики немного, она как будто отделена от другой математики полупроницаемой пленкой. Ярким примером остается метод Монте-Карло, который значительно обогатил современную вычислительную математику и проиллюстрировал тесную связь между статистической и геометрической вероятностями. С 1982 года продолжается достаточно успешное использование конструктивных возможностей геометрической вероятности в задачах лагранжевой и эрмитовой интерполяции функций, в частности, финитных функций метода конечных элементов.*

*Поиск примеров проникновения теории вероятностей в классические разделы высшей и прикладной математики является достаточно интересной задачей. Результаты таких поисков приведены в данной работе. Статья иллюстрирует нетрадиционный подход к решению классических задач аналитической геометрии. Естественным обобщением и расширением понятия классической вероятности на бесконечное множество точек является геометрическая вероятность, которая вычисляется как отношение мер (длин, площадей, объемов) в одно-, дву- и трехмерных случаях. Вероятность попасть в какую-либо часть области пропорциональна мере этой части (длине, площади, объему) и не зависит от её расположения и формы.*

*Приведены примеры использования геометрической вероятности в качестве способа построения уравнений прямой на плоскости и в пространстве, а также уравнений плоскостей. На основании вероятностной интерпретации сконструированы следующие модели: уравнение прямой, которая проходит через две точки на плоскости и в пространстве, уравнение прямой в отрезках, нормальное уравнение прямой, уравнение плоскости в отрезках, нормальное уравнение плоскости.*

Следует отметить, что вероятностная интерпретация способна создать особые условия для возникновения других разделов математики. Дидактическими преимуществами метода вероятностных интерпретаций является наглядность, понятность, краткость и удобство.

Ключевые слова: аналитическая геометрия, уравнения прямых и плоскостей, геометрическая вероятность, вероятностный смысл линейных уравнений в декартовых координатах.

A. N. KHOMCHENKO  
Petro Mohyla Black Sea National University  
O.I. LITVINENKO, I.O. ASTIONENKO  
Kherson National Technical University

## PROBABILISTIC MODELS AND NONPROBABILISTIC PROBLEMS

*Probability theory is widely used in various mathematical methods. There are few examples of penetration of probability theory into other sections of mathematics. It seems to be separated from the other mathematics by semi-impermeable film. The striking example is Monte-Carlo method which has significantly enriched the computational mathematics and illustrated the close relationship between statistical and geometric probabilities. Since 1982 the constructive possibilities of geometric probability in the problems of Lagrangian and Hermitian interpolation of functions, in particular, of finite functions of the finite element method, continue to be successfully used.*

*The search for examples of the penetration of probability theory into the classical sections of higher and applied mathematics is quite an interesting task. The results of such searches are given in this work. The article illustrates a non-traditional approach to solving the classical problems of analytical geometry. A natural generalization and extension of the concept of classical probability to an infinite set of points is a geometric probability, which is calculated as the ratio of measures (lengths, areas, volumes) in one-, two- and three-dimensional cases. The probability of hitting any part of the area is proportional to the extent of this part (length, area, volume) and does not depend on its location and shape.*

*Examples of the use of geometric probability as a means of constructing the equations of the straight line on the plane and in space, as well as the equations of the plane are given. On the basis of probabilistic interpretation, the following models have been constructed: the equation of the straight line passing through two points on the plane and in space, intercept form of the equation of a straight line, the normal equation of the line, the equation of the plane in the segments, the normal equation of the plane. It is worth noting that probabilistic interpretation can create special conditions for the emergence of other sections of mathematics. The didactic advantages of the probabilistic interpretation method are visibility, clarity, brevity, and convenience.*

*Keywords: analytical geometry, equations of straight lines and planes, geometrical probability, probabilistic content of linear equations in Cartesian coordinates.*

### Постановка проблеми

Кращим вступом до цієї статті буде цитата із статті [1] видатного спеціаліста з теорії ймовірностей академіка А. В. Скорохода: «Спеціалісти з теорії ймовірностей (або «ймовірністики») широко використовують у своїй роботі різноманітні математичні методи. Проте спеціалісти з інших математичних наук за незначними винятками не знайомі з азами теорії ймовірностей. Теорія ймовірностей неначе відокремлена від іншої математики напівнепроникною плівкою – результати інших дисциплін легко проникають через цю плівку, а зворотного руху поки що не видно. Беручи до уваги, що живе існування науки – в людській свідомості, легко прийти до висновку, що ця плівка знаходиться також у свідомості, причому у свідомості «неймовірністиків».

Стаття А. В. Скорохода вже більше 20-ти років надихає зацікавлених читачів на пошуки прикладів проникнення теорії ймовірностей у класичні розділи вищої та прикладної математики. Деякі приклади наведені нижче. Сподіваємося, що ці приклади дадуть нові теми для роздумів та спостережень.

### Аналіз попередніх досліджень і публікацій

Щодо відсутності «зворотного руху» треба погодитися з А. В. Скороходом. Ситуація майже не змінилася. Прикладів проникнення теорії ймовірностей в інші розділи математики небагато. Яскравим прикладом лишається метод Монте-Карло [2-4], який суттєво збагатив сучасну обчислювальну математику і проілюстрував тісний зв'язок між статистичною (Мізес) та геометричною (Бюффон) ймовірностями. З 1982 р. [5-10] триває досить успішне використання конструктивних можливостей геометричної ймовірності [11] в задачах лагранжевої та ермітової інтерполяції функцій, зокрема, фінітних функцій метода скінченних елементів. Ця тема є дуже цікавою з багатьох точок зору. Це невичерпне джерело першокласного «освітнього матеріалу». Вона представляє собою унікальну комбінацію простоти і не тривіальності, яка задовольняє як смаки досвідчених професіоналів, так і ще недосвідчених аматорів.



**Мета дослідження**

Мета статті – показати приклади проникнення теорії ймовірностей в класичні задачі аналітичної геометрії. Варто зауважити, що ці приклади пройшли тест на «зрозумілість + стислість + зручність» серед студентів вищої школи.

**Викладення основного матеріалу дослідження**

Більшість математичних доведень починається зі слова «нехай». Ми не завжди помічаємо, що з появою слова «нехай» включається фактор випадковості і відкриваються нові можливості для конструювання ймовірнісних моделей. Нижче шляхом використання геометричної ймовірності отримано рівняння прямих ліній на площині і площин у тривимірному просторі.

**1. Рівняння прямої, що проходить через дві точки  $M_1(x_1, y_1)$  і  $M_2(x_2, y_2)$**

Не порушуючи загальності розташуємо задані точки у першій чверті (рис. 1). Нехай точка  $M(x, y)$  належить відрізку  $M_1M_2$ .

Щоб отримати рівняння шуканої прямої, достатньо вкинути випадкову точку у відрізок  $M_1M_2$  і знайти ймовірність попадання точки у відрізок  $M_1M$ . Позначимо через  $A$  випадкову подію:  $A = \{\text{випадкова точка потрапила в } M_1M\}$ . Ймовірність події  $A$ :  $p(A) = \frac{\text{довжина } M_1M}{\text{довжина } M_1M_2}$ . Цю ймовірність краще визначати через проекції на осі  $0x$  та  $0y$ :  $p(A) = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ , з іншого боку  $p(A) = \frac{y_1-y}{y_1-y_2}$ .

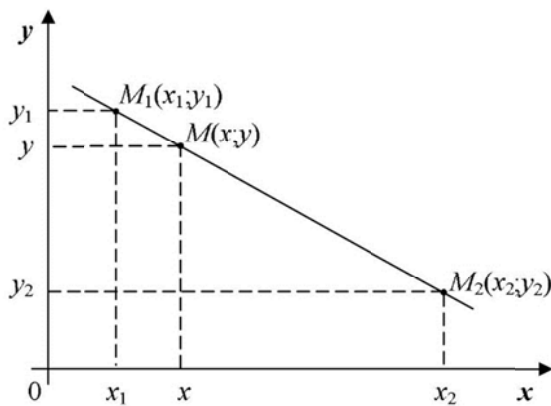


Рис. 1. Пряма, що проходить через  $M_1$  і  $M_2$

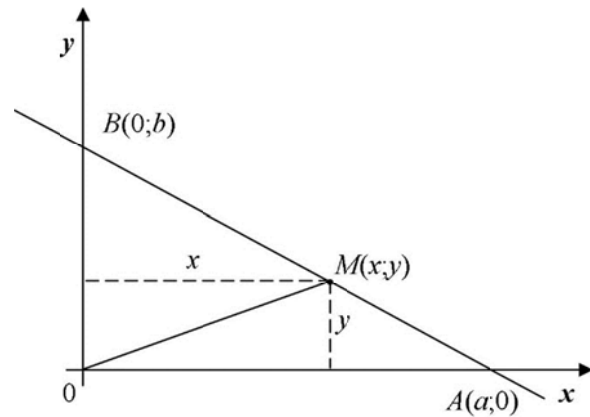


Рис. 2. Пряма у відрізках  $a$  і  $b$

Лишається порівняти ймовірності:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{1}$$

Неважко переконатися, що це пряма лінія і вона проходить через точки  $M_1(x_1, y_1)$  і  $M_2(x_2, y_2)$ .

*Зауваження.* Якщо дві точки  $M_1$  і  $M_2$  задано у просторі, ймовірнісна інтерпретація задачі зберігається, а рівняння прямої набуває вигляду:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{2}$$

**2. Рівняння прямої у відрізках**

Це рівняння, як відомо [12], має вигляд

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{3}$$

і є дуже зручним для геометричної побудови прямої, що перетинає осі координат (рис. 2) у точках  $(a; 0)$  та  $(0; b)$ . Покажемо, як отримати рівняння (3), скориставшись геометричною ймовірністю. Нагадаємо, що сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці. Саме такий зміст має рівняння (3). Нехай точка  $M(x, y)$  лежить на прямій. Радіус-вектор  $\vec{OM}$  поділяє трикутник  $OAB$  на два трикутники  $OMA$  і  $OMB$ . Будемо вкидати випадкову точку у  $\Delta OAB$ . Розглянемо випадкові події:

$A = \{\text{випадкова точка потрапила у } \Delta OMA\}$ ,

$B = \{\text{випадкова точка потрапила у } \Delta OMB\}$ .

Відповідні ймовірності визначаємо геометрично:

$$p(A) = \frac{\text{площа } \Delta OMA}{\text{площа } \Delta OAB}, \quad p(B) = \frac{\text{площа } \Delta OMB}{\text{площа } \Delta OAB},$$

Зрозуміло, що  $p(A) + p(B) = 1$ .

Після підстановки  $\frac{0,5ay}{0,5ab} + \frac{0,5bx}{0,5ab} = 1$  отримаємо рівняння (3).

Варто зауважити, що відносну площу випадкового трикутника визначати не обов'язково, достатньо мати відносну висоту трикутника.

**3. Нормальне рівняння прямої на площині.**

На рис. 3 проведено нормаль (перпендикуляр) до прямої. Через  $p \geq 0$  позначено довжину відрізка  $ON$ , через  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$  позначено кут між  $ON$  і  $Ox$ . Якщо числа  $p$  і  $\alpha$  відомі, можна скласти нормальне рівняння прямої. Ймовірність попадання випадкової точки у  $\Delta OMB$  тепер виглядає так  $p(B) = \frac{x \cdot \cos \alpha}{p}$ , ймовірність попадання випадкової точки у  $\Delta OMA$ :  $p(A) = \frac{y \cdot \sin \alpha}{p}$ . Таким чином,  $\frac{x \cdot \cos \alpha}{p} + \frac{y \cdot \sin \alpha}{p} = 1$ . Зазвичай, нормальне рівняння прямої записують у вигляді:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0. \tag{4}$$

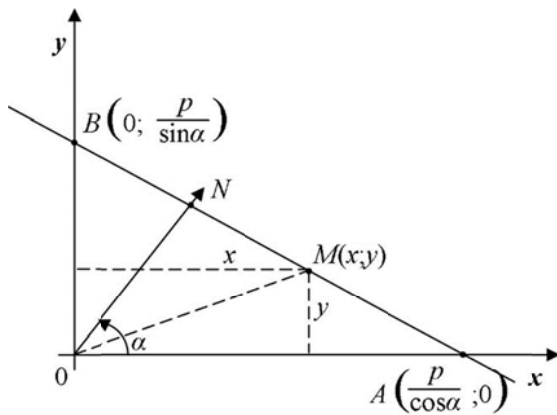


Рис. 3. «Нормальна» пряма

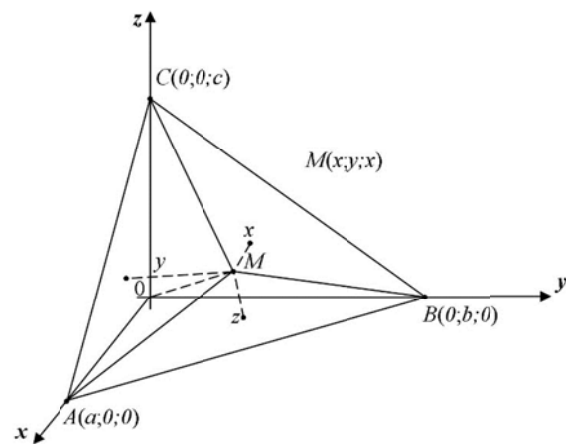


Рис. 4. Площина у відрізках

**4. Рівняння площини у відрізках**

На рис. 4 показано площину, яка відрізає від  $Ox$  відрізок  $a$ , від  $Oy$  –  $b$ , від  $Oz$  –  $c$ . Вибір поточної точки  $M(x, y, z)$  на поверхні спричиняє появу трьох випадкових тетраедрів, які складають основний тетраедр  $OABC$  і мають спільну вершину  $M$ . Зрозуміло, що рівняння площини у відрізках, як і рівняння прямої у відрізках, має чіткий ймовірнісний зміст. Ймовірність попадання випадкової точки у конкретний тетраедр можна визначати як відносний об'єм випадкового тетраедра. Але краще скористатися відносною висотою тетраедра. Позначимо через  $A, B, C$  наступні випадкові події:

- $A = \{ \text{випадкова точка потрапила у тетраедр } MOBC \},$
- $B = \{ \text{випадкова точка потрапила у тетраедр } MOAC \},$
- $C = \{ \text{випадкова точка потрапила у тетраедр } MOAB \}.$

Ми маємо повну групу випадкових подій з відповідними ймовірностями:

$$p(A) = \frac{x}{a}, \quad p(B) = \frac{y}{b}, \quad p(C) = \frac{z}{c}.$$

Сума цих ймовірностей, як відомо, дорівнює 1.

Таким чином, рівняння площини у відрізках має вигляд:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{5}$$

**5. Нормальне рівняння площини**

Розглянемо фрагмент площини (рис. 4). Зазначимо, що площину можна визначити однозначно, якщо відома довжина нормалі  $p$ , а також  $\alpha, \beta, \gamma$ , що утворює нормаль відповідно з  $Ox, Oy, Oz$ . Що стосується кутів, достатньо знати лише два із них. Третій визначають із тотожності:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Тепер ймовірності попадання у випадкові тетраедри мають вигляд:

$$p(A) = \frac{x \cos \alpha}{p}; \quad p(B) = \frac{y \cos \beta}{p}; \quad p(C) = \frac{z \cos \gamma}{p}.$$

Сума ймовірностей дорівнює 1. Таким чином, ми отримали нормальне рівняння площини, як 3D-аналог нормального рівняння прямої (4):

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0. \tag{6}$$

### Висновки

Приклади, що наведені у статті, прості для розуміння і можуть бути використані не тільки в роботі математичних гуртків. Запропоновані підходи мають переконати зацікавленого читача в тому, що аналітична геометрія не є ізольованим розділом для експериментування, а швидше типовим прикладом цікавого ймовірного феномену. Пошуки нових прикладів тривають.

### Список використаної літератури

1. Скороход А. В. Особливий характер теорії ймовірностей в математичних науках. *У світі математики*. Том 3, Вип. 2. К. : ТВ і МС, 1997. С. 2–4.
2. Соболев І. М. Метод Монте-Карло. М. : Наука, 1985. 80 с.
3. Хомченко А. Н. Вероятностные схемы в дискретном анализе температурных полей. *Инженерно-физический журнал*, 1988. Т. 55, № 2. С. 323–324.
4. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. М.: Мир. 240 с.
5. Хомченко А. Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ. Ивано-Франковск: Ив.-Франк. ин-т нефти и газа, 1982. 6 с. Деп. в ВИНТИ, № 1213.
6. Хомченко А. Н. Метод конечных элементов: стохастический подход. Ивано-Франковск: Ив.-Франк. ин-т нефти и газа, 1982. 7 с. Деп. в ВИНТИ, № 5167.
7. Хомченко А. Н., Козуб Н. А. Интерполяция по Кунсу и геометрическая вероятность. *Проблеми інформаційних технологій*. Вип. 5. Херсон: ХНТУ, 2009. С. 145–148.
8. Астионенко І.О., Гучек П.Й., Литвиненко О.І., Тулущенко Г.Я. Використання барицентричних координат при моделюванні серендипової поверхні. *Сучасні проблеми моделювання. Зб. наукових праць*. МДПУ ім. Б.Хмельницького. Вип. 4. Мелітополь: МДПУ, 2015. С. 3-8.
9. Астионенко І.А., Литвиненко Е.І., Хомченко А.Н. Вероятностная природа кусочно-планарной аппроксимации. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика*. №5 (176) . Выпуск 34. Белгород: БелГУ, 2014. С. 142-149.
10. Хомченко А.Н., Литвиненко Е.І., Астионенко І.А. Геометрия серендиповых полиномов: обратные задачи. *Прикладна геометрія та інженерна графіка. Міжвідомчий науково-техн. збірник*. – Вип. 82. Київ: КНУБА, 2009. С. 58-63.
11. Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности. М. : Наука, 1972. 192 с.
12. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика . К. : А.С.К., 2011. 648 с.

### References

1. Skorokhod A. V. Osoblyvyi kharakter teorii ymovirnostei v matematychnykh naukakh. *U sviti matematyky*. Tom 3, Vyp. 2. K. : TV i MS, 1997. S. 2–4.
2. Sobol I. M. Metod Monte-Karlo. M. : Nauka, 1985. 80 s.
3. Homchenko A. N. Veroyatnostnyie shemyi v diskretnom analize temperaturnyih poley. *Inzhenerno-fizicheskyy zhurnal*, 1988. T. 55, # 2. S. 323–324.
4. Sekey G. Paradoxyi v teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistike. M.: Mir. 240 s.
5. Homchenko A. N. Nekotoryie veroyatnostnyie aspektyi MKE. Ivano-Frankovsk: Iv.-Frank. in-t nefti i gaza, 1982. 6 s. Dep. v VINITI, # 1213.
6. Homchenko A. N. Metod konechnyih elementov: stohasticheskyy podhod. Ivano-Frankovsk: Iv.-Frank. in-t nefti i gaza, 1982. 7 s. Dep. v VINITI, # 5167.
7. Homchenko A. N., Kozub N. A. Interpolyatsiya po Kunsu i geometricheskaya veroyatnost. *Problemi Informatsylnih tehnologiy*. Vip. 5. Herson: HNTU, 2009. S. 145–148.
8. Astionenko I.O., Huchek P.I., Lytvynenko O.I., Tuluchenko H.Ia. Vykorystannia barysentrychnykh koordynat pry modeliuvanni serendypovoi poverkhni. *Suchasni problemy modeliuvannia. Zb. naukovykh prats*. MDPU im. B.Khmelnytskoho. Vyp. 4. Melitopol: MDPU, 2015. S. 3-8.
9. Astionenko I.A., Litvinenko E.I., Homchenko A.N. Veroyatnostnaya priroda kusochno-planarnoy approksimatsii. *Nauchnyie vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Fizika*. #5 (176) . Vyipusk 34. Belgorod: BelGU, 2014. S. 142-149.
10. Homchenko A.N., Litvinenko E.I., Astionenko I.A. Geometriya serendipovyih polinomov: obratnyie zadachi. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. Mizhvidomchyi nauково-tekhn. zbirnyk*. – Vyp. 82. Kyiv: KNUBA, 2009. S. 58-63.
11. Kendall M., Moran P. Geometricheskie veroyatnosti. M. : Nauka, 1972. 192 s.
12. Dubovyk V. P., Yuryk I. I. Vyshcha matematyka . K. : A.S.K., 2011. 648 s.

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ І ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ І ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

УДК 517.944

С.Г. БЛАЖЕВСЬКИЙ

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

### МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОГО ТЕРМОПРУЖНОГО ПОЛЯ У ДВОВИМІРНОМУ СИМЕТРИЧНОМУ ПРОСТОРИ

*Динамічне термопружне поле в двошаровому симетричному просторі, породжене нестационарним температурним полем, описують відмінні від тотожного нуля центральні компоненти тензора напружень, що залежать від вектора переміщень.*

*Радіальні компоненти вектора переміщень є обмеженим розв'язком сепаратної системи диференціальних рівнянь руху в переміщеннях за початковими умовами та умовами ідеального механічного контакту.*

*Розв'язок задачі побудовано методом інтегрального перетворення типу Фур'є-Бесселя. Проведено аналіз найуживанішого на практиці випадку для двошарового осесиметричного тіла.*

*Ключові слова: інтегральне перетворення, диференціальне рівняння руху, крайова задача.*

С.Г. БЛАЖЕВСКИЙ

Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ТЕРМОУПРУГОГО ПОЛЯ В ДВУХСЛОЙНОМ СИММЕТРИЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

*Динамическое поле напряжений в двухслойном симметричном пространстве, порожденное нестационарным температурным полем, описывают отличные от тождественного нуля центральные компоненты тензора напряжений, зависящие от вектора перемещений.*

*Радиальные компоненты вектора перемещений представляют собой ограниченное решение сепаратной системы дифференциальных уравнений движения в перемещениях с начальными условиями и условиями идеального механического контакта.*

*Решение задачи построено методом интегрального преобразования Фурье-Бесселя. Проведен анализ наиболее употребляемого на практике случая для двухслойного осесимметричного тела.*

*Ключевые слова: интегральное преобразование, дифференциальное уравнение движения, крайовая задача.*

S.G. BLAZHEVSKIY

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

### MODELING OF THE DYNAMIC THERMO-ELASTIC FIELD IN TWO-LAYER SYMMETRIC SPACE

*The widespread use of composite materials at the present stage of scientific and technological progress raises the urgent need for solving a rather wide class of problems of mathematical physics of non-uniform structures. First of all, problems of determining the temperature fields and the temperature stresses caused by them are assigned to such problems. In this case it is desirable to obtain exact analytical solutions of thermo-elastic problems that are convenient for engineering calculations. This requires, on the one hand, the improvement and modification of the existing mathematical apparatus, and, on the other hand, the creation of new methods. One of them is the method of integral transforms.*

*The dynamic thermo-elastic field in a two-layer symmetric space, generated by a non-stationary temperature field, describes the central components of the stress tensor, which depend on the displacement vector, which differ from the identical zero.*

*The radial components of the displacement vector are a limited solution of a separate system of differential equations of motion in displacements with initial conditions and conditions of ideal mechanical contact.*

The solution of the problem is constructed by the method of the integral Fourier-Bessel transform. The analysis of the case most commonly used in practice for a two-layer axisymmetric body has been carried out.

A straight integral Fourier-Bessel transform on the polar axis with one point of conjugation is written in the form of a matrix row. The output system and the initial conditions are written in a matrix form and we apply the operator matrix row to the given problem by the rule of multiplication of matrices. As a result we obtain the Cauchy problem for the ordinary differential equation. We construct the solution of this problem using the Cauchy function method. The inverse Fourier-Bessel transform is written in the form of an operator matrix column and we apply it to the constructed solution of the Cauchy problem. As a result, we obtain unique bounded solution of the original problem which completely describes the structure of the dynamic field of displacement in a two-layer symmetric space.

Keywords: integral transform, differential equation of motion, boundary value problem.

### Постановка проблеми

Широке застосування композитних матеріалів на сучасному етапі науково-технічного прогресу викликає гостру потребу в розв'язанні достатньо широкого класу задач математичної фізики неоднорідних структур. До таких задач в першу чергу відносяться задачі визначення температурних полів і викликаних ними температурних напружень. Але серйозні дослідження почалися з найпростішої моделі – диференціального рівняння теплопровідності параболічного типу [1] з відповідними початковими та крайовими умовами. Потреби практики призводили до різного узагальнення даного рівняння. Слід відмітити появу в другій половині ХХ-го століття «Узагальненої термомеханіки», породженої гіперболічним рівнянням теплопровідності [2]. Розроблялися різні аналітичні, числові та аналітично-числові методи знаходження розв'язку.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Особливої уваги заслуговує розроблений в другій половині ХХ-го століття метод кусково-сталих фізико-технічних характеристик для вивчення технічного стану композитних матеріалів. Це призвело навіть у випадку жорсткої межі області до диференціального рівняння з сингулярними коефіцієнтами типу дельта-функцій та її похідних [3]. Інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку задачі в цьому випадку одержати неможливо. Цих труднощів можна уникнути, якщо для побудови розв'язку використовувати метод інтегральних перетворень типу Фур'є, Бесселя, Вебера.

### Мета дослідження

Дана робота присвячена моделюванню динамічного поля напружень в двошаровому симетричному просторі.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Динамічне поле напружень в двошаровому симетричному просторі, що породжене нестационарним температурним полем  $T(t, r) = \{T_1(t, r), T_2(t, r)\}$ , побудованим в роботі [4], опишуть відмінні від тотожного нуля центральні компоненти тензора напружень [2]

$$\begin{aligned}\sigma_{11,j}(t, r) &= G_{0j} \left( \frac{\partial u_j(t, r)}{\partial r} + \frac{(2\alpha_j + 1)\mu_j}{1 - \mu_j} \frac{u_j}{r} - m_{0j} T_j(t, r) \right) = \sigma_{rr,j}(t, r), \\ \sigma_{22,j}(t, r) &= G_{0j} \left[ \frac{\mu_j}{1 - \mu_j} \frac{\partial u_j}{\partial r} + \left( 1 + \frac{(2\alpha_j \mu_j)}{1 - \mu_j} \right) \frac{u_j(t, r)}{r} - m_{0j} T_j(t, r) \right]; j = 1, 2, \\ \sigma_{33,j}(t, r) &= G_{0j} \left[ \frac{\mu_j}{1 - \mu_j} \frac{\partial u_j}{\partial r} + \left( 2\alpha_j + \frac{\mu_j}{1 - \mu_j} \right) \frac{u_j(t, r)}{r} - m_{0j} T_j(t, r) \right].\end{aligned}\quad (1)$$

Тут  $\sigma_{33} = \sigma_{zz}$  у випадку осьової (циліндричної) симетрії та  $\sigma_3 = \sigma_{\theta\theta}$  у випадку центральної (сферичної) симетрії

$$G_0 = 2G \frac{1 - \mu}{1 - 2\mu}, m_0 = \frac{1 + \mu}{1 - 2\mu} \alpha_T,$$

Радіальні компоненти  $u_j(t, r)$  вектора переміщення є обмеженим в області  $D = \{(t, r) : t \in (0, \infty); r \in (0, R_1) \cup (R_1, \infty)\}$  розв'язком сепаратної системи диференціальних рівнянь руху в переміщеннях [5]

$$\frac{1}{c_j^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - B_{\alpha_j} [u_j(t, r)] = -m_{0j} \frac{\partial T_j(t, r)}{\partial r}, \quad j = \overline{1, 2} \quad (2)$$

за початковими умовами

$$u_j(t, r)|_{t=0} = \varphi_j(r); \quad \frac{\partial u_j}{\partial t}|_{t=0} = \Psi_j(r); \quad j = \overline{1, 2} \quad (3)$$

та умовами ідеального механічного контакту [2]

$$\begin{cases} [u_1(t, r) - u_2(t, r)]|_{r=R_1} = 0, \\ [\sigma_{rr,1}(t, r) - \sigma_{rr,2}(t, r)]|_{r=R_1} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

У рівності (2) бере участь диференціальний оператор  $B_{\alpha_j} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\alpha_j + 1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2\alpha_j + 1}{r^2}$ ;  $2\alpha_j + 1 \geq 0$ .

У системі (2)  $T_j(t, r)$  – задані компоненти нестационарного температурного поля  $T(t, r) = \{T_1(t, r), T_2(t, r)\}$  [4], яке породжує динамічне поле переміщень.

Розв'язок задачі (2)–(4) побудуємо методом гібридного інтегрального перетворення типу Фур'є-Бесселя на полярній осі  $r \geq 0$  з однією точкою спряження [1].

Пряме інтегральне перетворення Фур'є-Бесселя на полярній осі  $\geq 0$  з однією точкою спряження зобразимо у вигляді матриці-рядка [6, 7]

$$H_{\alpha}[\dots] = \left[ \int_{R_0}^{R_1} \dots V_{\alpha,1}(r, \lambda) \sigma_1 dr \int_{R_1}^{+\infty} \dots V_{\alpha,2}(r, \lambda) \sigma_2 dr \dots \right]. \quad (5)$$

Тут

$$V_{\alpha,1}(r, \beta) = \frac{2G_{0,2}}{\pi R_1^{2\alpha_1+1} b_2^{2\alpha_2+1}} J_{\alpha_1+1, \alpha_1}(b_1 r),$$

$$V_{\alpha,2}(r, \beta) = \omega_{1,2}(\beta) J_{\alpha_2+1, \alpha_2}(b_2 r) - \omega_{1,1}(\beta) N_{\alpha_2+1, \alpha_2}(b_2 r),$$

$\sigma_k = G_{0,k} G_{0,2}^{-1} R_1^{2(\alpha_2 - \alpha_1)}$ ,  $k = 1, 2$ , – компоненти вагової функції.

Запишемо систему (2) і початкові умови (3) у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_1^2 B_{\alpha_1} \right) u_1(t, r) \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_2^2 B_{\alpha_2} \right) u_2(t, r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^2 m_{01} \frac{\partial T_1}{\partial r} \\ c_2^2 m_{02} \frac{\partial T_2}{\partial r} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} u_1(t, r) \\ u_2(t, r) \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} \varphi_1(r) \\ \varphi_2(r) \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u_1(t, r) \\ u_2(t, r) \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} \Psi_1(r) \\ \Psi_2(r) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Застосуємо до задачі (4), (5) за правилом множення матриць операторну матрицю-рядок (6). Внаслідок тотожності (7) отримуємо задачу Коші:

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + \beta^2 \right) \tilde{u}(t, \beta) = F(t, \beta), \quad (8)$$

$$\tilde{u}(t, \beta) \Big|_{t=0} = \tilde{\varphi}(\beta), \quad \frac{d\tilde{u}(t, \beta)}{dt} \Big|_{t=0} = \tilde{\Psi}(\beta). \quad (9)$$

Тут прийняті позначення:

$$F(t, \beta) = \sum_{k=1}^2 m_{0k} c_k^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} T_k(t, \rho) \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{2\alpha_k + 1}{\rho} \right) V_{(\alpha+1, \alpha); k}(\rho, \beta) \right] \sigma_k \rho^{2\alpha_k+1} d\rho,$$

$$\tilde{u}(t, \beta) = \sum_{k=1}^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} u_k(t, \rho) V_{(\alpha+1, \alpha); k}(\rho, \beta) \sigma_k \rho^{2\alpha_k+1} d\rho;$$



$$\tilde{\varphi}(\beta) = \sum_{k=1}^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} \varphi_k(\rho) V_{(\alpha+1,\alpha);k}(\rho, \beta) \sigma_k \rho^{2\alpha_k+1} d\rho; R_0 = 0, R_2 = \infty;$$

$$\tilde{\Psi}(\beta) = \sum_{k=1}^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} \Psi_k(\rho) V_{(\alpha+1,\alpha);k}(\rho, \beta) \sigma_k \rho^{2\alpha_k+1} d\rho.$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язком задачі Коші (8), (9) є функція

$$\tilde{u}(t, \beta) = \frac{\sin \beta t}{\beta} \tilde{\Psi}(\beta) + \frac{d}{dt} \frac{\sin \beta t}{\beta} \tilde{\varphi}(\beta) + \int_0^t \frac{\sin \beta(t-\tau)}{\beta} F(\tau, \beta) d\tau. \quad (10)$$

Застосуємо до матриці-елемента  $\tilde{u}(t, \beta)$ , де  $\tilde{u}(t, \beta)$  визначена формулою (10) обернене перетворення Фур'є-Бесселя [6, 7]:

$$H_{(\alpha+1,\alpha);1}^{-1}[\dots] = \begin{bmatrix} \int_0^\infty \dots V_{(\alpha+1,\alpha);1}(r, \beta) \Omega_{(\alpha+1,\alpha);1}(\beta) d\beta \\ 0 \\ \int_0^\infty \dots V_{(\alpha+1,\alpha);1}(r, \beta) \Omega_{(\alpha+1,\alpha);1}(\beta) d\beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

за правилом множення матриць. У формулі (11) бере участь спектральна густина

$$\Omega_{(\alpha+1,\alpha);1}(\beta) = \frac{c_2^{-2\alpha_2} \beta^{2\alpha_2+1}}{[\omega_{(\alpha+1,\alpha);1}^{(1)}(\beta)]^2 + [\omega_{(\alpha+1,\alpha);2}^{(1)}(\beta)]^2}.$$

У результаті елементарних перетворень одержуємо, що в даному двошаровому симетричному просторі динамічне поле переміщень опишуть функції

$$u_j(t, r) = \sum_{k=1}^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} K_{(\alpha+1,\alpha);jk}(t, r, \rho) \Psi_k(\rho) \sigma_k \rho^{2\alpha_k+1} d\rho + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} K_{(\alpha+1,\alpha);jk}(t, r, \rho) \times \\ \times \varphi_k(\rho) \sigma_k \rho^{2\alpha_k+1} d\rho + \sum_{k=1}^{n+1} m_{0k} \int_0^t \int_{R_{k-1}}^{R_k} Z_{(\alpha+1,\alpha);jk}(t-\tau, r, \rho) T_k(\tau, \rho) \sigma_k c_k^2 \rho^{2\alpha_k+1} d\rho d\tau; j=1,2. \quad (12)$$

У формулах (12) беруть участь функції Коші

$$K_{(\alpha+1,\alpha);jk}(t, r, \rho) = \int_0^\infty \frac{\sin \beta t}{\beta} V_{(\alpha+1,\alpha);j}(r, \beta) V_{(\alpha+1,\alpha);k}(\rho, \beta) \Omega_{(\alpha+1,\alpha);n}(\beta) d\beta; \quad j, k = \overline{1,2},$$

породжені початковими даними, і функції впливу

$$Z_{(\alpha+1,\alpha);jk}(t, r, \rho) = \int_0^\infty \frac{\sin \beta t}{\beta} V_{(\alpha+1,\alpha);j}(r, \beta) \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{2\alpha_k+1}{\rho} \right] V_{(\alpha+1,\alpha);k}(\rho, \beta) \Omega_{(\alpha+1,\alpha);n}(\beta) d\beta, \quad (13)$$

породжені дією нестационарного температурного поля;  $j, k = 1, 2$ .

Розглянемо випадок двошарового простору, який володіє осьовою симетрією ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ). Безпосередньо маємо:

$$V_1(r, \beta) = \frac{2G_{02}}{\pi R_1} J_1\left(\frac{\beta}{c_1} r\right), \quad \sigma_1 = \frac{G_{01}}{G_{02}} \frac{1}{c_1^2}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{c_2^2}; \quad V_2(r, \beta) = w_2(\beta) J_1\left(\frac{\beta}{c_2} r\right) -$$

$$- w_1(\beta) N_1\left(\frac{\beta}{c_2} r\right); \quad \Omega_1(\beta) = \beta ([w_1(\beta)]^2 + [w_2(\beta)]^2)^{-1};$$

$$w_1(\beta) = J_1\left(\frac{\beta}{c_1} R_1\right) \left[ G_{02} \frac{\beta}{c_2} J_0\left(\frac{\beta}{c_2} R_1\right) - \frac{G_{02}}{R_1} \frac{1-2\mu_2}{1-\mu_2} J_1\left(\frac{\beta}{c_2} R_1\right) \right] -$$

$$- J_1\left(\frac{\beta}{c_2} R_1\right) \left[ G_{01} \frac{\beta}{c_1} J_0\left(\frac{\beta}{c_1} R_1\right) - \frac{G_{01}}{R_1} \frac{1-2\mu_1}{1-\mu_1} J_1\left(\frac{\beta}{c_1} R_1\right) \right];$$



$$\begin{aligned}
 w_2(\beta) &= J_1\left(\frac{\beta}{c_1} R_1\right) \left[ G_{02} \frac{\beta}{c_2} N_0\left(\frac{\beta}{c_2} R_1\right) - \frac{G_{02}}{R_1} \frac{1-2\mu_2}{1-\mu_2} N_1\left(\frac{\beta}{c_2} R_1\right) \right] - \\
 &\quad - N_1\left(\frac{\beta}{c_2} R_1\right) \left[ G_{01} \frac{\beta}{c_1} J_0\left(\frac{\beta}{c_1} R_1\right) - \frac{G_{01}}{R_1} \frac{1-2\mu_1}{1-\mu_1} J_1\left(\frac{\beta}{c_1} R_1\right) \right]; \\
 \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) V_1(r, \beta) &= \frac{2G_{02}}{\pi R_1} \frac{\beta}{c_1} J_0\left(\frac{\beta}{c_1} r\right) \equiv \beta V_{10}(r, \beta); \\
 \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) V_2(r, \beta) &= \frac{\beta}{c_2} \left[ w_2(\beta) J_0\left(\frac{\beta}{c_2} r\right) - w_1(\beta) N_0\left(\frac{\beta}{c_2} r\right) \right] \equiv \beta V_{20}(r, \beta).
 \end{aligned}$$

Згідно формули (12) одержуємо:

$$Z_{jk}(t, r, \rho) = \int_0^\infty \sin \beta t V_j(r, \beta) \frac{V_{k0}(\rho, \beta) \beta d\beta}{[w_1(\beta)]^2 + [w_2(\beta)]^2}; \quad j, k = 1, 2. \quad (13)$$

Визначимо функції:

$$\begin{aligned}
 g_{11}(\lambda, \beta) &= \frac{\lambda}{a_1} J_1\left(\frac{\lambda}{a_1} R_1\right) J_0\left(\frac{\beta}{c_1} R_1\right) - \frac{\beta}{c_1} J_0\left(\frac{\lambda}{a_1} R_1\right) J_1\left(\frac{\beta}{c_1} R_1\right); \\
 g_{12}(\lambda, \beta) &= G_{02} \frac{k_\lambda}{c_2} \beta J_1\left(\frac{\beta}{c_1} R_1\right) \left[ J_0\left(\frac{\lambda}{a_1} R_1\right) - b_1 \frac{\lambda}{a_1} J_1\left(\frac{\lambda}{a_1} R_1\right) \right] - \\
 &\quad - \frac{c_2}{a_1} \lambda J_1\left(\frac{\lambda}{a_1} R_1\right) \left[ \frac{G_{01}}{c_1} J_0\left(\frac{\beta}{c_1} R_1\right) + \left( \frac{G_{02}}{R_1} \frac{1-2\mu_2}{1-\mu_2} - \frac{G_{01}}{R_1} \frac{1-2\mu_1}{1-\mu_1} \right) J_1\left(\frac{\beta}{c_1} R_1\right) \right]; \\
 f_{11}(t, \lambda, \beta) &= \frac{T_0}{t_0} (I - B_t^{t_0}) \left\{ \left[ \left( t - \frac{\sin \beta t}{\beta} \right) \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\cos \beta t - 1}{\lambda^4} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\beta}{\lambda^4} \left( \frac{\lambda^2 \sin \beta t - \beta \cos \beta t}{\lambda^4 + \beta^2} + \frac{\beta e^{-\lambda^2 t}}{\beta^2 + \lambda^4} \right) \right] S_+(t) \right\} \xrightarrow{t_0 \rightarrow 0} f_{12} \equiv \\
 &\equiv T_0 S_+(t) \left[ \frac{(1 - \cos \beta t) \lambda^2 - \beta \sin \beta t}{\lambda^4} + \frac{\beta^2}{\lambda^4} \frac{\lambda^2 \cos \beta t + \beta^2 \sin \beta t - \lambda^2 e^{-\lambda^2 t}}{\beta^2 + \lambda^4} \right].
 \end{aligned}$$

У результаті елементарних перетворень для переміщень  $u_1(t, r)$  та  $u_2(t, r)$  отримуємо вирази:

$$\begin{aligned}
 u_j(t, r) &= \frac{8}{\pi^3} \frac{a_1 K_\lambda G_{01}}{c_1 R_1} \iint_0^\infty \frac{f_{11}(t, \lambda, \beta) g_{11}(\lambda, \beta) J_1\left(\frac{\lambda}{a_1} R_1\right) V_j(r, \beta)}{(\bar{a}_1^2 \lambda^2 - c_1^{-2} \beta^2) w_0(\lambda) [w_1^2(\beta) + w_2^2(\beta)]} \times \\
 &\quad \times d\lambda d\beta + \frac{8a_1}{\pi^3 c_2 R_1} \iint_0^\infty \frac{f_{11}(t, \lambda, \beta) g_{12}(\lambda, \beta) J_1\left(\frac{\lambda}{a_1} R_1\right) V_j(r, \beta)}{(\bar{a}_2^2 \lambda^2 - c_2^{-2} \beta^2) w_0(\lambda) [w_1^2(\beta) + w_2^2(\beta)]} d\lambda d\beta; \quad j = 1, 2. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Розрахунок виконано за формулами (11) в припущенні, що двошаровий простір в початковий момент часу знаходився в стані спокою, а в момент часу  $t > 0$  – під дією нестационарного температурного поля, яке описується функціями  $T_1(t, r)$  і  $T_2(t, r)$  [4].

Обчислення компонентів тензора напружень згідно формул (1) зводиться до диференціювання функцій  $u_j(t, r)$  по геометричній змінній  $r$ .

#### Висновки

У даній статті методом інтегрального перетворення Фур'є-Бесселя отримано інтегральне зображення структури динамічного поля напружень у двошаровому симетричному просторі.

Проведено аналіз найбільш вживаного на практиці випадку двошарового осесиметричного простору.

**Список використаної літератури**

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
2. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. К.: Наук. думка, 1972. 307 с.
3. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. Киев: Наук. думка, 1992. 280 с.
4. Блажевський С.Г. Моделювання процесу дифузії тепла в двошаровому симетричному просторі. *Вісник ХНТУ*. 2018. Вип. 3 (66). С. 29–33.
5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959. 468 с.
6. Ленюк М.П. Узагальнення інтегралу Фур'є-Бесселя. *Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач*: зб.наук.пр. 1993. Вип. 2, ч.1. С.79-91.
7. Блажевський С.Г., Ленюк М.П. Термопружний стан багат шарових симетричних тіл. Київ: Ін-т математики НАН України, 2000. 130 с.

**References**

1. Tihonov A.N., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M.: Nauka, 1972. 735s.
2. Podstrigach Ya.S., Kolyano Yu.M. Obobschennaya termomehanika. K.: Nauk. dumka, 1972. 307s.
3. Kolyano Yu.M. Metody teploprovodnosti i termouprugosti neodnorodnogo tela. Kiev: Nauk. dumka, 1992. 280 s.
4. Blazhevskiy S.H. Modeliuvannya protsesu dyfuzii tepla v dvosharovomu symmetrychnomu prostori. *Visnyk KhNTU*. 2018. Vyp. 3 (66). S. 29–33.
5. Stepanov V.V. Kurs differentsialnyih uravneniy. M.: Fizmatgiz, 1959. 468 s.
6. Leniuk M.P. Uzahalnennia intehralu Furie-Besselia. *Intehralni peretvorennia ta yikh zastosuvannia do kraiovykh zadach*: zb.nauk.pr. 1993. Vyp. 2, ch.1. S.79-91.
7. Blazhevskiy S.H., Leniuk M.P. Termopruznyi stan bahatosharovykh symmetrychnykh til. Kyiv: In-t matematyky NAN Ukrainy, 2000. 130 s.

УДК 81'32

О.М. ВАСИЛЬСВ, І.В. ВАСИЛЬСВА  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

## ОСОБЛИВОСТІ СТВОРЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ У ЛІНГВІСТИЦІ

*Розглядаються методи та підходи, котрі використовуються при створенні математичних моделей для визначення якісних та кількісних залежностей у лінгвістиці. Зокрема, аналізуються методологічні засади, які дозволяють визначати загальний вигляд функціональних залежностей, на основі яких виконується моделювання. Пропонується підхід, в рамках якого створення моделі починається з формулювання диференціального рівняння, що описує функціональну залежність між параметрами системи. На основі цього рівняння знаходиться загальний розв'язок, котрий і визначає вигляд для функціональної залежності для апроксимації статистичних даних. Цей підхід застосовується для визначення рангової залежності частоти слів у частотному словнику. Вихідним є припущення, що ранг слова у частотному словнику та його частота пов'язані диференціальним рівнянням першого порядку з розділеними змінними. Априорі невідомі функції, які входять у це рівняння, апроксимуються у вигляді розкладу у ряд Тейлора. Коефіцієнти такого розкладу інтерпретуються як параметри моделі, котрі розраховуються в результаті оптимізації на основі фактичних даних. Оптимізація виконується на основі методу найменших квадратів. Розв'язок рівняння дозволяє встановити неявну залежність між частотою слова та його рангом. Для отримання розв'язку відповідного алгебраїчного рівняння використовується метод послідовних ітерацій.*

*Запропонована методика перевіряється на фактичному статистичному матеріалі. Для текстового фрагменту визначається емпіричний частотний словник для словоформ, після чого створюється математична модель, що описує залежність частоти появи словоформи у тексті від рангу словоформи. Розраховано параметри моделі та побудовано теоретичну криву, котра описує відповідну залежність. Показано, що закон Зіпфа, який постулює степеневу залежність між частотою та рангом словоформи, описує статистичні дані тільки в певному діапазоні значень для рангу словоформи. Отримана на основі моделі залежність апроксимує дані більш точно, причому закон Зіпфа може бути отриманий на основі даної моделі як певний граничний випадок, коли у вихідному диференціальному рівнянні у розкладі в ряд Тейлора залишити лише перші доданки.*

**Ключові слова:** квантитативна лінгвістика, ранговий розподіл, закон Зіпфа, апроксимація, ряд Тейлора, метод послідовних ітерацій.

А.Н. ВАСИЛЬБЕВ, И.В. ВАСИЛЬБЕВА  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

## ОСОБЕННОСТИ СОЗДАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В ЛИНГВИСТИКЕ

*Рассматриваются методы и подходы, которые используются при создании математических моделей для определения качественных и количественных зависимостей в лингвистике. В частности, анализируются методологические принципы, которые позволяют определить общий вид функциональных зависимостей, на основе которых выполняется моделирование. Предлагается подход, в рамках которого создание модели начинается с формулирования дифференциального уравнения, которое описывает функциональную зависимость между параметрами системы. На основе этого уравнения находится общее решение, которое и определяет вид функциональной зависимости для аппроксимации статистических данных. Этот подход применяется для определения ранговой зависимости частоты слов в частотном словаре. Исходным является предположение, что ранг слова в частотном словаре и его частота связаны дифференциальным уравнением первого порядка с разделяемыми переменными. Априори неизвестные функции, которые входят в это уравнение, аппроксимируются в виде разложения в ряд Тейлора. Коэффициенты такого разложения интерпретируются как параметры модели, которые рассчитываются в результате оптимизации на основе фактических данных. Оптимизация выполняется на основе метода наименьших квадратов. Решение уравнения позволяет установить неявную зависимость между частотой слова и его рангом. Для получения решения соответствующего алгебраического уравнения используется метод последовательных итераций.*

*Предложенная методика проверяется на фактическом статистическом материале. Для текстового фрагмента определяется эмпирический частотный словарь для словоформ, после чего создается математическая модель, которая описывает зависимость частоты появления словоформы в тексте от ранга словоформы. Рассчитаны параметры модели и построена теоретическая кривая,*

которая описывает соответствующую зависимость. Показано, что закон Зипфа, который постулирует степенную зависимость между частотой и рангом словоформы, описывает статистические данные только в определенном диапазоне значений для ранга словоформы. Полученная на основе модели зависимость аппроксимирует данные более точно, причем закон Зипфа может быть получен на основе данной модели как определенный граничный случай, когда в исходном дифференциальном уравнении в разложении в ряд Тейлора оставить только первые слагаемые.

Ключевые слова: квантитативная лингвистика, ранговое распределение, закон Зипфа, аппроксимация, ряд Тейлора, метод последовательных итераций.

O.M. VASYLIEV, I.V. VASYLIEVA  
Taras Shevchenko National University of Kyiv

## PECULIARITIES OF CREATION OF MATHEMATICAL MODELS IN LINGUISTICS

*The methods and approaches that are used to create mathematical models to determine the qualitative and quantitative dependencies in linguistics are considered. In particular, methodological principles are analyzed that allow us to determine the general form of functional dependencies, on the basis of which the modeling is performed. An approach is proposed in which the creation of a model begins with the formulation of a differential equation that describes the functional relationship between system parameters. Based on this equation, a general solution is to be found to determine the type of the functional dependence for approximating statistical data. This approach is used to determine the rank dependence of the frequency of words in the frequency dictionary. The initial assumption is that the rank of a word in the frequency dictionary and its frequency are related by a first-order differential equation with separated variables. The a priori unknown functions that appear in this equation are approximated in the form of expansion in a Taylor series. The coefficients of this expansion are interpreted as model parameters, which are to be calculated as a result of optimization based on actual data. Optimization is based on the least squares method. Solving the equation allows us to establish an implicit relationship between the frequency of a word and its rank. To obtain a solution to the corresponding algebraic equation, the method of iterations can be used.*

*The proposed methodology is tested on actual statistical material. An empirical frequency dictionary for word forms is determined for a text fragment, after which a mathematical model is created that describes the dependence of the frequency of occurrence of the word form in the text on the rank of the word form. The parameters of the model are calculated and a theoretical curve is constructed that describes the corresponding dependence. It is shown that Zipf's law, which postulates a power-law relationship between the frequency and rank of the word form, describes statistics only in a certain range of values for the rank of the word form. The dependence obtained on the basis of the model approximates the data more accurately. Moreover, the Zipf's law can be obtained on the basis of this model as a certain limiting case when only the first terms are left in the Taylor expansion in the original differential equation.*

*Keywords: quantitative linguistics, rank distribution, Zipf's law, approximation, Taylor series, method of iterations.*

### Постановка проблеми

Аналіз кількісних характеристик текстів є задачею складною, але разом з тим і цікавою [1]. Тому відповідним дослідженням традиційно приділяється значна увага [2]. Пояснюється це не тільки суто академічним інтересом, але й конкретними прикладними цілями. Результати відповідних досліджень широко використовуються в системах автоматичного аналізу текстів, для створення класифікаторів текстів, баз даних, систем машинного перекладу, експертних систем та в багатьох інших випадках. Зазвичай задачі квантитативної (кількісної) лінгвістики вимагають залучення значних розрахункових потужностей і розробки (чи використання уже існуючого) програмного забезпечення. Тому такі дослідження є міждисциплінарними та поєднують у собі різні підходи, методики та концепції [3]. Як приклад досліджень, в яких застосовуються кількісні методи та математичне моделювання, можна навести задачі з визначення статистичних характеристик текстів, побудова частотних словників, визначення співвідношення слів і лексем, залежність кількості різних словоформ від розміру тексту (залежність "словник-текст"), фонетична класифікація слів, еволюційний аналіз розвитку лексики, та деякі інші [1,3].

Моделювання у лінгвістиці має свої особливості у порівнянні із тим, як математичні та кількісні методи застосовуються у природничих науках. В багатьох випадках, коли мова йде про визначення детерміністичних залежностей між різними параметрами, що описують лексичну систему, процес моделювання зводиться до розрахунку на основі статистичних (емпіричних) даних певних апроксимаційних параметрів. З математичної точки зору така задача є стандартною і вирішуються стандартними методами із залученням відповідного програмного забезпечення. Разом з тим, найбільш

складне і відкрите питання пов'язане із загальним виглядом функціональних залежностей, на основі яких будується модель [4,5]. В природничих науках дана проблема розв'язується за рахунок того, що зазвичай існує можливість застосувати певну теорію, котра базується на уявленнях про характер зв'язків та способи взаємодії елементів в системі. В такому разі загальний вигляд для шуканої функціональної залежності можна встановити, розв'язуючи відповідні рівняння. При моделюванні лінгвістичних систем дослідники як правило позбавлені такої можливості.

Підхід, який традиційно застосовується в кількісних лінгвістичних дослідженнях, ґрунтується на тому, що функціональні залежності, на основі яких будується математична модель, вибираються з урахуванням самих загальних уявлень про властивості досліджуваної системи. Такий підхід хоч і дозволяє отримувати цікаві результати, однак він не дає відповіді щодо їх універсальності та області застосування. Фактично, мова йде про те, що для створення моделі необхідно спочатку зробити припущення про тип відповідного функціонального зв'язку, потім на основі емпіричних даних визначити параметри цього зв'язку, і лише потім можливо реалізувати перевірку на предмет адекватності створеної моделі. Альтернативою міг би бути підхід, котрий базується на використанні штучних нейронних мереж [6,7]. Його перевага в першу чергу пов'язана з тим, що за допомогою нейронної мережі теоретично можна відтворити практично будь-яку функціональну залежність. Недоліки цього підходу пов'язані із складністю його практичної реалізації. Крім того, навіть якщо вдається побудувати нейронну мережу, то область її застосування визначається масивом даних, на основі яких мережа будувалась. При цьому відсутня проста і зрозуміла аналітична формула, що ускладнює подальший аналіз системи. Тому перспективним видається методика, в якій використовуються певні базові принципи, що дозволяють отримувати сімейство аналітичних залежностей для побудови математичної моделі. Далі описується відповідний підхід і демонструється його застосування на практиці.

#### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Важливою задачею квантитативної лінгвістики є побудова частотного словника та визначення його статистичних характеристик [1-3]. Методика побудови частотного словника полягає у тому, що всі слова чи словоформи впорядковуються за частотою, з якою вони зустрічаються у тексті. Рангом слова є порядковий номер в цій послідовності (тобто перший ранг має слово, яке найчастіше зустрічається у тексті). Питання полягає у тому, як частота, з якою зустрічається слово, пов'язана з рангом цього слова. Зрозуміло, що відповідна залежність за означенням має бути спадаючою. Що стосується функціонального вигляду, то "класичною" вважається степенева залежність, яка має назву закону Зіпфа [1,3,8-10]. Якщо через  $n$  позначити ранг слова, а через  $f$  позначити частоту, з якою слово зустрічається в тексті, то закон Зіпфа визначатиметься формулою

$$f(n) = \frac{A}{n^a}, \quad (1)$$

де константи  $A$  та  $a$  є параметрами розподілу. Причому константа  $a$  є досить універсальною і для багатьох мов і текстів великих розмірів має значення, близьке до одиничного [1,3].

Залежність типу (1) часто використовується на практиці, однак вона має і певні недоліки. Головний пов'язаний з тим, що закон Зіпфа погано описує ранговий розподіл слів для малих і великих рангів [1]. Тому нерідко використовують різні модифікації закону Зіпфа. Як приклад можна навести закон Зіпфа-Мандельброта

$$f(n) = \frac{A}{(n + n_0)^a}, \quad (2)$$

в якому параметр  $n_0$  називається поправкою Мандельброта. Існують і інші модифікації закону, які виявили різну ефективність при практичному застосуванні. Майже всі вони базуються на тому, що в оригінальний закон Зіпфа вводяться поправочні параметри чи коефіцієнти, причому вибір характеру поправки виглядає досить довільно: адекватність тої чи іншої функціональної залежності визначається виключно тим, наскільки якісно вдається описати відповідні емпіричні дані. Це ставить під серйозний сумнів ефективність методики як такої, оскільки доцільність використання певної функціональної залежності в якомусь конкретному випадку не гарантує її ефективність у інших випадках.

#### Мета дослідження

Метою дослідження є розробка (і застосування на практиці) методики, яка би дозволила отримувати модифіковані версії закону Зіпфа (включаючи власне і сам закон) в рамках єдиного підходу. Для вирішення цієї задачі ми будемо виходити із припущення, що між рангом слова і частотою його появи у тексті існує функціональний зв'язок. Такий зв'язок буде реалізований у вигляді диференціального рівняння певного виду. Фактично, саме вид рівняння визначатиме клас функціональних залежностей, які можна отримати на основі рівняння.



### Викладення основного матеріалу дослідження

Отже, задача полягає у визначенні зв'язку між рангом слова  $n$  у частотному словнику і частотою  $f$ , з якою зустрічається це слово. Відправною точкою для побудови шуканої залежності може бути припущення про те, що зміна рангу слова тягне за собою зміну частоти, з якою слово зустрічається у тексті. Причому для спрощення аналізу будемо вважати, що обидва параметри змінюються не дискретно, а неперервним чином. Одне із самих простих припущень полягає у тому, що відносна зміна рангу пропорційна до відносної зміни частоти. Якщо так, то можемо записати наступне співвідношення

$$\frac{df}{f} = - a \frac{dn}{n}, \quad (3)$$

у якому параметр  $a$  є коефіцієнтом пропорційності, а  $df$  і  $dn$  є диференціалами (нескінченно малими приростами) відповідно параметрів  $f$  та  $n$ . Розв'язком диференціального рівняння (3) якраз і є закон Зіпфа (1). Однак більш загальним, по відношенню до рівняння (3), є співвідношення виду

$$j(f)df = - y(n)dn. \quad (4)$$

Тут  $j(f)$  та  $y(n)$  є певними функціями. Фактично рівняння (4) означає, що між нескінченно малими приростами параметрів  $f$  та  $n$  існує лінійний зв'язок, причому його характер такий, що шляхом незалежного перетворення параметрів  $f$  та  $n$  цей зв'язок можна зробити тривіальним. Це є базове припущення, яке обмежує клас функціональних залежностей, котрі можуть використовуватися для побудови рангово-частотної залежності.

Якщо функції  $j(f)$  та  $y(n)$  є відомими, розв'язок рівняння (4) може бути представлений у вигляді

$$\int j(f)df = - \int y(n)dn. \quad (5)$$

Слід відразу зазначити, що для отримання з рівняння (4) закону Зіпфа достатньо покласти

$$j(f) = \frac{1}{f}, \quad (6)$$

$$y(n) = \frac{a}{n}. \quad (7)$$

Проблема у тому, що як зазначалося вище, функції  $j(f)$  та  $y(n)$  апіорі невідомі і встановити їх реальний вигляд досить проблематично. Тому є сенс застосувати підхід, що базується на розкладі цих функцій у ряд Тейлора за від'ємними степенями аргументів. Якщо обмежитися у розкладі трьома першими доданками, то слід розглядати функції  $j(f)$  та  $y(n)$  у наступному вигляді:

$$j(f) = \frac{1}{f} + \frac{a}{f^2} + \frac{b}{f^3}, \quad (8)$$

$$y(n) = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{g}{n^3}. \quad (9)$$

Параметри  $a$ ,  $b$ ,  $a$ ,  $b$  та  $g$  є феноменологічними параметрами моделі. Використавши представлення (8) та (9), з рівняння (5) отримуємо наступне:

$$\ln(f) - \frac{a}{f} - \frac{b}{2f^2} = - a \ln(n) + \frac{b}{n} + \frac{g}{2n^2} + \ln(A), \quad (10)$$

і тут через  $A$  позначено сталу інтегрування. Вона, як і інші раніше введені параметри, має бути розрахована на основі статистичних даних. Фактично, співвідношення (10) є основою для побудови теоретичної залежності між частотою слова та його рангом. Однак для практичного застосування краще перейти до параметрів  $y = \ln(f)$  та  $x = \ln(n)$ . В такому разі співвідношення (10), з використанням позначень  $b = 2r$ ,  $g = 2l$  та  $B = \ln(A)$ , може бути подане у такому вигляді:

$$y - a \exp(-y) - r \exp(-2y) = - ax + b \exp(-x) + l \exp(-2x) + B. \quad (11)$$

За умови, якщо параметри  $a$ ,  $r$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $l$  та  $B$  відомі (розраховані на основі емпіричних даних), співвідношення (11) визначає неявну функціональну залежність  $y(x)$  (тобто фактично рангово-частотний розподіл).

Позначимо через  $x_k, y_k$  (індекс  $k = 1, 2, \dots, m$ ) експериментальні (статистичні) значення для параметрів  $x$  та  $y$  відповідно. Тоді параметри  $a, r, a, b, l$  та  $B$  моделі можна розрахувати, мінімізуючи (методом найменших квадратів) функціонал

$$F = \sum_{k=1}^m (y_k - a \exp(-y_k) - r \exp(-2y_k) + ax_k - b \exp(-x_k) - l \exp(-2x_k) - B)^2. \quad (12)$$

Ще один важливий крок у реалізації запропонованого підходу пов'язаний з отриманням значення параметра  $y$  при заданому значенні параметра  $x$ . Відповідна залежність дається співвідношенням (11), але ця залежність неявна. Тобто мова йде про необхідність розв'язання (у числовому вигляді) рівняння (11). Якщо виходити з того, що мова йде про отримання поправки до закону Зіпфа (ця ситуація відповідає значенням параметрів  $a = b = l = g = 0$ ), то можна застосувати метод послідовних ітерацій, в рамках якого  $(n + 1)$ -а ітерація  $y_k^{(n+1)}$  для значення параметра  $y(x_k)$  може бути розрахована на основі  $n$ -ї ітерації  $y_k^{(n)}$  за допомогою наступного співвідношення:

$$y_k^{(n+1)} = a \exp(-y_k^{(n)}) + r \exp(-2y_k^{(n)}) - ax_k + b \exp(-x_k) + l \exp(-2x_k) + B, \quad (13)$$

а як початкове наближення можна взяти емпіричне значення для параметра  $y(x_k)$  (тобто покласти  $y_k^{(0)} = y_k$ ).

Для перевірки запропонованої методики використаємо її для аналізу рангово-частотного розподілу словоформ для тексту, що складається з 22878 слововживань, який містить 1867 різних словоформ. Результати обробки цього тексту шляхом побудови частотного словника і застосування закону Зіпфа для опису рангово-частотного розподілу наведено для рис. 1.

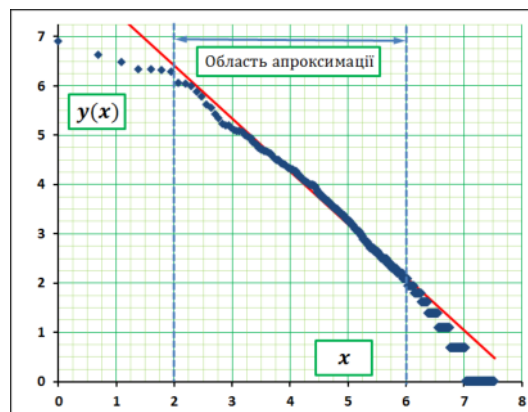


Рис. 1. Застосування закону Зіпфа (формула (1)) для опису рангово-частотного розподілу словоформ у тексті. Використано наступні значення для параметри розподілу:  $\alpha \approx 1.073, \ln(A) \approx 8.558$

Нескладно помітити, що закон Зіпфа є коректним тільки для певного діапазону значень рангу словоформ, і саме на основі цього діапазону виконувалась апроксимація. Застосування ж описаного вище підходу дає значно кращі результати, які представлені на рис. 2.



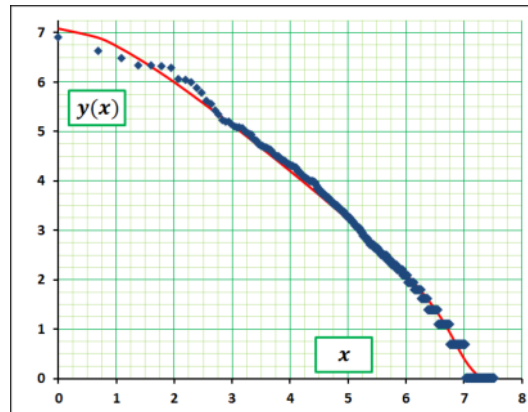


Рис. 2. Результати моделювання рангово-частотного розподілу (формула (11)). Параметри моделі:  $a \approx -2.35$ ,  $r \approx 1.194$ ,  $\alpha \approx 0.936$ ,  $\beta \approx -0.881$ ,  $\lambda \approx -0.027$ ,  $B \approx 7.995$

В результаті числових розрахунків встановлено, що параметри розподілу, котрий визначається рівнянням (11), наступні:  $a \approx -2.35$ ,  $r \approx 1.194$ ,  $\alpha \approx 0.936$ ,  $\beta \approx -0.881$ ,  $\lambda \approx -0.027$  та  $B \approx 7.995$ . Важливим є те, що отримана (у неявному вигляді) функціональна залежність (11) описує розподіл даних для всього рангового діапазону. Таким чином, цю залежність можна використовувати як для малих значень рангу, так і для великих. Разом з тим, слід зазначити, що для надзвичайно рідкісних слів у тексті (тих, які зустрічаються один лише раз) існує перманентна проблема з визначенням закону розподілу, оскільки відповідна функція є суттєво неоднозначною (для великої кількості рангів частота є одною й тою самою).

#### Висновки

На основі запропонованого в роботі підходу розраховано рангово-частотний розподіл словоформ у тексті та показано, що отримана в результаті залежність між рангом та частотою словоформи краще описує статистичні дані, ніж це має місце при апроксимації на основі закону Зіпфа. Методологія, задіяна у дослідженні, базується на загальних припущеннях про характер зв'язку між зміною рангу словоформи та частоти її появи й тексті. Отримане в результаті диференціальне рівняння дає змогу, використовуючи різні наближення для функцій, що входять у рівняння, отримувати різні функціональні залежності, на основі яких потім будується модель. Така концепція є більш загальною у порівнянні з традиційним підходом, в рамках якого функціональні зв'язки для побудови регресійних моделей просто постулюються. Причому перевага запропонованого підходу зводиться не тільки до технічного аспекту, пов'язаного з можливістю отримувати аналітичні залежності різного виду. Перевіряючи за допомогою статистичних даних ту чи іншу модель на адекватність одночасно відбувається верифікація вихідних припущень, закладених у основу вихідного диференціального рівняння. Враховуючи, що рівняння описує систему на рівні взаємодії її елементів і параметрів, можна зробити висновок, що це дозволить проводити більш глибокий і якісний аналіз всієї системи. Таким чином, розвинена у роботі методологія може бути корисною для розв'язання широкого класу задач квантитативної лінгвістики.

#### Список використаної літератури

1. Тулдава Ю. Проблемы и методы квантитативно-системного исследования лексики. Таллин: Валгус, 1987. 204 с.
2. Köhler R., Altmann G., Piotrowski R.G. Quantitative Linguistics. An International Handbook, Berlin: Walter de Gruyter, 2005. 1041 p.
3. Левицкий В.В. Квантитативные методы в лингвистике. Черновцы: Рута, 2004. 190 с.
4. Vasilev A., Vasileva I. Text Length and Vocabulary Size: Case of the Ukrainian Writer Ivan Franko. *Glottometrics*. 2018. Vol. 43. P. 1 – 10.
5. Васильев О.М., Чалий О.В., Васильева І.В. Про екзотичні задачі фізики, Вінні-Пуха та закон Зіпфа. *Журнал фізичних досліджень*. 2013. Т. 17, № 1. С. 1001(1 – 8).
6. Бэстенс Д.-Э., ван ден Берг В.-М., Вуд Д. Нейронные сети и финансовые рынки: принятие решений в торговых операциях. Москва: ТВП, 1997. 236 с.
7. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс. Москва: Вильямс, 2006. 1104 с.
8. Zipf G. Human Behavior and the Principle of Least Effort. Cambridge: Addison-Wesley, 1949. 573 p.
9. Li W. Zipf's law everywhere. *Glottometrics*. 2002. Vol. 5. P. 14 – 21.
10. Popescu I.-I., Altmann G., Köhler R. Zipf's law another view. *Quality and Quantity*. 2010. Vol. 44, No 4. P. 713 – 731.

**References (transliterated)**

1. Tuldava Yu. Problemy i metody kvantitativno-sistemnogo issledovaniya leksiki. Tallin: Valgus, 1987. 204 s.
2. Köhler R., Altmann G., Piotrowski R.G. Quantitative Linguistics. An International Handbook, Berlin: Walter de Gruyter, 2005. 1041 p.
3. Levitskiy V.V. Kvantitativnyie metody v lingvistike. Chernovtsy: Ruta, 2004. 190 s.
4. Vasilev A., Vasileva I. Text Length and Vocabulary Size: Case of the Ukrainian Writer Ivan Franko. *Glottometrics*. 2018. Vol. 43. P. 1 – 10.
5. Vasyliiev O.M., Chalyi O.V., Vasylieva I.V. Pro ekzotychni zadachi fizyky, Vinni-Pukha ta zakon Zipfa. *Zhurnal fizychnykh doslidzhen*. 2013. Vol. 17, No 1. С. 1001(1 – 8).
6. Bestens D.-E., van den Berg V.-M., Vud D. Neyronnyie seti i finansovyye ryinki: prinyatie resheniy v tovgovyih operatsiyah. Moskva: TVP, 1997. 236 s.
7. Haykin S. Neyronnyie seti: polnyiy kurs. Moskva: Vilyams, 2006. 1104 s.
8. Zipf G. Human Behavior and the Principle of Least Effort. Cambrige: Addison-Wesley, 1949. 573 p.
9. Li W. Zipf's law everywhere. *Glottometrics*. 2002. Vol. 5. P. 14 – 21.
10. Popescu I.-I., Altmann G., Köhler R. Zipf's law another view. *Quality and Quantity*. 2010. Vol. 44, No 4. P. 713 – 731.

УДК 004.925

С. И. ВЯТКИН

Институт автоматизации и электрометрии СО РАН

А. Н. РОМАНЮК, А. Н. РЕЙДА, О. А. ЯКОВЕНКО

Винницкий национальный технический университет

## ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АНАЛИТИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ ОСВЕЩЕННОСТИ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

*Реалистичность формирования графических сцен во многом определяется освещенностью окружающей среды. Предлагается эффективное представление карт освещенности окружающей среды. Рассматривается визуализация объектов с применением карт освещения среды. Использование аналитического задания для излучения компонент сферических коэффициентов гармоник освещения позволяет вычислять и применять девять коэффициентов, соответствующим низкочастотным видам освещения, для того чтобы минимизировать ошибки. Излучение нечувствительно к высоким частотам в освещении, и хорошо аппроксимируется, с использованием только девяти параметров. Излучение может быть процедурно представлено в виде квадратичного полинома в декартовых компонентах нормали поверхности и может быть выражено в явной форме. Это приводит к простому и эффективному процедурному алгоритму рендеринга, с использованием аппаратных средств графических процессоров.*

*Метод позволяет использовать произвольное распределение освещения для компонент двунаправленного отражения. Это снимает ограничения текущего графического оборудования для точечных и направленных источников света. Метод позволяет эффективно вычислить текстуры карт окружающей среды освещения и может быть использован в системах высокореалистической графики.*

*Ключевые слова: карты окружающей среды, освещенность, яркость, коэффициенты отражения Ламберта, предварительная фильтрация сферических гармоник.*

С. І. ВЯТКИН

Інститут автоматизації та електрометрії СВ РАН

А.Н. РОМАНЮК, О. М. РЕЙДА, О. О. ЯКОВЕНКО

Вінницький національний технічний університет

## ВИЗУАЛІЗАЦІЯ ТРИВИМІРНИХ ОБ'ЄКТІВ З ВИКОРИСТАННЯМ АНАЛІТИЧНОГО ЗАВДАННЯ ОСВІТЛЕННЯ НАВКОЛИШНЬОГО СЕРЕДОВИЩА

*Реалістичність формування графічних сцен багато в чому визначається освітленістю навколишнього середовища. Пропонується ефективно представлення карт освітленості навколишнього середовища. Розглядається візуалізація об'єктів із застосуванням карт освітлення середовища. Використання аналітичного завдання для випромінювання компонент сферичних коефіцієнтів гармонік освітлення дозволяє обчислювати і застосовувати дев'ять коефіцієнтів, відповідним низькочастотних видам освітлення, для того щоб мінімізувати помилки. Випромінювання невідчутно до високих частот в освітленні, і добре апроксимується, з використанням тільки дев'яти параметрів. Випромінювання може бути процедурно представлено у вигляді квадратичного полінома в декартових компонентах нормалі поверхні і може бути виражено в явній формі. Це призводить до простого і ефективного процедурному алгоритму рендеринга, з використанням апаратних засобів графічних процесорів.*

*Метод дозволяє використовувати довільний розподіл освітлення для компонент двонаправленого відображення. Це знімає обмеження поточного графічного обладнання для точкових і спрямованих джерел світла. Метод дозволяє ефективно обчислити текстури карт навколишнього середовища освітлення і може бути використаний в системах високореалістической графіки.*

*Ключові слова: карти навколишнього середовища, освітленість, яскравість, коефіцієнти відображення Ламберта, попередня фільтрація сферичних гармонік.*

S.I. VYATKIN

Institute of Automation and Electrometry SB RAS

O.N. ROMANYUK, O. M. REIDA, O.O. YAKOVENKO

Vinnitsia National Technical University

## VISUALIZATION OF THREE-DIMENSIONAL OBJECTS USING AN ANALYTICAL TASK OF ILLUMINATION THE ENVIRONMENT

*The realism of the formation of graphic scenes is largely determined by the illumination of the environment. Illumination in the real scenes is a physically complex phenomenon that includes various sources,*

*such as local illumination areas and large continuous lighting distributions. Current graphics hardware supports only point or directional light sources. One of reasons is the lack of simple procedural formulas for common illumination distributions. The purpose of the work is to use an analytical quantitative formula for radiation, which formalizes observations and allows fundamental approximation.*

*This work focuses on the Lambert component of bidirectional radiation. The radiation environment map is used for diffuse reflection. The map is indexed along the surface normal, each pixel stores the illumination for a certain orientation of the surface.*

*An effective presentation of the illumination the environment maps is proposed. We consider the visualization of objects with the use of the illumination the environment maps. Using the analytical task to emit the components of the spherical harmonics of the illumination harmonics allows us to calculate and apply nine coefficients corresponding to low-frequency types of illumination in order to minimize mistakes. The radiation is insensitive to high frequencies in illumination, and is well approximated using only nine parameters. The radiation can be represented procedurally as a quadratic polynomial in the Cartesian components of the surface normal and can be expressed explicitly. This leads to a simple and effective procedural rendering algorithm, using graphics processors hardware.*

*The method allows to use of arbitrary illumination distribution for the components of bidirectional reflection. This removes the limitations of current graphics equipment for point and directional light sources. The method allows you to effectively calculate the texture maps of the illumination the environment and can be used in systems of highly realistic graphics.*

*Keywords: environment maps, illumination, brightness, Lambert reflection coefficients, preliminary filtration of spherical harmonics.*

### **Постановка проблемы**

Освещение в реальных сценах является физически сложным явлением [1-4], включающим различные источники, такие как области локального освещения и большие непрерывные распределения освещения, такие как свет от Солнца. Текущее графическое оборудование поддерживает только точечные или направленные источники света. Одна из причин – это отсутствие простых процедурных формул для общих распределений освещения.

### **Анализ последних исследований и публикаций**

Для расчета освещения необходимо интегрирование по верхней полусфере для каждого пикселя. Один из подходов к использованию общих распределений освещения – это метод карт окружающей среды. Карты окружающей среды - это представления о происшедшем освещении в какой-то момент времени. С помощью таких карт можно эффективно находить отражения далеких объектов [5]. Предварительно фильтрованные карты окружающей среды, и предварительное вычисление отдельных карт отражения для диффузного и зеркального двунаправленного отражения приведены в [8]. В [7] обработанные общие двунаправленные отражения используют 2D-наборы предварительно созданных изображений. Предварительная фильтрация – это автономный, и вычислительно дорогой процесс. После предварительной фильтрации, рендеринг, как правило, может быть выполнен на интерактивных скоростях с поддержкой графического оборудования с помощью текстуры.

Эмпирически хорошо известно, что отраженная интенсивность от диффузной поверхности изменяется медленно в зависимости от ориентации поверхности. Это было использовано для обоснования представления карты освещенности окружающей среды с низким разрешением и в эффективном вычислении затенения иерархически [8].

### **Цель исследования**

Цель данной работы - использовать аналитическую количественную формула для излучения, которая формализует эти наблюдения и допускает принципиальное приближение.

В настоящей работе основное внимание уделяется Ламбертовской составляющей двунаправленного излучения. Используется карта среды излучения для диффузного отражения. Карта индексируется по нормали поверхности, каждый пиксель хранит освещенность для определенной ориентации поверхности. Для таких приложений, как игры, карты излучения часто хранятся непосредственно на поверхности, а не как функция вектора нормали, и называются световыми картами. Карты освещенности окружающей среды также могут быть расширены до пространственно-изменяющейся освещенности путем вычисления излучения объема [9]. Многие из этих идей могут быть применены для ускорения алгоритмов глобального освещения. Например, интерполяция с использованием градиентов освещенности, или идея сохранения освещенности в зависимости от ориентации поверхности с помощью ориентационных световых карт. Ключом к предлагаемому в работе подходу является быстрое вычисление аналитического приближение к карте среды излучения. Для рендеринга, применяется простой процедурный алгоритм, который работает в интерактивном режиме с

аппаратной поддержкой графических процессоров. Этот процедурный подход предпочтительнее, чем сопоставление текстур в некоторых приложениях.

Требуется пройти только один текстурный проход для рендеринга текстурированных объектов с картой освещенности окружающей среды, поскольку освещенность вычисляется процедурно. С другой стороны, стандартный подход требует отдельной текстуры для освещенности, и должен иметь поддержку мультитекстурирования или несколько проходов текстурирования. В других приложениях, где отображение текстуры относительно недорого, метод может быть использован для очень эффективного вычисления излучения текстурной карты окружающей среды. Такое представление также предлагает новые подходы к вычислению освещенности и рендерингу на основе изображений.

#### Изложение основного материала исследования

Пусть  $L$  обозначает распределение освещения. Излучение  $I$  - функция поверхностной нормали  $\vec{n}$  и задается интегралом над верхней полусферой  $\Psi(\vec{n})$ .

$$I(\vec{n}) = \int_{\Psi(\vec{n})} L(l)(l \cdot \vec{n}) dl \quad (1)$$

Где  $\vec{n}$  и  $l$  - единичные векторы направления, т. е.  $I$  и  $L$  могут быть параметризованы с помощью направлений  $(\alpha, \beta)$  на единичной сфере.

Необходимо масштабировать  $I$  с помощью отражательной способностью поверхности  $\lambda$ , которая может быть зависимой от позиции  $\vec{p}$  и описываться текстурой, чтобы найти излучение  $R$ , которое непосредственно соответствует интенсивности изображения.

$$R(\vec{p}, \vec{n}) = \lambda(\vec{p})I(\vec{n}) \quad (2)$$

Необходимо найти приближение  $I$ . В данной работе применяются формулы для прямого рендеринга диффузных объектов с картами среды. Формулы содержат компоненты сферических гармонических коэффициентов. Сферические гармоники являются на сфере аналогом базису Фурье на прямой или круге.

$$(x, y, z) = (\sin \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \beta) \quad (3)$$

$I(\alpha, \beta)$  и  $L(\alpha, \beta)$  могут быть представлены коэффициентами —  $I_{km}$  и  $L_{km}$  в их сферическом гармоническом расширении.

$$I(\alpha, \beta) = \sum_{km} I_{km} G_{km}(\alpha, \beta) \quad (4)$$

$$L(\alpha, \beta) = \sum_{km} L_{km} G_{km}(\alpha, \beta) \quad (5)$$

где  $G_{km}$  - сферические гармоники:

$$G_{00}(\alpha, \beta) = const_1 \quad (6)$$

$$(G_{11}; G_{10}; G_{1-1})(\alpha, \beta) = const_2(x, y, z) \quad (7)$$

$$(G_{21}; G_{2-1}; G_{2-2})(\alpha, \beta) = const_3(xz; yz; xy) \quad (8)$$

$$G_{20}(\alpha, \beta) = const_4(3z^2 - 1) \quad (9)$$

$$G_{22}(\alpha, \beta) = const_5(x^2 - y^2) \quad (10)$$

Также определим  $A = (\vec{n} \cdot l)$  с коэффициентами  $A_{km}$ . Поскольку нет азимутальной зависимости,  $m = 0$ , используем только индекс  $k$ .

$$A(\alpha) = \max[\cos(\alpha, 0)] = \sum_k A_k G_{10}(\alpha) \quad (11)$$

С помощью этих определений можно показать, что

$$I_{km} = \sqrt{4\pi A_k L_{km} / 2k + 1} \quad (12)$$

Определим новую переменную

$$\hat{A}_k = \sqrt{4\pi A_k / 2k + 1} \quad (13)$$

Для рендеринга, будет удобно расширить

$$I(\alpha, \beta) = \sum_{km} \hat{A}_k L_{km} G_{km}(\alpha, \beta) \quad (14)$$

Аналитическая формула для  $A_k$  может быть получена. Можно показать, что  $\widehat{A}_k$  обращается в нуль для нечетных значений  $k > 1$ , и снизиться очень быстро до  $k^{-5/2}$ . Аналитические формулы приведены ниже

$$\begin{aligned} k = 1, \widehat{A}_1 &= 2\pi/3, \\ k > 1, \text{ odd}, \widehat{A}_k &= 0 \\ k \text{ even}, \widehat{A}_k &= \frac{2\pi(-1)^{k/2-1}}{(k+2)(k-1)} \left[ \frac{k!}{2^k \left(\frac{k}{2}!\right)^2} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

Для рендеринга, нужно учитывать только низкочастотное освещение. Работая в частотном пространстве, используем низкочастотный характер  $A = (\vec{n} \cdot \vec{l})$ , применяя несколько коэффициентов вместо полного полусферического интеграла. Простая форма первых девяти сферических гармоник, делает реализацию простой.

#### Предварительная фильтрация

Для данной карты окружающей среды, находим девять коэффициентов освещения, путем интегрирования вместо сферических гармоник базисной функции. Каждый цветовой канал обрабатывается отдельно, поэтому коэффициенты можно рассматривать как значения RGB.

$$L_{km} = \int_{\alpha=0}^{\pi} \int_{\beta=0}^{2\pi} L(\alpha, \beta) G_{km}(\alpha, \beta) \sin \alpha \, d\alpha d\beta$$

Выражения для  $G_{km}$  находятся в соответствии с уравнениями (6-10). Интегралы являются суммами пикселей в карте окружения  $L$ , взвешенными по функциям  $G_{km}$ . Интегралы также можно рассматривать как моменты освещения, или как внутренние произведения функций  $L$  и  $G_{km}$ . Поскольку вычисляем девять чисел, шаг предварительной фильтрации занимает  $O(9S)$  времени, где  $S$ -размер (общее количество пикселей) карты окружающей среды. Для сравнения, стандартный метод вычисления карты текстуры окружающей среды освещенности занимает  $O(T \cdot S)$  времени, где  $T$ - число текселей в карте окружающей среды. Предлагаемый метод поэтому будет приблизительно в  $T/9$  раз быстрее. Хотя обычная карта окружающей среды вычислена на очень низком разрешении  $64 \times 64$ , соответствующий  $T = 4096$ , предлагаемый метод будет почти в пятьсот раз быстрее. Реализована предварительная фильтрация как шаг предварительной обработки данных карты окружающей среды. Время вычисления для карты окружающей среды с разрешением  $300 \times 300$  составило 30 миллисекунд. Это свидетельствует о том, что с применением предлагаемого подхода, удастся обрабатывать сцены с динамическим освещением. Для стандартного метода вычисления полусферического интеграла для каждого пикселя карты среды освещенности заняло примерно два часа. Если явное представление освещенности окружающей среды текстурной карты потребуется применить, то сначала надо вычислить девять коэффициентов  $L_{km}$ , используя предлагаемый метод, а затем использовать их для очень быстрого создания карты среды освещения. Максимальная ошибка для любого пикселя, как дробь от общей интенсивности освещения, составляет 9% и соответствует максимальной погрешности в порядке 2 аппроксимации  $A(\alpha)$ . Кроме того, можно показать среднюю ошибку по всем ориентациям поверхности под 3% для любого физического распределения освещения. Для карты окружающей среды, используемые в приведенных примерах, соответствуют сложному естественному освещению, - средняя ошибка меньше 1%, а максимальная ошибка пикселя 5%. На рис. 1 и 2 представлено визуальное сравнение качества результатов со стандартным фильтром. Они показывают, что предлагаемый метод дает perceptively более точный результат.

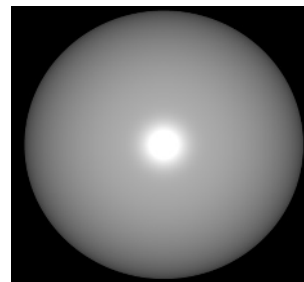
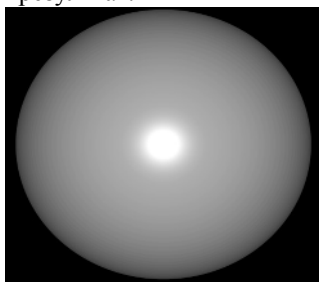


Рис. 1. Стандартный метод вычисления полусферического интеграла



Рис. 2. Предлагаемый метод с использованием  
аналитического задания освещенности окружающей

среды

Конечное изображение состоит из суммы сферических гармонических базисных функций, масштабируемых коэффициентами освещения  $L_{km}$ . Эти базисные функции 3D-излучения зависят от нормалей поверхности и определены над всем объектом, делая возможным генерировать изображение из любой точки зрения. Можно также вручную отрегулировать девять коэффициентов освещения  $L_{km}$  для непосредственного управления внешним видом, как показано на рисунках 3-6. Коэффициенты освещения при необходимости могут быть назначены интуитивно.

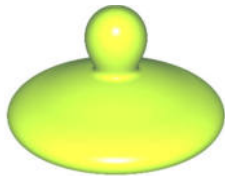


Рис. 3.  $K_m=(0,0)$ ;  $L_{km}=0.5$



Рис. 4.  $K_m=(1,0)$ ;  $L_{km}=0.05$



Рис. 5.  $K_m=(2,0)$ ;  $L_{km}=-0.2$



Рис. 6.  $K_m=(2,2)$ ;  $L_{km}=-0.06$

### Выводы

Предложено аналитическое представление для карт освещенности окружающей среды, с использованием явного задания уравнения. Метод позволяет использовать произвольное распределение освещения для компонент двунаправленного отражения. Это снимает ограничения текущего графического оборудования для точечных и направленных источников света. Метод позволяет эффективно вычислить текстуры карт окружающей среды освещения.

### Список использованной литературы

1. Романюк О. Н., Чорний А. В. Високопродуктивні методи та засоби зафарбовування тривимірних графічних об'єктів : монографія. Вінниця : УНІВЕСУМ-Вінниця, 2006. 190 с.
2. Романюк О. Н. Комп'ютерна графіка : навч. посіб. Вінниця : ВДТУ, 2001. 129 с.
3. Романюк О. Н. Дослідження дистрибутивних функцій відбивної здатності поверхонь : оптико-електронні інформаційно-енергетичні технології. 2007. № 1(13). С. 45-49.
4. Романюк О. Н. Класифікація дистрибутивних функцій відбивної здатності : наукові праці Донецького національного технічного університету : Інформатика, кібернетика і обчислювальна техніка. 2008. Випуск 9 (132). С. 145-151.
5. Carey R. J., Greenberg D. P. Textures for realistic image synthesis. *Computer & Graphics*. 1985. Vol. 9, Iss. 2. P. 81-176. URL: [https://doi.org/10.1016/0097-8493\(85\)90020-2](https://doi.org/10.1016/0097-8493(85)90020-2)
6. Zigelman G., Kimmel R., Kiryati N. Texture mapping using surface flattening via multidimensional scaling. *Visualization and Computer Graphics IEEE Transactions on*. 2002. Vol. 8, № 2. P. 198-207. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/998671>
7. Al-Saidi A., Avis N.J., Grimstead I.J., Rana O.F. Distributed Collaborative Visualization Using Light Field Rendering. *Cluster Computing and the Grid 2009. CCGRID '09. 9th IEEE/ACM International Symposium on*. 2009. P. 609-614. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/5071930>
8. Wolfgang Heidrich and Hans-Peter Seidel. View-independent Environment Maps. URL: <https://my.eng.utah.edu/~cs5610/handouts/parab-env-map.pdf>
9. Dachsbacher C., Stamminger M. Splatting indirect illumination. *Proceeding I3D 06 Proceedings of the 2006 symposium on Interactive 3D graphics and games*. Redwood City, California, March 14-17, 2006. ACM New York, NY, USA, 2006. P. 93-100. URL: <https://dl.acm.org/citation.cfm?id=1111428>



### References

1. Romaniuk O. N., Chornyi A. V. Vysokoproduktyvni metody ta zasoby zafarbovuvannia tryvymirnykh hrafichnykh ob'ektiv : monohrafiia. Vinnytsia : UNIVESUM-Vinnytsia, 2006. 190 s.
2. Romaniuk O. N. Kompiuterna hrafika : navch. posib. Vinnytsia : VDTU, 2001. 129 s.
3. Romaniuk O. N. Doslidzhennia dystrybutyvnykh funktsii vidbyvnoi zdatnosti poverkhon : optyko-elektronni informatsiino-enerhetychni tekhnolohii. 2007. № 1(13). S. 45-49.
4. Romaniuk O. N. Klasyfikatsiia dystrybutyvnykh funktsii vidbyvnoi zdatnosti : naukovi pratsi Donetskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu : Informatyka, kibernetyka i obchysliuvalna tekhnika. 2008. Vypusk 9 (132). S. 145-151.
5. Carey R. J., Greenberg D. P. Textures for realistic image synthesis. Computer & Graphics. 1985. Vol. 9, Iss. 2. P. 81-176. URL: [https://doi.org/10.1016/0097-8493\(85\)90020-2](https://doi.org/10.1016/0097-8493(85)90020-2)
6. Zigelman G., Kimmel R., Kiryati N. Texture mapping using surface flattening via multidimensional scaling. Visualization and Computer Graphics IEEE Transactions on. 2002. Vol. 8, № 2. P. 198-207. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/998671>
7. Al-Saidi A., Avis N.J., Grimstead I.J., Rana O.F. Distributed Collaborative Visualization Using Light Field Rendering. Cluster Computing and the Grid 2009. CCGRID 09. 9th IEEE/ACM International Symposium on. 2009. P. 609-614. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/5071930>
8. Wolfgang Heidrich and Hans-Peter Seidel. View-independent Environment Maps. URL: <https://my.eng.utah.edu/~cs5610/handouts/parab-env-map.pdf>
9. Dachsbacher C., Stamminger M. Splatting indirect illumination. Proceeding I3D 06 Proceedings of the 2006 symposium on Interactive 3D graphics and games. Redwood City, California, March 14-17, 2006. ACM New York, NY, USA, 2006. P. 93-100. URL: <https://dl.acm.org/citation.cfm?id=1111428>

УДК 517.9

О.П. ДЕМ'ЯНЧЕНКО

Азовський морський інститут національного університету "Одеська морська академія"

В.П. ЛЯШЕНКО

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського

## ТЕПЛОВА УМОВА СПРЯЖЕННЯ У ДВОШАРОВІЙ ОБЛАСТІ

*У роботі отримано умову теплового спряження між шарами з різними теплофізичними характеристиками шарів у двошаровій циліндричній області при щільному контакті шарів. Ця умова побудована з використанням умови теплового балансу підобласті яка включає границю розділу шарів. Метою отримання такої умови стала побудова та дослідження математичної моделі визначення температурного розподілу у валках під час прокатки металеві стрічки чи профілів. На основі рівняння теплового балансу елемента двошарової циліндричної області, за допомогою теорем Остроградського - Гауса та узагальненої «про середнє» побудована умова імпедансного типу, яка поряд із нормальною похідною містить тангенціальну похідну та похідну за часом.*

*Ключові слова : математична модель, двошарова область, умова теплового балансу, умова імпедансного типу.*

В.П. ЛЯШЕНКО

Азовский морской институт национального университета "Одесская морская академия"

О.П. ДЕМ'ЯНЧЕНКО,

Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского

## УСЛОВИЯ СОПРЯЖЕНИЯ ПРИ ТЕПЛООБМЕНЕ В ДВУХСЛОЙНОЙ ОБЛАСТИ

*В работе получено условие теплового сопряжения между слоями с различными теплофизическими характеристиками слоев в двухслойной цилиндрической области при плотном контакте слоев. Это условие построено с использованием условия теплового баланса подобласти, которая включает границу раздела слоев. Целью получения такого условия стало построение и исследование математической модели определения температурного распределения в валках при прокатке металлической ленты или профилей. На основе уравнения теплового баланса элемента двухслойной цилиндрической области, с помощью теорем Остроградского - Гаусса и обобщенной «о среднем», построено условие импедансного типа, которое вместе с нормальной производной содержит тангенциальную производную и производную по времени.*

*Ключевые слова: математическая модель, двухслойная область, условие теплового баланса, условие импедансного типа.*

V. LYACHENKO

Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyyi National University

O. DEMYANCHENKO,

Mariupol, Azov Maritime Institute of National University "Odessa Maritime Academy" Ukraine

## DETERMINATION CONDITION AT HEAT EXCHANGER IN TWO-DIMENSIONAL AREA

*Modern requirements for the quality of products in the rolling industry require increased reliability of the tool, in particular the stability of rolls. This is possible due to the use of two-layer rolls, the outer layer of which is made of wear-resistant, and the interior of heat-resistant materials. Increasing the durability of two-layer rolls is possible by optimizing their temperature mode and controlling the heat transfer process in a roller caliber by means of a mathematical model and systems of computer mathematics. In mathematical models of heat exchange in multilayer canonical and non-canonical domains, it is often necessary to solve problems with boundary conditions of the third kind. The publication relates to mathematical models describing the processes of heat transfer in the rolling industry, in particular during the rolling of the tape and profiles.*

*The purpose of the work is to construct a mathematical model of the heat transfer process during the rolling of a metal on two roll rolling mills, equipped with hollow two-layer rolls with different thermophysical parameters of the layers and with different heat transfer conditions of the inner and outer surfaces of the rolls with the surrounding environment.*

*The content of the work. The mathematical model of a system of a two-layer rolling roll of a rolling mill moving around its axis with constant velocity and a deformable tape leads to the solution of a nonlinear boundary value problem with nonlinear conditions of the heat transfer of the roll surface with its surrounding environment and the transfer of heat from the surface of the roll to its axis. To determine the temperature distribution in a two-layer shaft, it is necessary to solve a boundary value problem with the limiting condition of the fourth kind, which consists in the equality of temperatures and the equality of heat fluxes across the boundary of the layers.*

*This raises difficulties in implementing the algorithm for solving the problem by numerical methods.*

*In the work, by means of the condition of the thermal balance of the region (a part of a two-layer roll), which includes the boundary between the two layers in the dense layer contact by integrating this condition and the inclusion of the Ostrogradsky-Gauss theorem and the generalized "about the mean value", we obtain the condition of the conjugation of the impedance type, with a normal derivative contains tangential derivatives.*

*The obtained condition of the impedance type is an alternative conjugation condition of the fourth kind but has advantages over the condition of conjugation of the fourth kind when solving a nonlinear boundary value problem by a numerical method.*

*Conclusion. The condition of the impedance type can be used in solving boundary value problems for both homogeneous and nonuniform heat equations.*

*Keywords: mathematical model, two-layer region, condition of thermal balance, condition of impedance type.*

### **Постановка проблеми**

Сучасні вимоги щодо якості продукції у прокатному виробництві вимагають підвищення надійності роботи інструменту, зокрема стійкості валків. Це можливо за рахунок використання математичних моделей, що описують температурні розподіли двошарових валків, зовнішній шар яких виготовлений із зносостійких, а внутрішній із термостійких матеріалів, та за рахунок оптимізації їх температурного режиму роботи.

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Багато авторів, які працюють у прокатному виробництві, вважають, що підвищення стійкості валків шляхом оптимізації теплового режиму їх роботи є перспективним і актуальним. Воно можливе за рахунок створення систем керування прокатними станами з використанням фізичних та математичних моделей [2-4,7]. Фізичні моделі теплового стану валків потребують значної кількості досліджень. Вони повинні враховувати основні параметри технологічного процесу прокатки та дозволяти їх узагальнення на різні типи прокатних станів. Такі фізичні моделі найбільш ефективно будувати на лабораторних прокатних станах [7,9]. Ці моделі дають змогу визначити основні показники технологічного процесу, які потім можуть бути використані при побудові та дослідженні математичних моделей теплообміну під час прокатки стрічки та профілів. Для дослідження математичних моделей та розв'язку задач, що виникають у цих моделях оптимізації режиму теплообміну, необхідно мати достовірні експериментальні дані про теплове поле металу, що контактує з валками та про тепло деформації під час прокатки [7]. Також необхідні дані про коефіцієнти теплообміну валків з металом у зоні деформації та оточуючим середовищем, наприклад водою, що охолоджує валки прокатного стану. Таку інформацію, зазвичай, можна отримати на експериментальних прокатних станах, оснащених відповідним програмним забезпеченням та математичною обробкою результатів експериментів [7-10]. Побудові математичних моделей температурних розподілів у багатошарових областях з різними теплофізичними характеристиками шарів присвячено багато робіт [4-7,10-13]. У більшості цих робіт при визначенні температурних розподілів використовується умова спряження 4-го роду, яка полягає у рівності теплових потоків та температур на границі шарів [15]. Ця умова інколи приводить до певних складнощів при розв'язанні задач.

### **Мета роботи**

Мета роботи є побудова математичної моделі процесу теплообміну під час прокатки металу на двох валковому прокатному стані, оснащеному порожнистими двошаровими валками з різними теплофізичними параметрами шарів та з різними умовами теплообміну внутрішньої та зовнішньої поверхонь валків з оточуючим їх середовищем (Рис.1).

### **Викладення основного матеріалу дослідження**

Побудуємо умови спряження у двошаровому валку прокатного стану. Зазвичай двошарові валки прокатного стану мають різні теплофізичні властивості, між якими має місце щільний тепловий контакт. Тепло від поверхні двошарового валка циліндричної форми передається до його осі теплопровідністю. Розглянемо механізм теплової взаємодії між шарами при переході від одного шару до іншого.

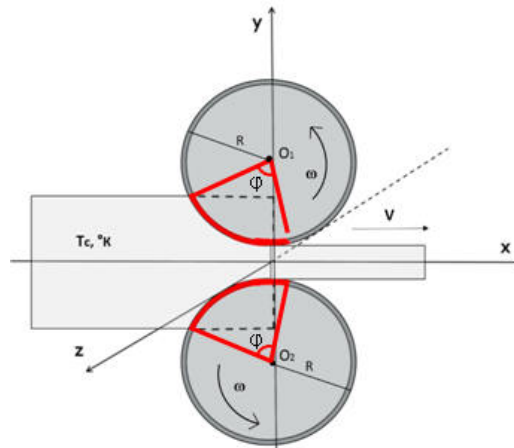


Рисунок 1. Схема прокатки або відпалу стрічки на прокатному стані

Цю взаємодію дозволяє враховувати умова спряження четвертого роду [1,14]. Така теплофізична модель процесу теплообміну під час прокатки приводить до математичної моделі, в основу якої покладено однорідне або неоднорідне рівняння теплопровідності, яке в області  $\Omega \times t = \{(r, \varphi) | R_1 < r < R, 0 < \varphi < 2\pi, 0 < z < l, t > 0\}$  має вигляд

$$\lambda_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_i}{\partial r} \right) + \lambda_i \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \varphi^2} + \lambda_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} - c_i \rho_i \frac{\partial u_i}{\partial t} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

Будемо вважати, що у двошаровому валку відсутні внутрішні джерела тепла. Розглянемо рівняння балансу тепла у довільній точці шару підобласті  $\gamma \in \Omega$  (Рис 2)

$$\int_{\gamma} [\text{div}(\lambda \text{grad } u) - c \rho u_t] ds = 0. \quad (2)$$

У нашому випадку підобласть  $\gamma$  – це частина кільця, що розташована між колами радіусів  $R_2$  і  $R_1$  ( $R_2 > R_1$ ) та двома радіусами, які утворюють з початком координат кути  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  ( $\varphi_2 > \varphi_1$ ). Поворот радіуса здійснюється від кута  $\varphi_1$  до кута  $\varphi_2$  (проти годинникової стрілки).

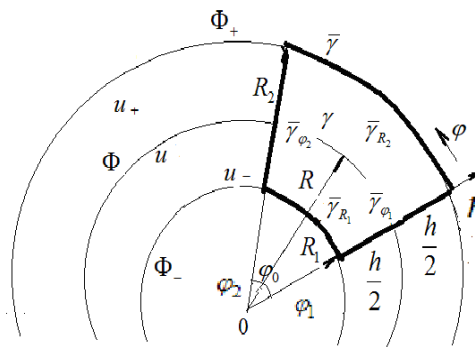


Рисунок 2– Підобласть  $\gamma$

Позначимо

$$u = \frac{u_+ + u_-}{2} + \frac{u_+ - u_-}{h} r = \bar{u} + \bar{u}' r \quad (3)$$

$$R_2 = R + \frac{h}{2}; \quad R_1 = R - \frac{h}{2} \quad (4)$$

де  $u_+, u_-, u$  - усереднена температура,  $h$  - товщина шару.

Перетворимо перший доданок інтеграла (2), скориставшись наслідком формули Гауса-Остроградського

$$\int_{\gamma} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u) ds = \int_{\bar{\gamma}} \lambda \frac{\partial u}{\partial r} dl, \quad (5)$$

де  $\bar{\gamma}$  - контур підобласті  $\gamma$ .

Розглянемо інтеграл уздовж границі  $\bar{\gamma}$

$$\int_{\bar{\gamma}} \lambda \frac{\partial u}{\partial r} dl = \int_{\bar{\gamma}_{R_1}} \lambda \frac{\partial u}{\partial r} dl + \int_{\bar{\gamma}_{R_2}} \lambda \frac{\partial u}{\partial r} dl + \int_{\bar{\gamma}_{\varphi_1}} \lambda \frac{\partial u}{\partial r} dl + \int_{\bar{\gamma}_{\varphi_2}} \lambda \frac{\partial u}{\partial r} dl$$

Перейшовши до полярних координат  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , при  $\lambda = \text{const}$  будемо мати

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u) = \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \lambda \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \quad (6)$$

Зінтегрувавши рівняння (6) по підобласті  $\gamma \in \Omega$  після перетворень отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u) ds &= \lambda \int_{\gamma} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right] r dr d\varphi = \\ &= \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial u(R_2, \varphi)}{\partial r} R_2 d\varphi - \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial u(R_1, \varphi)}{\partial r} R_1 d\varphi + \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} dr d\varphi. \end{aligned}$$

Аналогічно перетворивши третій доданок у останньому виразі, та скориставшись (3) будемо мати

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} dr d\varphi &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} u(r, \varphi) dr \right) d\varphi = \\ &= r_{cp}^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta \varphi \left( u_+ \left( \frac{1}{2} \ln \frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}} + 1 \right) + u_- \left( \frac{1}{2} \ln \frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}} - 1 \right) \right) d\varphi, \end{aligned}$$

$$\text{де } \frac{1}{r_s^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \Delta \varphi.$$

Обчислимо другий доданок із (2) з урахуванням (3) та (4) отримуємо рівняння

$$\lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R_2} R_2 d\varphi - \lambda \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R_1} R_1 d\varphi + \lambda r_s^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta \varphi \left[ u_+ \left( \frac{1}{2} \ln \frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}} + 1 \right) + u_- \left( \frac{1}{2} \ln \frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}} - 1 \right) \right] d\varphi -$$

$$- c\rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[ \dot{u}Rh + \dot{u}' \left( R^2h + \frac{h^3}{12} \right) \right] d\varphi = 0.$$

Застосовуючи теорему про середнє, отримаємо умову спряження імпедансного типу для циліндра [13].

$$\left( R + \frac{h}{2} \right) \lambda \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{R + \frac{h}{2}} - \left( R - \frac{h}{2} \right) \lambda \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{R - \frac{h}{2}} + \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \left( \bar{u} \ln \frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}} + \bar{u}'h \right) - c\rho \left[ \dot{u}Rh + \dot{u}' \left( R^2h + \frac{h^3}{12} \right) \right] = 0$$

Ці умови еквівалентні умовам спряження четвертого роду, що використовуються при розв'язанні задач у багатшарових областях.

#### Висновки.

У роботі отримано умову теплового спряження між шарами з різними теплофізичними характеристиками шарів у двошаровій циліндричній області при щільному контакті шарів. Ця умова побудована з використанням умови теплового балансу підобласті, яка включає границю розділу шарів. Метою отримання такої умови стала побудова та дослідження математичної моделі визначення температурного розподілу у валках під час прокатки металевої стрічки чи профілів. На основі рівняння теплового балансу елемента двошарової циліндричної області, за допомогою теорем Остроградського - Гауса та узагальненої «про середнє» побудовано умову імпедансного типу, яка поряд із нормальною похідною містить тангенціальну похідну.

#### Список використаної літератури

1. Березовский А. А. Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики. Ч. 1. Київ : Наукова думка, 1974. 452 с.
2. Дегнер М., Тамлер Х. У. Новые технические разработки в области горячей прокатки полосы. *Черные металлы*. 2001. N 10. С. 15–17.
3. Gefügeigenschaften von Bandstahl präziser steuern. *Stahlmarkt : Informativen aus stahlindustrie, Stahlhandel und Vekak Zeitung*. 2001. 51, N 1. P. 47.
4. Воробей С. А., Приходько И. Ю. Моделирование температурного режима рабочих валков широкополосного стана горячей прокатки. *Сучасні проблеми металургії. Наукові вісті*. Дніпропетровськ, 2005. Т. 8 : Пластична деформація металів. С. 232–235.
5. Иванцов Г. П. К теории теплообмена прокатных валков и раскаленного металла. *Журнал техн. физики*. 1937. Т. VII, вып. 10. С. 1114–1125.
6. Флейшман Н. П. Математичні моделі теплового спряження середовищ із тонкими чужорідними прошарками або покриттями. *Вісник Львів. ун-ту. Серія механіко-математична*. 1993. Вип. 39. С. 30–34.
7. Салтавец В. І., Салтавец М. В. Розробка математичної моделі теплового стану металу під час прокатки. *Науковий вісник будівництва*. Харків, 2003. Вип. 21. С. 162–169.
8. Тришевський О. І., Салтавец М. В. Система реєстрації температури в процесах обробки металів тиском. *Удосконалення процесів і обладнання обробки тиском в металургії і машинобудуванні* : тематич. зб. наук. пр. Краматорськ, 2005. С. 107–110.
9. Тришевський О. І., Салтавец М. В. Застосування прогресивних технологій при моделюванні високошвидкісних процесів гарячої прокатки. *Високі технології в машинобудуванні* : зб. наук. пр. / НТУ «ХП». Харків, 2005. С. 61–67.
10. Савула Я. Г. Математична модель теплоперенесення через тривимірне тіло з тонким плоским покриттям. *Вісник Львів. ун-ту. Серія механіко-математична*. 1995. Вип. 42. С. 3–7.
11. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б., Дем'янченко О. П. Математичні моделі теплообміну з умовами імпедансного типу у багатшарових областях. *Вісник Кременчуцького нац. ун-ту ім. М. Остроградського*. Кременчук, 2017. Вип. 6 (107), ч. 1. С. 37–43.



12. Ляшенко В. П., Аніськов О. В. Математична модель прокатки тонкої і надтонкої стрічки із тугоплавких і важкодеформованих металів. *Вісник Криворізького нац. ун-ту*. Кривий Ріг, 2016. Вип. 42. С. 68–72.
13. Ляшенко В. П., Козир А. Е., Дем'янченко О. П. Математична модель зі складними умовами теплообміну у сферичній області. *Вісник Кременчуцького нац. ун-ту ім. М. Остроградського*. Кременчук, 2017. Вип. 5. С. 21–27.
14. Лыков А. В. Теория теплопроводности. Москва : Высшая школа, 1967. 599 с.
15. V. Lyashenko, E. Kobilskaya, A. Zaika, O. Demyanchenko, T. Hryhorova. Mathematical model of heat transfer in an electric machine. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences : 10th International Conference for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences - AMiTaNS'18 : AIP Conference Proceedings*. 2018. Vol. 2025, N 1. 080006. URL: <https://doi.org/10.1063/1.5064926>

#### References

1. Berezovsky A. A Lectures on nonlinear boundary value problems of mathematical physics. Part 1. Kiev: Naukova Dumka, 1974. 452 p.
2. Degner M., Tamler H. U. New technical developments in the field of hot rolling of the strip. *Ferrous metals* 2001. N 10. P. 15-17.
3. Structural properties of steel strip more precise stevern. *Steel market: Informatinen from steel industry, steel trade and Vekak Zeitung*. 2001. 51, N 1. P. 47.
4. Vorobey S. A., Prikhodko I. Yu. Modeling of the temperature regime of the working rolls of the wide-band mill of hot rolling. *Modern problems of metallurgy. Scientific news. Dnipropetrovsk, 2005. T. 8: Plastic deformation of metals*. Pp. 232-235.
5. Ivantsov G. P, On the theory of heat transfer of rolling rolls and hot metal. *Tech. Magazine physics* 1937. T. VII, ed. 10. C. 1114-1125.
6. Fleishman N. P. Mathematical models of thermal conjugation of media with thin alien layers or coatings. *Visnyk Lviv. un-th Series mechanico-mathematical*. 1993. Issue 39. pp. 30-34.
7. Saltavets V. I., Saltavets M. V Development of mathematical model of the thermal state of metal during rolling. *Scientific Herald of Construction*. Kharkiv, 2003. Vp. 21. P. 162-169.
8. Trishevsky O. I., Saltavets M. V The system of temperature registration in processes of metal treatment by pressure. *Improvement of processes and equipment for pressure treatment in metallurgy and machine building: topics. save sciences* Kramatorsk, 2005. P. 107-110.
9. Tryshevsky O. I, Saltavets M. V Application of advanced technologies in the simulation of high-speed hot rolling processes. *High technologies in mechanical engineering: Sb. sciences etc. / NTU "KhPI"*. Kharkiv, 2005. 61-67.
10. Savula Y. G. Mathematical model of heat transfer through a three-dimensional body with a thin flat surface. *Visnyk Lviv. un-th Series mechanico-mathematical*. 1995. Issue 42. C. 3-7.
11. Lyashenko V. P, Kobylskaya O. B., Demyanchenko O. P. Mathematical models of heat transfer with conditions of impedance type in multilayered regions. *Bulletin of the Kremenchug National un-th them M. Ostrogradsky Kremenchug*, 2017. Vo. 6 (107), p. 1. P. 37-43.
12. Lyashenko V. P, Aniskov O. V. Mathematical model of rolling of thin and ultra thin tape from refractory and hard-deformed metals. *Bulletin of Krivoy Rog Nats. un-th Kryviy Rih*, 2016. Vip. 42. P. 68-72.
13. Lyashenko V. P, Kozyr A. E., Demyanchenko O. P. Mathematical model with complex heat transfer conditions in a spherical region. *Bulletin of the Kremenchug National un-th them M. Ostrogradsky Kremenchug*, 2017. Vo. 5. pp. 21-27.
14. Lykov A. V Theory of Thermal Conductivity. Moscow: Higher school, 1967. 599 p.
15. V. Lyashenko, E. Kobilskaya, A. Zaika, O. Demyanchenko, T. Hryhorova. Mathematical model of heat transfer in an electric machine. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences : 10th International Conference for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences - AMiTaNS'18 : AIP Conference Proceedings*. 2018. Vol. 2025, N 1. 080006. URL: <https://doi.org/10.1063/1.5064926>

УДК 621.51+539.3

А. О. КАРПІК<sup>1</sup>, Ю. С. ВОРОБІЙОВ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

<sup>2</sup> Інститут проблем машинобудування ім. А.М.Підгорного НАН України

### АНАЛІЗ НАПРУЖЕНЬ ЛОПАТКИ КОМПРЕСОРА ПІД ДІЄЮ ПОВЕРХНЕВОГО РОЗПОДІЛЕНОГО ТИСКУ НА ОСНОВІ ГАЗОДИНАМІЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПОТОКУ

*На базі чисельного моделювання в'язкої течії газу на основі рівнянь Нав'є-Стокса, осереднених за Рейнольдсом (RANS-модель), було проведено статичний аналіз лопатки компресора газотурбінного двигуна. Розрахунок параметрів течії в нестационарній тривимірній постановці, проведений за допомогою програмного комплексу F. В результаті було отримано розподіл полів тиску і швидкості в міжлопатковому каналі та виявлені несприятливі зони течії. На другому етапі було розроблено алгоритм, за допомогою якого встановлено взаємодію газодинамічного та механічного розрахункових комплексів. Отриманий розподілений тиск розглядається як крайові умови для скінченноелементної моделі лопатки. Наведено результати розрахунку.*

*Ключові слова: міжлопатковий канал, в'язка течія, чисельне моделювання, розподілений тиск, скінчено-елементна модель, напружено-деформований стан.*

А. А. КАРПІК<sup>1</sup>, Ю. С. ВОРОБЬЕВ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

<sup>2</sup> Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины

### АНАЛИЗ НАПРЯЖЕНИЙ ЛОПАТКИ КОМПРЕСОРА ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ДАВЛЕНИЯ НА ОСНОВИИ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОТОКА

*На базе численного моделирования вязкого течения газа на основе уравнений Навье-Стокса, усредненных по Рейнольдсу (RANS-модель), был проведен статический анализ лопатки компрессора газотурбинного двигателя. Расчет параметров течения в нестационарной трехмерной постановке проведен с помощью программного комплекса F. В результате были получены распределенные поля давления и скорости в межлопаточном канале, и выявлены неблагоприятные зоны течения. На втором этапе был разработан алгоритм, с помощью которого установлена взаимосвязь газодинамического и механического расчетных комплексов. Полученное распределенное давление было приложено на конечно-элементную модель лопатки и проведен статический анализ.*

*Ключевые слова: межлопаточный канал, вязкое течение, численное моделирование, распределенное давление, конечно-элементная модель, напряженно-деформируемое состояние.*

A. KARPIK<sup>1</sup>, Yu. VOROBIEV<sup>2</sup>

<sup>1</sup> National technical university "Kharkiv polytechnic institute"

<sup>2</sup> A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the Ukrainian Academy of Sciences

### STRESS ANALYSIS OF THE COMPRESSOR BLADE UNDER. ACTION OF DISTRIBUTED PRESSURE BASED ON GAS DYNAMIC FLOW SIMULATION

*Basis of numerical simulation of turbulent viscous gas flow, using the Navier-Stokes equations averaged the Reynolds (RANS-model), a static analysis of the gas turbine compressor blade was performed. Occurrence of periodically changing gas forces is caused by the irregularity of the gas flow in the flow part. These forces cause forced vibrations of the blade. A first stage of solving a dynamic problem is the calculation of static strength. At the same time, the distribution of stress-strain components can be considered as the upper estimation of the corresponding components and stress intensity.*

*The simulation of flow parameters in three-dimensional formulation was carried out. For the solution of system of the equations the iterative differential scheme was built. The initial equations are integrated numerically by use of the iterative explicit and implicit differential scheme with a second order approximation. The differential two-parametrical  $k-\omega$  SST Menter's model is used as a model of turbulence. As a result, distributed pressure and velocities in the blades channel were obtained and unfavorable flow zones were identified.*

An inter-program interaction was established, the data from the CFD-program with distributed pressure and coordinates of the computational grid nodes were imported to the mechanical software complex in order for determination of the stress-strain state of blade. The pressure was interpolated along the blade surface taking into account the differences in the design grids.

It is determined that the maximum displacement values are present at the input edge of the blade. As a result of determination of equivalent stresses according to Mises from the distribution pattern it is established that the maximum level is observed at the place of fixing the blade root. In the future, this approach is planned to be implemented to calculate the forced vibrations of the blade.

Key words: blade channel, viscous flow, numerical simulation, distributed pressure, finite element model, stress-strain state.

### Формулювання проблеми та її актуальність

Зростання потужності та конструкційної складності турбомашин супроводжується підвищенням вимог до їх надійності. Надійність двигунів у значній мірі визначається несучою здатністю робочих лопаток компресора, що знаходяться у складних умовах силового впливу та зазнають в процесі експлуатації значних знакозмінних та циклічних навантажень.

Виникнення періодично змінних газових сил обумовлено нерівномірністю газового потоку в проточній частині. Ці сили викликають вимушені коливання лопатки. Попереднім етапом розв'язку динамічної задачі є розрахунки на статичну міцність. При цьому розподіл компонентів напружено-деформованого стану може розглядатись як верхня оцінка відповідних компонентів та інтенсивності напружень.

### Аналіз попередніх досліджень

В даний час для розрахунку в'язкої течії в міжлопатковому каналі використовуються CFD пакети, що застосовуються для розв'язання рівнянь газової динаміки. У них реалізовані найбільш ефективні обчислювальні алгоритми для розв'язку систем рівнянь у вигляді методів скінчених різниць та скінчених об'ємів [2]. Реальна течія в міжлопатковому каналі характеризується турбулентністю, відривом потоку і виникненням вторинної течії [3]. Математичні моделі, що описують подібні явища, базуються на основі системи рівнянь Нав'є-Стокса. Урахування турбулентності є одним з визначальних чинників для оцінки характеристик реальної течії, отже, математична модель повинна включати відповідні рівняння.

Багато наукових робіт присвячено проведенню механічних розрахунків елементів турбомашин. Мета розрахунку пера лопатки на статичну міцність полягає у визначенні напруги та запасу міцності в різних перерізах за довжиною пера лопатки [4]. Розрахунок реальної лопатки на статичну міцність з урахуванням всіх діючих навантажень представляє собою складну задачу, яка не має в загальному випадку аналітичного розв'язку, але яка розв'язується за допомогою чисельних методів

### Формулювання мети дослідження

В даній статті надано результати статичного розрахунку лопатки компресора газотурбінного двигуна на основі газодинамічного моделювання потоку в міжлопатковому каналі. Дану задачу було вирішено в декілька етапів: визначення параметрів течії в міжлопатковому каналі; підготовка та застосування програмного забезпечення для проведення міжпакетної взаємодії для газодинамічного процесору та програмного комплексу аналізу НДС; розв'язок задачі визначення НДС при дії розподіленого по поверхні лопатки тиску.

Об'єктом дослідження є робоча лопатка першого робочого колеса.

Чисельне моделювання проведено за допомогою програмного комплексу  $F$  [2, 5], який базується на рішенні систем рівнянь Нав'є-Стокса, осереднених за Рейнольдсом.

Була створена розрахункова модель, що включає вхідний направляючий апарат та перше робоче колесо (ВНА та 1РК). Меридіональний переріз проточної частини зображено на рис. 1.

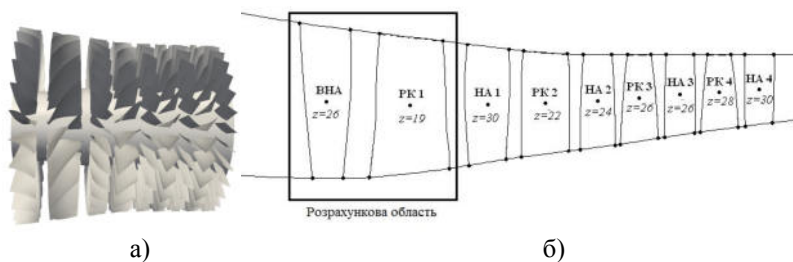


Рис. 1. Осьовий компресор ГТД

а) проточна частина

б) розрахункова область ВНА – вхідний направляючий апарат; РК – робоче колесо;

НА – направляючий апарат.

Розрахункова сітка обчислюваної області зображена на рис. 2.

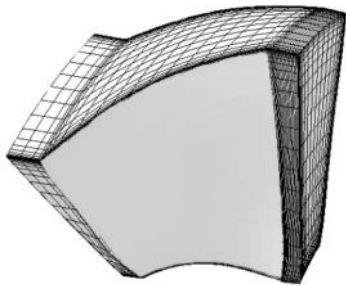


Рис. 2. Розрахункова сітка в міжлопатковому каналі.

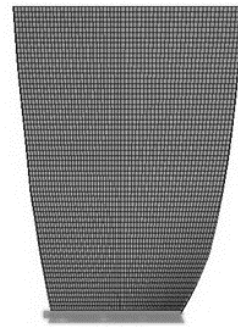


Рис. 3. Скінчено-елементна сітка лопатки.

В механічному пакеті була побудовано трьохвимірну модель лопатки, що використовується для проведення чисельних розрахунків. Скінчено-елементну сітку наведено на рис. 3. Оскільки лопатки компресора кріпляться до диску, в якості граничних умов для проведення аналізу було прийнято закріплення за трьома осями хвостовика лопатки.

#### Математична модель

Турбулентний потік в'язкого стисливого газу багатоступеневого компресора описується системою рівнянь Нав'є-Стокса, осереднених за Рейнольдсом (RANS-модель).

Рівняння (1) записано в локальній криволінійній системі координат, що зв'язана з обтікаючими тілами та обертається з постійною кутовою швидкістю  $\Omega$  відносно осі [2]:

$$\frac{\partial Q_j}{\partial t} + \frac{\partial F_j}{\partial \psi_i} = H_j,$$

де

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ h \end{bmatrix}, \quad F_j = \begin{bmatrix} \rho u_j \\ \rho u_1 u_j + \delta_{1j} p - \tau_{1j} \\ \rho u_2 u_j + \delta_{2j} p - \tau_{2j} \\ \rho u_3 u_j + \delta_{3j} p - \tau_{3j} \\ (h + p)u_j - u_i \tau_{ij} + q_j \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\rho u_2 \Omega + \rho \Omega^2 r_x \\ -2\rho u_1 \Omega + \rho \Omega^2 r_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$Q$  – вектор консервативних змінних;

$F_j$  – вектор потоку;

$H$  – вектор джерельних членів.

Для урахування процесу турбулентності використовується  $k-\omega$  SST модель Ментера [4].

Вихідні рівняння чисельно інтегруються за допомогою ітераційної явної-неявної різницевої схеми [3].

В комплексі аналізу НДС проводиться статичний розрахунок лопатки. Отримані результати статичного аналізу використовуються для визначення переміщень, напружень, деформацій, що виникають в лопатці.

Для розв'язку використовуються метод скінченних елементів (МСЕ). Для розв'язання задачі при дії незмінного тиску розглядається система лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (2)$$

де  $[K]$  – матриця жорсткості;

$\{F\}$  – вектор вузлових сил;

$\{u\}$  – вектор вузлових переміщень.

Компоненти вектора вузлових сил  $\{F\}$  включають сили від поверхневого тиску, що діє на поверхню лопатки.

### Результати чисельного розрахунку

В результаті розрахунку були отримані розподілені поля швидкості і тиску газового потоку. Наявність радіального зазору над вінцем робочих лопаток істотно впливає на розподіл полів тиску і роботу ступені. При наявності градієнта тиску між спинкою і коритцем профілю лопатки відбувається перетікання газу через радіальний проміжок [6]. Розподіл полів тиску та швидкості зображено на рис. 4.

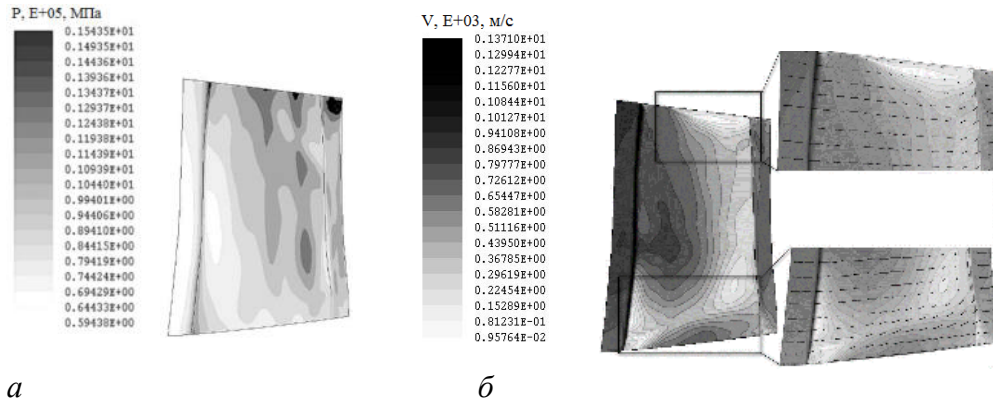


Рис. 4. Розподілення полів: *a* – тиску; *б* – швидкості.

Аналіз структури потоку виявив несприятливі зони течії, що характеризуються вихровою структурою.

Результатом розрахунку в CFD-розв'язувачі *F* є газодинамічні параметри потоку в проточній частині осевого компресора (тиск, швидкість і т.д.). Шляхом обробки і конвертації даних тиску, отриманих в пакеті *F*, надається можливість методом скінченних елементів розрахувати міцність лопаткового апарату в програмному комплексі скінчено-елементного аналізу. Дані дослідження дозволяють забезпечити оптимальну організацію потоку в міжлопатковому каналі і підвищити аеродинамічну якість профілів лопаткового апарату.

Отримані результати зображені на рис. 6 у вигляді переміщень та інтенсивності напружень за Мізесом. На рис. 5а представлені недеформований контур лопатки та її реальне положення. Максимальне значення інтенсивності напружень складає 662 МПа, що є меншим границі плину (рис. 5б). Таким чином деформування проходять в пружній області [7]. Локалізація областей високих напружень спостерігається у кореня лопатки, яким вона кріпиться до диску.

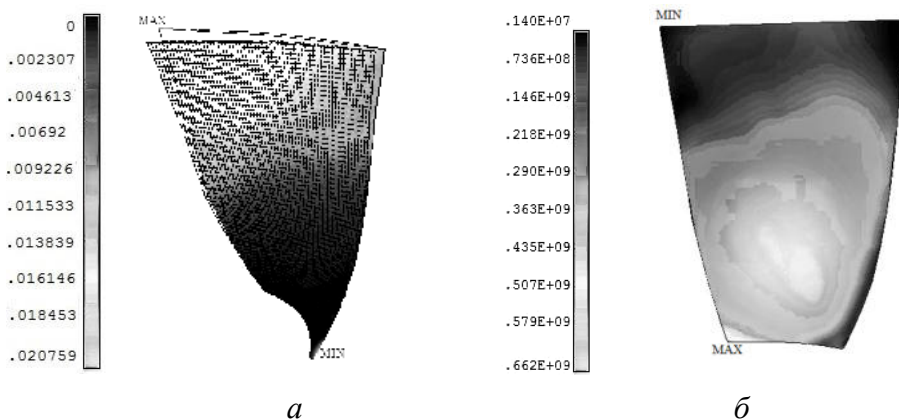


Рис. 5 – Результати розрахунку: *a* – переміщень; *б* – напружень за Мізесом.

### Висновки

В даній роботі був проведений статичний аналіз лопатки на основі тривимірного моделювання потоку. Виконаний аналіз може розглядатись як попередня оцінка рівня напружено-деформованого стану. На першому етапі розрахунку було проведено чисельне моделювання потоку в міжлопатковому каналі компресора газодинамічного двигуна. В результаті було визначено розподілення полів тиску по поверхні лопатки, яке складає основне силове навантаження на лопатку. Детальне моделювання потоку дає можливість виявити несприятливі зони течії та характеризувати величину енергетичних втрат компресора.



Була встановлена міжпрограмна взаємодія, за допомогою якої вихідні дані у вигляді файлів з розподіленим тиском та координатами вузлів розрахункової сітки були імпортовані до програмного комплексу з метою визначення рівня напружень. Проведено розрахунок лопатки при дії постійного тиску з метою визначення напружено-деформованого стану. Визначено, що максимальні значення переміщень присутні на вхідній кромці лопатки. В результаті визначення еквівалентних напружень за Мізесом з картини розподілення встановлено, що їхній максимальний рівень спостерігається в місці закріплення кореня лопатки. Надалі даний підхід планується реалізувати для розрахунку вимушених коливань лопатки.

#### Список літератури

1. Биргер И. А., Динамика авиационных газотурбинных двигателей / И.А. Биргер, Б.Ф. Шорр . – М. : Машиностроение, 1981. – 232 с.
2. Ершов С. В., Проблемы численного моделирования трехмерных вязких течений в осевых и центробежных компрессорах / С.В. Ершов, А.В. Русанов // Вісник СумДУ. – 2005. – № 1 (73). – С. 25 – 34.
3. Karpik A. Nonlinear Analysis Of Gas Flow In Compressors Stage Based On Cfd-Method / A.Karpik, Yu. Vorobiev // Proceeding softhe 5 th International Conference «Nonlinear Dynamics – 2016», 27 – 30, 2016, Kharkov. – Kharkov, 2016, – P. 318 – 319.
4. Menter F. R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications / F.R.Menter // AIAA J. – 1994. – V. 32. – No. 8. – P. 1598 – 1605.
5. Ершов С. В. Аэродинамическая оптимизация лопаточных аппаратов турбин : подходы, методы, результаты / С.В. Ершов, В.А Яковлев // Проблемы машиностроения. Серия : Аэро- и гидромеханика в энергетических машинах. – 2012. – Т. 15 (№ 2). – С. 3 – 13.
6. Карпик А. А. Анализ газодинамической структуры потока в решетках профилей осевого компрессора газотурбинного двигателя / А.А.Карпик, В.А. Яковлев, Ю.С. Воробьев // Проблемы машиностроения. – 2015. – №. 18, 4/2. – С. 18 – 23.
7. Воробьев Ю. С. Колебания лопаточного аппарата турбомашин. – Київ : Наукова думка, 1988. – 224 с.

#### References (transliterated)

1. Birger I. A., Shorr B. F. *Dinamika aviatsionnykh gazoturbinnnykh dvigateley* [Dynamics of aviation gas-turbine engines]. Moscow, Mashinostroeniye Publ., 1981. 232 p.
2. Yershov S. V. Rusanov A. V. Problemy chislenno go modelirovaniya trekhmernykh vyazkikh techeniy v osevykh i tsentrobezhnykh kompressorakh [Problems of numerical simulation of three-dimensional viscous flow in axial and centrifugal compressors]. *Visnyk SumDU* [Bulletin of Sumy State University]. 2005, no. 1 (73), pp. 25–34.
3. Karpik A., Vorobiev Yu. Nonlinear Analysis Of Gas Flow In Compressors Stage Based On Cfd-Method. *Proceeding softhe 5 th International Conference «Nonlinear Dynamics – 2016», Sept. 27 – 30, 2016, Kharkov.* Kharkov, 2016, pp. 318–319.
4. Menter F. R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // *AIAA J.* – 1994. – V. 32. – No. 8. – P. 1598 – 1605.
5. Yershov S., Yakovlev V. Aerodinamicheskaya optimizatsiya lopatochnykh apparatov turbin : podkhody, metody, rezul'taty [Aerodynamic optimization of turbine blades : approaches, methods, results]. *Problemy mashinostroeniya. Seriya : Aerodinamika i gidromekhanika v energeticheskikh mashinakh* [Problems of Mechanical Engineering. Ser. : Aero- and hydromechanics for energy machinery]. 2012, vol. 15, no. 2, pp. 3–13.
6. Karpik A. A., Yakovlev V. A., Vorobiev Yu. S. Analiz gazodinamicheskoy struktury potoka v reshetkakh profiley oseвого kompressora gazoturbinnogo dvigatelya [Analysis of the gas-dynamic structure of the flow in the blade channel of the axial compressor of a gas turbine engine]. *Problemy mashinostroeniya* [Problems of Mechanical Engineering]. 2015, no. 18, 4/2, pp. 18–23.
7. Vorob'yev Yu. S. *Kolebaniya lopatochnogo apparata turbomashin* [Колебания лопаточного аппарата турбомашин]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1988. 224 p.



УДК 656.6

П.В. КАШТАЛЬЯН

Херсонская государственная морская академия

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ СУДНО-ХОДОВОЙ МОСТИК

*В статье рассмотрены вопросы моделирования управления судном как сложной динамической системой. В состав нее помимо технических средств входит команда ходового мостика. Таким образом, рассматривается взаимодействие человек-человек и человек-машина в информационно-управляющем комплексе. По причине многообразия, психофизиологические особенности членов команды не берутся во внимание в данном исследовании. Вместо них учитываются более формализованные показатели эффективности работы: время на восприятие и обработку входящих данных, а также принятие решения и его исполнение. Целью исследования является разработка и обоснование методов моделирования динамики системы судно – команда навигационного мостика с учетом возмущений от качки, параметров загрузки и условий плавания.*

*В работе показано, что адекватная математическая модель, как элемент тренажерного комплекса, должна учитывать как поведение судна по его гидродинамическим характеристикам, так и управляющие воздействия со стороны команды ходового мостика. Таким образом, получили сложную иерархическую структуру управления судном, в вершине которой стоит старший судоводитель-ЛПР, а младший состав мостика является исполнительным механизмом. На основании этой структуры была составлена модель динамики судно-ходовой мостик и проведено моделирование управления судном в задаче устранения рыскания с учетом внешних возмущений. В предложенной модели использован упрощенный формализованный метод учета положения центра вращения судна в виде коэффициента. Полученные модели могут быть использованы при проведении тренажерной подготовки команд ходового мостика судна, а также для контроля эффективности работы действующих экипажей.*

*Ключевые слова: команда ходового мостика, регулярное волнение, модель в пространстве состояний, принятие решения, тренажерный комплекс, формирование возмущений, параметры загрузки судна, центр вращения судна, устранение рыскания.*

П.В. КАШТАЛЬЯН

Херсонська державна морська академія

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ СИСТЕМИ СУДНО-ХОДОВИЙ МІСТОК

*В статті розглянуто питання моделювання керування судном як складною динамічною системою. До її складу окрім технічних засобів входить команда ходового містка. Таким чином, розглядається взаємодія людина-людина та людина-машина в інформаційно-керуючому комплексі. З причини багатоманітності, психофізіологічні особливості членів команди не беруться до уваги в даному дослідженні. Натомість враховуються більш формалізовані показники ефективності роботи: час на сприйняття та обробку вхідних даних, а також прийняття рішення та його виконання. Метою дослідження є розробка та обґрунтування методів моделювання динаміки системи судно-команда навігаційного містка з врахуванням збурень від хитавиці, параметрів завантаження та умов плавання.*

*В роботі показано, що адекватна математична модель, як елемент тренажерного комплексу, має враховувати як поведінку судна за його гідродинамічними характеристиками, так і керуючі дії з боку команди ходового містка. Таким чином, одержали складну ієрархічну структуру керування судном, на вершині якої знаходиться старший судоводій – ОПР, а молодший склад містка є виконуючим механізмом. На основі цієї структури було сформовано модель динаміки судно-ходовий місток та проведено моделювання керування судном в завданні усунення рискання при врахованих зовнішніх збуреннях. В запропонованій моделі використано спрощений формалізований метод врахування положення центру обертання судна у вигляді коефіцієнта. Отримані моделі можуть бути використані при проведенні тренажерної підготовки команд ходового містка судна, а також для контролю ефективності роботи діючих екіпажів.*

*Ключові слова: команда ходового містка, регулярне хвилювання, модель в просторі станів, прийняття рішення, тренажерний комплекс, формування збурень, параметри завантаження судна, центр обертання судна, усунення рискання.*

## THE MATHEMATICAL MODEL OF WHEELHOUSE-VESSEL SYSTEM DYNAMICS

The safety of shipping is highly dependent on vessels' crew competence, their familiarization with equipment and ability to interpret information from different sources into correct and well-timed decisions. The simulation training complexes are widely used all over the industries where it is necessary to train decision-makers. However, they seldom consider the cooperation aspects between the Bridge Team members and mostly focus on the technical part of training. In order to implement the maritime resources management principles into Bridge Team simulator training it is necessary to analyze the model of vessel's control, which is usually performed from the wheelhouse.

The questions of vessel's control modelling as a complicated dynamic system are considered in this paper. This system consists of not only technical appliances but Bridge Team as well. Therefore, the human-human and human-machine interactions in information control complex are analyzed. The psychophysiological characteristics of team members are not applied in the current research due to their diversity. Instead, the more formalized work effectiveness indexes are considered: time for perception and processing of input data as well as decision-making and its execution. The aim of this article is development and justification of Vessel – Bridge Team system dynamics modelling with due regard to rolling, loading and sailing conditions disturbances.

It is shown that an adequate mathematical model as an element of a simulator training complex shall consider either the vessel's behavior based on her hydrodynamic features and Bridge Team control actions. In such a way a complicated hierarchical structure of vessel's control with a chief navigator – decision-maker at its top was obtained; and the junior bridge staff is the executive party.

Such a model allows to improve the level of automation of Bridge Team training simulator and for the instructor to perform a more accurate and unbiased assessment of personnel under training.

Key words: bridge team, regular waves, state space model, decision-making, simulator training complex, disturbances generation, loading conditions, pivot point, yawing elimination.

### Постановка проблеми

Безопасность и экономическая эффективность судоходства в значительной мере определяется качеством управления судном. Основой принятия качественных решений является учет свойств объекта управления и оптимальность алгоритмов, используемых в системе управления. Для задачи обеспечения работы судоводителя как элемента команды навигационного мостика, необходимо не только учитывать динамику судна и возмущения связанные с волнением, условиями мореплавания и параметрами загрузки судна, но и с оперативностью - динамическими характеристиками команды навигационного мостика. Основным методом повышения характеристик принимаемых решений командой ходового мостика является обучение и тренинг с использованием современных моделирующих систем. В этом свете актуальна задача разработки модели динамики системы судно – ходовой мостик.

### Анализ последних исследований и публикаций

Одним из основных возмущений, действующих на судно является волнение, рис. 1. В последствии, судно осуществляет колебательные движения в различных плоскостях, при которых, для упрощения расчетов, плавсредство рассматривается как абсолютно твердое тело, рис. 2.

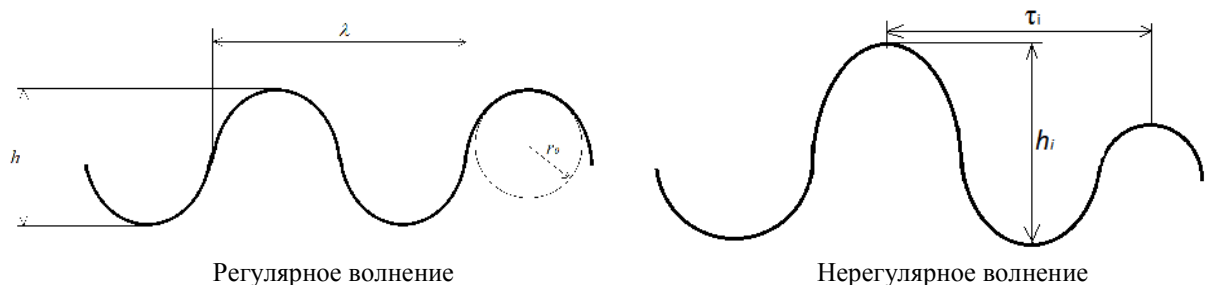


Рис.1. Характеристики волнения

Теория регулярных волн [1] оценивает высоты волны  $h_e$  в связи с ее длиной  $\lambda$  формулой Циммермана [1]:

$$h_e = 0,17\lambda^{\frac{3}{4}}. \quad (1)$$

Скорость волны  $c$  можно оценить эмпирическим соотношением:

$$c \approx \frac{\lambda}{0,8\sqrt{\lambda}} \quad (2)$$

Энергию, приходящуюся на метр по фронту плоской волны, с учетом гидростатического давления на подошве волны можно оценить соотношением:

$$E = \frac{\rho g r_0^2}{2} \quad (3)$$

Для нерегулярного волнения энергия волны оценивается дисперсией:

$$D_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i^2 \quad (4)$$

Средняя высота волны (в вероятностном смысле) связана с дисперсией соотношением:

$$\bar{h} = 2,5\sqrt{D_r} \quad (5)$$

Для оценки волнения двенадцати-балльной шкалой [1], имеем оценки характеристик волн, табл.1.

Таблица 1 – Баллы ветрового волнения

Баллы волн	Баллы ветра	Длина волн $\lambda_{3\%}$ , м	Высота волн $h_{3\%}$ , м	Период волн $\tau_{3\%}$ , с	Словесная характеристика
0	0-1	0	0	0	отсутствует
I	2-3	<5	<0,25	<2	слабое
II	3-4	5-15	0,25-0,75	2-3	умеренное
III	4	15-25	0,75-1,25	3-4	значительное
IV	5	25-40	1,25-2,0	4-5	значительное
V	5-6	40-75	2,0-3,5	5-7	сильное
VI	6-7	75-125	3,5-6,0	7-9	сильное
VII	7-8	125-170	6,0-8,5	9-11	очень сильное
VIII	8-9	170-220	8,5-11,0	11-12	очень сильное
IX	10-12	>220	>11,0	>12	исключительное

Для описания качки целесообразно учитывать углы рысканья, дифферента и крена[2,3], рис. 2.

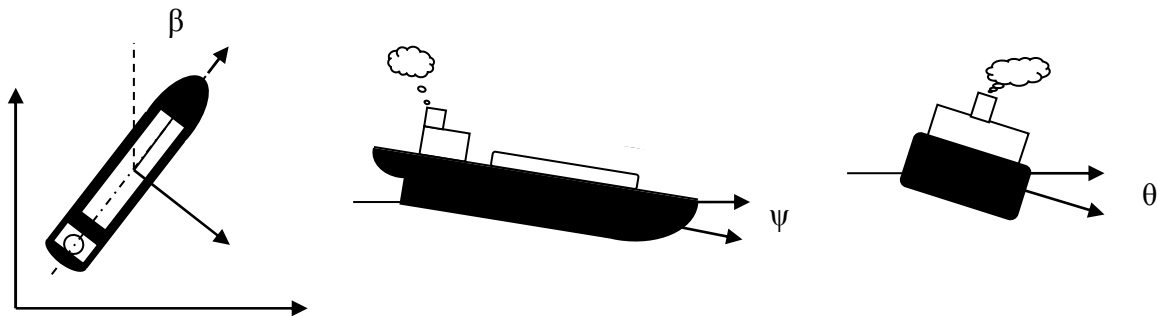


Рис. 2. Неподвижная и корабельная системы координат

Подвижная система координат XYZ жестко связана с судном и при качке движется вместе с ним. Начало координат – центр тяжести судна  $G$  лежит в диаметральной плоскости. В соответствии с принятыми системами координат существует 6 видов качки [1 -3]: продольно - горизонтальная -  $\xi_g$ , со скоростью перемещения  $\dot{\xi}_g$  и ускорением  $\ddot{\xi}_g$ . Поперечно - горизонтальная  $\eta_g$  - со скоростью  $\dot{\eta}_g$ , и ускорением  $\ddot{\eta}_g$ . Вертикальная качка –  $\zeta_g$ , со скоростью перемещения  $\dot{\zeta}_g$  и ускорением  $\ddot{\zeta}_g$ . Бортовая качка характеризуется углом крена  $\theta$ , угловой скоростью  $\dot{\theta}$  и угловым ускорением  $\ddot{\theta}$ . Килевая качка – это вращательное колебательное движение относительно оси  $Gy$  с углом дифферента  $\psi$ , угловой скоростью  $\dot{\psi}$  и угловым ускорением  $\ddot{\psi}$ . Рыскание – это вращательное колебательное движение относительно оси  $Gz$  с углом рысканья  $\phi$ , угловой скоростью  $\dot{\phi}$  и угловым ускорением  $\ddot{\phi}$ .

В этих координатах на судно, с учетом силы веса  $D$ , действуют силы и моменты:

$$\frac{D}{g} \ddot{\xi}_g; \frac{D}{g} \ddot{\eta}_g; \frac{D}{g} \ddot{\zeta}_g; J_x \ddot{\theta}; J_y \ddot{\psi}; J_z \ddot{\phi}, \quad (6)$$

где:  $\frac{D}{g}$  - масса судна;  $J_x, J_y, J_z$  - моменты инерции массы судна относительно осей  $Gx, Gy$  и  $Gz$ .

С учетом симметрии судна относительно диаметральной плоскости и мидель-шпангоута и предположении о достаточно больших отношениях  $L/B$  и  $L/T$ , можно существенно упростить выражения, табл. 2.

Таблица 2. Силы и моменты, воздействующие на судно.

Выражение для сил, воздействующих на судно	Упрощенные выражения для инерционных сил, воздействующих на судно
$P_{\xi_{comp}} = -V_{11} \ddot{\xi}_g;$	$P_{\xi_{ин}} = -\lambda_{11} \ddot{\xi}_g;$
$P_{\eta_{comp}} = -V_{22} \ddot{\eta}_g;$	$P_{\eta_{ин}} = -\lambda_{22} \ddot{\eta}_g;$
$P_{\zeta_{comp}} = -V_{33} \ddot{\zeta}_g;$	$P_{\zeta_{ин}} = -\lambda_{33} \ddot{\zeta}_g;$
$M_{x_{comp}} = -V_{44} \ddot{\theta};$	$M_{x_{ин}} = -\lambda_{44} \ddot{\theta};$
$M_{y_{comp}} = -V_{55} \ddot{\psi};$	$M_{y_{ин}} = -\lambda_{55} \ddot{\psi};$
$M_{z_{comp}} = -V_{66} \ddot{\phi}$	$M_{z_{ин}} = -\lambda_{66} \ddot{\phi}.$

Здесь  $\lambda_{ik}$  – присоединенные массы – мера инерции окружающей судно воды.

Исходя из принципа Гамильтона получаем, после приведения подобных членов, уравнения динамики судна с учетом качки на волнении:

$$\begin{aligned} \left(\frac{D}{g} + \lambda_{11}\right) \ddot{\xi}_g + v_{11} \dot{\xi}_g &= P_{\xi}(t); \\ \left(\frac{D}{g} + \lambda_{22}\right) \ddot{\eta}_g + v_{22} \dot{\eta}_g &= P_{\eta}(t); \\ \left(\frac{D}{g} + \lambda_{33}\right) \ddot{\zeta}_g + v_{33} \dot{\zeta}_g + \rho g S_0 \zeta_g &= P_{\zeta}(t); \\ (J_x + \lambda_{44}) \ddot{\theta} + v_{44} \dot{\theta} + Dh_0 \theta &= M_x(t); \\ (J_y + \lambda_{55}) \ddot{\psi} + v_{55} \dot{\psi} + DH_0 \psi &= M_y(t); \\ (J_z + \lambda_{66}) \ddot{\phi} + v_{66} \dot{\phi} &= M_z(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения (7) записаны в соответствии с перечисленной выше нумерацией видов качки. Однако, динамика судна определяется не только собственными свойствами судна но и динамикой системы управления. Для судна основным элементом системы управления является команда навигационного мостика, от действий которой зависит своевременность и правильность оперативных решений.

Моделирование поведения команды навигационного мостика, как динамической системы является сложной задачей. Известные методы построения модели динамики принятия решения командой навигационного мостика, как организационной системы опираются на построение линейных динамических моделей [4-7]. Так, для описания реакции человека-оператора на возникновение ситуации в системе, предлагается использовать модель линейной динамической системы первого порядка.

Обозначив  $X[k+1], X[k]$  – векторы состояния объекта и среды в соответственные дискретные моменты времени; эти векторы объединяют переменные объекта и той части окружающей среды, которая в какой-то мере связана с переменными состояния объекта (например, действие течения, состояние моря и т.п.);  $\Phi(X,U,F,t)$  – функция перехода, учитывающая изменения состояния;  $U[k]$  – вектор управляющих воздействий (осуществляемые оператором решения по управлению объектом);  $F[k]$  – вектор возмущающих воздействий окружающей среды (имеющих случайную природу);  $\Gamma(t)U[k]$  и  $G(t)F[k]$  – векторные интегральные преобразования управляющих и возмущающих воздействий.

$$X[k+1] = \Phi(X, U, F, t)X[k] + \Gamma(t)U[k] + G(t)F[k] \quad (8)$$

Более глубокий подход, рассматривается в работах [6-8], где модель человека – оператора [8] не отрывается от внешней среды, рис. 3.

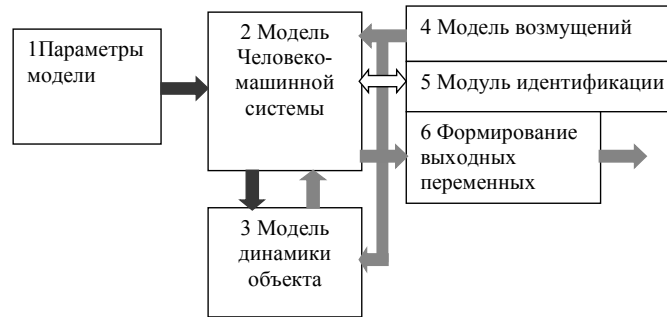


Рис. 3. Обобщенная структурная схема аналитико-имитационного моделирования человеко-машинной системы

При этом подходе динамика системы моделируется искусственными нейронными сетями, что дает более широкий спектр возможностей учета элементов системы. Таким образом, задача разработки методов моделирования системы судно – мостик актуальна как с практической, так и с научной точек зрения.

#### Формулировка цели исследования

**Целью исследования** является разработка и обоснование методов моделирования динамики системы судно – команда ходового мостика с учетом возмущений от качки, параметров загрузки и условий плавания.

#### Изложение основного материала исследования

Используя соотношения (7) и табл. 2, получаем модель формализованную за счет введения модели на спокойной воде. Модель динамики судна, после нормирования на  $\left(\frac{D}{g} + \lambda_{ii}\right) = m_i$ ,

$(J_k + \lambda_{ii}) = j_{ii}$ ,  $k = x, y, z$ , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} + \frac{v_{11}}{m_{11}} \dot{\xi} + 0 &= \frac{P_{\xi}(t)}{m_{11}} \\ \ddot{\eta} + \frac{v_{22}}{m_{22}} \dot{\eta} + 0 &= \frac{P_{\eta}(t)}{m_{22}} \\ \ddot{\zeta} + \frac{v_{33}}{m_{33}} \dot{\zeta} + \frac{\rho g S_0}{m_{33}} \zeta &= \frac{P_{\zeta}(t)}{m_{33}} \\ \ddot{\theta} + \frac{v_{44}}{J_{44}} \dot{\theta} + \frac{Dh_0}{J_{44}} \theta &= \frac{M_x(t)}{J_{44}} \\ \ddot{\psi} + \frac{v_{55}}{J_{55}} \dot{\psi} + \frac{DH_0}{J_{55}} \psi &= \frac{M_y(t)}{J_{55}} \\ \ddot{\varphi} + \frac{v_{66}}{j_{66}} \dot{\varphi} + 0 &= \frac{M_z(t)}{j_{66}} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Введем матрицы объекта  $A$  и управления  $B$  вектор состояния  $x$ , вектор управления  $u$  и возмущения  $g$  с матрицей возмущений  $Q$ .

Векторы пространства состояний:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \\ \theta \\ \psi \\ \varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} P_{u\xi}(t) \\ P_{u\eta}(t) \\ P_{u\zeta}(t) \\ M_{ix}(t) \\ M_{iy}(t) \\ M_{iz}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} P_{\xi}(t) \\ P_{\eta}(t) \\ P_{\zeta}(t) \\ M_x(t) \\ M_y(t) \\ M_z(t) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Матрицы динамической модели автономной системы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{v_{11}}{m_{h1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_{22}}{m_{22}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{v_{33}}{m_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{v_{44}}{j_{44}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{v_{55}}{j_{55}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{v_{66}}{j_{66}} \end{pmatrix}; \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho g S_0}{m_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Dh_0}{j_{44}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{DH_0}{j_{55}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Матрицы воздействий на систему имеют вид:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_{h1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_{22}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{j_{44}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{j_{55}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{j_{66}} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_{h1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_{22}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{j_{44}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{j_{55}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{j_{66}} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Получаем стандартную матричную модель динамической системы второго порядка.

Модель упрощена и поэтому нет связности, но вопросы точного моделирования не отделимы от вопросов идентификации, что обеспечивает получение точной и адекватной модели.

В общем виде линейная матричная модель судна, как динамической системы имеет вид:

$$I\ddot{\mathbf{x}} + A_0\dot{\mathbf{x}} + A_1\mathbf{x} = Q\mathbf{g} + B\mathbf{u} \quad (13)$$

Модель (13) позволяет имитировать достаточно сложные движения судна под воздействием управления экипажем и внешних возмущений от моря. Однако, управление определяется динамикой навигационного мостика. Для моделирования этих процессов используем цепные модели динамических систем, описывая динамику каждого из членов цепочки формирования управления как динамическое звено в пространстве состояний [6].

$$\dot{\mathbf{u}} = B_0\mathbf{u} + B_1\mathbf{g} \quad (14)$$



При этом, транспортные задержки, связанные с процессом восприятия, невелики. Однако, необходимо учитывать процесс принятия решения. Для этого в модель вводится процедура принятия решения по компонентам состояния системы управления:

$$\mathbf{u}_i = \begin{cases} 0 & \text{if } u_i < u_i^* \\ 1 & \text{if } u_i \geq u_i^* \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{u} = S(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) \quad (15)$$

Тогда модель (14) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= B_0 \mathbf{u} + B_1 \mathbf{g} \\ \mathbf{u} &= S(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

При этом цепочка формирования управления командой ходового мостика моделируется движением системы:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= B_{01} \mathbf{u} + B_{11} \mathbf{g} \\ \mathbf{u}_1 &= S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1^*) \\ \dot{\mathbf{u}} &= B_{02} \mathbf{u} + B_{12} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 &= S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_2^*) \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{u}} &= B_{0n} \mathbf{u} + B_{1n} \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_n &= S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_n^*) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Таким образом, модель системы «судно – мостик» принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} I\ddot{\mathbf{x}} + A_0 \dot{\mathbf{x}} + A_1 \mathbf{x} &= Q\mathbf{g} + B\hat{\mathbf{u}}_n \\ \dot{\mathbf{u}} &= B_0 \mathbf{u} + B_1 \mathbf{g} \\ \hat{\mathbf{u}}_1 &= S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1^*) \\ \dot{\mathbf{u}} &= B_0 \mathbf{u} + B_{12} \hat{\mathbf{u}}_1 \\ \hat{\mathbf{u}}_2 &= S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_2^*) \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{u}} &= B_0 \mathbf{u} + B_{1n} \hat{\mathbf{u}}_{n-1} \\ \hat{\mathbf{u}}_n &= S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_n^*) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Модель (18) описывает реакцию команды мостика на возмущение  $\mathbf{g}$  при заданных порогах реакции для команды мостика:  $u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*$ . При этом, матрицы  $B_{01}, B_{02}, \dots, B_{0n}$  и  $B_{11}, B_{12}, \dots, B_{1n}$  индивидуальны для каждого из членов команды мостика.

Необходимо отметить, что рассматриваем только реакцию системы на возмущения. Вопрос формирования решения и оптимизации управления разделяется на проблему собственно принятия решения командой навигационного мостика и работой системы автоматического регулирования и управления, которыми оборудовано судно. Таким образом, задача оптимизации управления судном является обобщением решения задачи автоматизации процессов судовождения и оптимизацией решений, принимаемых командой навигационного мостика.

Формирование возмущений со стороны волновой и ветровой нагрузок учтем согласно ранее данному описанию волн как возмущений в компонентах вектора возмущений  $\mathbf{g}$ . Следовательно, для моделирования динамики системы «судно – мостик» необходимо использовать нелинейную модель в пространстве состояний (18), что приводит к структурной схеме модели, рис. 4 а.

Полученная модель «судно – мостик», в задачах разработки методов тренинга судоводителей реализуется программно, но для наглядности целесообразно рассмотреть Simulink-модель, рис.4 б.

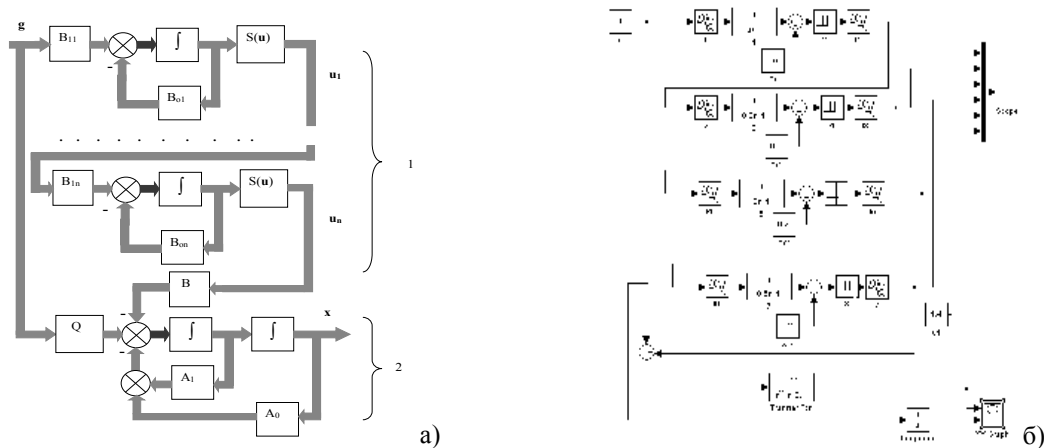


Рис. 4. а) Структурная модель динамики системы судно - 2, навигационный мостик -1.  
б) Модель динамики системы судно – навигационный мостик в среде Simulink

Полученная модель сложнее, но разделение на динамику судна и динамику системы навигационного мостика позволяет более детально моделировать поведение всей системы «судно – мостик».

При моделировании приняты задержки выполнения команды порядка одной секунды и малая постоянная времени судна по каналу курса, что соответствует скоростному судну. На рис. 5 приведены результаты моделирования устранения рысканья выполнением команд навигационного мостика.

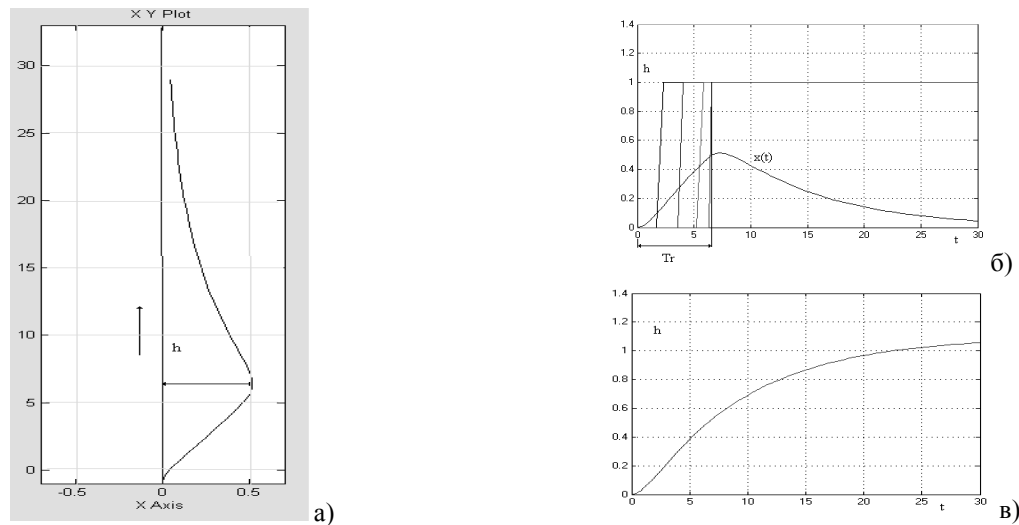


Рис. 5. Моделирование устранения возмущения по курсу выполнением команд навигационного мостика, а – траектория движения судна, б - реакция судна на возмущение, в – переходные процессы в системе формирования команды управления формируемой мостиком и восстановление курса судна.

Вторым существенным моментом является учет влияния волнения моря на движение судна. Для этого в состав модели вводится генератор моделей волновых воздействий. Для его построения используем четыре близких гармонике основной частоты волны, рис. 6.

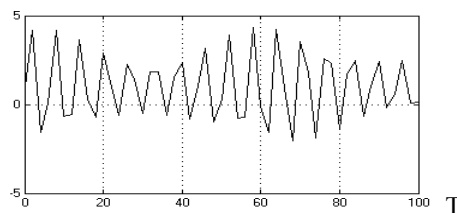


Рис.6. Моделирование волнения.

В состав модели волнового возмущения введена постоянная составляющая, определяющая волновой напор. Влияние на систему такой модели волнения позволяет проанализировать не только движение судна, но и работу команды навигационного мостика, рис.7.

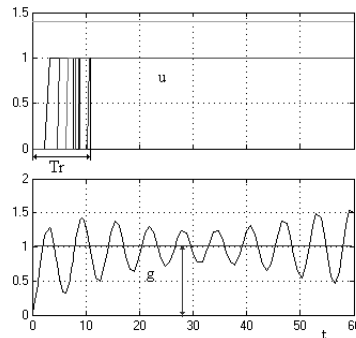


Рис. 7. Моделирование динамики принятия решения по формированию управления  $u$ , и формирование возмущения со стороны волнения моря.

Таким образом, действия команды навигационного мостика оцениваются эффективностью и временем принятия решения, причем, как видно из результатов моделирования, необходимо не только оценивать качество управления, но и согласование динамических характеристик команды мостика и динамических свойств судна.

Задача удержания судна на заданном курсе, является задачей регулирования, но на практике размеры и динамика судна требуют учета ветровых нагрузок и возмущений, что делает недостаточным представление судна, при плавании в стесненных условиях, как движение центра корабельных координат. Так при ветровых нагрузках и течениях возникает упреждение по курсовому углу. Более сложно воспринимается судоводителем вращательное движение судна [9], где проявляется смещение центра вращения судна (полнос поворота, Pivot Point).

Оценка положения центра вращения дается в [9], при этом это оценка особенности движения судна опытным судоводителем, и она должна быть учтена в модели системы судно - мостик.

Так, для судна на прямом ходу с поворотом под рулем положение центра вращения, относительно носа судна, можно оценить, по отношению длины судна  $L$  к ширине  $B$  и коэффициенту  $k$ [9]:

$$k \approx 1.04 - 0.26 \left( \frac{L}{B} \right) + 0.03 \left( \frac{L}{B} \right)^2 \quad (19)$$

При этом, в данном случае координата центра вращения оценивается соотношением  $ЦВ = Lk$ . В этом случае график зависимости оценки положения центра вращения относительно носа судна, рис. 8, может обеспечивать визуальное восприятие судоводителем адекватного поведения модели судна при работе на тренажере.

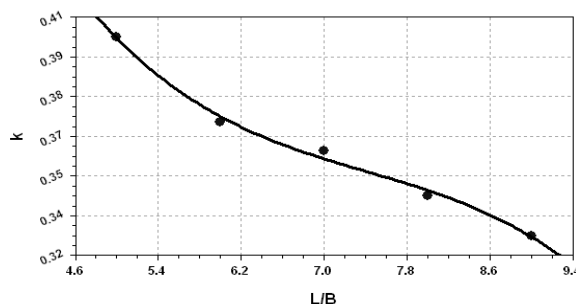


Рис. 8. Коэффициент положения центра вращения относительно носа судна при прямом ходе

Значительное влияние на положение центра вращения имеет условие загрузки судна. Не менее сложно обеспечение восприятия адекватного поведения судна при работе с буксирами и якорями [9]. Как следствие при моделировании системы «судно – мостик» возникает необходимость формирования адекватных возмущений и реакций модели судна, чем достигается повышение качества тренинга в целом.

Таким образом модель системы судно – команда навигационного мостика, необходимая для решения задачи тренинга и обучения судоводителей, должна включать в себя, кроме предложенных в

работе моделей динамики судна и динамики принятия решения командой мостика, также систему стабилизации курса и систему моделирования возмущений и учета особенностей динамики судна, характеристик возмущений, табл. 1, и положения центра вращения, рис. 9.

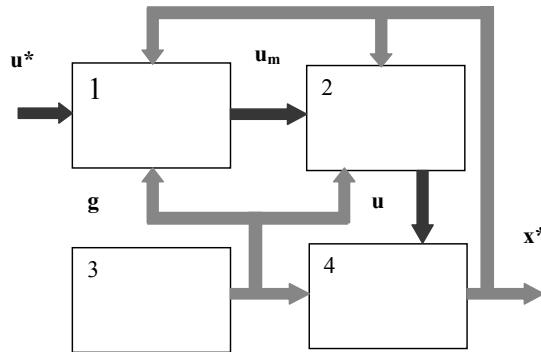


Рис. 9. Взаимодействие элементов модели системы судно – команда ходового мостика.

Использование в модели модуля 3, обеспечивающего формирование возмущений, как условий плавания и модуля стабилизации курса 2, задача для которого подается как команда с мостика 1, позволяет учесть не только собственную динамику судна, но и особенности восприятия движения судна судоводителем.

### Выводы

Основываясь на проведенном анализе и исследовании разработанной модели системы судно – команда навигационного мостика, можно сделать следующие выводы. Во-первых, при моделировании динамики судна необходимо учитывать модель второго порядка, что обеспечивает учет всех существенных факторов действующих на судно. Во-вторых, использование матричной модели второго порядка в пространстве состояния теоретически более сложно, чем представление канонической формой, но при построении программного продукта эта сложность не существенна. В-третьих, разработанная модель системы судно – команда навигационного мостика позволяет оценивать динамику системы и ее реакцию на возмущения, описываемые как нерегулярная качка. Включение в структуру системы моделирования модуля генерации возмущения позволяет оценить реакцию судоводителей на реально возникающие возмущения. Оценка особенностей движения судна определяет требование к интерфейсу отображения ситуации с учетом восприятия судоводителя.

### Список используемой литературы:

1. Борисов Р.В. Качка корабля / В.Ю. Семенова, Р.В. Борисов, Учебное пособие Санкт-петербургский государственный морской технический университет Санкт-Петербург, 2006.- 20с.
2. Navi Trainer 4000. Mathematical models technical description Transas Marine Ltd. July, 2003. 100 p.
3. Norrbin N.H. Further notes on the dynamic stability parameter and the prediction of manoeuvring characteristics. Marine Simulation and Ship Manoeuvrability (The international conference MARSIM'96). Balkema, Rotterdam, 1996.
4. Павловская О.О. Алгоритм определения параметров математической модели механика-водителя, управляющего криволинейным движением быстроходной гусеничной машины /Павловская О.О, Кондаков С.В. //Вестник ЮУрГУ, № 3, 2012 . с 43 -47.
5. Weir, D.H. Models for Steering Control of Motor Vehicles / D.H. Weir, D.T. McRuer // Proc. 4th Annual NASA, 1968. – 192 с.
6. Устюжанин А.Д. Динамическая идентификация и оценивание характеристик человека-оператора в системах «человек-машина» / Устюжанин А.Д., Пупков К.А. М.:Изд. РУДН, 2011.-180с.
7. Grigorieva T.E., Istigecheva E.V., Chebotkov A.I. Petri nets – based modeling of business processes in the Mars simulation environment. Innovations in information and communication science and technology // Proceedings IICST 2012 second postgraduate consortium international workshop. – 2012. – P.298-302.
8. Семенцов Г.Н. Динамічні властивості людини-оператора в середовищі виробничого соціуму / Г.Н.Семенцов, І.І.Чигур, Л.І. Костельна ІФНТУНГ, вул. Карпатська, 15, м. Івано-Франківськ, 76019, метод доступа: e-mail: public@ifdtung.if.ua
9. Генри Х. Хойер Управление крупнотоннажными судами при маневрировании / Генри Х. Хойер, Транспорт. 2002.- 110 с.

**References**

1. Borisov R.V. Kachka korablya / V.Yu. Semionova, R.V. Borisov, uchebnoye posobiye. Sankt-Peterburgskiy gosudarstvennyy morskoy tekhnicheskiy universitet. Sankt-Peterburg, 2006.-20p.
2. Navi Trainer 4000. Mathematical models technical description Transas Marine Ltd. July, 2003. 100 p.
3. Norrbin N.H. Further notes on the dynamic stability parameter and the prediction of manoeuvring characteristics. Marine Simulation and Ship Manoeuvrability (The international conference MARSIM'96). Balkema, Rotterdam, 1996.
4. Pavlovskaya O.O. Algoritm opredeleniya parametrov matematicheskoy modeli mekhanika-voditelya, upravlyayushchego krivolineynym dvizheniyem bystrokhodnoy gusenichnoy mashiny / Pavlovskaya O.O., Kondakov S.V. // Vestnik YuUrGU, № 3, 2012 . pp 43 -47.
5. Weir, D.H. Models for Steering Control of Motor Vehicles / D.H. Weir, D.T. McRuer // Proc. 4th Annual NASA, 1968. – 192 c.
6. Ustyuzhanin A.D. Dinamicheskaya identifikaciya i ocenivaniye kharakteristik cheloveka-operatora v sistemakh "chelovek-mashina" / Ustyuzhanin A.D., Pupkov K.A. M.:Izd. RUDN, 2011. -180p.
7. Grigorieva T.E., Istigecheva E.V., Chebotkov A.I. Petri nets – based modeling of business processes in the Mars simulation environment. Innovations in information and communication science and technology // Proceedings IICST 2012 second postgraduate consortium international workshop. – 2012. – P.298-302.
8. Sementsov G.N. Dynamichni vlastyivosti lyudyny-operatora v seredovyshchi vyrobnychogo sociumu / G.N. Sementsov, I.I. Chyгур, L.I. Kostel'na. IFNTUNG, vul. Karpatska, 15, m. Ivano-Frankivs'k, 76019. Metod dostupa: [public@ifdtung.if.ua](mailto:public@ifdtung.if.ua)
9. Henry Kh. Khoyer Upravleniye krupnotonnazhnyimi sudami pri manevrirovanii / Henry Kh. Khoyer, Transport. 2002.-110p.

УДК 519.168

Л.І. КОРОТКА, Є.А. КОРОТКА  
ДВНЗ «Український державний хіміко-технологічний університет»

### ЗАСТОСУВАННЯ ЕВРИСТИЧНИХ АЛГОРИТМІВ В ЗАДАЧАХ МАРШРУТИЗАЦІЇ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ

*У роботі розглядається клас задач маршрутизації, зокрема, транспортної логістики з різними обмеженнями, у тому числі: різнорідним автопарком, роздільними поставками та сумісністю вантажів, часовими вікнами для доставки вантажів. Запропоновано для отримання оптимального маршруту використовувати на першому етапі жадібні алгоритми, а для покращення, отриманого шляху, застосовувати алгоритми 2-орт та 3-орт. Розроблено програмний інструментарій для візуалізації процесу побудови маршрутів та створено інформаційну систему для підтримки прийняття рішень щодо обрання маршруту. Використання евристичних алгоритмів та їх комбінацій є доцільним та ефективним в обчислювальному сенсі.*

*Ключові слова: маршрутизація, алгоритми 2-орт та 3-орт, задача комівояжера, транспортна логістика.*

Л.И. КОРОТКАЯ, Е.А. КОРОТКАЯ  
ГВУЗ «Украинский государственный химико-технологический университет»

### ПРИМЕНЕНИЕ ЭВРИСТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ В ЗАДАЧАХ МАРШРУТИЗАЦИИ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ

*В работе рассматривается класс задач маршрутизации, в частности, транспортной логистики с различными ограничениями, в том числе: разнородным автопарком, раздельными поставками и совместимостью грузов, временными окнами для доставки грузов. Предложено для получения оптимального маршрута использовать на первом этапе жадные алгоритмы, а для улучшения, полученного пути, применять алгоритмы 2-орт и 3-орт. Разработан программный инструмент для визуализации процесса построения маршрутов и создана информационная система для поддержки принятия решений об избрании маршрута. Использование эвристических алгоритмов и их комбинирование является целесообразным и эффективным в вычислительном плане.*

*Ключевые слова: маршрутизация, алгоритмы 2-орт и 3-орт, задача коммивояжера, транспортная логистика.*

L.I. KOROTKA, Y.A. KOROTKA  
Ukrainian State University of Chemical Technology

### APPLICATION OF HEURISTIC ALGORITHMS IN THE TASKS OF VEHICLE ROUTING

*The purpose of the article is to develop and research algorithms for solving routing problems with different constraints: a heterogeneous fleet of vehicles, separate deliveries, time windows for cargo delivery. It is necessary to design and develop an information system for decision support in transport logistics. The task class to find the optimal path with some restrictions and criteria can be applied in various application areas: games, cartographic services, robotics, logistics, etc. A key task in the field of logistics is searching for optimal routes for vehicles routing. This class of tasks is called the vehicle routing problems. To get the optimal route it is proposed to solve the problem in two stages. In the first stage, to get an approximate solution, using the so-called "greedy" algorithms or strategies, in this case was chosen the algorithm of the nearest neighbor. In the second stage, in order to improve the received initial route, it is proposed to use 2-opt and 3-opt algorithms. In addition formulation the classic task (CVRP), in order to find the optimal path, restrictions are introduced with time windows (TSPTW): it is assumed that the goods must be delivered on time, otherwise a system of fines will be introduced. Another class of tasks that is considered in this work is the construction of an optimal route, where restrictions (in addition to the hour windows) limit the load capacity of the vehicle and the compatibility of the cargo of the goods transported. For this purpose it is suggested to use combinations of the considered algorithms. Software tools for visualizing the route construction process have been developed and an information system has been created to support decision-making on route selection. For development was used Node.js – is a JavaScript runtime environment. Numerical experiments were carried out, the analysis of which allows to assert that the proposed strategy of using the heuristic approach is expedient. Combined heuristic algorithms allow you to get the best route.*

*Keywords: routing, 2-opt and 3-opt algorithms, traveling salesman problem, transport logistics.*



### Постановка проблеми

Нестримно зростаючий розвиток інформаційних технологій відкриває нові і великі можливості для розробки нових рішень у науковій та технічній галузях. Сучасні інформаційні системи характеризуються створенням єдиного інформаційного простору для усіх учасників взаємовідносин. Клас задач про пошук оптимального шляху з деякими обмеженнями та критеріями може застосовуватися в різних прикладних областях: ігри, картографічні сервіси, робототехніка, логістика та ін.

Ключовою задачею у сфері логістики є пошук оптимальних маршрутів транспортних засобів. Цей клас задач, як відомо, називають задачами маршрутизації транспортних засобів (the vehicle routing problems), вони є одними з найбільш складних у області комбінаторної оптимізації [1].

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

У тих випадках, коли застосування точних методів у комп'ютерних науках, штучному інтелекті та математичній оптимізації є занадто повільним, тоді альтернативою може стати евристична техніка, яка дозволяє значно швидше вирішувати поставлені завдання та проблеми. Як відомо, евристика лежить в основі всієї галузі штучного інтелекту та комп'ютерного моделювання, оскільки їх можна використовувати в ситуаціях, коли не існує відомих алгоритмів [2]. Евристична функція або просто евристика є функцією, яка на основі доступної інформації використовує альтернативні розв'язки в алгоритмах пошуку на кожному кроці для визначення напрямку руху до цільового рішення [3].

Як відомо, в комбінаторній оптимізації знаходження оптимального шляху задачі комівояжера (TSP – Traveling salesman problem) є достатньо важкою проблемою, яка є важливою в дослідженнях операцій та теоретичній інформатиці [4-8]. У теорії обчислювальної складності задача TSP, належить класу NP-повних задач. Таким чином, можливо найгірший час роботи для будь-якого алгоритму для TSP зростає суперполіноміально (але не більше, ніж експоненціально) з кількістю міст. У тих випадках, коли необхідно відвідати міста протягом певного часу, тоді маємо клас задач TSP with Time Windows (TSPTW). Основна ідея полягає в тому, щоб знайти «тур» комівояжера, який відвідує кожне місто у вікні часу.

Для розв'язання описаного класу задач існує достатньо велика кількість алгоритмів знаходження оптимального шляху [3-6]. Тому для вибору того чи іншого алгоритму користуються оцінками його якості та вживають такі критерії, як його складність, або зворотне поняття – ефективність алгоритму. Як відомо, чим більший час і об'єм пам'яті потрібні для реалізації алгоритму, тим більше його складність і відповідно нижче його ефективність. Очевидно, що коли розв'язується задача комівояжера з додатковими обмеженнями або умовами, то вибору алгоритму розв'язання поставленої задачі слід приділити особливу увагу.

### Мета дослідження

Мета роботи складається у розробці та дослідженні алгоритмів пошуку розв'язання задач маршрутизації з різними обмеженнями: різнорідним автопарком, роздільними поставками, часовими вікнами для доставки вантажів. Необхідно спроектувати та розробити інформаційну систему з підтримки прийняття рішень у транспортній логістиці.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Загальну математичну постановку задачі маршрутизації (знаходження оптимального шляху) з обмеженнями можна сформулювати наступним чином. Нехай маємо  $N$  міст, у які необхідно виконати доставку деякого вантажу. Необхідно вирішити задачу, яка полягає у знаходженні найвигіднішого маршруту, який розбивається на  $K$  маршрутів ( $K$  – кількість машин з обмеженою вантажомісткістю), які проходять через кожне місто лише один раз та повертаються у вихідну точку. Кожен пункт має свій вантаж з відомою вагою, тому в умовах завдання критеріями вигідності маршруту є: пошук найкоротшого маршруту та обмеження по вазі для кожної машини.

Визначаємо змінну розв'язку  $x_{ij}$ , яка приймає значення одиниця тоді і тільки тоді, коли існує маршрут, що йде від замовника  $i$  до  $j$  безпосередньо для  $i, j \in N$ . Крім того,  $y_j$  – це стала змінна розв'язку, що відповідає сукупному вантажу на маршруті, який відвідує вузол  $j \in N$ . За допомогою цих параметрів та змінних розв'язків сформулюємо математичну постановку задачі.

$$\sum_{i=0}^{N+1} \sum_{j=0}^N c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min . \quad (1)$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^{N+1} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \overline{N}, \quad (2)$$

$$\sum_{i=0, i \neq h}^N x_{ih} - \sum_{j=1, j \neq h}^{N+1} x_{hj} = 0, \quad h = \overline{1, N}, \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{0j} \leq K, \quad (4)$$

$$y_i \geq y_j + q_j \cdot x_{ij} - Q(1 - x_{ij}), \quad i, j = \overline{0, N+1} \quad (5)$$

$$d_i \leq y_j \leq Q, \quad i = \overline{0, N+1}, \quad (6)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = \overline{0, N+1}. \quad (7)$$

Тут  $c_{ij}$  – вартість перевезень з пункту  $i$  в пункт  $j$ ;  $Q$  – вантажопідйомність транспортного засобу;  $q_j$  – вага вантажу у  $j$ -му пункті.

Обмеження (2) гарантують, що всі пункти будуть відвідані рівно один раз. Обмеження (3) гарантують правильний маршрут транспортних засобів через дуги, зазначивши, що якщо транспортний засіб доходить до вузла  $h \in N$ , то він повинен відходити від цього вузла. Обмеження (4) обмежує максимальну кількість маршрутів до  $K$ , що є одночасно кількістю транспортних засобів. Обмеження (5) та (6) гарантують, що вантажопідйомність не перевищує максимальне значення для транспортного засобу. Очевидно, що цільова функція (1) повинна мінімізувати витрати.

Доповнимо загальну постановку задачі додатковими обмеженнями. Нехай  $w_i$  змінна, що представляє час, у який транспортний засіб прибув до  $i$ -ї точки призначення. Додамо до обмежень (1)-(7) обмеження часу, які мають наступний вигляд:

$$w_j \geq w_i + ([s_i] + t_{ij}) \cdot x_{ij} - M_{ij} \cdot (1 - x_{ij}), \quad i = \overline{0, N}; j = \overline{1, N+1}, \quad (8)$$

$$w_i^a \leq w_i \leq w_i^b, \quad i = \overline{0, N+1}, \quad (9)$$

де  $M_{ij}$  – досить велике значення, яке можна визначити наступним чином:

$$M_{ij} = \max(w_i^b - w_j^a). \quad (10)$$

Математичну постановку задачі маршрутизації транспортних засобів з урахуванням часових вікон з обмеженою вантажомісткістю сформульовано. Необхідно обрати методи та алгоритми розв'язання поставленого завдання. У роботі пропонується будувати маршрут у два загальні етапи.

На першому етапі виконується побудова початкового розв'язку, на другому – його поліпшення. Для реалізації першого етапу пропонується один з, так званих, жадібних методів – метод найближчого сусіда. Жадібний алгоритм передбачає прийняття локально оптимальних розв'язків на кожному кроці алгоритму. Таким чином, до маршруту поступово долучається найближчий з ще не відвіданих пунктів. Слід зауважити, що результати чисельних експериментів дають можливість авторам стверджувати, що метод найближчого сусіда є дуже швидким, зважаючи на надзвичайно мале число операцій, необхідних для здійснення його роботи.

На другому етапі поліпшення маршруту здійснюється за допомогою таких евристичних алгоритмів, як 2-орт та 3-орт [1, 3, 7]. Як відомо, в 2-орт алгоритмі обмін здійснюється між двома ребрами: якщо обмін покращив загальний шлях, то таку комбінацію залишають; алгоритм 3-орт працює так само, але обмін здійснюється між трьома ребрами.

Зауважимо, що роботу алгоритмів досліджено на наборах вхідних даних з бібліотеки TSPLIB [9] та Solomon benchmark [10]. У цих бібліотеках для кожного набору даних зазначено найкращу довжину шляху, яку було знайдено за весь час існування цих даних.

Програмний інструментарій для візуалізації процесу маршрутизації транспортних засобів реалізовано на мові програмування JavaScript, за допомогою NodeJs. Необхідними характеристиками для запуску є: браузері Chrome, Firefox, Safari, Opera; NodeJs версії не старішої за 6.0; Npm версії не старішої за 5.0.

Для побудови серії маршрутів у роботі буде реалізовано наступні кроки: побудова початкового набору маршрутів за допомогою жадібного алгоритму; покращення кожного маршруту алгоритмом 2-орт або 3-орт; покращення набору отриманих маршрутів за допомогою алгоритму обміну. Результати роботи алгоритмів проілюстровано на наборі даних з файлу R106\_50 бібліотеки Solomon benchmark [9].

Маршрут, побудований алгоритмом найближчого сусіда (рис. 1 а). Червона зірочка – це початкова точка маршруту. Наявність перехресних шляхів свідчить про не оптимальність маршруту, тому ці недоліки можуть бути виправлені за допомогою обміну ребер алгоритмів 2-орт та 3-орт. За

допомогою перестановок 2-орт алгоритм усунув усі перехресні шляхи, крім того, загальна довжина маршруту є коротшою (рис. 1 б). Поліпшення початкового маршруту за допомогою 3-орт алгоритму призвело до маршруту, у якому також виключені усі перехресні шляхи, сумарна довжина є менше за довжину початкового маршруту (рис. 1 в).

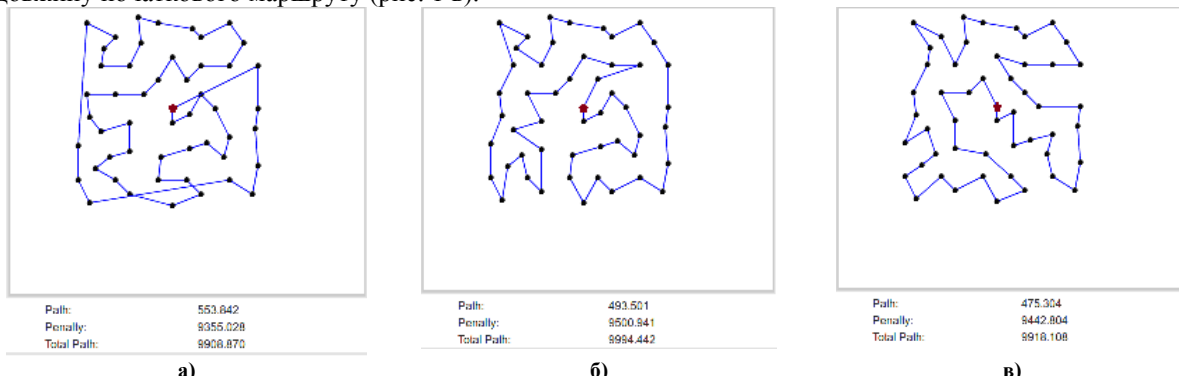


Рис. 1. Побудовані маршрути: а) жадібним алгоритмом; б) 2-орт алгоритмом; в) 3-орт алгоритмом

У таблиці 1 наведено результати застосування евристичних алгоритмів без часових вікон для деяких тестових наборів даних з бібліотеки TSPLIB.

Таблиця 1

Результати чисельних експериментів для задачі комівояжера

Алгоритм	Довжина отриманого маршруту, ум. од.	Оптимальна довжина, ум. од.	Різниця між оптимальною довжиною і отриманою, %	Час роботи алгоритму, мс
Набір даних «ch150» (150 міст)				
Жадібний	8194,614	6528	125	1020
2-орт	7087,38	6528	108	8075
3-орт	7295,89	6528	111	458220
Набір даних «eil101» (101 місто)				
Жадібний	825,24	629	131	58
2-орт	683,33	629	108	138
3-орт	697,15	629	110	3942
Набір даних «eil76» (76 міст)				
Жадібний	711,99	538	132	20
2-орт	567,74	538	108	36
3-орт	622,92	538	115	1162

Очевидно, що жадібний алгоритм буде найгірший маршрут, але буде швидко. Використання 2-орт, 3-орт алгоритмів призводить до поліпшення маршруту, але час роботи збільшується.

Для побудови маршруту з урахуванням часових вікон, спочатку було знайдено «тур» за допомогою жадібного алгоритму. Після цього, його було покращено алгоритмами 2-орт та 3-орт з урахуванням часових вікон для кожного пункту – до маршруту було додано функцію штрафу, яка плюсує до загального маршруту число, що дорівнює добутку часу, на який запізнився водій та на коефіцієнт штрафу (у даному випадку – це одиниця). Задача маршрутизації транспортних засобів з урахуванням часових вікон та обмеженою вантажомісткістю використовує  $n$  машин для об'їзду усіх пунктів маршруту (рис. 2-3).

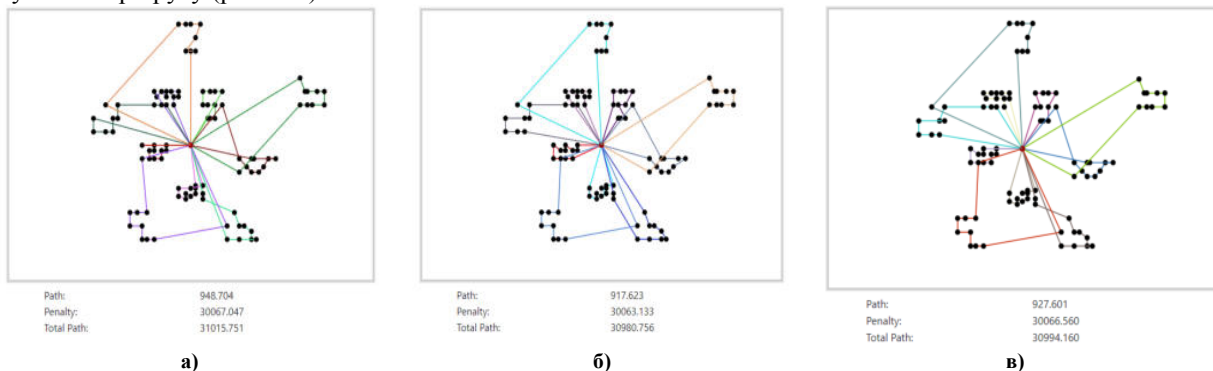


Рис. 2. Маршрут побудований: а) жадібним алгоритмом; б) жадібним алгоритмом та 2-орт алгоритмом з алгоритмом обміну; в) жадібним алгоритмом та 3-орт алгоритмом з алгоритмом обміну

У кожному пункті задані часові вікна та маса вантажу. Для усіх автомобілів задано їх вантажомісткість та швидкість (у роботі це стала величина). Було реалізовано різне почергове використання алгоритмів для досягнення оптимального маршруту. Тестовий файл було взято з бібліотеки Solomon benchmark [9] «s102.txt». У візуалізації бере участь до 10 автомобілів, кожен шлях якого показано різними кольорами, а червона точка – це початковий етап маршруту для кожного автомобіля. Нижче представлені різні комбінації евристичних алгоритмів для досягнення оптимального маршруту.

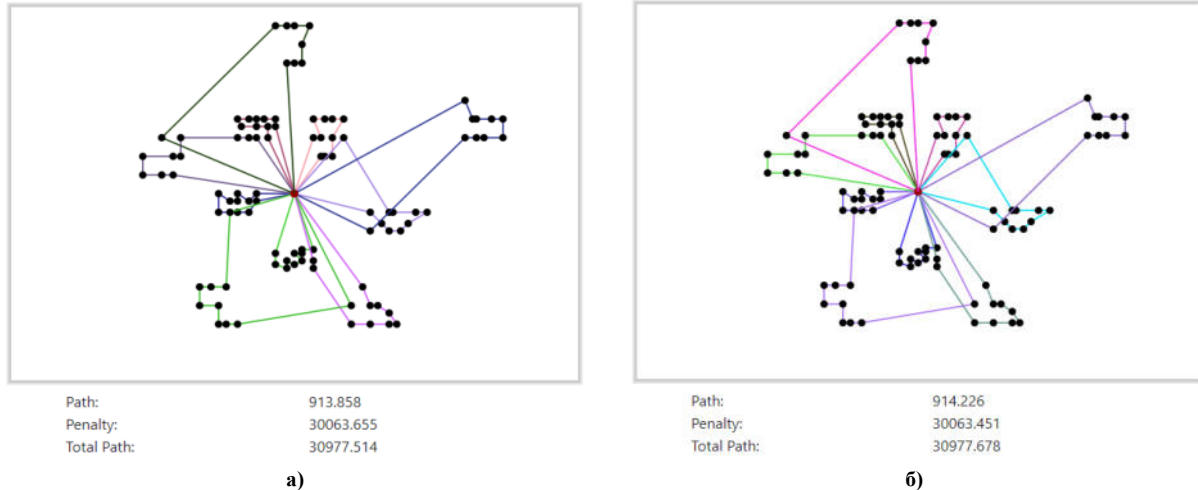


Рис. 3. Маршрут побудований: а) жадібним алгоритмом та 2-opt алгоритмом з алгоритмом обміну та 3-opt алгоритмом з алгоритмом обміну; б) жадібним алгоритмом та 2-opt алгоритмом з алгоритмом обміну та 3-opt алгоритмом з алгоритмом обміну

Вирішення задачі маршрутизації ємнісного транспортного засобу з часовими вікнами (CVRPTW) для побудови серії оптимальних маршрутів є досить складним. Застосування різних комбінацій алгоритмів оптимізації призводить до побудови різних маршрутів. Результати тестування за різними алгоритмами представлено у таблиці 2.

Таблиця 2

Результати чисельних експериментів для CVRPTW

Алгоритм	Довжина отриманого маршруту, ум. од.	Різниця між оптимальною довжиною і отриманою, %	Час роботи алгоритму, мс
Набір даних «с201» (101 місто, оптимальна довжина – 591, кількість авто – 3)			
Жадібний	731,76	123	340
2-opt + swapPoint	677,54	114	8002
3-opt + swapPoint	688,15	116	10934
3-opt + swapPoint + 2-opt + swapPoint	672,56	113	17424
2-opt + swapPoint + 3-opt + swapPoint	666,21	112	19134
Набір даних «г201» (101 місто, оптимальна довжина – 1144, кількість авто – 8)			
Жадібний	1465,79	128	360
2-opt + swapPoint	1244,49	108	1547
3-opt + swapPoint	1292,90	112	1536
3-opt + 2-opt + swapPoint	1199,08	104	3072
2-opt + 3-opt + swapPoint	1209,77	106	3068
Набір даних «с102» (101 місто, оптимальна довжина – 828, кількість авто – 10)			
Жадібний	948,7	114	457
2-opt + swapPoint	917,62	110	3414
3-opt + swapPoint	927,6	111	3540
3-opt + 2-opt + swapPoint	914,22	110	6919
2-opt + 3-opt + swapPoint	913,85	110	6875

Результати чисельних експериментів надають можливість стверджувати: 1) розбіжність отриманого шляху з використанням алгоритму найближчого сусіда від оптимального складає 20%; 2) алгоритм 2-opt працює значно швидше за 3-opt, але він будує не самий оптимальний шлях; 3) алгоритм 3-opt працює довше за інші, але будує найкоротший шлях з усіх представлених алгоритмів. Аналіз результатів чисельних експериментів даної таблиці дозволяє зробити наступний висновок: комбінування евристичних алгоритмів покращує маршрут, але робота алгоритму потребує більше часу.

### Висновки

У роботі для вирішення поставленого завдання – побудови оптимального шляху транспортних засобів запропоновано використовувати підхід у два етапи: отримання приблизного розв'язку та його покращення. Результати проведених чисельних експериментів дають змогу стверджувати, що використання евристичних алгоритмів та їх комбінування при розв'язанні задачі маршрутизації є доцільним та ефективним в обчислювальному сенсі.

### Список використаної літератури

1. Хмелев А. В. Алгоритмы локального поиска для задач маршрутизации транспортных средств: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / НИИГУ. Новосибирск, 2015. 119 с. – URL: [http://www.math.nsc.ru/LBRT/k5/Khmelev\\_diss.pdf](http://www.math.nsc.ru/LBRT/k5/Khmelev_diss.pdf)
2. Зеленцов Д. Г., Короткая Л. И. Технологии вычислительного интеллекта в задачах моделирования динамических систем: монография. Днепр: Баланс-Клуб, 2018. – 178 с. DOI: 10.32434/mono-1-ZDG-KLI
3. Методи аналізу складності алгоритмів: [навчальний посібник] / І. Г. Губар, Л. В. Куценко, К. А. Кузнецов, Г. Й. Михальчук. Дніпропетровськ: РВВ ДНУ, 2001. 88 с.
4. Алексеев В. Е. Нахождение кратчайших путей в графе. *Графы. Модели вычислений. Структуры данных*. – Нижний Новгород: Издательство Нижегородского гос. университета, 2005. – С. 305.
5. Брознов В.О. Исследование решения задачи коммивояжера. *Компьютерное обеспечение и вычислительная техника Астрахань: Вести. АГТУ*. 2009. №2. С. 147-150.
6. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. – М.: МЦНМО, 2000. – 960 с.
7. Коротка Є. А., Михальчук Г. Й. Застосування та дослідження евристичних алгоритмів для розв'язання задачі комівояжера *Проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук: тези доповідей тематичної наукової конференції за підсумками науково-дослідної роботи Дніпропетровського національного університету ім. Олеса Гончара за 2017 рік* – Д.: ДНУ, 2018. – С. 29.
8. Мамлай Б. І., Коротка Л.І. Функціональна підсистема транспортної логістики приватного підприємства *Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем (КМОСС-2017): матеріали III Міжнародної науково-технічної конференції (м. Дніпро, 1-3 листопада 2017 року) / Міністерство освіти і науки України, Державний вищий навчальний заклад «Український державний хіміко-технологічний університет»*. – Дніпро: ДВНЗ УДХТУ, 2017. С. 136-138.
9. TSPLIB is a library of instances for the TSP. – URL: <http://elib.zib.de/pub/mp-testdata/tsp/tsplib/tsplib.html>
10. Solomon benchmark. – URL: <https://www.sintef.no/projectweb/top/vrptw/solomon-benchmark/100-customers/>

### References

1. Hmelev A. V. Algoritmyi lokalnogo poiska dlya zadach marshrutizatsii transportnyih sredstv: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk: 05.13.18 / NNIGU. Novosibirsk, 2015. 119 s. – URL: [http://www.math.nsc.ru/LBRT/k5/Khmelev\\_diss.pdf](http://www.math.nsc.ru/LBRT/k5/Khmelev_diss.pdf) (in Russian).
2. Zelentsov D.G., Korotkaya L.I. Tehnologii vyichislitel'nogo intellekta v zadachah modelirovaniya dinamicheskikh sistem: monografiya. Dnepr: Balans-Klub, 2018. – 178 s. DOI: 10.32434/mono-1-ZDG-KLI. (in Russian).
3. Metody analizu skladnosti alhorytmiv: [navchalnyi posibnyk] / I. H. Hubar, L. V. Kutsenko, K. A. Kuzniatsov, H. Y. Mykhalchuk. Dnipropetrovsk: RVV DNU, 2001. 88 s. (in Russian).
4. Alekseev V. E. Nahozhdenie kratчайshih putey v grafe. Grafyi. Modeli vyichisleniy. Strukturyi dannyih. – Nizhniy Novgorod: Izdatelstvo Nizhegorodskogo gos. universiteta, 2005. – S. 305. (in Russian).
5. Broznov V.O. Issledovanie resheniya zadachi kommivoyazhera. Kompyuternoe obespechenie i vyichislitelnaya tehnika Astrahan: Vesti. AGTU. 2009. #2. S. 147-150. (in Russian).
6. Kormen T., Leyzerson Ch., Rivest R. Algoritmyi: postroenie i analiz. – M.: MTsNMO, 2000. – 960 s. (in Russian).
7. Korotka Ye. A., Mykhalchuk H. Y. Zastosuvannia ta doslidzhennia evrystychnykh alhorytmiv dlia rozv'iazannia zadachi komivoiazhera Problemy prykladnoi matematyky ta kompiuternykh nauk: tezy dopovidei tematychnoi naukovoї konferentsii za pidsumkamy naukovo-doslidnoi roboty Dnipropetrovskoho natsionalnoho univertsytetu im. Olesia Honchara za 2017 rik – D.: DNU, 2018. – S. 29. (in Ukrainian).
8. Mamlai B. I., Korotka L.I. Funktsionalna pidsystema transportnoi lohistyky pryvatnoho pidpriemstva Kompiuterne modeliuвання ta optymizatsiia skladnykh system (KMOSS-2017): materialy III Mizhnarodnoi naukovo-tekhnichnoi konferentsii (m. Dnipro, 1-3 lystopada 2017 roku) / Ministerstvo osvity i nauky Ukrainy, Derzhavnyi vyshchyi navchalnyi zaklad «Ukrainskyi derzhavnyi khimiko-tekhnologichnyi univertsytet». – Dnipro: DVNZ UDKhTU, 2017. – S. 136-138. (in Ukrainian).
9. TSPLIB is a library of instances for the TSP. URL: <http://elib.zib.de/pub/mp-testdata/tsp/tsplib/tsplib.html>
10. Solomon benchmark. URL: <https://www.sintef.no/projectweb/top/vrptw/solomon-benchmark/100-customers/>



УДК 517.91:532.2

О.М. ЛЕНЮК

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

О.М. НІКІТИНА

Чернівецький лицей №1 математичного та економічного профілів

М.І. ШИНКАРИК

Тернопільський національний економічний університет

## МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ БЕССЕЛЯ-ЕЙЛЕРА НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ

*Розв'язана задача динаміки на двоскладовій полярній осі  $r \geq R_0 > 0$ . Розв'язок побудовано за допомогою гібридного інтегрального перетворення Бесселя-Ейлера. Задача математично приводить до побудови обмеженого розв'язку системи двох рівнянь гіперболічного типу за відповідними початковими умовами, умовами спряження та крайовими умовами.*

*Застосувавши до даної крайової задачі гібридне інтегральне перетворення Бесселя-Ейлера, ми одержуємо задачу Коші. Знайшовши розв'язок задачі Коші, застосовуємо до нього обернене перетворення і одержуємо єдиний розв'язок вихідної задачі.*

*Побудовані розв'язки крайових задач мають алгоритмічний характер, що дозволяє використовувати їх як в теоретичних дослідженнях, так і в числових розрахунках.*

*Ключові слова: гібридний диференціальний оператор, задача динаміки, гібридне інтегральне перетворення.*

О.М. ЛЕНЮК

Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича

О.М. НИКИТИНА

Черновицкий лицей №1 математического и экономического профилей

Н.И. ШИНКАРИК

Тернопольский национальный экономический университет

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДОМ ГИБРИДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТИПА БЕССЕЛЯ-ЭЙЛЕРА НА ПОЛЯРНОЙ ОСИ

*Решена задача динамики на двухсоставной полярной оси  $r \geq R_0 > 0$ . Решение построено при помощи гибридного интегрального преобразования Бесселя-Эйлера. Задача динамики математически приводит к построению ограниченного решения системы двух уравнений гиперболического типа с соответствующими начальными условиями, условиями сопряжения и краевыми условиями.*

*Применив к данной краевой задаче гибридное интегральное преобразование Бесселя-Эйлера, мы получаем задачу Коши. Найдя решение задачи Коши, применяем к нему обратное преобразование и получаем единственное решение исходной задачи.*

*Построенные решения краевых задач имеют алгоритмический характер, что позволяет использовать их как в теоретических исследованиях, так и в числовых расчетах.*

*Ключевые слова: гибридный дифференциальный оператор, задача динамики, гибридное интегральное преобразование.*

O.M. LENYUK

Chernivtsi National University by Yuriy Fed'kovych

O.M. NIKITINA

Chernivtsi Lyceum №1 of Mathematical and Economic Profiles

M.I. SHYNKARYK

Ternopil National Economic University

## MODELING OF DYNAMIC PROCESSES BY THE METHOD OF HYBRID INTEGRAL TRANSFORM OF BESSEL-EULER TYPE ON THE POLAR AXIS

*At the present stage of scientific and technological progress, especially in connection with the widespread*



use of composite materials, there is an urgent need to study the physical and technical characteristics of these materials that are in different operating conditions, which mathematically leads to the problems of integrating a separate system of differential equations of the second order on a piecewise homogeneous interval with the corresponding initial and boundary conditions, in particular, the dynamics problem mathematically leads to the construction of a solution of a separate system of partial differential equations of hyperbolic type.

One of the effective methods for constructing of integral representations of analytic solutions of the algorithmic nature of the problems of mathematical physics is the method of hybrid integral transforms.

In this paper we construct a solution of the dynamics problem on the two-component polar axis  $r \geq R_0 > 0$  with one point of conjugation by the method of hybrid integral Bessel-Euler transform.

The problem of dynamics on the two-component polar axis mathematically leads to the construction of a bounded solution of a system of two hyperbolic partial differential equations with corresponding initial conditions, conjugation conditions and boundary conditions. Applying to this boundary-value problem the hybrid integral Bessel-Euler transform, we obtain Cauchy problem. Finding a solution to the Cauchy problem, we apply to it the inverse hybrid integral Bessel-Euler transform.

A straight integral Bessel-Euler transform on the polar axis with one point of conjugation is written in the form of a matrix row. The output system and the initial conditions are written in a matrix form and we apply the operator matrix row to the given problem by the rule of multiplication of matrices. As a result we obtain the Cauchy problem for the ordinary differential equation. The inverse Bessel-Euler transform is written in the form of an operator matrix column and we apply it to the constructed solution of the Cauchy problem. After completing certain transformations, we obtain the unique solution of the original problem.

The constructed solutions of boundary value problems have an algorithmic character, which allows them to be used both in theoretical studies and in numerical calculations.

Keywords: hybrid differential operator, problem of dynamic, hybrid integral transform.

#### Постановка проблеми

На сучасному етапі науково-технічного прогресу, особливо у зв'язку із широким застосуванням композитних матеріалів, виникає гостра потреба у вивченні фізико-технічних характеристик даних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, що математично приводить до задач інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі з відповідними початковими та крайовими умовами [1 – 3], зокрема задача динаміки математично приводить до побудови розв'язку сепаратної системи рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу.

#### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Одним із ефективних методів побудови інтегральних зображень аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру задач математичної фізики є метод гібридних інтегральних перетворень [1 – 4].

В [4] побудовано гібридне інтегральне перетворення (ГІП), породжене на полярній осі  $r \geq R_0 > 0$  з однією точкою спряження гібридним диференціальним оператором (ГДО) Бесселя-Ейлера.

#### Мета дослідження

Побудувати розв'язок задачі динаміки на двоскладовій полярній осі  $r \geq R_0 > 0$  з однією точкою спряження за допомогою гібридного інтегрального перетворення типу Бесселя-Ейлера.

#### Викладення основного матеріалу дослідження

Задача динаміки на двоскладовій полярній осі математично приводить до побудови в області

$$D_2 = \{(t, r) : t > 0, r \in I_1^+\}, \quad I_1^+ = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, \infty); R_0 > 0\}$$

обмеженого розв'язку системи рівнянь гіперболічного типу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 B_{v, \alpha_1} [u_1] &= f_1(t, r), \quad r \in (R_0, R_1), \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 B_{\alpha_2}^* [u_2] &= f_2(t, r), \quad r \in (R_1, \infty), \end{aligned} \quad (1)$$

за початковими умовами

$$u_j(t, r)|_{t=0} = g_j(r), \quad \frac{\partial u_j}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_j(r), \quad r \in (R_{j-1}, R_j), \quad j = 1, 2, \quad R_2 = \infty, \quad (2)$$

умовами спряження

$$\left[ \left( \alpha_{j1}^1 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^1 \right) u_1 - \left( \alpha_{j2}^1 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^1 \right) u_2 \right] \Big|_{r=R_1} = 0, \quad j = 1, 2, \quad (3)$$

та крайовими умовами

$$\left( -h_1 \frac{\partial}{\partial r} + h_2 \right) u_1 \Big|_{r=R_0} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} [r^\nu u_2] = 0. \quad (4)$$

Тут беруть участь диференціальний оператор Бесселя  $B_{\nu, \alpha_1}$  та диференціальний оператор Ейлера  $B_{\alpha_2}^*$  [4].

Вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти:  $\alpha_j > 0$ ,  $h_j \geq 0$ ;  $h_1 + h_2 \neq 0$ ,  $\alpha_{jk}^1 \geq 0$ ,  $\beta_{jk}^1 \geq 0$ ,  $c_{j1} = \alpha_{2j}^1 \beta_{1j}^1 - \alpha_{1j}^1 \beta_{2j}^1$ ,  $c_{11} \cdot c_{21} > 0$ ;  $j = 1, 2$ .

В [4] побудовано пряме  $H_{\nu, (\alpha)}$  й обернене  $H_{\nu, (\alpha)}^{-1}$  ГПП, породжене на множині  $I_1^+$  ГДО  $M_{\nu, (\alpha)} = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)a_1^2 B_{\nu, \alpha_1} + \theta(r - R_1)a_2^2 B_{\alpha_2}^*$ :

$$H_{\nu, (\alpha)}[g(r)] = \int_{R_0}^{\infty} g(r) V_{\nu, (\alpha)}(r, \beta) \sigma(r) dr \equiv \tilde{g}(\beta), \quad (5)$$

$$H_{\nu, (\alpha)}^{-1}[\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{g}(\beta) V_{\nu, (\alpha)}(r, \beta) \Omega_{\nu, (\alpha)}(\beta) d\beta \equiv g(r) \quad (6)$$

та виведена основна тотожність ГПП ГДО  $M_{\nu, (\alpha)}$ :

$$\begin{aligned} H_{\nu, (\alpha)}[M_{\nu, (\alpha)}[g(r)]] = & -\beta^2 \tilde{g}(\beta) - k_1^2 \int_{R_0}^{R_1} g_1(r) V_{\nu, (\alpha); 1}(r, \beta) \sigma_1 r^{2\alpha_1 + 1} dr - k_2^2 \int_{R_1}^{\infty} g_2(r) V_{\nu, (\alpha); 2}(r, \beta) \sigma_2 r^{2\alpha_2 - 1} dr + \\ & + c_{21}^{-1} R_1^{2\alpha_2 + 1} [Z_{\nu, (\alpha); 12}^1(\beta) \omega_{21} - Z_{\nu, (\alpha); 22}^1(\beta) \omega_{11}]. \end{aligned} \quad (7)$$

Тут  $\theta(x)$  – одинична функція Гевісайда [4],  $V_{\nu, (\alpha)}(r, \beta)$  – спектральна вектор-функція відповідної задачі Штурма-Ліувілля [4],

$$\begin{aligned} V_{\nu, (\alpha)}(r, \beta) &= \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r) V_{\nu, (\alpha); 1}(r, \beta) + \theta(r - R_1) V_{\nu, (\alpha); 2}(r, \beta), \\ V_{\nu, (\alpha); 1}(r, \beta) &= q_{\alpha_2}(\beta) [u_{\nu, \alpha_1; 11}^{01}(b_1 R_0) N_{\nu, \alpha_1}(b_1 r) - u_{\nu, \alpha_1; 11}^{02}(b_1 R_0) J_{\nu, \alpha_1}(b_1 r)], \\ V_{\nu, (\alpha); 2}(r, \beta) &= \omega_{\nu, (\alpha); 1}(\beta) v_{\alpha_2, 2}(r, b_2) - \omega_{\nu, (\alpha); 2}(\beta) v_{\alpha_2, 1}(r, b_2), \\ \Omega_{\nu, (\alpha)}(\beta) &= \beta [b_2(\beta)]^{-1} ([\omega_{\nu, (\alpha); 1}(\beta)]^2 + [\omega_{\nu, (\alpha); 2}(\beta)]^2)^{-1}, \end{aligned}$$

$$\sigma(r) = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)\sigma_1 r^{2\alpha_1 + 1} + \theta(r - R_1)\sigma_2 r^{2\alpha_2 - 1}, \quad \sigma_1 = \frac{c_{11}}{c_{21}} \frac{R_1^{2\alpha_2 + 1}}{R_1^{2\alpha_1 + 1}} \frac{1}{a_1^2}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{a_2^2},$$

$$q_{\alpha_2}(\beta) = Y_{\alpha_2; 12}^{11} Y_{\alpha_2; 22}^{12} - Y_{\alpha_2; 22}^{11} Y_{\alpha_2; 12}^{12},$$

$J_{\nu, \alpha_1}(b_1 r)$  та  $N_{\nu, \alpha_1}(b_1 r)$  – дійсні функції Бесселя першого роду та другого роду відповідно, які утворюють фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя,  $v_{\alpha_2, 1}(r, b_2)$  та  $v_{\alpha_2, 2}(r, b_2)$  – фундаментальна система розв'язків для рівняння Ейлера [4]. Решта функцій, що беруть участь у цих формулах, визначені в [4].

Знайдемо інтегральне зображення аналітичного розв'язку задачі (1) – (4) методом ГПП типу Бесселя-Ейлера на двоскладовій полярній осі  $r \geq R_0 > 0$  з точкою спряження, запровадженого правилами (5) – (7).

Запишемо систему (1) та початкові умови (2) у матричній формі:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma_1^2 - a_1^2 B_{v,\alpha_1} \right) u_1(t,r) \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma_2^2 - a_2^2 B_{v,\alpha_2}^* \right) u_2(t,r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t,r) \\ f_2(t,r) \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} u_1(t,r) \\ u_2(t,r) \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u_1(t,r) \\ u_2(t,r) \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} \varphi_1(r) \\ \varphi_2(r) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

Інтегральний оператор  $H_{v,(\alpha)}$  згідно правила (5) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_{v,(\alpha)} [\dots] = \left[ \int_{R_0}^{R_1} \dots V_{v,(\alpha);1}(r, \beta) \sigma_1 r^{2\alpha_1+1} dr \quad \int_{R_1}^{\infty} \dots V_{v,(\alpha);2}(r, \beta) \sigma_2 r^{2\alpha_2-1} dr \right]. \quad (9)$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (9) за правилом множення матриць до задачі (8). Внаслідок основної тотожності (7) отримуємо задачу Коші:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d^2}{dt^2} + \beta^2 \right) \tilde{u}(t, \beta) + (k_1^2 + \gamma_1^2) \int_{R_0}^{R_1} u_1(t, r) V_{v,(\alpha);1}(r, \beta) \sigma_1 r^{2\alpha_1+1} dr + (k_2^2 + \gamma_2^2) \int_{R_1}^{\infty} u_2(t, r) V_{v,(\alpha);2}(r, \beta) \sigma_2 r^{2\alpha_2-1} dr = \tilde{f}(t, \beta), \\ & \tilde{u} \Big|_{t=0} = \tilde{g}(\beta), \quad \frac{d\tilde{u}}{dt} \Big|_{t=0} = \tilde{\varphi}(\beta). \end{aligned}$$

Припустимо, що  $\max\{\gamma_1^2; \gamma_2^2\} = \gamma_1^2$ . Покладемо всюди  $k_1^2 = 0$ ,  $k_2^2 = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 \geq 0$ . Одержуємо задачу Коші:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d^2}{dt^2} + \beta^2 + \gamma_1^2 \right) \tilde{u}(t, \beta) = \tilde{f}(t, \beta), \\ & \tilde{u} \Big|_{t=0} = \tilde{g}(\beta), \quad \frac{d\tilde{u}}{dt} \Big|_{t=0} = \tilde{\varphi}(\beta), \\ & \tilde{g}(\beta) \equiv \int_{R_0}^{R_1} g_1(r) V_{v,(\alpha);1}(r, \beta) \sigma_1 r^{2\alpha_1+1} dr + \int_{R_1}^{\infty} g_2(r) V_{v,(\alpha);2}(r, \beta) \sigma_2 r^{2\alpha_2-1} dr. \end{aligned} \quad (10)$$

Безпосередньо перевіряється [6], що розв'язком задачі Коші (10) є функція

$$\tilde{u}(t, \beta) = \frac{\sin \sqrt{\beta^2 + \gamma_1^2} t}{\sqrt{\beta^2 + \gamma_1^2}} \tilde{\varphi}(\beta) + \frac{d}{dt} \frac{\sin \sqrt{\beta^2 + \gamma_1^2} t}{\sqrt{\beta^2 + \gamma_1^2}} \tilde{g}(\beta) + \int_0^t \frac{\sin \sqrt{\beta^2 + \gamma_1^2} (t - \tau)}{\sqrt{\beta^2 + \gamma_1^2}} \tilde{f}(\tau, \beta) d\tau. \quad (11)$$

Інтегральний оператор  $H_{v,(\alpha)}^{-1}$  згідно правила (6), як обернений до (9), зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H_{v,(\alpha)}^{-1} [\dots] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \dots V_{v,(\alpha);1}(r, \beta) \Omega_{v,(\alpha)}(\beta) d\beta \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \dots V_{v,(\alpha);2}(r, \beta) \Omega_{v,(\alpha)}(\beta) d\beta \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Застосувавши операторну матрицю-стовпець (12) за правилом множення матриць до матриці-елемента  $[\tilde{u}(t, \beta)]$ , де функція  $[\tilde{u}(t, \beta)]$  визначена формулою (11), одержуємо єдиний розв'язок гіперболічної задачі (1) – (4):

$$u_j(t, r) = \int_0^t \int_{R_0}^{R_1} H_{v,(\alpha);j1}(t-\tau, r, \rho) [f_1(\tau, \rho) + \varphi_1(\rho)\delta_+(\tau)] \sigma_1 \rho^{2\alpha+1} d\rho d\tau + \int_0^t \int_{R_1}^{\infty} H_{v,(\alpha);j2}(t-\tau, r, \rho) [f_2(\tau, \rho) + \varphi_2(\rho)\delta_+(\tau)] \sigma_2 \rho^{2\alpha-1} d\rho d\tau + \frac{\partial}{\partial t} \int_{R_0}^{R_1} H_{v,(\alpha);j1}(t, r, \rho) g_1(\rho) \sigma_1 \rho^{2\alpha+1} d\rho + \frac{\partial}{\partial t} \int_{R_1}^{\infty} H_{v,(\alpha);j2}(t, r, \rho) g_2(\rho) \sigma_2 \rho^{2\alpha-1} d\rho. \quad (13)$$

У рівностях (13) беруть участь породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу:

$$H_{v,(\alpha);jk}(t, r, \rho) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\beta^2 + \gamma_1^2} t}{\sqrt{\beta^2 + \gamma_1^2}} V_{v,(\alpha);j}(r, \beta) V_{v,(\alpha);k}(r, \beta) \Omega_{v,(\alpha)}(\beta) d\beta, \quad j, k = 1, 2. \quad (14)$$

При цьому  $\delta_+(t)$  – дельта-функція Дірака, зосереджена в точці  $t = 0 +$ .

*Зауваження.* При  $\max\{\gamma_1^2; \gamma_2^2\} = \gamma_2^2$ ,  $k_j^2 = \gamma_2^2 - \gamma_j^2 \geq 0$ ,  $j = 1, 2$ , й у формулі (14) вираз  $(\beta^2 + \gamma_1^2)$  міняється на вираз  $(\beta^2 + \gamma_2^2)$ .

**Висновок.** Побудований розв'язок (13) гіперболічної задачі (1) – (4) має алгоритмічний характер, що дозволяє використовувати його як в теоретичних дослідженнях, так і в числових розрахунках.

#### Список використаної літератури

1. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. К.: Наук. думка, 1992. 280 с.
2. Ленюк М.П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. К.: Ін-т математики НАН України, 1997. 188 с.
3. Конет І.М., Ленюк М.П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. Чернівці: Прут, 2004. 276 с.
4. Нікітіна О.М. Гібридні інтегральні перетворення типу (Ейлера-Бесселя). Львів, 2008. 86 с. (Препринт. НАН України, Ін-т прикладних проблем математики і механіки ім. Я.С. Підстригача; 01-08).
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
6. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959. 468 с.

#### References

1. Kolyano Yu.M. Metodyi teploprovodnosti i termouprugosti neodnorodnogo tela. K.: Nauk. dumka, 1992. 280 s.
2. Leniuk M.P. Temperaturni polia v ploskykh kuskovo-odnorodnykh ortotropnykh oblastiakh. K.: In-t matematyky NAN Ukrainy, 1997. 188 s.
3. Konet I.M., Leniuk M.P. Temperaturni polia v kuskovo-odnorodnykh tsylindrychnykh oblastiakh. Chernivtsi: Prut, 2004. 276 s.
4. Nikitina O.M. Hibrydni intehralni peretvorennia typu (Eilera-Besselia). Lviv, 2008. 86 s. (Preprynt. NAN Ukrainy, In-t prykladnykh problem matematyky i mekhaniky im. Ya.S. Pidstryhacha; 01-08).
5. Tihonov A.N., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M.: Nauka, 1972. 735 s.
6. Stepanov V.V. Kurs differentsialnykh uravneniy. M.: Fizmatgiz, 1959. 468 s.

UDC 535.33

O.V. MACHULIANSKYI, B.B. BABYCH, V.O. MACHULIANSKYI  
National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"

### APPROXIMATION MODELS OF FUNCTIONAL SYSTEMS WITH NANOCOMPOSITE COMPONENTS

*The effective complex permittivity of the nanocomposite structure Cr/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> is determined on the basis of the theory of effective environment and its approximation model is proposed. Numerical modeling of the electromagnetic response of spectral characteristics of nanocomposite metal-dielectric structures taking into account the microstructure and morphology of their transition nanosized layers was performed in the range 0,2 ÷ 1,1 μm. Approximation models are developed on the basis of the obtained results. The correlation between the complexity of approximation models of such structures and accuracy of prediction of their spectral characteristics is established. The recommendations concerning the possibility of application of approximation models of various accuracy for modeling and designing devices based on nanocomposite metal-dielectric structures for various functional applications was given.*

*Keywords: approximation model, nanocomposite metal-dielectric structure, cut-off optical filter, theory of effective environment.*

О.В. МАЧУЛЯНСЬКИЙ, Б.Б. БАБИЧ, В.О. МАЧУЛЯНСЬКИЙ  
Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

### АПРОКСИМАЦІЙНІ МОДЕЛІ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ СИСТЕМ З НАНОКОМПЗИТНИМИ КОМПОНЕНТАМИ

*Визначена ефективна комплексна діелектрична проникність нанокмпозитної структури Cr/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> на основі теорії ефективного середовища та запропонована її апроксимаційна модель. Виконане числове моделювання електромагнітного відгуку спектральних характеристик нанокмпозитних металодіелектричних структур в діапазоні спектру 0,2 ÷ 1,1 мкм з врахуванням мікроструктури та морфології їх перехідних нанорозмірних шарів. Розроблено на основі отриманих результатів апроксимаційні моделі. Встановлено взаємозв'язок між складністю апроксимаційних моделей таких структур та точністю прогнозування їх спектральних характеристик. Надані рекомендації щодо можливості застосування апроксимаційних моделей різної точності для моделювання та проектування пристроїв на основі нанокмпозитних металодіелектричних структур для різного функціонального застосування.*

*Ключові слова: апроксимаційна модель, нанокмпозитна металодіелектрична структура, відсікаючий оптичний фільтр, теорія ефективного середовища.*

А.В. МАЧУЛЯНСКИЙ, Б.Б. БАБИЧ, В.А. МАЧУЛЯНСКИЙ  
Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт имени Иггоря Сикорского"

### АППРОКСИМАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ С НАНОКОМПЗИТНЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

*Определена эффективная комплексная диэлектрическая проницаемость нанокмпозитной структуры Cr/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> на основе теории эффективной среды и предложена ее аппроксимационная модель. Выполнено численное моделирование электромагнитного отклика спектральных характеристик нанокмпозитных металлодиэлектрических структур в диапазоне спектра 0,2 ÷ 1,1 мкм с учетом микроструктуры и морфологии их переходных наноразмерных слоев. Разработаны на основе полученных результатов аппроксимационные модели. Установлена взаимосвязь между сложностью аппроксимационных моделей таких структур и точностью прогнозирования их спектральных характеристик. Даны рекомендации относительно возможности применения аппроксимационных моделей различной точности для моделирования и проектирования устройств на основе нанокмпозитных металлодиэлектрических структур для различного функционального применения.*

*Ключевые слова: аппроксимационная модель, нанокмпозитная металлодиэлектрическая структура, отсекающий оптический фильтр, теория эффективной среды.*

### Formulation of the problem

Nanocomposite metal-dielectric structures have a number of unique optical effects, which makes them widely applied in optoelectronics, solar energy, information systems for transmitting, storing and protecting information [1, 2].

In practice, such materials are layered structures that consist of nanosized metal films, antireflection dielectric layers and transition barrier layers [3-6]. The transition layers provide a connection between the metal and dielectric components, prevent their interfusion, and increase operational stability. They consist of a dielectric basis (matrix) and a nanosized metal phase with particle sizes of less than 10 nm (nanoparticles).

However, there are no models that would bind the electromagnetic response to the electromagnetic effects of nanocomposite metal-dielectric structures with the structure and electromagnetic characteristics of their individual components.

### Analysis of recent research and publications

An analysis of modern scientific and technical literature shows that in the modeling and designing of nanocomposite metal-dielectric structures, for the use as devices of various functional purposes, the microstructure and morphology of their transition nanosized layers are not taken into account.

It is known that in the range of sizes, starting less than 100 nm, the properties of metal particles become dimensionally dependent [7, 8]. Experimental information about materials used for such nanocomposite metal-dielectric structures is limited and obtained with significant assumptions regarding their microstructure. In addition, there are no theories that would allow us to reliably describe the response of such structures to electromagnetic effects and explain their specific mechanisms and effects of photoabsorption [9, 10]. Therefore, information about the optical parameters of metal nanoparticles is not clear and contradictory [11-13]. Consequently, when developing mathematical models it is expedient to use reliable experimental characteristics of nanocomposite metal-dielectric structures to create approximation models of their electromagnetic response.

Therefore, in the framework of the continuation of our research presented in [14, 15], it is necessary to develop approximation models based on the results of experimental studies, which give an opportunity to describe the influence of microstructure and morphology of nanosized layers of metal-dielectric structures on their optical characteristics.

### The aim of the study

Therefore, the purpose of this work is to carry out a numerical simulation of the optical response of nanocomposite metal-dielectric structures to electromagnetic effects, taking into account the microstructure and morphology of their transition nanoscale layers; development on the basis of the obtained results the approximation models which will enable to increase the accuracy of modeling and designing devices of different functional purposes.

### Research results

As a research object was chosen a cut-off filter based on the composite metal-dielectric structure (fig. 1), which consists of a nanosized silver film, antireflection dielectric layers of aluminum  $Al_2O_3$  and transitional layers type like  $Cr/Al_2O_3$  deposited on the glass substrate.

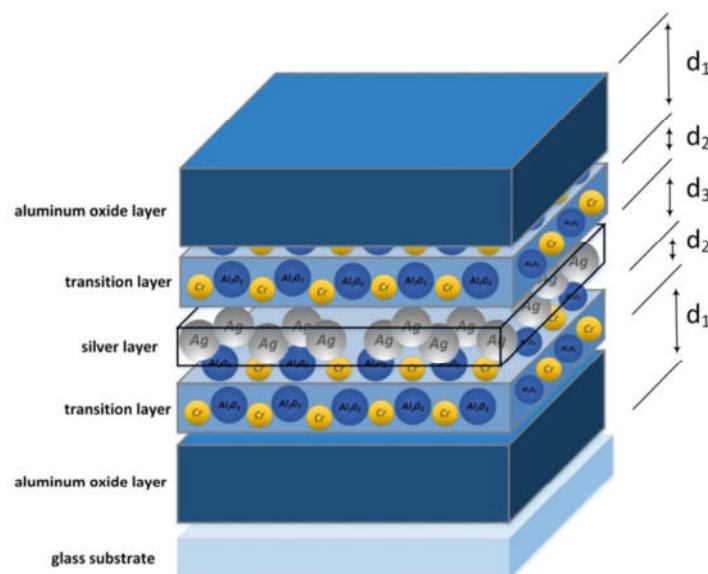


Fig. 1. The structure of cut-off filter

For modeling the spectral characteristics of electromagnetic response of cut-off transparent optical filters uses an algorithm based on the transfer-matrix method [16, 17]. The advantage of this method is the



ability to evaluate the electromagnetic response of composite metal-dielectric structures both on the substrate and in free space (free from the substrate).

For the simulation as input data for nanosized particles of silver and chromium used experimental optical characteristics are given in [18, 19], respectively. For the dielectric component – the values of the complex permittivity  $\varepsilon$  are determined from the results of our experimental studies presented in [20].

The simulation is carried out on the condition that each layer is characterized by an effective thickness  $d_i$  ( $i$  – index of the layer), spectral complex electromagnetic parameters: complex permittivity  $\varepsilon_i$ , complex permeability  $\mu_i$  (in the optical range of the electromagnetic spectrum for the metal component  $\mu_i = 1$ ). It should be noted that the transition layer type like Cr/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> is a nanocomposite structure, which is characterized by effective complex dielectric permittivity:

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_{eff1} - i\varepsilon_{eff2}, \quad (1)$$

where  $\varepsilon_{eff1}$ ,  $\varepsilon_{eff2}$  are real and imaginary parts of the effective complex dielectric permittivity.

Model of effective environment, in particular the Bruggeman's theory [5], was used to determine the values of the effective complex dielectric permittivity of such composite structures. According to this theory, the complex effective permittivity of metal-dielectric systems is related to the permittivity of metal inclusions  $\varepsilon_p$  with a volume concentration  $q$  distributed in an isotropic matrix with permittivity  $\varepsilon_m$ . The results of the numerical modeling of the spectral characteristics of the effective complex permittivity of the investigated composite structures are presented in fig. 2.

Approximation model of the spectral dependence of the effective complex permittivity of the nanocomposite structure type like Cr/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> with the consideration of their structural parameters is developed on the basis of the data of the results of numerical simulation.

$$\begin{cases} \varepsilon_{eff1} = -2,15 + 3,65 \exp\left(-\frac{\lambda}{1,44} - \frac{q}{18,24}\right); \\ \varepsilon_{eff2} = 0,03 + 2,49 \exp\left(-\frac{\lambda}{0,32} - \frac{q}{30,79}\right). \end{cases} \text{ if } \begin{cases} 0,2 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 1,1 \mu\text{m} \\ 0 \leq q \leq 0,9 \end{cases} \quad (2)$$

In the spectral range  $\lambda = 0,2 \div 1,1 \mu\text{m}$ , the error of the approximation model does not exceed 2%.

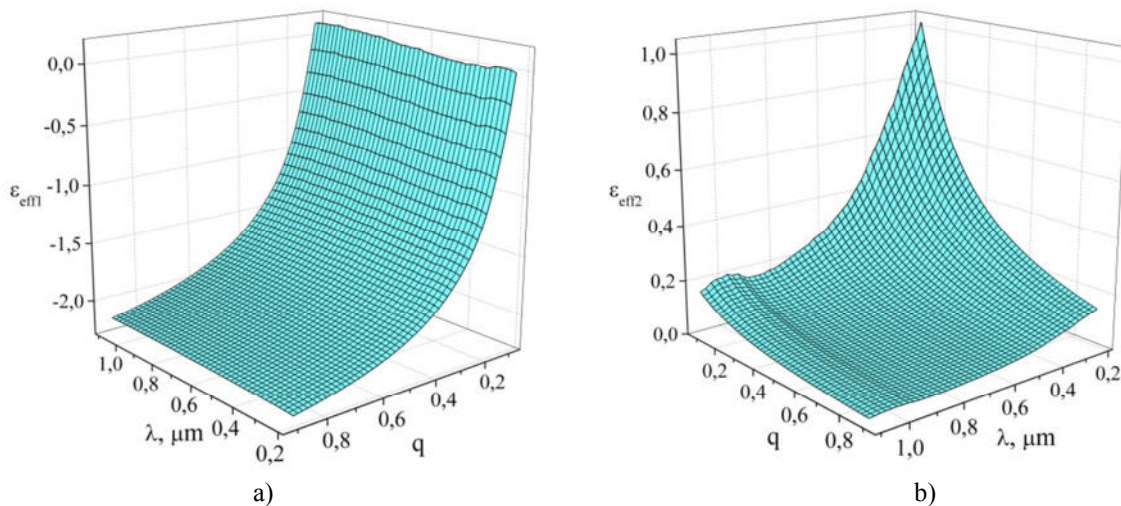


Fig. 2. Spectral dependences of real (a) and imaginary (b) parts of the effective permittivity of transition layer Cr/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> at different values of the volume concentration  $q$

The approximation model of the transition composite layer Cr/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> is used for numerical simulation of the optical response of the cut-off filter of the structure shown in fig. 1. The simulation was performed at different values of the ratio of the thickness of antireflection  $d_1$  and transition  $d_2$  layers. In this case,  $d_1$  was fixed and was 20 nm, the thickness  $d_2$  varied in the range from 1 to 10 nm. The results of the modeling of the electromagnetic response of the metal-dielectric structure are presented in fig. 3.

Approximation models of the cut-off optical filter are proposed on the basis of the obtained values of the spectral characteristics of coefficients of reflection  $R$  and transmission  $T$ . The first model has the form:

$$\begin{cases} R = 0,54 - 1,29\lambda - 0,03d_2/d_1 - 1,17\lambda^2 + 5,06(d_2/d_1)^2; \\ T = -0,07 + 2,64\lambda + 0,01d_2/d_1 - 2,02\lambda^2 - 6,71(d_2/d_1)^2. \end{cases} \text{ if } \begin{cases} 0,2 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 1,1 \mu\text{m} \\ 0,05 \leq \frac{d_2}{d_1} \leq 0,5 \end{cases} \quad (3)$$

In this case, the error of the approximation model is about 40%.

In order to reduce the error value, the proposed complicated approximation model that has the form:

$$\begin{cases} R = -0,51 + 6,46\lambda - 15,67\lambda^2 + 11,81\lambda^3 + 1,74\lambda^4 - 3,24\lambda^5 - \\ - 0,92d_2/d_1 + 3,57(d_2/d_1)^2 - 0,67(d_2/d_1)^3 + 0,51(d_2/d_1)^4 + 0,01(d_2/d_1)^5; \\ T = -0,08 + 2,43\lambda - 1,99\lambda^2 + 2,45\lambda^3 - 4,67\lambda^4 + 2,36\lambda^5 + \\ + 0,01d_2/d_1 - 2,93(d_2/d_1)^2 + 4,49(d_2/d_1)^3 - 0,31(d_2/d_1)^4 - 0,07(d_2/d_1)^5. \end{cases} \quad \text{if } \begin{cases} 0,2\mu\text{m} \leq \lambda \leq 1,1\mu\text{m} \\ 0,05 \leq \frac{d_2}{d_1} \leq 0,5 \end{cases} \quad (4)$$

In this case, the error of the approximation model does not exceed 20%.

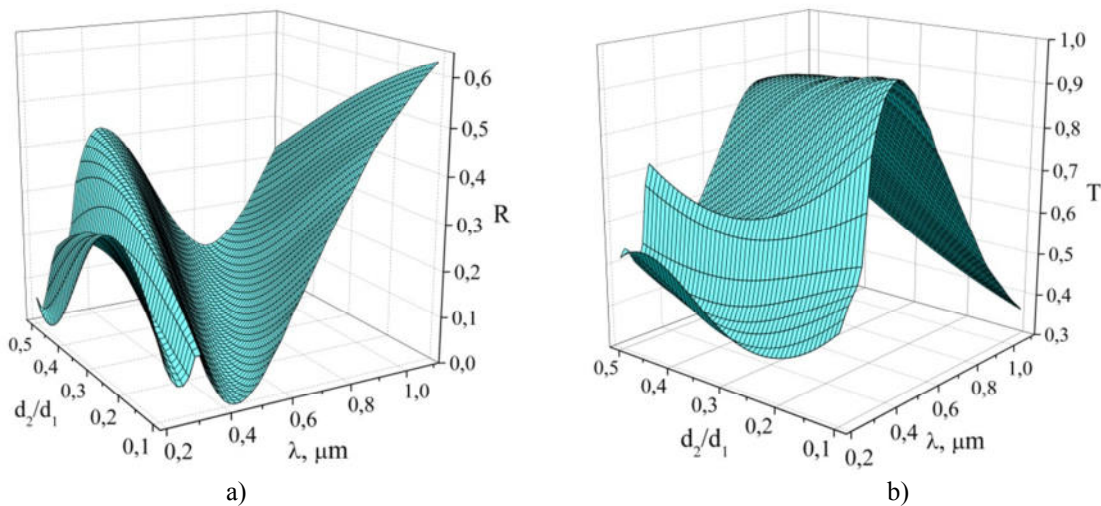


Fig. 3. Spectral dependences of coefficients of reflection  $R$  (a) and transmission  $T$  (b) of optical filter of type like  $\text{Al}_2\text{O}_3 - \text{Cr}/\text{Al}_2\text{O}_3 - \text{Ag} - \text{Cr}/\text{Al}_2\text{O}_3 - \text{Al}_2\text{O}_3$  at various values of the ratio  $d_2/d_1$

As can be seen, the complicated approximation model described by the system (4) makes it possible to predict with a high accuracy the spectral characteristics of the cut-off filter, especially the bands that are located in the near ultraviolet region.

A simplified approximation model described by system (3) predicts spectral characteristics with an accuracy of twice as low. In this case, this can be explained by the fact that this model neglects the above-mentioned bands.

In this way, a complicated approximation model must be used for the investigation of fundamental phenomena of optical response of nanocomposite metal-dielectric structures to electromagnetic effects. In its turn, a simplified approximation model is recommended for modeling and designing devices of different functional applications, since it describes, with fairly high accuracy, the areas of the visible and near-infrared spectrum ranges, which are of major interest to applied problems.

### Conclusions

The effective complex permittivity of nanocomposite structure  $\text{Cr}/\text{Al}_2\text{O}_3$  is determined based on the theory of effective environment and its approximation model is proposed. By numerical modeling of the optical response of cut-off filters based on nanocomposite metal-dielectric structures type like  $\text{Al}_2\text{O}_3 - \text{Cr}/\text{Al}_2\text{O}_3 - \text{Ag} - \text{Cr}/\text{Al}_2\text{O}_3 - \text{Al}_2\text{O}_3$  on the electromagnetic effects in the spectral range of wavelengths  $\lambda = 0,2 \div 1,1 \mu\text{m}$  using the transfer-matrix method with taking into account the microstructure and the morphology of their layers, an interconnection between the spectral characteristics of the filters and their structural and electromagnetic parameters of the metal-dielectric components is established, and appropriate approximation models are proposed.

By changing the structural and electromagnetic parameters of the metal-dielectric structure, in particular the thickness of the layers, the concentration of the nanosized metal phase, the permittivity of metal and dielectric components, we can change its spectral profile, which makes it possible to create devices of different functional assignments with given spectral-selective characteristics.

The obtained results are of interest for the application of approximation models of different accuracy for modeling and designing devices based on nanocomposite metal-dielectric structures for various applications.

#### References

1. Borisova A. et al. Broadband dielectric and conductivity spectra of dielectric-metal nanocomposites for microwave applications. *Electronics and Nanotechnology* : proceedings of the IEEE 33rd International scientific conference, 16–19 April 2013. Kyiv : IEEE, 2013. P. 21–25.
2. Пилинский В. В. и др. Основы применения наноструктурных материалов для обеспечения электромагнитной совместимости электронных устройств. *Электроника и связь. Тематический выпуск "Электроника и нанотехнологии"*. 2010. т. 3. С. 9–15.
3. Machulianskyi O., Babych B., Machulianskyi V. Optical filters on the basis of composite nanodimensional structures. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Radiophysics and Electronics*. 2017. Vol. 25, №. 1. P. 34–37.
4. Rodionov M. et al. Film coatings that are transparent in the visible spectral region with shielding properties in the microwave range. *Electronics and Nanotechnology* : proceedings of the IEEE 37th International scientific conference, 18–20 April 2017. Kyiv : IEEE, 2017. P. 52–56.
5. Machulyansky A., Tatarchuk D., Telychkina O., Yakimenko Y. Electrophysical properties of nanocomposite materials on the base of structures metal-dielectric. *Electronics Technology* : proceedings of the 33rd International spring seminar, 12–16 May 2010. Warsaw. P. 249–250.
6. Bovtun V. et al. Electrodynamic characteristics of metal-dielectric nanocomposites with ferromagnetic inclusions. *Microwave and Telecommunication Technology* : proceedings of the 23rd International Crimean conference, 12–14 September 2013. Sevastopol. P. 855–856.
7. Borisova A. et al. Dimensional dependencies of optical parameters of nanodimensional metal particles. *Electronics and Nanotechnology* : proceedings of the IEEE 36th International scientific conference, 19–21 April 2016. Kyiv : IEEE, 2016. P. 140–143.
8. Yakymenko Y. et al. Investigation of the structure and optical properties of thin copper films. *Electronics and Nanotechnology* : proceedings of the IEEE 38th International scientific conference, 24–26 April 2018. Kyiv : IEEE, 2018. P. 69–73.
9. Петров Ю. И. Физика малых частиц. Москва : Наука, 1982. 359 с.
10. Machulianskyi O., Babych B., Machulianskyi V. Determination of the efficiency factors of the absorption and scattering of nickel nanoparticles. *Informatyka, Automatyka, Pomiar w Gospodarce i Ochronie Środowiska*. 2018. Vol. 8, №. 1. P. 4–7.
11. Виноградов А. П. Электродинамика композитных материалов / под ред. Б. З. Каценеленбаума. Москва : Эдиториал УРСС, 2001. 208 с.
12. Telychkina O. et al. Application of nanostructured materials ensuring the electromagnetic compatibility of power electronic. *EMC Europe 2010* : proceedings of the International symposium, 13–17 September 2010. Wroclaw, P. 814–817.
13. Bondar V. M., Borisova A. V., Machulyansky A V., Yakimenko Yu. I. Characteristics of shields composite coatings based on nanodisperse particles. *Microwave and Telecommunication Technology* : proceedings of the 22nd International Crimean conference, 12–14 September 2012. Sevastopol. P. 683–684.
14. Мачулянський О. В., Бабич Б. Б., Мачулянський В. О., Тарасовська Н. П. Моделювання наноструктурних металодіелектричних систем для використання в якості оптичних фільтрів. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2016. № 3, т. 58. С. 371–375.
15. Verbitskiy V. et al. Energy-efficient optically transparent coating based on a metal-dielectric composites. *Electronics and Nanotechnology* : proceedings of the IEEE 35th International scientific conference, 21–24 April 2015. Kyiv : IEEE, 2015. P. 93–96.
16. Федоров С.В. Метод матриц переноса для сред с квадратичной оптической нелинейностью. *Журнал технической физики*. 1999. № 4, т. 69. С. 116–117.
17. Мачулянский А. В., Татарчук Д. Д., Мачулянский В. А. Анализ СВЧ-свойств нанодисперсных композитных систем. *Технічна електродинаміка. Тематичний випуск "Силова електроніка та енергоефективність"*. 2010. т. 1. С. 303–304.
18. Koroliouk D. et al. Applications of metal-dielectric nanocomposite structures in information systems. *Electronics and Nanotechnology* : proceedings of the IEEE 38th International scientific conference, 24–26 April 2018. Kyiv : IEEE, 2018. P. 96–100.
19. Machulianskyi O. Optical characteristics of nanodimensional particles of chrome. *Herald of Khmelnytskyi national university. Technical sciences*. 2018. Vol. 257, №. 1. P. 203–207.
20. Rodionov M. et al. Properties of aluminum oxynitride films prepared by reactive magnetron sputtering. *Electronics and Nanotechnology* : proceedings of the IEEE 34th International scientific conference, 16–19 April 2014. Kyiv : IEEE, 2014. P. 188–190.

#### References

1. Borisova A. et al. Broadband dielectric and conductivity spectra of dielectric-metal nanocomposites for microwave applications. *Electronics and Nanotechnology* : proceedings of the IEEE 33rd International scientific conference, 16–19 April 2013. Kyiv : IEEE, 2013. P. 21–25.
2. Pilinskiy V. V. i dr. Osnovni primeneniya nanostrukturnykh materialov dlya obespecheniya elektromagnitnoy sovместimosti elektronnykh ustroystv. *Elektronika i svyaz. Tematicheskii vyipusk "Elektronika i nanotehnologii"*. 2010. t. 3. S. 9–15.
3. Machulianskyi O., Babych B., Machulianskyi V. Optical filters on the basis of composite nanodimensional structures. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Radiophysics and Electronics*. 2017. Vol. 25, №. 1. P. 34–37.
4. Rodionov M. et al. Film coatings that are transparent in the visible spectral region with shielding properties in the microwave range. *Electronics and Nanotechnology* : proceedings of the IEEE 37th International scientific conference, 18–20 April 2017. Kyiv : IEEE, 2017. P. 52–56.
5. Machulyansky A., Tatarchuk D., Telychkina O., Yakimenko Y. Electrophysical properties of nanocomposite materials on the base of structures metal-dielectric. *Electronics Technology* : proceedings of the 33rd International spring seminar, 12–16 May 2010. Warsaw. P. 249–250.
6. Bovtun V. et al. Electrodynamic characteristics of metal-dielectric nanocomposites with ferromagnetic inclusions. *Microwave and Telecommunication Technology* : proceedings of the 23rd International Crimean conference, 12–14 September 2013. Sevastopol. P. 855–856.
7. Borisova A. et al. Dimensional dependencies of optical parameters of nanodimensional metal particles. *Electronics and Nanotechnology* : proceedings of the IEEE 36th International scientific conference, 19–21 April 2016. Kyiv : IEEE, 2016. P. 140–143.
8. Yakymenko Y. et al. Investigation of the structure and optical properties of thin copper films. *Electronics and Nanotechnology* : proceedings of the IEEE 38th International scientific conference, 24–26 April 2018. Kyiv : IEEE, 2018. P. 69–73.
9. Petrov Yu. I. Fizika malykh chastits. Moskva : Nauka, 1982. 359 s.
10. Machulianskyi O., Babych B., Machulianskyi V. Determination of the efficiency factors of the absorption and scattering of nickel nanoparticles. *Informatyka, Avtomatyka, Pomiry w Gospodarce i Ochronie Środowiska*. 2018. Vol. 8, №. 1. P. 4–7.
11. Vinogradov A. P. Elektrodinamika kompozitnykh materialov / pod red. B. Z. Katsenelenbauma. Moskva : Editorial URSS, 2001. 208 s.
12. Telychkina O. et al. Application of nanostructured materials ensuring the electromagnetic compatibility of power electronic. *EMC Europe 2010* : proceedings of the International symposium, 13–17 September 2010. Wroclaw, P. 814–817.
13. Bondar B. M., Borisova A. V., Machulyansky A V., Yakimenko Yu. I. Characteristics of shields composite coatings based on nanodisperse particles. *Microwave and Telecommunication Technology* : proceedings of the 22nd International Crimean conference, 12–14 September 2012. Sevastopol. P. 683–684.
14. Machulyanskyi O. V., Babich B. B., Machulyanskyi V. O., Tarasovska N. P. Modelyuvannya nanostrukturnykh metalodielektrichnykh sistem dlya vikorystannya v yakosti optichnykh filtriv. *Vіsnyk Hersonskoho natsionalnogo tekhichnogo unversitetu*. 2016. № 3, t. 58. S. 371–375.
15. Verbitskiy V. et al. Energy-efficient optically transparent coating based on a metal-dielectric composites. *Electronics and Nanotechnology* : proceedings of the IEEE 35th International scientific conference, 21–24 April 2015. Kyiv : IEEE, 2015. P. 93–96.
16. Fedorov S.V. Metod matrits perenosa dlya sred s kvadratichnoy opticheskoy nelineynostyu. *Zhurnal tehnikeskoy fiziki*. 1999. № 4, t. 69. S. 116–117.
17. Machulyanskyi A. V., Tatarchuk D. D., Machulyanskyi V. A. Analiz SVCh-svoystv nanodispersnykh kompozitnykh sistem. *Tehnichna elektrodinamika. Tematichnyi vipusk "Silova elektronika ta energoefektivnist"*. 2010. t. 1. S. 303–304.
18. Koroliouk D. et al. Applications of metal-dielectric nanocomposite structures in information systems. *Electronics and Nanotechnology* : proceedings of the IEEE 38th International scientific conference, 24–26 April 2018. Kyiv : IEEE, 2018. P. 96–100.
19. Machulianskyi O. Optical characteristics of nanodimensional particles of chrome. *Herald of Khmelnytskyi national university. Technical sciences*. 2018. Vol. 257, №. 1. P. 203–207.
20. Rodionov M. et al. Properties of aluminum oxynitride films prepared by reactive magnetron sputtering. *Electronics and Nanotechnology* : proceedings of the IEEE 34th International scientific conference, 16–19 April 2014. Kyiv : IEEE, 2014. P. 188–190.



УДК 629.439

В. А. ПОЛЯКОВ, Н. М. ХАЧАПУРИДЗЕ

Институт транспортных систем и технологий  
Национальной академии наук Украины

## МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ МАГНИТОЛЕВИТИРУЮЩЕГО ПОЕЗДА: РАЦИОНАЛИЗАЦИЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

*Качество движения магнитолевитирующего поезда (МЛП) – ключевой фактор обеспечения его безопасности. Проблема гарантированного обеспечения высокого уровня этого качества при создании МЛП приоритетна. Компьютеризированные методики решения подобных высокосложных проблем, как известно, наиболее предпочтительны. Достижение максимально возможной эффективности таких решений амбивалентно. С одной стороны, оно требует значительного повышения качества используемых математических моделей, а также уровня рациональности способа их реализации. В то же время, путь таких решений должен обеспечивать наименьшую возможную ресурсоёмкость. Традиционные способы решения задач динамики МЛП не позволяют одновременно удовлетворить указанные антагонистические требования. В частности, даже при наличии высококачественных математических моделей динамики МЛП, традиционный путь их компьютерной реализации – решение прямой задачи такой динамики – не позволяет непосредственно и эффективно решать задачу построения движения требуемого качества. При этом такой путь исследований предполагает многократное ресурсоёмкое, как правило – численное, интегрирование дифференциальных уравнений модели движения. Отмеченная коллизия может быть устранена при решении обратной задачи динамики МЛП. Этот путь реализации модели позволяет непосредственно строить движение задаваемого качества и, в то же время, радикально понизить ресурсоёмкость проведения исследования. Целью настоящей работы является разработка парадигмы рациональной реализации математической модели динамики МЛП, свободной от несовершенств, неизбежных при использовании традиционного способа такой реализации. Разработана парадигма, ориентированная на достижение априорно задаваемого уровня качества результирующего движения поезда, а также его приспособляемости к окружающей обстановке. Это позволяет существенно облегчить процесс и усовершенствовать результат синтеза динамики рассматриваемой системы.*

*Ключевые слова: магнитолевитирующий поезд, модель динамики, парадигма реализации модели.*

В. О. ПОЛЯКОВ, М. М. ХАЧАПУРИДЗЕ

Институт транспортных систем та технологій  
Національної академії наук України

## МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ МАГНІТОЛЕВІТУЮЧОГО ПОЇЗДА: РАЦІОНАЛІЗАЦІЯ ВИКОРИСТАННЯ

*Якість руху магнітолевітуючого поїзда (МЛП) є ключовим фактором забезпечення його безпеки. Проблема гарантованого забезпечення високого рівня цієї якості при створенні МЛП – пріоритетна. Комп'ютеризовані методикі вирішення подібних високоскладних проблем, як відомо, є найкращими. Досягнення максимально можливої ефективності таких рішень амбівалентне. З одного боку, воно вимагає значного підвищення якості використовуваних математичних моделей, а також рівня раціональності способу їхньої реалізації. У той же час, шлях таких рішень повинен забезпечувати найменшу можливу ресурсоємність. Традиційні способи вирішення задач динаміки МЛП не дозволяють одночасно задовольнити зазначені антагоністичні вимоги. Зокрема, навіть при наявності високоякісних математичних моделей динаміки МЛП, традиційний шлях їх комп'ютерної реалізації – вирішення прямої задачі такої динаміки – не дозволяє безпосередньо і ефективно вирішувати задачу побудови руху необхідної якості. При цьому такий шлях досліджень передбачає багаторазове ресурсоємне, як правило – чисельне, інтегрування диференціальних рівнянь моделі руху. Зазначена колізія може бути усунена при вирішенні зворотної задачі динаміки МЛП. Цей шлях реалізації моделі дозволяє безпосередньо будувати рух заданої якості і, в той же час, радикально знизити ресурсоємність проведення дослідження. Метою цієї роботи є розробка парадигми раціональної реалізації математичної моделі динаміки МЛП, вільної від недосконалостей, неминучих при використанні традиційного способу такої реалізації. Розроблено парадигму, орієнтовану на досягнення априорно задаємого рівня якості результирующего руху поїзда, а також його пристосовування до навколишнього оточення. Це дозволяє істотно полегшити процес і удосконалити результат синтезу динаміки розглянутої системи.*

*Ключові слова: магнітолевітуючий поїзд, модель динаміки, парадигма реалізації моделі.*

V. A. POLYAKOV, N. M. KHACHAPURIDZE  
Institute of Transport Systems and Technologies  
of Ukraine's National Academy of Sciences

### MAGNETICALLY LEVITATED TRAIN'S DYNAMIC'S MODEL: RATIONALIZATION OF USE

*The magnetically levitated train's (MLT) motion quality is a key factor of its safety ensuring. The problem of this quality's high level guaranteed provision is a priority when an MLT creating. Computerized techniques of such highly complex problem's solving, as is known, are the most preferable. The achieving of such solutions' maximum possible efficiency is ambivalent. On the one hand, it requires a significant increasing of the used mathematical models' quality, as well as the level of their implementation's way rationality. At the same time, the path of such solutions should provide the smallest possible resource intensity. The traditional ways of MLT's dynamic's problems solving do not allow to simultaneously meet the specified antagonistic requirements. In particular, even in the presence of high-quality MLT's dynamic's mathematical models, the traditional way of their computer realization — solving the such dynamic's direct problem — does not allow directly and effectively solving the problem of the required quality's motion constructing. At the same time, such a research path suggests multiple resource-intensive, as a rule - numerical, integration of the motion's model's differential equations. The noted collision can be eliminated by solving the MLT's dynamic's inverse problem. This way of the model realization allows the direct building of the given quality's motion and, at the same time, radical reduce the resource intensity of the research. The goal of this paper is to develop a paradigm for the MLT's dynamics mathematical model rational realization, free from imperfections that are inevitable when using the traditional method of such realization. A paradigm has been developed is focuses on achieving a priori defined level of the train's resulting motion quality, as well as it's adaptability to the environment. This allows you to significantly simplify the process and improve the result of the system's under consideration dynamic's synthesis.*

*Keywords: magnetically levitated train, dynamic's model, model's realization paradigm.*

#### Постановка проблеми.

Цель создания магнитолевитирующих поездов (МЛП) – интенсификация пассажирских и грузовых потоков. Скорости движения таких поездов экстремальны для наземного транспорта. Поэтому высокое качество этого движения должно гарантированно обеспечиваться во всех возможных эксплуатационных режимах.

МЛП – весьма дорогостоящие, уникальные артефакты. Натурный эксперимент с ними дорог, сложен, опасен, а часто и вовсе невозможен. Обычные теоретические методы при исследовании протекающих в них процессов также малоэффективны. Исходя из этого, возможно большую часть указанных исследований следует выполнять с использованием компьютерного моделирования [1], сочетающего в себе, как известно, многие достоинства как теоретических, так и экспериментальных методов. В то же время [2], в частности, вследствие упомянутой специфики МЛП, в качестве их расчетных схем принимаются сложные большие во многом существенно нелинейные динамические системы, а математическими моделями, адекватно описывающими их реальные эксплуатационные движения, являются большие сложные системы нелинейных дифференциальных уравнений. Конечные выражения их компонентов, как правило, чрезвычайно громоздки, сложны и труднообозримы. Помимо того, на современном уровне развития теории дифференциальных уравнений, аналитическое решение указанного их вида возможно лишь в простейших случаях, как правило, не соответствующих реальным эксплуатационным ситуациям. В общем же случае, указанные уравнения допускают лишь численное решение.

Проблемы качества движения МЛП требует, для корректного решения, как значительного повышения полноты, адекватности и системности отражения в математических моделях структурно-параметрических особенностей поезда, так и подъема уровня рациональности способа реализации таких моделей. Неизбежное дальнейшее наращивание их размерностей и сложности, в рамках традиционного пути реализации – решения прямой задачи динамики системы, ведёт к лавинообразному росту объёма и недопустимому падению точности информационных преобразований моделирования. При использовании традиционного способа реализации модели динамики МЛП – интегрировании уравнений его движения – эта реализация носит предсказательно-констатирующий, чисто когнитивный, не креативный характер и принципиально не может гарантировать достижение требуемого качества этого движения. Однако, с объективной точки зрения, такое гарантированное достижение является совершенно необходимым во всех реальных режимах эксплуатации МЛП.

Рациональное разрешение возникающей коллизии может быть найдено в смене парадигмы реализации модели движения МЛП на обладающую креативными, эвристическими свойствами, достигаемыми при решении обратной задачи динамики исследуемой системы.



### Анализ публикаций по теме исследования.

В начале развития динамики, как науки о движении материальных систем, концепция её обратной задачи была сформулирована и применена [3] для определения значений и направлений усилий, вызывающих движения планет Солнечной системы в соответствии с законами Кеплера. Затем весьма продолжительное время задачи развития общества удовлетворялись, в основном, за счёт описания и предсказания движений исходя из свойств изучаемых систем, а также действующих на них естественных возмущений [4]. Иными словами, – путём решения прямой задачи динамики. Дальнейший прогресс привёл к необходимости всё более часто и полно [5] определять свойства систем, а также их управляющие принуждения, которые бы порождали требуемые результирующие движения. Особую актуальность обратная задача динамики приобрела с развитием техники и вооружений [6].

Современный прогресс цивилизации невозможен без использования мощной, быстродействующей компьютерной техники. Но, несмотря на её бурное развитие, решение актуальных задач динамики систем с использованием концепции в основном прямой их задачи практически не реально [7]. Эта концепция предполагает интегрирование модели, являющейся, как правило, системой существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, число которых может исчисляться десятками и даже сотнями. Выражения же для определения значений элементов таких уравнений являются, как правило, весьма громоздкими. При этом решение прямой задачи динамики предполагает предварительное разрешение подлежащих интегрированию уравнений относительно старших производных. А это, в свою очередь, требует обращения матриц высокой размерности. Если учитывается параметрическая, и (или) структурная нестационарность исследуемой системы, то такое обращение должно производиться на каждом шаге интегрирования. В случае если реализация модели предполагается непосредственно в процессе движения, то она должна носить прогнозирующий, многовариантный характер. При этом осуществление такой реализации становится вовсе не реальным. Но даже в случае, если использование модели предполагается для поверочных расчётов в стационарных (не “бортовых”) условиях, а расчётная схема системы предполагается не слишком сложной и стационарной, осуществление традиционной реализации такой модели является неоправданно ресурсоёмким. Причина этого – лавинообразный рост объёма и катастрофически быстрое падение точность информационных преобразований. Ситуация ещё более усугубляется тем, что результат решения прямой задачи динамики системы носит предсказательно-констатирующий, когнитивный, не креативный характер и принципиально не может гарантировать достижение требуемого качества изучаемого движения.

Сдвиг парадигмы реализации той же модели в сторону решения, с её помощью, обратной задачи динамики системы радикально меняет ситуацию. Сама такая реализация становится значительно менее ресурсоёмкой, а осуществление её результатов позволяет гарантировать требуемое качество движения. При этом такая реализация модели обретает креативный, эвристический характер, не присущий традиционному пути её применения. Использование результатов такой её конструктивной реализации позволяет придать исследуемой системе весьма важное свойство грубости [7] а сама эта реализация становится возможной непосредственно в процессе управления движением – на бортовых компьютерах. Наконец, если тот же тип реализации модели сочетать с принципом управления по обобщённым ускорениям, то появляется дополнительная возможность автоматического обеспечения свойства адаптивности движения к обстановке [7].

### Цель исследования.

Целью работы является разработка парадигмы рациональной реализации математической модели динамики МЛП, свободной от несовершенств, неизбежных при использовании традиционного способа такой реализации. Парадигма должна быть ориентирована на обеспечение возможности достижения априорно задаваемого уровня качества результирующего движения системы, а также его приспособляемости к окружающей обстановке. Это должно позволить существенно облегчать процесс и усовершенствовать результат синтеза желательной управляемой динамики рассматриваемого поезда.

### Изложение основного материала исследования.

В качестве основы создаваемой парадигмы примем концепцию обратной задачи динамики систем, свободную от недостатков традиционного пути реализации её моделей [5] и, кроме того, обладающую рядом дополнительных положительных свойств [7].

Выполнение требуемых движений поезда должно обеспечиваться во взаимодействии всех его подсистем. Среди них – механическая (МП), электромагнитная (ЭМП), аэродинамическая (АДП), термодинамическая (ТДП) и многие иные. Основными из них являются первые две. Но на качество реального движения МП МЛП, являющееся ключевым критерием глобальной оценки эффективности поезда в целом, влияющие, в определённой степени, оказывает функционирование всех его элементов.

Модель естественной динамики МП МЛП в координатах  $\eta^\lambda \quad \forall \lambda \in [1, L]$ , удобных для описания этого движения относительно направляющего его пути, может быть записана в виде [8]

$$c_{\lambda\mu} \cdot \ddot{\eta}^\mu + C_{\lambda,\mu\nu} \cdot \dot{\eta}^\mu \cdot \dot{\eta}^\nu = Y_\lambda \quad \forall \lambda, \mu, \nu \in \overline{[1, L]}, \quad (1)$$

где  $c_{\lambda\mu}, C_{\lambda,\mu\nu}, Y_\lambda \quad \forall \lambda, \mu, \nu \in \overline{[1, L]}$  – ковариантный метрический тензор агрегата, являющегося расчётной схемой указанной подсистемы, его трёхиндексный символ Кристоффеля 1-го рода в координатах  $\eta^\lambda \quad \forall \lambda \in \overline{[1, L]}$  а также обобщённые силы им соответствующие.

На текущие значения  $Y_\lambda \quad \forall \lambda \in \overline{[1, L]}$  влияние оказывают все компоненты МЛП как единой системы.

Основными функциональными элементами ЭМП МЛП являются тяговый, левитационный, а также боковой стабилизации. Смыслом функционирования этой подсистемы является дозированный отбор энергии из питающей электрической сети, а также её преобразование в энергию парциальных движений МП поезда. В полной мере и с требуемым качеством указанные функции ЭМП должны осуществляться в управляемых режимах движений МЛП. Построение же любого из таких движений невозможно без описания функционирования МЛП как единой системы. Поэтому, в дополнение к модели (1) естественного движения МП, должно быть описано функционирование иных, значимых для его механического движения, компонент поезда. В первую очередь это относится к ЭМП МЛП.

Мерой взаимодействия электромагнитной и механической подсистем каждого  $j$ -го экипажа МЛП являются тяговое  $F_{Tj}$ , левитационное  $F_{Lj}$  и, стабилизирующее его поперечные колебания, направляющее  $F_{Gj}$  усилия, а также усилие его электродинамического торможения  $F_{Dj}$ . Мгновенные значения указанных усилий могут быть определены согласно выражениям [9]:

$$f_{Tj} = \sum_{v=1}^K i_s^v \cdot \sum_{\kappa=1}^{N_{ac}} i_{ac}^\kappa \cdot \frac{\partial \mu_{v\kappa}}{\partial \xi}; \quad (2)$$

$$f_{Lj} = \sum_{v=1}^K i_s^v \cdot \sum_{\lambda=\chi_v-E}^{\chi_v+E} i_{wc}^\lambda \cdot \frac{\partial m_{v\lambda}}{\partial \zeta}; \quad (3)$$

$$f_{Gj} = \sum_{v=1}^K i_s^v \cdot \sum_{\lambda=\chi_v-E}^{\chi_v+E} i_{wc}^\lambda \cdot \frac{\partial m_{v\lambda}}{\partial \eta}; \quad (4)$$

$$f_{Dj} = \sum_{v=1}^K i_s^v \cdot \sum_{\lambda=\chi_v-E}^{\chi_v+E} i_{wc}^\lambda \cdot \frac{\partial m_{v\lambda}}{\partial \xi}. \quad (5)$$

В этих выражениях введены обозначения:

$i_s^v$ ,  $K$  – мгновенное значение тока цепи в  $V$ -ого сверхпроводящего экипажного контура (СЭК), а также число таких контуров, установленных на экипаже;  $i_{ac}^\kappa, i_{wc}^\lambda$  – текущие значения токов в цепях  $\kappa$ -ой якорной катушки линейного синхронного двигателя (ЛСД) и  $\lambda$ -го короткозамкнутого путевого контура (КПК);  $N_{ac}$  – число катушек якорной обмотки ЛСД, взаимодействие с которыми учитывается для каждого СЭК;  $\chi_v$  – порядковый номер последнего КПК, который миновал  $v$ -й СЭК;  $E$  – половина числа КПК, с которыми учитывается его электромагнитное взаимодействие;  $\mu_{v\kappa}, m_{v\lambda}$  – взаимные индуктивности цепи  $v$ -го СЭК, с цепями  $\kappa$ -ой якорной катушки и  $\lambda$ -го КПК;  $Q\xi\eta\zeta$  – путевой триэдр рассматриваемого экипажа МЛП.

Токи  $i_s^v \quad \forall v \in \overline{[1, K]}$ , с достаточной для практических целей точностью, могут считаться имеющими постоянные значения. Мгновенные же значения токов  $i_{wc}^\lambda \quad \forall \lambda \in \overline{[(\chi_v - E), (\chi_v + E)]}, v \in \overline{[1, K]}$  и  $i_{ac}^\kappa \quad \forall \kappa = \xi + 3 \cdot \sigma, \xi \in \overline{[1, 3]}, \sigma \in \overline{[1, (K_s - 1)]}$  (где  $K_s$  – число триад якорных катушек, включённых в секцию статора ЛСД) а также величин  $\frac{\partial \mu_{v\kappa}}{\partial \xi}, \frac{\partial m_{v\lambda}}{\partial \zeta}, \frac{\partial m_{v\lambda}}{\partial \eta}, \frac{\partial m_{v\lambda}}{\partial \xi} \quad \forall v \in \overline{[1, K]}, \kappa \in \overline{[1, N_{ac}]},$

$\lambda \in \overline{[(\chi_v - E), (\chi_v + E)]}$  определяются динамическим взаимодействием МП и ЭМП МЛП.

Детализация постановки задачи реализации модели (1) – (5) с использованием парадигмы обратной задачи динамики в каждом конкретном случае зависит, в частности, от особенностей условий её реше-

ния, а также качеств, которые желательно придать реальному движению поезда. Однако глобальный стратегический смысл указанной задачи заключается [5, 10, 11] в следующем. Движение поезда под действием его естественных возмущений, описываемое соответствующими уравнениями, в подавляющем большинстве случаев не обладает желательными свойствами. В свою очередь, эти свойства определяют качество указанных движений и могут быть каким-либо удобным образом описаны, благодаря чему, – становятся доступными для использования. Чтобы реальное движение МЛП обладало упомянутыми свойствами, следует любым способом, не противоречащим объективным физическим законам, изменить моделирующие это движение уравнения так, чтобы они были совместны с описанием желательных свойств. Способ преобразования модели принципиально не ограничен и определяется, в основном, удобством натурной реализации влекомых им изменений исследуемой системы или (и) воздействий на неё. На практике наиболее распространённым является введение в модель движения аддитивных управляющих воздействий на систему.

С целью конкретизации рассмотрения, примем один из наиболее гибких и приемлемых для МЛП способ натурной реализации его желаемого движения – терминальное управление им [12, 13]. Тогда задачей движения поезда считается его приведение к назначенным моментам времени в априорно заданную последовательность состояний, а на пространства фазовых координат, естественных возмущений и управлений накладываются реальные ограничения  $\Omega_x(t)$ ,  $\Omega_w(t)$  и  $\Omega_u(t)$  соответственно. В зависимости от целей и задач исследования, эти множества могут быть различно физически интерпретированы.

Исходя из модели (1) естественной динамики МП МЛП, в случае терминального управления им, модель управляемого движения этой подсистемы имеет вид

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), w(t), t] \quad \forall t \in [t_s, \theta]; \quad x(t_s) = x_s, \quad (6)$$

где  $x(t)$ ,  $u(t)$ ,  $w(t) \quad \forall t \in [t_s, \theta]$  – векторы состояния подсистемы, а также управляющих и возмущающих воздействий на неё;  $t$  – удобная для проведения исследования независимая переменная, например, время;  $[t_s, \theta]$  – интервал построения движения;  $x_s$  – его начальные условия.

Цель движения поезда формализуем программой

$$x(\tau) = x_f, \quad (7)$$

где  $\tau, x_f$  – значения независимой переменной и вектора состояния МП МЛП в конечный, на рассматриваемом терминальном интервале управления, момент.

При этом, исходя из физического смысла процесса движения, должны соблюдаться соотношения

$$x(t) \in \Omega_x(t), \quad u(t) \in \Omega_u(t) \quad \forall t \in [t_s, \tau] \quad (8)$$

и, кроме того, быть известна некоторая априорная информация

$$w(t) \in \Omega_w(t) \quad \forall t \in [t_s, \tau]. \quad (9)$$

Программа (7) накладывает ограничение лишь на конечное (на интервале  $[t_s, \tau]$ ) состояние МП поезда. Поэтому моделью (6), совместно с условиями (7) – (9), определяется ансамбль фазовых траекторий изображающей точки подсистемы в пространстве её состояний

$$\begin{aligned} X[u(\bullet), w(\bullet), x_s, x_f] &= \{x[\bullet, u(\bullet), w(\bullet), x_s, x_f] \in \Omega_x(t) : u(\bullet) \in \Omega_u(t), w(\bullet) \in \Omega_w(t), t \in [t_s, \tau]\}; \\ u(\bullet) &= \{u(t) \quad \forall t \in [t_s, \tau]\}; \quad w(\bullet) = \{w(t) \quad \forall t \in [t_s, \tau]\}; \\ \{x[\bullet, u(\bullet), w(\bullet), x_s, x_f]\} &= \{x[t, u(\bullet), w(\bullet), x_s, x_f] \quad \forall t \in [t_s, \tau]\}, \end{aligned} \quad (10)$$

каждая из которых удовлетворяет краевым условиям

$$x(t_s) = x_s, \quad x(\tau) = x_f. \quad (11)$$

Если, помимо удовлетворения этих условий, к движению МП МЛП не предъявляется никаких иных требований, то управление ею синтезируется в чисто терминальной постановке, предполагающей, в зависимости от конкретных значений возмущений (9), возможность реализации любой траектории из ансамбля (10). Таким образом, в данном случае целенаправленное движение определено лишь с точностью до этого возможного ансамбля.

Из изложенного следует, что, при чисто терминальной постановке задачи поиска управления движением МП поезда, относительно его конкретной реализации имеется существенный конструктивный произвол. Он может быть использован для придания этому движению дополнительных полезных

свойств. Например, если потребовать, чтобы, помимо удовлетворения условий (8) и (11), на реализуемой фазовой траектории подсистемы имело место соотношение

$$I = \inf_{u(\bullet)} \sup_{w(\bullet)} \left\{ \int_{t_s}^{\tau} \lambda[u(\bullet), w(\bullet)] \cdot dt : \right. \\ \left. u(\bullet) \in \Omega_u(t), w(\bullet) \in \Omega_w(t), t \in [t_s, \tau] \right\}, \quad (12)$$

где  $I$  – интегральный показатель качества движения;  $\lambda$  – заданная функция своих аргументов, то задача синтеза управления носит игровой минимаксный характер, базирующийся на концепции гарантированного результата [14]. При этом упомянутое управление приобретает свойства, оптимальные по критерию  $I$ , а из ансамбля (10) реализуется единственная траектория, экстремальная по этому критерию. Движение МП МЛП определено однозначно и гарантированно обладает оптимальностью в указанном смысле при любых возможных возмущениях. Такой подход позволяет, в зависимости от необходимости, в различных эксплуатационных режимах оптимизировать требуемые характеристики указанного движения.

Итак, путем классификации и параметризации обстановки, в которой происходит движение МП МЛП [14], а также построения для каждой типовой ситуации оптимального, в требуемом смысле, управления этим движением, может быть решена задача синтеза абстрактного разомкнутого [15] терминального целенаправленного его принуждения. Однако на практике при разработке конструктивных систем такого принуждения неизбежно возникает проблема необходимости одновременного удовлетворения совокупности инженерных требований, предъявляемых к качеству указанного движения. Одним из способов построения оптимального управления в этом случае является введение векторных критериев, состоящих каждый из ряда вторичных критериев, которым одновременно должно удовлетворять движение МП поезда.

Исполнительным органом, реализующим возникновение компонент управляющих воздействий  $u(t) \forall t \in [t_s, \tau]$  на продольное движение МП МЛП, является ЛСД. Поэтому для реализации желаемого движения поезда, с использованием соотношений (2), а также иных, описывающих динамику ЭМП МЛП, могут быть определены:

- рациональные диапазоны параметров ЛСД и их соотношений;
- требуемые законы (совместного, взаимоуязванного) изменения характеристик напряжения, питающего его фазную якорную обмотку,

необходимые для реализации соответствующего компонента синтезируемого  $u(t) \forall t \in [t_s, \tau]$ . Такое определение, для его реализации, требует выполнения лишь операций алгебры матриц. Таким образом, ресурсоёмкость реализации модели движения, по сравнению с традиционным вариантом, радикально снижается.

Поскольку практически все компоненты управляющих воздействий на поезд неизбежно реализуются с ошибками, то и порождаемые ими движения отличаются от желательных. Поэтому, в дополнение к синтезу программных составляющих упомянутых компонентов  $u(t) \forall t \in [t_s, \tau]$ , должна решаться задача “замыкания” управления МЛП [15], состоящая в нахождении корректирующих принуждений системы, гасящих ошибки её движения по сравнению с желаемым.

Для синтеза как программных, так и корректирующих составляющих компонентов принуждений поезда принципиально возможным является использование различных представлений его желательных и фактически реализуемых движений [16]. В то же время, при наличии такой возможности, целесообразным является [7] использование в алгоритмах такого синтеза обобщённых ускорений системы. В этом случае она приобретает свойство автоматической адаптации к обстановке движения.

### Выводы

Результаты анализа приведенной схемы решения обратной задачи динамики МЛП свидетельствует о том, что, основанная на этом решении, разработанная парадигма реализации модели движения, свободна от несовершенств, неизбежных при использовании традиционного способа такой реализации. Она значительно более ресурсно-экономична по сравнению с традиционной, а осуществление её результатов позволяет гарантировать требуемое качество движения поезда. В то же время такая реализация модели, в отличие от традиционной, имеет креативный, эвристический характер. Использование её результатов позволяет придать исследуемой системе весьма важное свойство грубости, а сама эта реализация становится возможной непосредственно в процессе управления движением МЛП – на бортовых компьютерах. Кроме того, если в основу замыкание синтезируемого управления  $u(t) \forall t \in [t_s, \tau]$  будет положен принцип отработки

обобщённых ускорений системы, то она автоматически обретает свойство адаптивности движения к обстановке. Благодаря всему этому, разработанная парадигма позволяет существенно облегчать процесс и усовершенствовать результат синтеза желательной управляемой динамики рассматриваемого поезда.

### Список использованной литературы

1. Высокоскоростной магнитный транспорт с электродинамической левитацией / В. А. Дзензерский и др.; под ред. В. А. Дзензерского, В. И. Омеляненко. Киев, 2001. 479 с.
2. Дзензерский В. А., Зевин А. А., Радченко Н. А., Хачапуридзе Н. М. Некоторые вопросы математического моделирования левитационного движения электродинамических транспортных средств. *Математическое моделирование в образовании, науке и промышленности*: сб. научных трудов. Санкт-Петербург: Санкт-Петербургское отделение МАН ВШ, 2000. С. 65–66.
3. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. Москва: Наука, 1989. 688 с.
4. Математическая энциклопедия. В 5 т. Т. 2. Динамика. Москва: Сов. Энциклопедия, 1979. 552 с.
5. Галиуллин А. С. Аналитическая динамика: монография. Москва: Высшая школа, 1989. 264 с.
6. Космодемьянский И. В. Экстремальные задачи для точки переменной массы. *ДАН СССР*. 1946. № 1, т. 53. С. 53–72.
7. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели: монография. Москва: Наука, 1988. 328 с.
8. Поляков В. А., Хачапуридзе Н. М. Моделирование относительного движения магнитолевитирующего поезда. *Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені В. Лазаряна*. 2007. С. 146–151.
9. Бочаров В. И., Салли И. С., Дзензерский В. А. Транспорт на сверхпроводящих магнитах. Ростов-на-Дону: Издательство РГУ, 1988. 152 с.
10. Берёзкин Е. Н. Курс теоретической механики. Москва: Издательство МГУ, 1974. 647 с.
11. Корнев Г. В. Очерки механики целенаправленного движения. Москва: Наука, 1980. 192 с.
12. Bellman R. Adaptive Control Processes. Princeton: Princeton Univ. Press, 1961. 276 p.
13. Matthews M.V., Steeg C.W. Terminal control synthesis. *MIT Rep.* 1955. Nov. 4 P. 10–11.
14. Поляков В.А. Приспособляемость движения железнодорожного поезда. *Динамика поезда и подвижного состава железных дорог*. 1990. Вып. 273/37. С.107–117.
15. Блохин Е. П., Поляков В. А. Целенаправленное движение железнодорожного поезда. *Нагруженность и надёжность механических систем*: сб. научных трудов. Киев: Наукова думка, 1987. С. 76–83.
16. Воробьёв Л. М. К теории полёта реактивных аппаратов. Москва: Машиностроение, 1979. 375 с.

### References

1. Vvisokoskorostnoy magnitnyiy transport s elektrodinamicheskoy levitatsiey / V. A. Dzenzerskiy i dr.; pod red. V. A. Dzenzerskogo, V. I. Omelyanenko. Kiev, 2001. 479 s.
2. Dzenzerskiy V. A., Zevin A. A., Radchenko N. A., Hachapuridze N. M. Nekotoryie voprosyi matematicheskogo modelirovaniya levitatsionnogo dvizheniya elektrodinamicheskikh transportnykh sredstv. Matematicheskoe modelirovanie v obrazovanii, nauke i promyshlennosti: sb. nauchnykh trudov. Sankt-Peterburg: Sankt-Peterburgskoe otdelenie MAN VSh, 2000. С. 65–66.
3. Nyuton I. Matematicheskie nachala naturalnoy filosofii. Moskva: Nauka, 1989. 688 s.
4. Matematicheskaya entsiklopediya. V 5 t. T. 2. Dinamika. Moskva: Sov. Entsiklopediya, 1979. 552 s.
5. Galiullin A. S. Analiticheskaya dinamika: monografiya. Moskva: Vysshaya shkola, 1989. 264 s.
6. Kosmodemyanskiy I. V. Ekstremalnyie zadachi dlya tochki peremennoy massyi. DAN SSSR. 1946. № 1, t. 53. S. 53–72.
7. Krutko P. D. Obratnyie zadachi dinamiki upravlyaemykh sistem. Nelineynyye modeli: monografiya. Moskva: Nauka, 1988. 328 s.
8. Polyakov V. A., Hachapuridze N. M. Modelirovanie otnositelnogo dvizheniya magnitolevitiruyuschego poezda. VIsnik Dnlpropetrovskogo natsionalnogo unIversitetu zallznichnogo transportu ImenI V. Lazaryana. 2007. С. 146–151.
9. Bocharov V. I., Salli I. S., Dzenzerskiy V. A. Transport na sverhprovodyaschih magnitah. Rostov-na-Donu: Izdatelstvo RGU, 1988. 152 s.
10. BerYozkin E. N. Kurs teoreticheskoy mehaniki. Moskva: Izdatelstvo MGU, 1974. 647 s.
11. Korenev G. V. Ocherki mehaniki tselenapavlennoy dvizheniya. Moskva: Nauka, 1980. 192 s.
12. Bellman R. Adaptive Control Processes. Princeton: Princeton Univ. Press, 1961. 276 p.
13. Matthews M.V., Steeg C.W. Terminal control synthesis. *MIT Rep.* 1955. Nov. 4 P. 10–11.
14. Polyakov V.A. Prispособlyaemost dvizheniya zheleznodorozhnogo poezda. Dinamika poezda i podvizhnogo sostava zheleznykh dorog. 1990. Vyip. 273/37. S.107–117.
15. Blohin E. P., Polyakov V. A. Tselenapavlennoe dvizhenie zheleznodorozhnogo poezda. Nagruzhennost i nadYozhnost mehanicheskikh sistem: sb. nauchnykh trudov. Kiev: Naukova dumka, 1987. S. 76 – 83.
16. VorobYov L. M. K teorii polYota reaktivnykh apparatov. Moskva: Mashinostroenie, 1979. 375 s.



УДК 578.01+681.7.08+535.3+681.335.2

В.О. РОМАНОВ, І.С. ЧУРИЛОВИЧ  
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України  
О.О. БРОВАРЕЦЬ  
Київського кооперативного інститут бізнесу і права

## НЕОБХІДНІСТЬ ІНФОРМАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ ВИОКРЕМЛЕННЯ ТА ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЗОН НЕОДНОРІДНОСТІ АГРОБІОЛОГІЧНОГО СТАНУ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ УГІДЬ НА КОСМІЧНИХ ЗНІМКАХ З ВИКОРИСТАННЯМ ВАЛІДАЦІЇ ДАНИХ СУПУТНИКОВОГО ТА НАЗЕМНОГО МОНІТОРИНГУ

Встановлено високу ефективність та доцільність використання супутникових систем для дистанційного оперативного моніторингу агробіологічного стану сільськогосподарських угідь. Обґрунтована необхідність розробки інформаційної системи виокремлення та ідентифікації зон неоднорідності агробіологічного стану сільськогосподарських угідь на космічних знімках з використанням валідації даних супутникового та наземного моніторингу.

Засоби доставки систем технічного зору залежно від призначення класифікують від переносних ручних засобів до супутників і поділяються на такі класи: дистанційне зондування, аерофотозйомка, ближній моніторинг (переважно з використанням спостережних вишок, транспортних та ручних засобів). Вибір відповідного класу залежить від можливостей сільськогосподарського виробництва та поставлених задач.

Згідно з даними отримані способом дистанційного зондування Землі і з супутників, оператор візуально або системою технічного зору при використанні навігаційного обладнання реєструє рівень факторів та координати відбору інформації. Надалі будуються картограми стану сільськогосподарських угідь. Використання ручних засобів моніторингу є неефективним через їх низьку продуктивність.

Використання існуючих транспортних засобів (у тому числі і СГМ), як засобів доставки систем технічного зору, є недоцільним технічно (оскільки вони не забезпечують вимоги щодо вібрації, маневрово-технологічних характеристик, ущільнення ґрунту тощо) та економічно. Існуючі СГМ, як засоби доставки робочого обладнання (системи технічного зору) для моніторингу, доцільно використовувати у випадку суміщення операцій моніторингу з виконанням відповідної технологічної операції при забезпеченні умов ефективного функціонування системи технічного зору моніторингу стану сільськогосподарських угідь шляхом використання відповідних елементів кріплення.

Мета дослідження - дослідити необхідність та доцільність розробки та використання інформаційної системи виокремлення та ідентифікації зон неоднорідності агробіологічного стану сільськогосподарських угідь на основі валідації даних супутникового моніторингу.

У результаті дослідження існуючих способів моніторингу агробіологічного стану сільськогосподарських угідь встановлено високу необхідність та доцільність супутникового моніторингу агробіологічного стану сільськогосподарських угідь. Досліджено необхідність та доцільність розробки алгоритму і використання інформаційної системи виокремлення та ідентифікації зон неоднорідності агробіологічного стану сільськогосподарських угідь на космічних знімках з використанням валідації даних супутникового та наземного моніторингу.

**Ключові слова:** Інформаційна система, ідентифікація, зони неоднорідності, агробіологічний стан, сільськогосподарські угіддя, супутниковий моніторинг, наземний моніторинг.

В.А. РОМАНОВ, І.С. ЧУРИЛОВИЧ  
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України  
А.А. БРОВАРЕЦЬ  
Київський кооперативний інститут бізнесу і права

## НЕОБХОДИМОСТЬ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ВЫДЕЛЕНИЯ И ИДЕНТИФИКАЦИИ ЗОН НЕОДНОРОДНОСТИ АГРОБИОЛОГИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ УГОДИЙ НА КОСМИЧЕСКИХ ФОТОГРАФИИ СО ВАЛИДАЦИИ ДАННЫХ СПУТНИКОВЫХ И НАЗЕМНЫХ МОНИТОРИНГА

Установлена высокая эффективность и целесообразность использования спутниковых систем для дистанционного оперативного мониторинга агробіологического состояния сельскохозяйственных угодий. Обоснована необходимость разработки информационной системы выделения и идентификации



зон неоднородности агробиологического состояния сельскохозяйственных угодий на космических снимках с использованием валидации данных спутникового и наземного мониторинга.

Средства доставки систем технического зрения в зависимости от назначения классифицируют от переносных ручных средств к спутникам и подразделяются на следующие классы: дистанционное зондирование, аэрофотосъемка, ближний мониторинг (преимущественно с использованием наблюдательных вышек, транспортных и ручных средств). Выбор соответствующего класса зависит от возможностей сельскохозяйственного производства и поставленных задач.

Согласно данным полученные способом дистанционного зондирования Земли и со спутников, оператор визуально или системой технического зрения при использовании навигационного оборудования регистрирует уровень факторов и координаты отбора информации. В дальнейшем строятся картограммы состояния сельскохозяйственных угодий. Использование ручных средств мониторинга является неэффективным из-за их низкой производительности.

Использование существующих транспортных средств (в том числе и СГМ), как средств доставки систем технического зрения, нецелесообразно технически (поскольку они не обеспечивают требования по вибрации, маневрово технологических характеристик, уплотнения почвы и т.д.) и экономически. Существующие СГМ, как средства доставки рабочего оборудования (системы технического зрения) для мониторинга, целесообразно использовать в случае совмещения операций мониторинга с выполнением соответствующей технологической операции при обеспечении условий эффективного функционирования системы технического зрения мониторинга состояния сельскохозяйственных угодий путем использования соответствующих элементов крепления.

Цель исследования - исследовать необходимость и целесообразность разработки и использования информационной системы выделения и идентификации зон неоднородности агробиологического состояния сельскохозяйственных угодий на основе валидации данных спутникового мониторинга.

В результате исследования существующих способов мониторинга агробиологического состояния сельскохозяйственных угодий установлена высокая необходимость и целесообразность спутникового мониторинга агробиологического состояния сельскохозяйственных угодий. Исследована необходимость и целесообразность разработки алгоритма и использования информационной системы выделения и идентификации зон неоднородности агробиологического состояния сельскохозяйственных угодий на космических снимках с использованием валидации данных спутникового и наземного мониторинга.

**Ключевые слова:** Информационная система, идентификация, зоны неоднородности, агробиологический состояние, сельскохозяйственные угодья, спутниковый мониторинг, наземный мониторинг.

V.O. ROMANOV, I.S. CHURILOVYCH  
VM Cybernetics Institute Glushkov NAS of Ukraine  
O.O. BROWSING  
Kyiv Cooperative Institute of Business and Law

#### NEED INFORMATION SYSTEM ISOLATING AND IDENTIFYING AREAS OF HETEROGENEITY AGROBIOLOGICAL FARMLAND ON SPACE IMAGES WITH VALIDATION OF SATELLITE DATA AND GROUND MONITORING

*High efficiency and feasibility of using satellite systems for remote operational monitoring of agrobiological state of agricultural land have been established. The necessity of development of information system for isolation and identification of zones of heterogeneity of agrobiological state of agricultural lands on space images using the validation of satellite and terrestrial monitoring data is substantiated.*

*Means of delivery of technical systems of vision, depending on the purpose are classified from portable manual means to satellites and are divided into the following classes: remote sensing, aerial photography, close monitoring (mainly using observation towers, vehicles and manual means). The choice of the appropriate class depends on the possibilities of agricultural production and the tasks set.*

*According to the data obtained by the method of remote sensing of the Earth and from satellites, the operator logs the level of factors and coordinates of information selection when using navigation equipment when using navigation equipment. In the future, maps of the state of agricultural land are being constructed. The use of manual monitoring tools is inefficient due to their poor performance.*

*The use of existing vehicles (including SGM) as delivery vehicles for technical vision systems is technically impractical (as they do not provide vibration, maneuverability, soil compaction, etc.) and economically. Existing SGMs, as means of delivery of work equipment (technical vision system) for monitoring, should be used in the case of combining monitoring operations with the implementation of the relevant technological operation, while ensuring the conditions for the effective functioning of the technical vision monitoring system of agricultural land through the use of appropriate fasteners.*

*The purpose of the study is to investigate the necessity and feasibility of developing and using an information system for isolation and identification of zones of heterogeneity of agrobiological state of agricultural lands based on the validation of satellite monitoring data.*

*As a result of the study of existing methods for monitoring the agrobiological state of agricultural land, the high necessity and feasibility of satellite monitoring of the agrobiological state of agricultural land has been established. The necessity and expediency of algorithm development and use of information system of isolation and identification of zones of heterogeneity of agrobiological state of agricultural lands on space images with the use of satellite and ground monitoring data validation are investigated.*

**Keywords:** *Information system, identification, heterogeneity zones, agrobiological state, agricultural lands, satellite monitoring, ground monitoring.*

### Постановка задачі

Сучасні технології агропромислового виробництва вимагають використання експрес методів для оперативного аналізу агробіологічного стану сільськогосподарських угідь [1]. На сьогодні існує три рівні дослідження за агробіологічним станом сільськогосподарських угідь: супутниковий, аеро- та наземний моніторинг. Найбільш ефективним є моніторинг із використанням супутників, так званий дистанційний моніторинг, а дані отриманні з використанням такого моніторингу – дані дистанційного (моніторингу) зйомки Землі (ДЗЗ). З одного боку ефективність таких даних обумовлена оперативністю їх отримання, а з іншого – масштабністю, що досить важливо в умовах отримання оперативних даних про агробіологічний стан ґрунтового середовища. Тому для ефективного використання даних дистанційної зйомки Землі (ДЗЗ) виникає необхідність розробки алгоритму інформаційної системи виокремлення та ідентифікації зон неоднорідності агробіологічного стану сільськогосподарських угідь на космічних знімках з використанням валідації даних супутникового та наземного моніторингу.

### Аналіз останніх досліджень та публікацій за темою

Огляд досліджень у напрямку підвищення ефективності моніторингу агробіологічного стану сільськогосподарських угідь дає змогу стверджувати, що на даному етапі розвитку інформаційних технологій виникає необхідність використання принципово нових методів, способів та засобів [2-6], які сприяють покращенню ефективності та якості моніторингу, знижують затрати на виконання даної операції. Дослідження вітчизняних та закордонних науковців [2-6] вказують на необхідність широкого поширення методів аналізу агробіологічного та фітосанітарного стану сільськогосподарських угідь неконтактними методами із застосуванням оптичних систем, зокрема систем технічного зору.

На основі аналізу літературних джерел [7, 8] встановлено високу ефективність використання неконтактних методів з використанням оптичних систем високої роздільної здатності (систем технічного зору) для проведення агромоніторингу [9, 10]. Методи оптичної зйомки широко використовуються для моніторингу стану посівів та полів після збирання врожаю [11, 12].

Неконтактні методи моніторингу, згідно з методикою [13, 14], поділяються на два основних типи: пасивні (вимірювання природного теплового або відбитого сонячного випромінювання) й активні (передбачають використання штучних джерел випромінювання (насамперед лазерів) та реєстрацію відбитого випромінювання або флуоресценції об'єктів, що досліджуються). Неконтактний моніторинг з використанням систем технічного зору проводиться переважно пасивним методом у видимому та інфрачервоному спектрах [14].

Слід зазначити, що матеріали ДЗЗ завдяки високій оглядовості, оперативності та об'єктивності є найефективнішим джерелом геопросторової інформації [14-16]. Широкого застосування методи дистанційного зондування набули і в геодезії [17]. В основу сучасного ДЗЗ природних ресурсів покладено принцип багоспектральної зйомки, який базується на аналізі значної кількості спектральних характеристик окремих природних об'єктів та їх сукупностей у різних зонах електромагнітного спектра. Такі системи забезпечують реалізацію таких принципових можливостей, виконання яких не проводиться через велику трудомісткість з використанням існуючих методів моніторингу [18].

Застосування авіатехніки, порівняно з космічною, є більш дешевою технологією для потреб сільського господарства [18]. Приклад застосування авіатехніки в землеробстві не новий. Інтенсивні технології обробітку сільськогосподарських культур передбачають широке застосування авіатехніки при внесенні агрохімікатів і засобів захисту рослин [18]. До переваг застосування авіаційного методу відносяться висока продуктивність моніторингу без механічного пошкодження рослин і ущільнення ґрунту [18]. Крім того, у ряді випадків використання авіації є переважним через відсутність технологічної колії (при використанні наземної техніки), яка займає до 6% посівної площі [18].

Аерокосмічні методи являють собою об'єктивну автоматизовану систему збирання інформації про ґрунтові ресурси [19]. Для моніторингу використовують також дані аерофотозйомки з легких літальних

апаратів – аеростата або мотодельтапланів при цифровому картографуванні [Ошибка! Источник ссылки не найден.].

В більшості випадків використання сільськогосподарських аеродромів, відповідно до вимог нормативних документів, виявляється неможливим, що приводить до зменшення кількості паспортизованих аеродромів і, як наслідок, до збільшення відстані підльоту до об'єктів обробки. Крім того, скорочення площ полів і, відповідно, зменшення довжини гону, у свою чергу, додатково збільшують економічні витрати на проведення авіаційно-хімічних робіт. Так, зменшення довжини гону з 1800 до 700 м за інших рівних умов збільшує собівартість робіт на 58% [20].

Використання способів дистанційного зондування та аерофотозйомки для моніторингу стану сільськогосподарських угідь на даному етапі є досить продуктивним та перспективним, що пов'язано насамперед з вартістю та необхідним ступенем деталізації (роздільною здатністю, достовірністю) одержаних знімків [21].

#### Мета дослідження

Дослідити необхідність та доцільність розробки та використання інформаційної системи виокремлення та ідентифікації зон неоднорідності агробіологічного стану сільськогосподарських угідь на основі валідації даних супутникового моніторингу.

#### Викладення основного матеріалу дослідження

З проведеного огляду літературних джерел [Ошибка! Источник ссылки не найден., Ошибка! Источник ссылки не найден., Ошибка! Источник ссылки не найден.] складена класифікація способів і засобів моніторингу з використанням систем технічного зору (рис. 1 Ошибка! Источник ссылки не найден.). Встановлено, що велику ефективність моніторингу агробіологічного стану сільськогосподарських угідь має дистанційний моніторинг з використанням даних дистанційного зондування Землі отриманих від супутників [21].



Рис. 1. Класифікація способів і засобів моніторингу агробіологічного стану сільськогосподарських угідь

Тому в сучасних ринкових умовах застосування методів та засобів дистанційного моніторингу Землі з системою технічного зору [15 - 27] для моніторингу стану сільськогосподарських угідь в точному землеробстві є ефективним економічно та доцільним з технічної точки зору.

Системи технічного зору, які працюють синхронно з високопродуктивною обчислюваною технікою, дозволяють на сучасному етапі будувати цифрові моделі зовнішнього середовища в реальному часі [21].

Однією із головних задач, яку необхідно вирішувати при керуванні агробіологічним станом сільськогосподарських угідь на основі даних отриманих шляхом супутникового моніторингу є задача ідентифікації зон неоднорідності та розробки методики їх локалізації для подальшої роботи з ними.

Інформація про координати таких зон та методика ідентифікації таких зон дуже важлива для керування агробіологічними параметри ґрунтового середовища.

Проте існуючі методики опису та ідентифікації таких зон не забезпечують вимог до якості та ефективності моніторингу, що створює передумови для її розробки.

### Висновки

У результаті дослідження існуючих способів моніторингу агробіологічного стану сільськогосподарських угідь встановлено високу необхідність та доцільність супутникового моніторингу агробіологічного стану сільськогосподарських угідь. Досліджено необхідність та доцільність розробки алгоритму і використання інформаційної системи виокремлення та ідентифікації зон неоднорідності агробіологічного стану сільськогосподарських угідь на космічних знімках з використанням валідації даних супутникового та наземного моніторингу.

### Список використаної літератури.

1. Кравчук В., Любченко С., Ковтуненко О. Інтегрована система технологій керованого землеробства. Техніко-технологічні аспекти розвитку та випробування нової техніки і технологій для сільського господарства України: зб. наук. праць., Дослідницьке: 2009., Вип. 13 (27)., С. 117–119.
2. Гричанов И. Я., Карпиловский Л.Н. Пути автоматизации сбора, обработки и использования информации для прогноза и сигнализации появления вредителей сельскохозяйственных культур. Агрометеорологические ресурсы и производственные процессы в растениеводстве», 18–21 марта 1991г.: тезисы докл., Киев: 1991., С. 147–149.
3. Желибо Л.П., Клищенко С.В. Возможности аэровизуальных обследований при использовании различных авиационных технических средств. Агрометеорологические ресурсы и производственные процессы в растениеводстве, 18–21 марта 1991г. : тезисы докл., Киев: 1991., С. 166–167.
4. Небесный В.Б., Миролобов А.В. Использование дистанционного спектрофотометрического метода для оценки состояния посевов озимых культур. Агрометеорологические ресурсы и производственные процессы в растениеводстве, 18–21 марта 1991г. : тезисы докл., Киев: 1991., С. 183–184.
5. Astrand B., Baerveldt A.. An Agricultural Mobile Robot with Vision–Based Perception for Mechanical Weed Control. Autonomous Robots., 2002., № 13., P. 21–35.
6. Robot Control using Machine Vision. [J. Blasco, N. Aleixos, J. Roger, G. Rabatel, E. Molto]. Biosystems Engineering., 2002., № 83., P. 149–157.
7. Некос А.Н., Шукін Г.Г., Некос В.Ю. Дистанційні методи досліджень в екології : навчальний посібник., Х.: ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2007., 372 с.
8. Кравчук В., Любченко С., Войновський В., Сербій В. Інтегрована система керованого землеробства – необхідний засіб новітніх технологій. Техніка і технології АПК., 2009., № 1 (вересень), С. 32–34.
9. Сиротинко О.В. Система аерокосмічного сільськогосподарського агромоніторингу. Система дослідження та моделювання в землеробстві. Зб. наук. праць., К.: Нива, 1998, С. 286–293.
10. Географічні інформаційні системи. [ за редакцією проф. М. Ван Мервіна, доц. С. С. Кохан ]. Київ: НАУ, 2003. – 207 с. – (Роботу написано в рамках проекту Tempus–Tacis).
11. Косолап Н. За дымовой завесой. Косолап Н. Зерно., 2008., № 9(29) сентябрь., С. 76–103.
12. Посудин Ю.И. Лазерная фотобиология. К.: Вища шк., 1989., 246 с.
13. Посудін Ю.І. Біофізика. Посудін Ю.І., К.: Урожай, 1995., 224 с.
14. Сиротинко О.В. Моніторинг агроресурсів засобами дистанційного зондування. Агроєкологічний журнал., 2007., № 2., С. 53–56.
15. Мозговой Д.К., Кравец О.В. Использование многоспектральных снимков для классификации посевов сельхозкультур. Экология та ноосферология., 2009, Т. 20, № 1–2., С. 54–58.
16. Кравчук В., Любченко С., Козелков С., Баранов Г. Гарантовано адаптивне управління агровиробництва продукції рослинництва з використанням даних дистанційного зондування Землі. Техніко-технологічні аспекти розвитку та випробування нової техніки і технологій для сільського господарства України: зб. наук. праць., Дослідницьке, 2008., Вип. 13 (27)., С. 252–254.
17. Порицький Г.О., Новак Б.І., Рафальська Л.П. Геодезія: підручник. К.: «Арістей», 2007. 260 с.
18. Мельник А.В. Аналіз можливостей космічних засобів отримання географічних даних:Електронний ресурс.
19. Анисимов Б.В., Курганов В.Д. , Злобин В.К. Распознавание и цифровая обработка изображений. М.: Высшая школа, 1983., 295 с.
20. Lightweight rovers for Mars science exploration and sample return. P.S. Schenker, L.F. Sword, A.J. Ganino, D.B. Bickler, G.S. Hickey, D.K. Brown, E.T. Baumgartner, L.H. Matthies, B.H. Wilcox, T. Balch, H. Aghazarian and M.S. Garrett Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology.



21. Носков В.П. Формирование объединенной модели внешней среды на основе информации видеокамер и дальномеров. В.П. Носков, И.В. Рубцов, А.Ю. Романов. Мехатроника, автоматизация, управления № 8, 2007, С. 2–5.
22. Зенкевич С.Л., Минин А.А. Построение карты мобильным роботом, оснащенный лазерным дальномером, методом рекуррентной фильтрации. Мехатроника, автоматизация, управления., № 8. – 2007., С. 5–12.
23. Johannsen C. Remote sensing. Precision farming profitability. Chris Johannsen, Paul Carter // Agricultural research programs. – Perdue University, 2000., P. 82–88.
24. Назаров И.М. Основы дистанционных методов мониторинга загрязнения природной среды / Назаров И.М., Николаев А.Н., Фридман Ш.Д. – Л.: Гидрометеиздат, 1983., 279 с.
25. Куприянич І.П., Бутенко Є.В. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Фотограмметрія та дешифрування аерознімків». Київ: Видавничий центра НАУ, 2006. 53 с.
26. Kogan, F., Kussul, N., Adamenko, T., Skakun, S., Kravchenko O., Kryvobok O., Shelestov A., Kolotii A., Kussul O. & Lavrenyuk A. Winter wheat yield forecasting in Ukraine based on Earth observation, meteorological data and biophysical models.-International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation, 2013 vol. 23, pp. 192–203.
27. Васюхін М.І., Іваник Ю.Ю., Сініцин О.В., Долинний В.В. Геоінформаційні системи прецизійного землеробства : Монографія., К: ЦП «Компринт», 2016., 238 с.

#### **References (transliterated)**

1. Kravchuk V., Lyubchenko S., Kovtunenکو O. Intehrovana systema tekhnolohiy kerovanoho zemlerobstva. Tekhniko-tekhnolohichni aspekty rozvytku ta vyprobuvannya novoyi tekhniki i tekhnolohiy dlya sil's'koho hospodarstva Ukrayiny: zb. nauk. prats', Doslidnyts'ke: 2009., Vyp. 13 (27), S. 117–119.
2. Hrychanov Y. YA., Karpylovsky L.N. Puty avtomatyzatsyy sbora, obrabotky y yspol'zovanyya ynformatsyy dlya prohnoza y syhnalyzatsyy poyavlenyya vredeyteley sel'skokhozyaystvennykh kul'tur. Ahrometeorolohycheskye resursy y produktsyonnye protsessy v rastenyevodstve», 18–21 marta 1991h.: tezysy dokl., Kyev: 1991., S. 147–149.
3. Zhelybo L.P., Klyshchenko S.V. Vozmozhnomy aérovyzual'nykh obsledovany pry yspol'zovany razlychnykh avyatsyonnykh tekhnicheskyykh sredstv. Ahrometeorolohycheskye resursy y produktsyonnye protsessy v rastenyevodstve, 18–21 marta 1991h. : tezysy dokl., Kyev: 1991., S. 166–167.
4. Nebesnyy V.B., Myrolyubov A.V. Yspol'zovanye dystantsyonnoho spektrofotometrycheskoho metoda dlya otsenky sostoyaniya posevov ozymykh kul'tur. Ahrometeorolohycheskye resursy y produktsyonnye protsessy v rastenyevodstve, 18–21 marta 1991h. : tezysy dokl., Kyev: 1991., S. 183–184.
5. Astrand B., Baerveldt A.. An Agricultural Mobile Robot with Vision–Based Perception for Mechanical Weed Control. Autonomous Robots., 2002., № 13., P. 21–35.
6. Robot Control using Machine Vision. [J. Blasco, N. Aleixos, J. Roger, G. Rabatel, E. Molto]. Biosystems Engineering., 2002., № 83., P. 149–157.
7. Nekos A.N., Shchukin H.H., Nekos V.YU. Dystantsiyni metody doslidzhen' v ekolohiyi : navchal'nyy posibnyk., KH.: KHNU imeni V.N. Karazina, 2007., 372 s.
8. Kravchuk V., Lyubchenko S., Voynovs'ky V., Serbiy V. Intehrovana systema kerovanoho zemlerobstva – neobkhidnyy zasib novitnykh tekhnolohiy. Tekhnika i tekhnolohiyi APK., 2009., № 1 (veresen'), S. 32–34.
9. Syrotynko O.V. Systema aerokosmichnoho sil's'kohospodars'koho ahromonitorynhu. Systema doslidzhennya ta modelyuvannya v zemlerobstvi. Zb. nauk. prats', K.: Nyva, 1998, S. 286–293.
10. Heohrafichni informatsiyni systemy. [ za redaktsiyeyu prof. M. Van Mervina, dots. S. S. Kokhan ]. Kyiv: NAU, 2003. – 207 s. – (Robotu napysano v ramkakh proektu Tempus–Taxis).
11. Kosolap N. Za dymovoy zavesoy. Kosolap N. Zerno., 2008., № 9(29) sentyabr', S. 76–103.
12. Posudyn YU.Y. Lazernaya fotobiolohiya. K.: Vyshcha shk., 1989., 246 s.
13. Posudin YU.I. Biofizyka. Posudin YU.I., K.: Urozhay, 1995., 224 s.
14. Syrotynko O.V. Monitorynh ahroresursiv zasobamy dystantsiynoho zonduvannya. Ahroekolohichnyy zhurnal., 2007., № 2., S. 53–56.
15. Moz'hovoy D.K., Kravets O.V. Yspol'zovanye mnohospektral'nykh snymkov dlya klasyfykatsyy posevov sel'khozkul'tur. Ekolohiya ta noosferolohiya., 2009, T. 20, № 1–2., S. 54–58.
16. Kravchuk V., Lyubchenko S., Kozelkov S., Baranov H. Harantovano adaptivne upravlinnya ahrovyrobnystva produktsiyi roslynnystva z vykorystanniam danykh dystantsiynoho zonduvannya

- Zemli. Tekhniko-tekhnologichni aspekty rozvytku ta vyprobuvannya novoyi tekhniki i tekhnolohiy dlya sil's'koho hospodarstva Ukrayiny: zb. nauk. prats', Doslidnyts'ke, 2008., Vyp. 13 (27)., S. 252–254.
17. Poryts'kyi H.O., Novak B.I., Rafal's'ka L.P. Heodeziya: pidruchnyk. K.: «Aristey», 2007. 260 s.
  18. Mel'nyk A.V. Analiz mozhlyvostey kosmichnykh zasobiv otrymannya heohrafichnykh danykh:Elektronnyy resurs.
  19. Anysymov B.V., Kurhanov V.D. , Zlobyn V.K. Raspoznavanye y tsyfrovaya obrabotka zobrazhenyy. M.: Vysshaya shkola, 1983., 295 s.
  20. Lightweight rovers for Mars science exploration and sample return. P.S. Schenker, L.F. Sword, A.J. Ganino, D.B. Bickler, G.S. Hickey, D.K. Brown, E.T. Baumgartner, L.H. Matthies, B.H. Wilcox, T. Balch, H. Aghazarian and M.S. Garrett Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology.
  21. Noskov V.P. Formyrovanye ob"edynennoy modely vneshney sredy na osnove ynformatsyy vydeokamer y dal'nomerov. V.P. Noskov, Y.V. Rubtsov, A.YU. Romanov. Mekhatronyka, avtomatyizatsyya, upravlenyya № 8, 2007, S. 2–5.
  22. Zenkevych S.L., Mynyn A.A. Postroenye karty mobyl'nyh robotom, osnashchennym lazernym dal'nomerom, metodom rekurrentnoy fyl'tratsyy. Mekhatronyka, avtomatyizatsyya, upravlenyya., № 8. – 2007., S. 5–12.
  23. Johannsen C. Remote sensing. Precision farming profitability. Chris Johannsen, Paul Carter // Agricultural research programs. – Perdue University, 2000., P. 82–88.
  24. Nazarov Y.M. Osnovy dystantsyonnykh metodov monytorynha zahryaznenyya pryrodnoy sredy / Nazarov Y.M., Nykolaev A.N., Frydman SH.D. – L.: Hydroyeteoyzdat, 1983., 279 s.
  25. Kupriyanchyk I.P., Butenko YE.V. Metodychni vkazivky do vykonannya laboratornykh robot z dystsypliny «Fotohrammetriya ta deshyfruvannya aereznimkiv». Kyiv: Vydavnychyy tsentra NAU, 2006. 53 s.
  26. Kogan, F., Kussul, N., Adamenko, T., Skakun, S., Kravchenko O., Kryvobok O., Shelestov A., Kolotii A., Kussul O. & Lavrenyuk A. Winter wheat yield forecasting in Ukraine based on Earth observation, meteorological data and biophysical models.-International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation, 2013 vol. 23, pp. 192—203.
  27. Vasyukhin M.I., Ivanyk YU.YU., Sinitsyn O.V., Dolynnyy V.V. Heoinformatsiyni systemy pretsyziynoho zemlerobstva : Monohrafiya., K: TSP «Kompynt», 2016., 238 s.



УДК 519.6: 533,6: 629.3

А.В. СОХАЦЬКИЙ, М.С. АРСЕНЮК  
Інститут транспортних систем та технологій НАН України  
Університет митної справи та фінансів

### ЗАСТОСУВАННЯ ОСЕРЕДНЕНИХ ЗА РЕЙНОЛЬДСОМ РІВНЯНЬ НАВ'Є-СТОКСА ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ АЕРОДИНАМІКИ ТРАНСПОРТНОГО ЗАСОБУ MAGLEV

*В роботі розглянуто задачу моделювання аеродинаміки транспортного засобу Maglev. Для опису течії навколо транспортного засобу використано осереднені за Рейнольдсом рівняння Нав'є-Стокса. Для замикання осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса застосовано двопараметричну модель турбулентності SST Менгера. Розроблено методику, алгоритм розв'язування задачі, та програмне забезпечення. Модель SST за якістю перевершує усі інші моделі турбулентності, але по обчислювальній простоті і витратам поступаєтья моделям з одним рівнянням. Для числового інтегрування системи диференціальних рівнянь використано скінченно-об'ємний метод. Розроблено методику постановки межових умов. Проведено тестування розробленої методики на стандартних задачах аеродинаміки.*

*Розв'язано задачу з визначення аеродинамічних характеристик високошвидкісного наземного транспортного засобу типу Maglev. Шляхом математичного моделювання досліджено вплив просторового розташування корпусу високошвидкісного наземного транспортного засобу типу Maglev відносно шляхової структури на аеродинамічні характеристики.*

*Ключові слова: аеродинаміка транспортних апаратів, числове моделювання, рівняння Нав'є-Стокса, моделі турбулентності.*

А.В. СОХАЦЬКИЙ, М.С. АРСЕНЮК  
Інститут транспортних систем и технологий НАН Украины  
Университет таможенного дела и финансов

### ПРИМЕНЕНИЕ ОСЕРЕДНЕНИХ ПО РЕЙНОЛЬДСУ УРАВНЕНИЙ НАВ'Є-СТОКСА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ АЭРОДИНАМИКИ ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА MAGLEV

*В работе рассмотрена задача моделирования аэродинамики транспортного средства Maglev. Для описания течения вокруг транспортного средства использовано осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса. Для замыкания осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса применена двухпараметрическая модель турбулентности SST Менгера. Разработана методика, алгоритм численного решения задачи и программное обеспечение. Модель SST Менгера по качеству превосходит все другие модели турбулентности. По вычислительной простоте и затратам модель SST Менгера уступает моделям с одним дифференциальным уравнением. Для численного интегрирования системы дифференциальных уравнений использован конечно-объемный метод.*

*Проведено тестирование разработанной методики на стандартных задачах аэродинамики. Решена задача по определению аэродинамических характеристик высокоскоростного наземного транспортного средства типа Maglev. Путем математического моделирования исследовано влияние пространственного расположения корпуса высокоскоростного наземного транспортного средства типа Maglev относительно дорожной структуры на аэродинамические характеристики*

*Ключевые слова: аэродинамика транспортных аппаратов, численное моделирование, уравнения Навье-Стокса, модели турбулентности.*

A.V. SOKHATSKY, M.S. ARSENUK  
Institute of transport systems and technologies of National academy of sciences of Ukraine  
University of customs and finances

### APPLICATION OF THE NAVIER - STOKES EQUATIONS AVERAGED BY REYNOLDS FOR MODELING OF AERODYNAMICS OF TRANSPORT VEHICLE OF MAGLEV

*The purpose of the article. The real flows round transport vehicles are turbulent. The purpose of the work is to verify the suitability of the selected model for calculating aerodynamic characteristics and the numerical method for solving the task.*

**The content of the work.** Difficult stochastic nature complicates the process of their study. A design of such flows is extraordinarily difficult, both physical and from the mathematical point of view. Calculation of descriptions of turbulent streams and for today remains the art of calculator probably. It is explained by the baffling physical complexity of turbulence and also her stochastic nature. For today the task of mathematical design of turbulent flows remains the unsolved problem of aerodynamics

The task of design of aerodynamics of transport vehicle of Maglev is in-process considered. For description of flow round a transport vehicle the Navier - Stokes equations averaged by Reynolds are used. For shorting of the Navier - Stokes equations averaged by Reynolds the two-parameter model of turbulence of SST Menter is applied. Methodology, algorithm of numeral decision of task and software, is worked out.

The model of SST Menter excels all other models of turbulence in quality. On calculable simplicity and expenses the model of SST Menter yields to the models with one differential equalization. For numeral integration of the system of differential equalizations a by certainly-volume method is used.

Methodology of raising of border terms is worked out. Testing of the worked out methodology is conducted on the standard tasks of aerodynamics. A task is decided on determination of aerodynamic descriptions of high-speed surface transport vehicle of type of Maglev. By a mathematical design influence of spatial location of corps of high-speed surface transport vehicle of type of Maglev of relatively travelling structure is investigational on aerodynamic descriptions. Got values of aerodynamic descriptions for aerodynamic coefficient  $c_x(\vartheta, h)$ ,  $c_y(\vartheta, h)$ ,  $m_z(\vartheta, h)$ . A minimum aerodynamic drag is characteristic for  $\vartheta=0^\circ$ . The conducted analysis of dependences of aerodynamic descriptions is from the corner of attack and distance to the travelling structure. A transport vehicle does not have sufficient longitudinal static firmness in all range of operating parameters.

**Conclusions.** Undertaken studies showed that the worked out methodology was capable of working. She can be used for the estimation of aerodynamic descriptions of transport vehicles of Maglev.

*Keywords:* aerodynamics of transport vehicles, numerical simulation, Navier-Stokes equations, model of turbulence.

### Постановка проблеми

Аеродинамічні характеристики високошвидкісних транспортних засобів є важливими показниками їх досконалості. Вони впливають на експлуатаційні параметри та показують їх рівень енергоспоживання. Окрім цього, аеродинамічні характеристики формують відповідні показники стійкості та керованості високошвидкісних транспортних засобів. При досягненні значних швидкостей аеродинаміка транспортного засобу стає одним з переважних чинників оцінки експлуатаційних характеристик та динаміки руху і, отже, вимагає детального вивчення. Раніше для оцінки експлуатаційних показників наземних транспортних засобів аеродинамічні характеристики транспортних засобів застосовували наближені підходи з використанням експериментальних даних для тіл простої геометричної форми. Проте стрімкий розвиток транспорту вимагає урахування аеродинамічних характеристик з використанням складних математичних моделей фізичних процесів. Розвиток числових методів різного рівня складності, комп'ютерної техніки дозволив приступити до систематичного застосування моделей і методів механіки рідини і газу при аеродинамічному проектуванні високошвидкісних транспортних засобів.

### Аналіз останніх досліджень за темою

Більшість сучасних теоретичних і практичних досліджень в області аеродинаміки наземного транспорту присвячена транспортним засобам, що рухаються відносно з невеликими швидкостями. Це автомобілі, залізничні потяги, що розвивають швидкість до 100-200 км/год. Потреба у більш швидких транспортних засобах спричинила розробки безколісного транспорту на принципах магнітної підтримки над шляховою структурою (Maglev). Для транспортних засобів типу Maglev вважаються придатними швидкості близько 500-600 км/год. Аеродинамічні характеристики транспортного засобу Maglev будуть залежати як від форми корпусу, так і від розташування відносно шляхової структури та метеорологічних умов. Дослідження впливу цих параметрів на аеродинамічні характеристики дозволить спрогнозувати поведінку транспортного засобу у будь-яких експлуатаційних ситуаціях і знайти оптимальні форми корпусу транспортного засобу та його елементів.

Реальні течії навколо транспортних засобів є турбулентними. Складна стохастична природа ускладнює процес їх вивчення. Моделювання таких течій є надзвичайно складним, як з фізичної так і з

математичної точки зору. Розрахунок характеристик турбулентних потоків і на сьогодні залишається скоріше всього мистецтвом обчислювача. Це пояснюється надзвичайною фізичною складністю турбулентності і також її стохастичною природою. Математичне моделювання турбулентних течій залишається невирішеною проблемою аеродинаміки.

В останні роки все більше застосування знаходять підходи до моделювання турбулентності, що базуються на наступних методах: метод прямого чисельного моделювання ( Direct Numerical Simulation або DNS ); метод моделювання великих вихорів ( Large Eddy Simulation або LES); осереднених за Рейнольдсом рівняннях Нав'є-Стокса ( Reynolds Averaged Navier-Stokes – RANS ).

Турбулентна течія носить тривимірний нестационарний характер. Вона має широкий спектр просторово-часових масштабів. Застосування методів DNS та LES обмежене через крайню обчислювальну трудомісткість. Вважається, що їх практичне використання для розв'язування складних задач аеродинаміки може початися лише у кінці нинішнього сторіччя [1,2]. Наприклад сумарні витрати на проведення моделювання методами DNS зростають із збільшенням числа Рейнольдса як  $Re^{1/4}$ . Таким чином, в даний час DNS може використовуватися лише для розрахунку течій з відносно низькими числами Рейнольдса і застосовується, головним чином, у фундаментальних дослідженнях, метою яких є отримання детальної інформації про структуру та основні закономірності турбулентних течій. Проте це ніскільки не зменшує важливості цього підходу, оскільки отримані за допомогою DNS результати, разом з експериментальними даними, складають основу для калібрування і тестування напівемпіричних моделей турбулентності. Більше того, слід урахувати, що в майбутньому DNS може стати домінуючим підходом для розв'язування аеродинамічних задач. Передбачається, що DNS може отримати розповсюдження і в суміжних областях техніки, таких як хімічні технології, атомна енергетика і т. п.

Метод LES є другим по трудомісткості з існуючих підходів до моделювання в обчислювальній аеродинаміці. Метод моделювання турбулентних течій на основі моделювання великих вихорів (LES) сформувався на початку 80-х років 20 -го століття [3]. Ідея цього підходу полягає в заміні "глобального" усереднювання характеристик реальної турбулентної течії за часом, на якому базується виведення рівнянь Рейнольдса, "фільтрацією" цих характеристик їх просторовим усереднюванням за областями з розмірами порядку розміру фільтру.

Для виведення рівнянь LES актуальні змінні  $f$  в рівняннях Нав'є-Стокса замінюються на суму відповідних "відфільтрованих" та "підсіткових" змінних  $f = \tilde{f} + f'$ . Потім до отриманих рівнянь застосовується операція фільтрації. Величина  $\tilde{f}$  визначається виразом [3]

$$\tilde{f}(x, t) = \int_V G(x - x', \Delta) f(x', t) dx'^3,$$

де  $G$  – функція фільтра,  $x$  – координата точки потоку, що розглядається,  $\Delta$  - ширина фільтра.

Система рівнянь LES за формою аналогічна системі рівнянь RANS. Проте фізичний зміст цих двох систем різний. Так, додаткові члени RANS описують вплив усіх турбулентних неоднорідностей на усереднене розв'язування, тоді як аналогічні члени рівнянь LES ("підсіткова" напруженість) описують вплив тільки відносно дрібних (з розмірами меншими розміру фільтру  $\Delta$ ) вихорів на залежне від часу розв'язування відфільтрованих рівнянь. Іншими словами, у рамках LES вихрові структури з розмірами, що перевищують розміри фільтру, розрізняються "точно" [2], а моделюються лише вихрові структури менших розмірів. Для того, щоб підкреслити це, моделі турбулентності для LES називають "підсітковими".

Зрозуміло, що якщо розміру фільтру відповідає хвильове число  $k_\Delta$ , що лежить в універсальній ("інерційній") області енергетичного спектру турбулентності, тобто, якщо  $k_l < k_\Delta < k_d$ , то моделюванню підлягають тільки відносно універсальні (не залежні від конкретної геометрії і межових умов) вихори [1,2]. В результаті, роль підсіткової моделі в LES зводиться до забезпечення правильної швидкості каскадної передачі енергії турбулентності від великих до дрібних вихорів в межах інерційного інтервалу хвильових чисел або, іншими словами, – правильній швидкості дисипації найменших з "розрізнявальних" вихорів.

Саме у цьому полягає принципова перевага LES перед RANS підходом, у рамках якого потрібне моделювання усіх, у тому числі великих вихорів, що є енергонасиченими і не підлягають певним універсальним законам. З практичної точки зору ця перевага означає істотне зниження вимог до підсіткових моделей для LES в порівнянні з моделями турбулентності для замикання рівнянь RANS.

Досвід застосування LES переконливо свідчить про те, що при виконанні умови  $k_l < k_\Delta < k_d$ , він забезпечує високу точність розрахунку не лише усереднених і основних статистичних, але і пульсаційних характеристик турбулентності, навіть при використанні простих підсіткових моделей, наприклад, класичної алгебраїчної моделі Смагоринського [2].

### Мета дослідження

Течія навколо транспортного засобу є турбулентною. Математична модель для розрахунку аеродинамічних характеристик повинна враховувати цілий ряд особливостей фізичних процесів. Метою роботи є перевірка придатності вибраної моделі розрахунку аеродинамічних характеристик та числового методу для розв'язування поставленої задачі.

### Математична модель та методика розв'язування задачі

Для розв'язування задачі з визначення аеродинамічних характеристик транспортного засобу Maglev обрано модель течії в'язкого стисливого газу, що описується осередненими за Рейнольдсом рівняннями Нав'є-Стокса. Розрахункова область навколо транспортного апарата є складною, тому необхідно використовувати криволінійну систему координат. Система рівнянь Нав'є-Стокса в формі Рейнольдса для довільної криволінійної системи координат запишеться

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathcal{E} - \mathcal{E}_v)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\mathcal{F} - \mathcal{F}_v)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\mathcal{G} - \mathcal{G}_v)}{\partial \zeta} = \mathcal{H}, \quad (1)$$

де  $\mathcal{G}$  – вектор невідомих змінних;  $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$  – вектори нев'язких потоків;  $\mathcal{E}_v = \xi_x E_v + \xi_y F_v + \xi_z G_v$ ,

$\mathcal{F}_v = \eta_x E_v + \eta_y F_v + \eta_z G_v$ ,  $\mathcal{G}_v = \zeta_x E_v + \zeta_y F_v + \zeta_z G_v$  – вектори в'язких потоків;  $\mathcal{H} = 1/jH$  – вектор джерельних членів.

Вектори  $\mathcal{G}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, E_v, F_v, G_v$  визначаються наступними співвідношеннями

$$\mathcal{G} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E_t \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho U u + \xi_x p \\ \rho U v + \xi_y p \\ \rho U w + \xi_z p \\ (E_t + p)U - \xi_t p \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho V + \eta_x p \\ \rho V + \eta_y p \\ \rho V + \eta_z p \\ (E_t + p)V - \eta_t p \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho W \\ \rho W + \zeta_x p \\ \rho W + \zeta_y p \\ \rho W + \zeta_z p \\ (E_t + p)W - \zeta_t p \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$E_v = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} - q_x \end{bmatrix}, \quad F_v = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y \end{bmatrix}, \quad G_v = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} - q_z \end{bmatrix}, \quad (3)$$

де  $\xi_x, \xi_y, \xi_z, \eta_x, \eta_y, \eta_z, \zeta_x, \zeta_y, \zeta_z$  – метричні коефіцієнти,  $J = \partial(\xi, \eta, \zeta) / \partial(x, y, z)$  – якобіан перетворення координат,  $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  – компоненти тензора напружень та  $q_x, q_y, q_z$  – компоненти вектора теплових потоків.  $E_t = \rho \left[ e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \right]$ .

В системі рівнянь (1) n-компонентні вектори  $\mathcal{G}, \mathcal{E}_i, \mathcal{F}_i, \mathcal{G}_i, \mathcal{E}_v, \mathcal{F}_v, \mathcal{G}_v$  мають відповідний вигляд в залежності від моделі турбулентності.

Для замикання системи рівнянь (1) використано модель турбулентності SST (Shear Stress Transport) Ментера [4]. В загальному вигляді ця система рівнянь запишеться

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_i k)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + G_k - Y_k, \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_i \omega)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] + G_\omega - Y_\omega + D_\omega,$$

де  $G_\omega$  - генерація дисипації кінетичної турбулентності  $\omega$  на одиницю  $k$ ;  $Y_k$  - дисипація кінетичної енергії турбулентності;  $Y_\omega$  - дисипація кінетичної турбулентності  $\omega$ ;  $\Gamma_k = \mu + \mu_t / \sigma_k$ ;  $\Gamma_\omega = \mu + \mu_t / \sigma_\omega$ ;  $D_\omega$  - перехресний дифузійний член.

Модель турбулентності SST є комбінацією  $k-\varepsilon$  і  $k-\omega$  моделей турбулентності. Для розрахунку течії у вільному потоці використовуються рівняння  $k-\varepsilon$  моделі, а в області поблизу стінок - рівняння  $k-\omega$  моделі. Вимоги до щільності сітки тут ті ж, що і у  $k-\omega$  моделі і низькорейнольдсової  $k-\varepsilon$  моделі. Ця модель турбулентності позбавлена ряду недоліків початкових  $k-\varepsilon$  і  $k-\omega$  моделей. Вважається, що модель SST за якістю перевершує усі інші моделі турбулентності, проте за обчислювальною простотою і витратам вона поступається моделям з одним рівнянням [1-5].

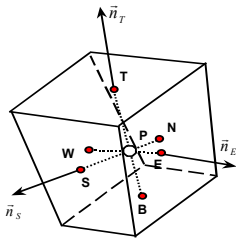


Рис. 1. Контрольний об'єм

Для розв'язування системи рівнянь (1,4) використано метод контрольного об'єму. Основні засади методу контрольного об'єму (МКО) полягають в тому, що розглядаються класичні рівняння балансу деякої величини  $Q$  в контрольному об'ємі  $V$ , обмеженому поверхнею  $S = \sum S_k$  з зовнішньою нормаллю  $\vec{n}$  (рис.1). Інтегруючи рівняння (1) по контрольному об'єму отримаємо

$$\iiint_{\Delta V} \left[ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(\mathcal{E} - \mathcal{E}_v)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\mathcal{F} - F_v)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\mathcal{G} - \mathcal{G}_v)}{\partial \zeta} - H \right] dV = 0. \quad (5)$$

Застосовуючи до рівняння (5) теорему про середнє і Остроградського-Гауса, одержимо:

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta V} \iint_S \left[ (\mathcal{E} - \mathcal{E}_v) n_x + (\mathcal{F} - F_v) n_y + (\mathcal{G} - \mathcal{G}_v) n_z \right] dS + \tilde{H}, \quad (6)$$

де  $S$  - поверхня навколо контрольного об'єму  $\Delta V$ ;  $\vec{n}$  - вектор зовнішньої нормалі до поверхні  $S$ .

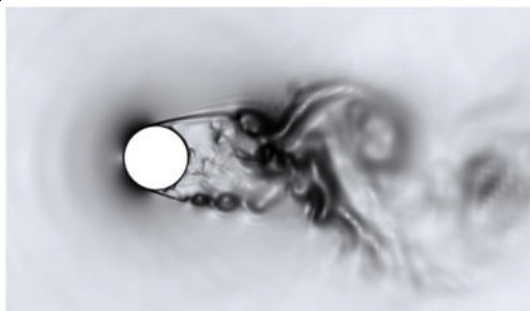


Рис.2. Вихорова картина течії за циліндром для числа для  $Re=5000$

Верхній знак  $[\sim]$  означає середнє значення шуканої функції за об'ємом:

$$\tilde{f} = \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} f dV \quad (7)$$

Отримана система алгебраїчних рівнянь розв'язувалася методом Гауса-Зейделя. Розроблена методика, алгоритм та програмне забезпечення тестувалося на ряді стандартних задач. На рис.2 показана вихорова картина течії навколо циліндра для числа  $Re=5000$ .

### Результати числових досліджень

Виконано дослідження аеродинаміки транспортного апарата типу "Maglev", що рухається поблизу шляхової структури. Форма транспортного апарата представляє собою корпус з поперечним перерізом близьким до вигляду рівнобедреної трапеції. Вважалося, що транспортний апарат має довжину 28 м. Висота корпусу складає 2,1 м, а ширина 2,7 м. Передбачалося, що транспортний апарат може рухатися з максимальними швидкостями в межах 500 км/год (140 м/с). Таким чином число Маха для незбуреного набігаючого потоку складає 0,45, а число Рейнольдса менше  $2 \cdot 10^8$ . Відстань від днища корпусу до площини шляхової структури знаходиться в межах 7%-10% висоти корпусу. Форма



транспортного апарата Maglev показана на рис 3. Обрис поперечного перерізу транспортного засобу має вигляд близький до рівнобедреної трапеції з закругленими кутами.



Рис. 3. Зовнішній вигляд транспортного засобу Maglev

Розрахунки показали, що форма носової частини транспортного апарата впливає на формування зони найбільшого тиску в передній частині клиноподібного носика (рис.4). Розміщення зони підвищеного тиску нижче поздовжньої осі симетрії транспортно засобу може сприяти появі пікірувального моменту. Під днищем транспортного апарата, в поздовжньому напрямку, під дією шляхової структури зміна тиску незначна. Проте поблизу кормової частини спостерігається поява на нижній та верхній поверхнях корпусу зони пониженого тиску. На верхній частині корпусу транспортного апарата зміна тиску більш інтенсивна, що сприяє появі підйімальної сили. В результаті виникає підймальна сила, яка намагається утримувати транспортний апарат над шляховою структурою.

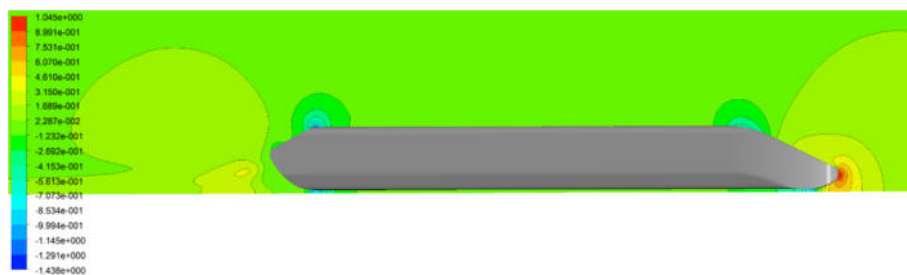


Рис. 4. Розподіл тиску в серединному поздовжньому перетині транспортного засобу Maglev ( $\vartheta=0^\circ$ )

Розраховано аеродинамічні характеристики для режимів руху з кутами тангажа  $\vartheta=-2^\circ, \vartheta=-1^\circ, \vartheta=0^\circ, \vartheta=1^\circ, \vartheta=2^\circ$ . Отримані залежності аеродинамічних характеристик  $c_x(\vartheta, h)$ ,  $c_y(\vartheta, h)$ ,  $m_z(\vartheta, h)$  наведено на рис. 5. Проведені розрахунки показали, що мінімальний лобовий опір характерний для  $\vartheta=0^\circ$ . Проведений аналіз аеродинамічних характеристик, як функції від кута атаки та відстані до шляхової структури, показав, що транспортний апарат не має достатньої поздовжньої статичної стійкості в усьому діапазоні робочих параметрів.

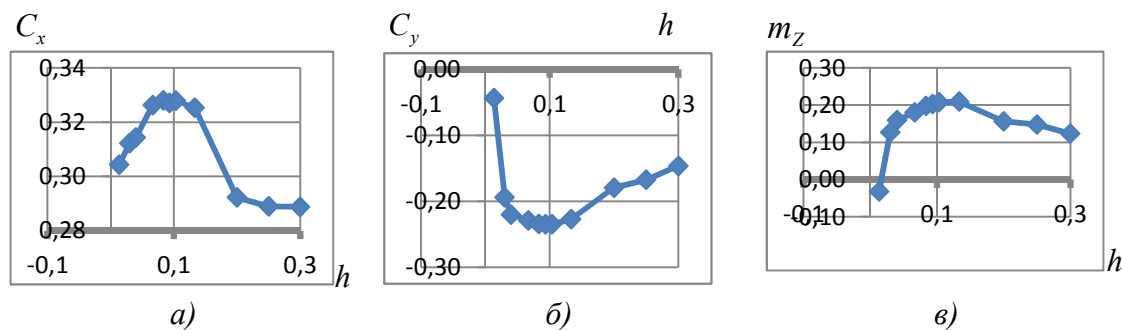


Рис. 5. Вплив відстані до шляхової структури на аеродинамічні коефіцієнти  
а)  $C_x$ ; б)  $C_y$ ; в)  $m_z$

Коефіцієнт лобового опору  $C_x$ , в діапазоні відстаней до шляхової структури від 0,013 - 0,067, лінійно збільшується, після чого, до значення відстані 0,13 не зазнає істотних змін. Далі, на проміжку до максимальної відстані до шляхової структури, зменшується аж до значень менше за початкових, і до відстаней 0,25 - 0,3 виходить практично на сталі значення.

Коефіцієнт підйімальної сили  $C_y$  на усьому даному діапазоні зміни відстаней до шляхової структури має негативні значення. Модуль величини  $C_y$  на проміжку відстаней до шляхової структури від 0,013 до 0,04 різко зменшується. Потім, на проміжку відстаней до шляхової структури до 0,13 змінює своє значення в невеликих межах: збільшується відстань до шляхової структури до 0,1 і зменшується до



0,13. Далі, на проміжку відстаней, що залишився, до шляхової структури до 0,3 поступово зменшується із залежністю, близькою до лінійної.

Залежність коефіцієнта  $m_z$  від відстані до шляхової структури подібна до дзеркально відображеної залежності коефіцієнта  $C_y$ . На початковому проміжку до 0,04 значення  $m_z$  різко збільшується, після чого він набагато повільніше росте аж до значення відстані 0,1, а після значення 0,15 повільно зменшується на усьому проміжку відстаней до шляхової структури.

#### Висновки

Розроблено методику, алгоритми та комплекс програм моделювання течії в'язкого стисливого газу з на основі розв'язування осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса. Проведені дослідження показали, що розроблена методика є працездатною і може використовуватися для оцінки аеродинамічних характеристик транспортних засобів Maglev. В подальших дослідженнях планується використовувати більш досконалі моделі турбулентності.

#### Список використаної літератури

1. Волков К.Н, Емельянов В.Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. М.: Физматлит, 2008. 368с.
2. Гарбарук А. В., Стрелец М.Х., Травин А.К., Шур М.Л. Современные подходы к моделированию турбулентности. СПб. Изд-во Политехн. ун-та, 2016. 234 с.
3. Сохацький А. В. Теоретичні основи створення аеродинамічних компонувань перспективних швидкісних транспортних апаратів: дис. доктора технічних наук: 05.07.01. Дніпропетровськ. 2010. 364с.
4. Menter F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*. 1994. v. 32, N 8. P. 1598-1605.
5. Spalart P.R., Allmaras S.R. A one-equations turbulence model for aerodynamic flows. *AIAA paper*.1992. Vol. 0439. 21p.

#### References

1. Volkov K.N, Emelyanov V.N. Modelirovanie krupnyih vihrey v raschetah turbulennyih techeniy. M.: Fizmatlit, 2008. 368s.
2. Garbaruk A. V., Strelets M.H., Travin A.K., Shur M.L. Sovremennyye podhodyi k modelirovaniyu turbulentsnosti . SPb. Izd-vo Politehn. un-ta, 2016. 234 s.
3. Sohatskiy A. V. Teoretichni osnovi stvorenniya aerodinamichnih komponuvan perspektivnih shvidkisnih transportnih aparativ: dis. doktora tehnicnih nauk: 05.07.01. Dnipropetrovsk. 2010. 364 s.
4. Menter F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*. 1994. v. 32, N 8. P. 1598-1605.
5. Spalart P.R., Allmaras S.R. A one-equations turbulence model for aerodynamic flows. *AIAA paper*.1992. Vol. 0439. 21p.

УДК 532.516

С.В. ТАРАСОВ, Д.А. РЕДЧИЦ, А.С. ТАРАСОВ  
Институт транспортных систем и технологий НАН Украины  
С.В. МОЙСЕЕНКО  
Херсонский национальный технический университет

## ЧИСЛЕННАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРА И АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ С УЧЕТОМ ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕХОДА

Проведено моделювання обтекания цилиндра и профиля *NACA 4412* с использованием  $\gamma$ - $Re_{\theta}$  модели ламинарно-турбулентного перехода и без нее. Численное моделирование выполнено на базе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (URANS), с использованием дифференциальной однопараметрической модели турбулентности *Spalart-Allmaras*. Система исходных уравнений, записывалась относительно произвольной криволинейной системы координат. Согласование полей давления и скорости осуществлялось с помощью метода искусственной сжимаемости, модифицированного для расчета нестационарных задач. Интегрирование системы исходных уравнений проводилось численно с использованием метода контрольного объема. Для конвективных потоков использовалась противопоточная аппроксимация *Rogers-Kwak*, основанная на схеме *Roe* третьего порядка точности. В моделях турбулентности для аппроксимации конвективных слагаемых применялась схема *TVD* с ограничителем потоков *ISNAS* третьего порядка. Проведено сравнение результатов расчетов обтекания цилиндра с использованием модели ламинарно-турбулентного перехода и без нее. Показано, что при низких числах Рейнольдса, когда обтекание цилиндра носит ламинарный характер, а след турбулентный использование модели турбулентности *Spalart-Allmaras* приводит к развитию турбулентного пограничного слоя на цилиндре и, как следствие, к изменению положения точки отрыва. Неправильное положение точки отрыва оказывает влияние на распределение давления в донной части цилиндра и на интегральные аэродинамические характеристики. Применение модели перехода позволяет адекватно воспроизвести ламинарный отрыв вблизи передней кромки профиля с последующим его присоединением. Применение одной только модели *Spalart-Allmaras* приводит к излишней генерации турбулентной вязкости. Показано, что применение  $\gamma$ - $Re_{\theta}$  модели ламинарно-турбулентного перехода качественно и количественно улучшает результаты численного моделирования. Полученные результаты численного моделирования обтекания кругового цилиндра и аэродинамического профиля *NACA 4412* хорошо согласуются с экспериментальными данными в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

Ключевые слова: ламинарно-турбулентный переход, аэродинамический профиль, уравнения Навье-Стокса, модель турбулентности

С.В. ТАРАСОВ, Д.О. РЕДЧИЦЬ, А.С. ТАРАСОВ  
Институт транспортних систем і технологій НАН України  
С.В. МОЙСЕСЬНКО  
Херсонський національний технічний університет

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ОБТІКАННЯ СИМЕТРИЧНИХ І НЕСИМЕТРИЧНИХ ПРОФІЛІВ

Проведено моделювання обтікання циліндра і профілю *NACA 4412* з використанням  $\gamma$ - $Re_{\theta}$  моделі ламинарно-турбулентного переходу і без неї. Чисельне моделювання виконано на базі осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса (URANS), з використанням диференціальної однопараметричної моделі турбулентності *Spalart-Allmaras*. Система вихідних рівнянь, записувалася щодо довільної криволінійної системи координат. Узгодження полів тиску і швидкості здійснювалося за допомогою методу штучної стисливості, модифікованого для розрахунку нестационарних задач. Інтегрування системи вихідних рівнянь проводилося чисельно з використанням методу контрольного об'єму. Для конвективних потоків використовувалася протипотокова апроксимація *Rogers-Kwak*, заснована на схемі *Roe* третього порядку точності. У моделях турбулентності для апроксимації конвективних складових застосовувалася схема *TVD* з обмежувачем потоків *ISNAS* третього порядку. Проведено порівняння результатів розрахунків обтікання циліндра з використанням моделі ламинарно-турбулентного переходу і без неї. Показано, що при низьких числах Рейнольдса, коли обтікання циліндра носить ламинарний характер, а слід турбулентний використання моделі турбулентності *Spalart-Allmaras* призводить до розвитку турбулентного примежового шару на циліндрі і, як наслідок, до зміни положення точки відриву. Неправильне положення точки відриву впливає на розподіл тиску в донній частині циліндра і на інтегральні аеродинамічні характеристики. Застосування моделі переходу дозволяє адекватно відтворити ламинарний відрив поблизу передньої кромки профілю з подальшим його

приєднанням. Застосування однієї тільки моделі Spalart-Allmaras призводить до зайвої генерації турбулентної в'язкості. Показано, що застосування  $\gamma$ - $Re_\theta$  моделі ламінарно-турбулентного переходу якісно і кількісно покращує результати чисельного моделювання. Отримані результати чисельного моделювання обтікання кругового циліндра і аеродинамічного профілю NACA 4412 добре узгоджуються з експериментальними даними в широкому діапазоні чисел Рейнольдса.

Ключові слова: ламінарно-турбулентний перехід, аеродинамічний профіль, рівняння Нав'є-Стокса, модель турбулентності

S.V. TARASOV, D.O. REDCHYTS, A.S. TARASOV  
Institute of Transport Systems and Technologies of Ukrainian National Academy of Science  
S.V. MOISEENKO  
Kherson National Technical University

### NUMERICAL RECONSTRUCTION OF A TURBULENT FLOW AROUND CYLINDER AND AERODYNAMIC AIRFOIL WITH A LAMINAR-TURBULENT TRANSITION

*A simulation of the flow around a cylinder and a NACA 4412 airfoil was carried out using the  $\gamma$ - $Re_\theta$  laminar-turbulent transition model and without it. Numerical simulation was performed on the basis of the Reynolds-averaged Navier-Stokes equations (URANS), using the Spalart-Allmaras differential one-parameter turbulence model. The system of initial equations was written with respect to an arbitrary curvilinear coordinate system. The coordination of the pressure and velocity fields was carried out using the method of artificial compressibility modified to calculate non-stationary problems. The integration of the system of initial equations was carried out numerically using the control volume method. For convective flows, a countercurrent Rogers-Kwak approximation was used based on the third-order Roe scheme. In turbulence models, the TVD scheme with a third-order ISNAS flow limiter was used to approximate convective terms. Comparison of the calculation results for a flow past a cylinder is carried out using the laminar-turbulent transition model and without it. It is shown that at low Reynolds numbers, when the flow around a cylinder is laminar, and the track isturbulent use of the Spalart-Allmaras turbulence model leads to the development of a turbulent boundary layer on the cylinder and, consequently, to a change in the position of the separation point. The incorrect position of the separation point affects the pressure distribution in the bottom of the cylinder and, as a result, the integral aerodynamic characteristics. The use of the transition model allows one to adequately reconstruct the laminar separation near the leading edge of the airfoil with its subsequent reattachment. The use of the Spalart-Allmaras model alone leads to excessive generation of turbulent viscosity. It is shown that the use of the  $\gamma$ - $Re_\theta$  laminar-turbulent transition model the qualitatively and quantitatively improves the results of numerical simulation. The results of numerical simulation of the flow around a circular cylinder and the NACA 4412 aerodynamic airfoil agree well with experimental data in a wide range of Reynolds numbers.*

*Keywords: laminar-turbulent transition, aerodynamic airfoil, Navier-Stokes equations, turbulence model*

#### Введение

На сегодняшний день одной из проблем вычислительной аэродинамики является моделирование турбулентности и учет ламінарно-турбулентного переходу, а также обратного процесса – реламінізації. Большое количество течений встречающихся на практике являются переходными. В этих течениях присутствует как ламінарная форма движения жидкости или газа, так и турбулентная. К таким относятся течения в газовых турбинах, в теплообменниках ядерных реакторов, на крыльях летательных аппаратов (беспилотников) и др.

Зачастую при рассмотрении такого рода задач ламінарной зоной пренебрегают и рассматривают всю область течения как турбулентную. От того является ли течение ламінарным или турбулентным зависит распределение трения, тепловых потоков и давления по поверхности обтекаемого тела. Пренебрежение зоной ламінарно-турбулентного переходу может привести к существенным погрешностям в определении интегральных характеристик. Полуэмпирические модели турбулентности, разработанные для замыкания осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса, не в состоянии смоделировать переход. Это привело к созданию нового направления в вычислительной аэродинамике, главной целью которого является моделирование ламінарно-турбулентного переходу.

Целью настоящей работы является изучение физических особенностей ламінарно-турбулентного переходу при обтекании кругового цилиндра и аэродинамического профиля NACA 4412.

#### Постановка задачи

Из всего многообразия моделей ламінарно-турбулентного переходу была выбрана наиболее успешная дифференциальная модель  $\gamma$ - $Re_\theta$  Menter [3], базирующаяся на уравнении для коэффициента перемежаемости и уравнении для критического числа Рейнольдса потери импульса. Изначально данная

модель розроблялась для застосування спільно з моделлю турбулентності  $k-\omega$  SST Menter [2]. В нинішній роботі модель  $\gamma-Re_\theta$  ламінарно-турбулентного переходу була адаптована для застосування спільно з моделлю турбулентності Spalart-Allmaras [5].

Математичне моделювання проведено з використанням нестационарних осереднених по Рейнольдсу рівнянь Нав'є-Стокса (URANS), замкнених диференціальною однопараметричною моделлю турбулентності Spalart-Allmaras [5]. В якості початкових умов задавалися параметри невзмущеного потоку во всій розрахунковій області. На зовнішній границі застосовувалися неотражаючі граничні умови, для розрахунку яких використовувався метод характеристик. На поверхні твердого тіла ставилося умово прилипання. В моделі турбулентності Spalart-Allmaras значення робочої змінної на тілі задавалося рівним нулю, на вихідній границі ставилося умово Неймана.

### CFD пакет і його верифікація

Для численного рішення поставленої задачі використовувався розроблений спеціалізований пакет чисельної аеродинаміки (CFD пакет) на основі рівнянь Нав'є-Стокса, включаючи декілька диференціальних моделей турбулентності, для розрахунку стаціонарних і нестационарних ламінарних і турбулентних течій.

Система початкових умов, записувалася відносно довільної криволінійної системи координат. Узгодження полів тиску і швидкості здійснювалося з допомогою методу штучної стисливості, модифікованого для розрахунку нестационарних задач [4]. Інтегрування системи початкових рівнянь здійснювалося численно з використанням методу контрольованого об'єму. Для конвективних потоків використовувався протипоточна апроксимація Rogers-Kwak [4], заснована на схемі Roe третього порядку точності. В моделі турбулентності Spalart-Allmaras для апроксимації конвективних складових застосовувалася схема TVD з обмежувачем потоків ISNAS третього порядку. Похідні в'язких членів апроксимувалися центрально-розностною схемою другого порядку. Алгоритм рішення рівнянь базується на трьохшарній неявній схемі з підітераціями по псевдовремени другого порядку точності по фізичному часу. Отримана блоково-матрична система лінійних алгебраїчних рівнянь розраховувалася методом мінімізації загальної невязки GMRES з ILU(k) предобуславлюванням.

### Результати і обговорення

Перевага застосування моделі переходу була продемонстрована на задачах обтекання кругового циліндра в широкому діапазоні чисел Рейнольдса і аеродинамічного профіля NASA 4412.

Турбулентне обтекання циліндра проводилося для п'яти чисел Рейнольдса  $10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7$ . Проведено порівняння результатів розрахунків обтекання циліндра з використанням моделі  $\gamma-Re_\theta$  ламінарно-турбулентного переходу і без неї.

Обтекання циліндра при числі Рейнольдса  $Re = 10^3$  характеризується ламінарним режимом з наступною турбулізацією сліду (рис. 1 а). При відсутності моделі переходу пограничний шар початково є турбулентним (рис. 1 б).

При числі Рейнольдса  $Re = 10^4$  зона перемежованості зміщується ближче до поверхні циліндра (рис. 1 в). Відрив ламінарного пограничного шару відбувається при куті  $85^\circ-90^\circ$ . В той же час при моделюванні обтекання циліндра без моделі ламінарно-турбулентного переходу турбулентний пограничний шар відривається значно пізніше (рис. 1 г).

Ламінарний пограничний шар при числі Рейнольдса  $10^5$  відривається при куті приблизно  $90^\circ$  з наступною його турбулізацією (рис. 1 д). В цих трьох випадках при числах Рейнольдса  $10^3, 10^4, 10^5$  має місце відривний перехід.

При числі Рейнольдса  $Re = 10^6$  ламінарно-турбулентний перехід відбувається на поверхні циліндра (рис. 1 ж). Відривається вже турбулентний пограничний шар. Для випадку, коли не використовується модель переходу, обтекання циліндра носить стаціонарний характер через надлишкову генерацію турбулентної в'язкості (рис. 1 з).

На рис. 2 представлено змінення зони перемежованості і характеру ламінарно-турбулентного переходу від числа Рейнольдса. З збільшенням числа Рейнольдса зона ламінарно-турбулентного переходу зміщується вгору по потоку і змінюється характер переходу від відривного до природного.

Застосування моделі ламінарно-турбулентного переходу якісно і кількісно покращує результати численного моделювання. Показано, що при низьких числах Рейнольдса, коли обтекання циліндра носить ламінарний характер, а слід турбулентний використання моделі турбулентності SA призводить до розвитку турбулентного пограничного шару на циліндрі і, як наслідок, до зміненню положення точки відриву. Неправильне положення точки відриву впливає на розподіл тиску в нижній частині циліндра і на інтегральні аеродинамічні характеристики (рис. 3).



Полученные результаты численного моделирования обтекания кругового цилиндра в широком диапазоне чисел Рейнольдса хорошо согласуются с экспериментальными данными [1].

Еще одной задачей, на которой проводилось тестирование модели  $\gamma-Re_\theta$  ламинарно-турбулентного перехода было обтекание аэродинамического профиля NASA 4412. При турбулентном обтекании аэродинамического профиля NASA 4412 при числе Рейнольдса  $1.64 \cdot 10^6$  и угле атаки  $12^\circ$  на подветренной части передней кромки формируется ламинарный отрыв (рис. 4 а). В точке присоединения потока происходит резкая турбулизация пограничного слоя, и дальнейшее обтекание носит присоединенный характер за исключением небольшой отрывной зоны вблизи задней кромки. К тому же обтекание наветренной стороны профиля носит полностью ламинарный характер. Применение модели турбулентности Spalart-Allmaras без учета ламинарно-турбулентного перехода приводит к излишней генерации турбулентной вязкости и не дает возможности адекватно описать эти процессы (рис. 4 б). В результате весь пограничный слой на профиле является турбулентным и без ламинарного отрыва вблизи передней кромки. Применение дифференциальной модели  $\gamma-Re_\theta$  позволяет учесть эти сложные явления и адекватно описать ламинарно-турбулентный переход на поверхности профиля (рис. 5). Эти различия наглядно демонстрирует распределение коэффициента трения по поверхности профиля, где виден отрыв. Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными Wadcock [6].

#### Заключение

Преимущество использования  $\gamma-Re_\theta$  модели перехода было продемонстрировано на задачах об обтекании кругового цилиндра в широком диапазоне чисел Рейнольдса и аэродинамического профиля NASA 4412. Проведено сравнение результатов расчетов обтекания цилиндра с использованием модели  $\gamma-Re_\theta$  ламинарно-турбулентного перехода и без нее. Показано, что при низких числах Рейнольдса, когда обтекание цилиндра носит ламинарный характер, а след турбулентный использование модели турбулентности Spalart-Allmaras приводит к развитию турбулентного пограничного слоя на цилиндре и, как следствие, к изменению положения точки отрыва. Неправильное положение точки отрыва оказывает влияние на распределение давления в донной части цилиндра и на интегральные аэродинамические характеристики. Применение модели перехода позволяет адекватно воспроизвести ламинарный отрыв вблизи передней кромки профиля с последующим его присоединением. Применение одной только модели Spalart-Allmaras приводит к излишней генерации турбулентной вязкости. Показано, что применение  $\gamma-Re_\theta$  модели ламинарно-турбулентного перехода качественно и количественно улучшает результаты численного моделирования. Полученные результаты численного моделирования обтекания кругового цилиндра и аэродинамического профиля NASA 4412 хорошо согласуются с экспериментальными данными в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

#### Список использованной литературы

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
2. Menter F. R., Langtry R. B., Völker S. Transition Modelling for General Purpose CFD Codes. *Journal Numerical Mathematics*. 2006. Vol. 4. P. 277–303.
3. Menter F. R. Zonal Two Equation  $k-\omega$  Turbulence Models for Aerodynamic Flows. *Journal Numerical Mathematics*. 1993. Vol. 2. P. 117–124.
4. Rogers S., Kwak D. An upwind differencing scheme for the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal Numerical Mathematics*. 1991. Vol. 8. P. 43 – 64.
5. Spalart P. R., Allmaras S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flow. *AIAA Paper*. 1992. Vol. 12, № 1. P. 439–478.
6. Wadcock A. J. Investigation of low-speed turbulent separated flow around airfoils. *NASA-CR-177450*. 1987. P. 66.

#### References

1. Shlihting G. Teoriya pogranchnogo sloya. M.: Nauka, 1974. 712 s.
2. Menter F. R., Langtry R. B., Völker S. Transition Modelling for General Purpose CFD Codes. *Journal Numerical Mathematics*. 2006. Vol. 4. P. 277–303.
3. Menter F. R. Zonal Two Equation  $k-\omega$  Turbulence Models for Aerodynamic Flows. *Journal Numerical Mathematics*. 1993. Vol. 2. P. 117–124.
4. Rogers S., Kwak D. An upwind differencing scheme for the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal Numerical Mathematics*. 1991. Vol. 8. P. 43 – 64.
5. Spalart P. R., Allmaras S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flow. *AIAA Paper*. 1992. Vol. 12, № 1. P. 439–478.
6. Wadcock A. J. Investigation of low-speed turbulent separated flow around airfoils. *NASA-CR-177450*. 1987. P. 66.

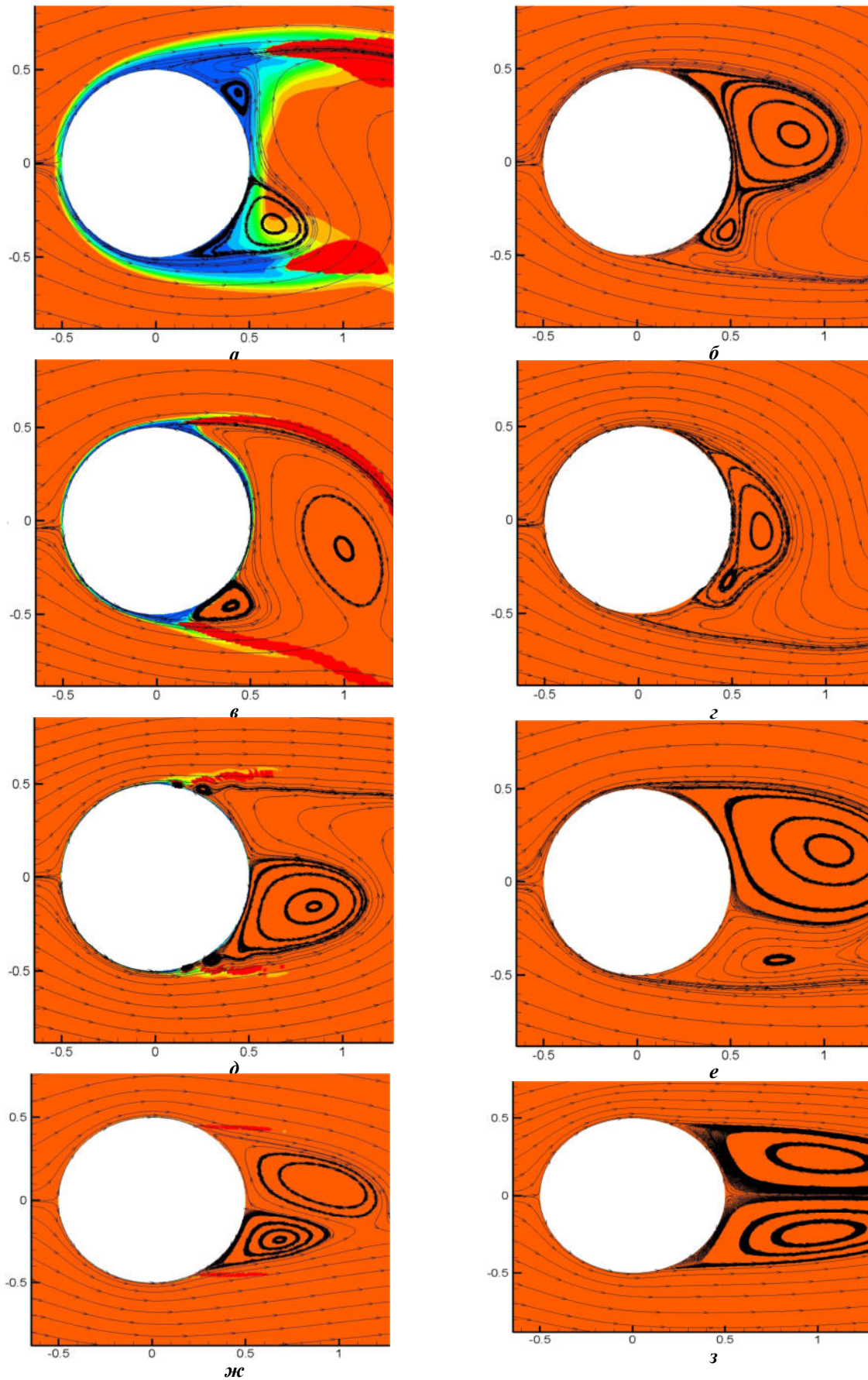


Рис 1. Контури переважаємості і лінії тока при обтекании цилиндра с моделью перехода (а, в, д, ж) и без нее (б, г, е, з) (а, б –  $Re = 10^3$ ; в, г –  $Re = 10^4$ ; д, е –  $Re = 10^5$ ; ж, з –  $Re = 10^6$ )



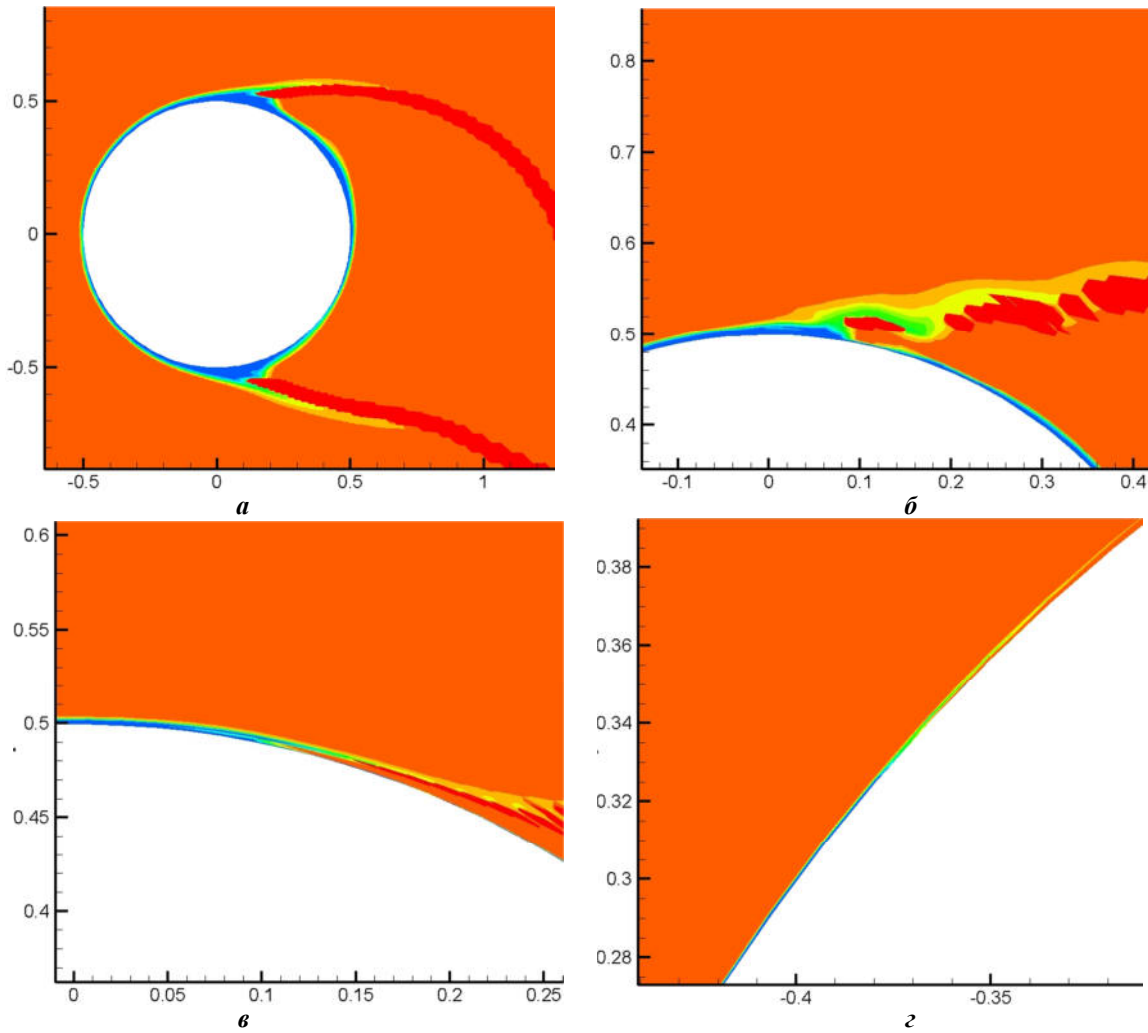


Рис 2 Контурные пережимаемости при обтекание цилиндра (а –  $Re = 10^4$ , б –  $Re = 10^5$ , в –  $Re = 10^6$ , г –  $Re = 10^7$ )

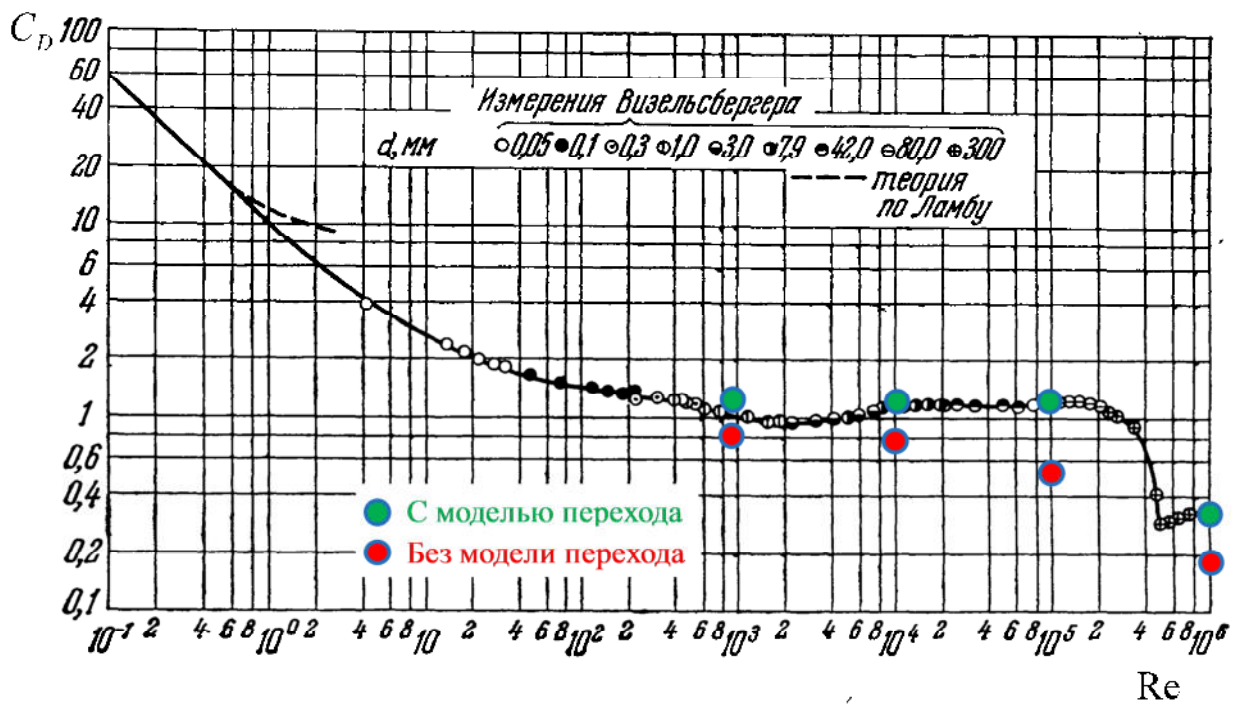


Рис 3. Зависимость коэффициента сопротивления цилиндра от числа Рейнольдса [6]

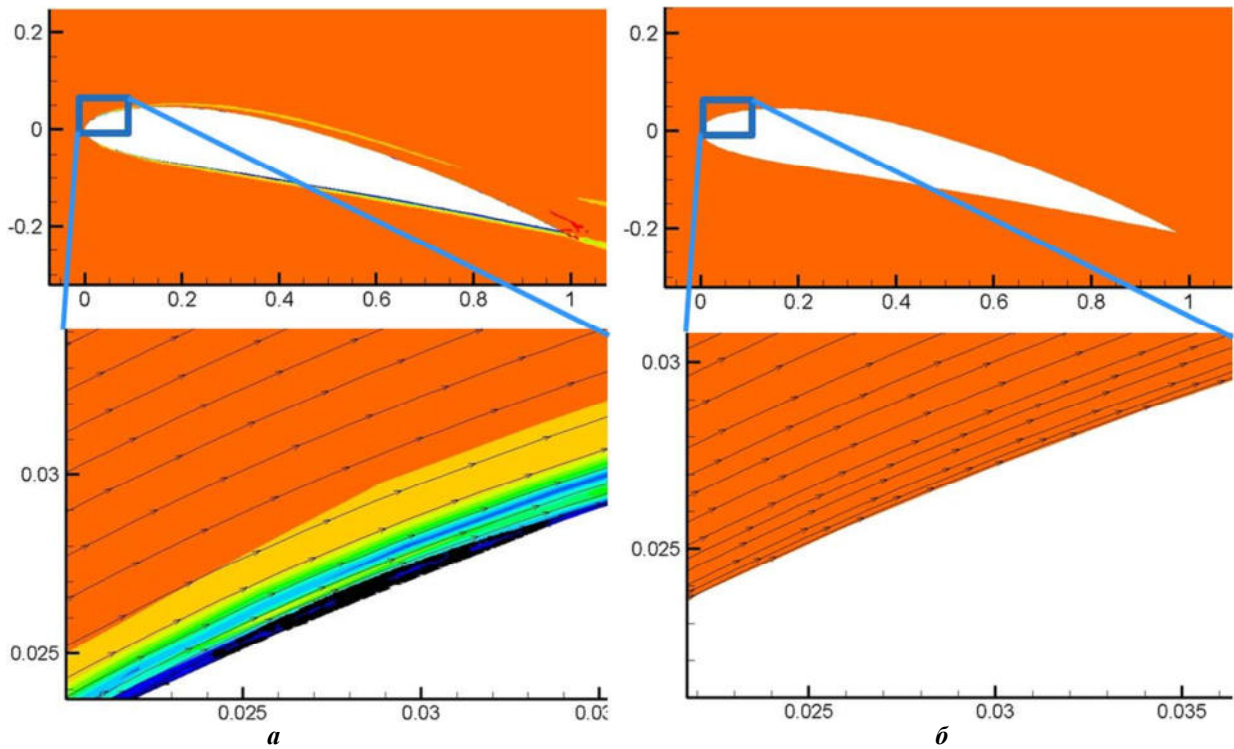


Рис 4. Контуры пережимаемости и линии тока при обтекании профиля NASA 4412 ( $\alpha = 12^\circ$ ) с моделью перехода (а) и без нее (б)

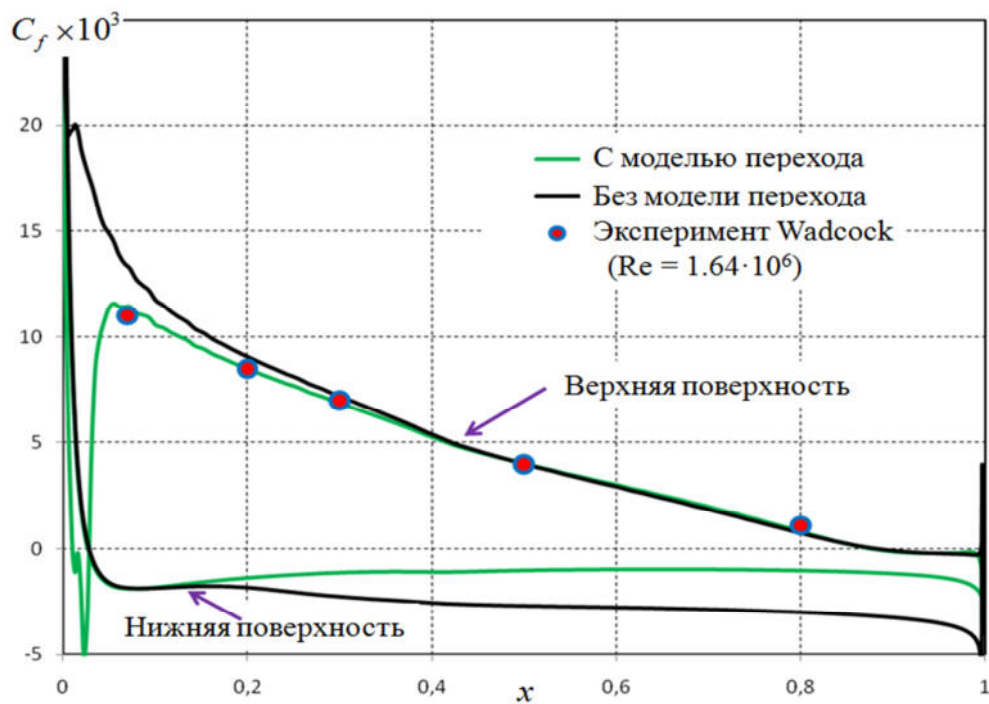


Рис 5. Распределение коэффициента трения по поверхности профиля NASA 4412 ( $\alpha = 12^\circ$ )

УДК 519.816

Н.К. ТИМОФІЄВА

Міжнародний науково-навчальний центр  
інформаційних технологій та систем НАН та МОН України

### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В КОМБІНАТОРНІЙ ОПТИМІЗАЦІЇ

*В статті наведено деякі види оптимізації та підходи до побудови математичних моделей прикладних задач. Існують неперервна, дискретна та комбінаторна оптимізації. В залежності від задач виділяють моделі динамічні, статичні, лінійні, нелінійні тощо. В загальній теорії математичного моделювання виділяють такі різновиди як індуктивне чи семантичне моделювання. Задачі комбінаторної оптимізації досить часто моделюють в рамках лінійного цілочислового програмування. Але цей підхід не відображає їхню комбінаторну природу та не дозволяє адекватно будувати математичні моделі задач цього класу. В роботі детально описано особливості моделювання задач комбінаторної оптимізації.*

*Ключові слова: комбінаторна оптимізація, математичне моделювання, цілочислове лінійне програмування, цільова функція, семантичне моделювання.*

Н.К. ТИМОФЕЕВА

Международный научно-учебный центр  
информационных технологий и систем НАН и МОН Украины

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

*В статье приведены некоторые виды оптимизации и подходы к построению математических моделей прикладных задач. Существуют непрерывная, дискретная и комбинаторная оптимизации. В зависимости от задач выделяют модели динамические, статические, линейные, нелинейные и др. В общей теории математического моделирования выделяют такие разновидности как индуктивное или семантическое моделирование. Задачи комбинаторной оптимизации довольно часто моделируют в рамках линейного целочисленного программирования. Но этот подход не отражает их комбинаторную природу и не позволяет адекватно строить математические модели задач этого класса. В работе подробно описаны особенности моделирования задач комбинаторной оптимизации.*

*Ключевые слова: комбинаторная оптимизация, математическое моделирование, целочисленное линейное программирование, целевая функция, семантическое моделирование.*

N.K. TYMOFIJEVA

International Scientific Training Center  
for Information Technologies and Systems

### MATHEMATICAL MODELING IN COMBINATORIAL OPTIMIZATION

**The purpose of the article.** To solve the problem, based on a detailed analysis of applied problems, a method for simulating combinatorial optimization problems is developed that maximally describes the combinatorial nature of the problems of this class.

**The content of the work.** In the article some types of optimization and approaches to the construction of mathematical models of applied problems are presented. There are incessant, discrete and combinatorial optimizations. Combinatorial optimization consists in the fact that the argument of the objective function is defined on a discrete set of combinatorial character, and this function is introduced on a combinatorial set whose elements are combinatorial configurations of different types (permutations, partitioning of elements of a given set into subsets, different types of samples, etc.). For find of optimal solution to this problem is inherent sort of options.

Depending on the problem, distinguish dynamic or static, linear, nonlinear models, etc. For modeling use the following varieties of general theory of mathematical modeling: inductive or semantic modeling. To this end, linear integer programming is often used. But the latter approach does not reflect their combinatorial nature and does not allow to adequately build mathematical models of problems of combinatorial optimization. In addition, by argument of the objective function accept input data (criteria). Based on this model, it is believed that the objective function in the combinatorial optimization depends on many variables. That is, these variables are elements of the combinatorial configuration, which represent the characters and multiply by the given numbers, which is impossible. In the problems of this class, the objective function depends on both one variable and many, and the argument of the objective function in them is combinatorial configurations of various types. The described approach can be used to reduction various application problems to problems of combinatorial optimization.

**Conclusions.** *The developed method of modeling applied problems using combinatorial optimization allows us to identify the characteristic properties of these problems, to formulate for them an adequate mathematical formulation, which makes it easy to develop new or use known algorithms for their effective solution.*

*Keywords: combinatorial optimization, mathematical modeling, integer linear programming, objective function, semantic modeling.*

### Постановка задачі

При моделюванні прикладних задач, які відносяться до задач комбінаторної оптимізації, досить часто використовують лінійне цілочислове програмування. Але цей підхід не відображає їхню комбінаторну природу та не дозволяє адекватно будувати математичні моделі. До того ж за аргумент цільової функції приймають вхідні дані (критерії). Тому для об'єктивного відображення комбінаторної природи задач цього класу використовуємо теорію комбінаторної оптимізації.

### Аналіз останніх досліджень та публікацій за темою

Для розробки математичних моделей задач комбінаторної оптимізації часто використовують цілочислове лінійне програмування. Цей підхід полягає у знаходженні оптимального значення цільової функції на множині, яка задається системою лінійних рівнянь і нерівностей, причому на змінні накладаються умови цілочисельності [1]. У задачах комбінаторної оптимізації оптимальне значення цільової функції знаходиться на множині комбінаторного характеру. Із цих двох тверджень випливає, що задача цілочислового лінійного програмування полягає в знаходженні множини змінних, для якої досягається оптимальний розв'язок, і яка не є комбінаторною конфігурацією. В цьому разі вважають, що цільова функція залежить від багатьох змінних. В комбінаторній оптимізації, як буде показано нижче, цільова функція залежить як від однієї змінної, так і від кількох, якими є комбінаторні конфігурації різних типів, а змінні в моделі цілочислового лінійного програмування є вхідними даними.

В математичній літературі ще в 70-х роках минулого століття переважно вченими з Радянського Союзу формальні постановки задач комбінаторної оптимізації розроблялися також і з урахуванням їхньої комбінаторної природи, наприклад [2, 3]. В цих постановках цільова функція залежить як від однієї так і багатьох змінних, якими є комбінаторні конфігурації певних типів.

### Формулювання мети дослідження

Для вирішення поставленої проблеми на основі детального аналізу прикладних задач розроблено метод моделювання задач комбінаторної оптимізації, який максимально описує комбінаторну природу задач цього класу.

### Про види оптимізації

Оптимізацію, як правило, розділяють на неперервну та дискретну. В неперервній пошук оптимуму проводиться на неперервних функціях. Дискретна оптимізація характеризується тим, що аргумент цільової функції – дискретний. Її розглядають в математичному програмуванні, дослідженні операцій. Для розв'язання цих задач використовують чисельні методи. Є інші види оптимізації такі як параметрична, яка в свою чергу розділяється на задачі без обмежень та з обмеженнями на параметр. Перші задачі називають задачами безумовної оптимізації, а другі – задачами математичного програмування (задачами умовної оптимізації).

Комбінаторна оптимізація полягає в тому, що аргумент цільової функції визначено на дискретній множині комбінаторного характеру, а цільова функція уводиться на комбінаторній множині, елементами якої є комбінаторні конфігурації різних типів (перестановки, розбиття  $n$ -елементної множини  $A$  на підмножини, різні типи вибірок тощо).

Нижче розглянемо комбінаторну оптимізацію, аргумент цільової функції в яких визначено на скінченній або нескінченній множині комбінаторного характеру.

### Метод моделювання задач комбінаторної оптимізації

Як відомо модель – це об'єкт-замінник, створений з метою відтворення за певних умов суттєвих властивостей об'єкта-оригіналу. Модель може бути представлена фізичним об'єктом, подібним до оригіналу, або описом об'єкта у вигляді математичних формул, тексту, комп'ютерної програми, тобто математичним моделюванням. В оптимізації модель формулюється як оптимізаційна задача. Виділяють такі види моделей: динамічні або статичні; детерміновані або стохастичні, неперервні, дискретні або



дискретно-неперервні, лінійні чи нелінійні, з розподіленими або зосередженими параметрами, аналітичні, імітаційні чи комп'ютерні, можливі і змішані типи.

В математичному моделюванні в залежності від прикладних задач виділяють інші різновиди моделювання, зокрема індуктивне та семантичне. Індуктивне моделювання – це метод автоматичної побудови оптимальних прогнозуючих моделей складних об'єктів та процесів на основі статистичних та експериментальних даних в умовах неповної та невизначеної інформації [4]. У теорії моделювання даних при проектуванні їхньої структури застосовується метод, який названо семантичним. Він полягає в моделюванні структури даних спираючись на їхній зміст що важливо для інтелектуалізації різних систем. яке дозволяє визначати глибше сутність певного об'єкта. Особливе місце в математичному моделюванні займає моделювання прикладних задач з використанням теорії комбінаторної оптимізації. Нижче розглянемо цей метод. Уточнимо такі поняття як критерій та цільова функція.

*Критерій* – ознаки або властивості, які характеризують певний об'єкт або зв'язки між об'єктами та є вхідними даними.

*Цільова функція* – вираз, який формулюється на основі заданих критеріїв з урахуванням особливостей задачі, за яким обчислюється та оцінюється результат її розв'язку.

Як правило, цільову функцію ототожнюють з критеріями, а за її аргумент приймають вхідні дані. Але для одних і тих же критеріїв цільову функцію можна змоделювати по-різному, тобто оцінка проводиться за різними виразами та одержується різний результат. До того ж вона може залежати як від однієї змінної так і від багатьох. За цією ознакою задачі комбінаторної оптимізації розділяються на підзадачі. В цьому разі для їхнього розв'язання розробляються гібридні алгоритми.

За способом обчислення цільової функції виділимо задачі, в яких для певного варіанту розв'язку її значення обчислюється одночасно. Такі задачі назвемо статичними. Задачі, в яких в процесі їхнього розв'язання генерується поточна інформація, за якою оцінюється результат, а пошук оптимального розв'язку проводиться поетапно з обчисленням часткових сум цільової функції, назвемо динамічними.

Для моделювання прикладних задач в рамках теорії комбінаторної оптимізації необхідно [5]: а) за способом обчислення цільової функції визначити вид задачі (статична або динамічна); б) визначити базові множини, якими задається певна задача; в) за вхідними даними визначити її тип; г) визначити аргумент цільової функції (комбінаторну конфігурацію); д) змоделювати цільову функцію.

#### Загальна математична постановка задачі комбінаторної оптимізації.

Задачі комбінаторної оптимізації, як правило, задаються на одній або кількох множинах, наприклад  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  та  $B = \{b_1, \dots, b_{\tilde{n}}\}$ , елементи яких мають будь-яку природу [5]. Назвемо ці множини *базовими*. Найвні два типи задач. В *першому* типі кожному з цих множин подамо у вигляді графа, вершинами якого є її елементи, а кожному ребру поставлено у відповідність число  $c_{lt} \in R$ , яке називають вагою ребра ( $R$  – множина дійсних чисел);  $l \in \{1, \dots, n\}$ ,  $t \in \{1, \dots, \tilde{n}\}$ ,  $n$  – кількість елементів множини  $A$ ,  $\tilde{n}$  – кількість елементів множини  $B$ . Покладемо, що  $n = \tilde{n}$ . Між елементами цих множин існують зв'язки, числове значення яких назвемо вагами. Величини  $c_{lt} \in R$  назвемо *вхідними даними* і задамо їх матрицями. В *другому* типі задач між елементами заданої множини зв'язків не існує, а вагами є числа  $v_j \in R$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , яким у відповідність поставлено деякі властивості цих елементів, числові значення яких задаються скінченними послідовностями, що також є вхідними даними. Ці величини визначають значення цільової функції.

Для обох типів задач із елементів однієї або кількох базових множин, наприклад  $a_l \in A$ ,  $l \in \{1, \dots, n\}$ , утворюється комбінаторна множина  $W$  – сукупність комбінаторних конфігурацій певного типу (перестановки, вибірки різних типів, розбиття тощо). На елементах  $w$  комбінаторної множини  $W$  вводиться цільова функція  $F(w)$ . Необхідно знайти елемент  $w^*$  множини  $W$ , для якого  $F(w)$  набуває екстремального значення при виконанні заданих обмежень.

Під комбінаторною конфігурацією розуміємо будь-яку сукупність елементів, яка утворюється з усіх або з деяких елементів заданої базової множини  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  [5]. Позначимо її впорядковану множиною  $w^k = (w_1^k, \dots, w_\eta^k)$ , де  $\eta \in \{1, \dots, n\}$  – кількість елементів у  $w^k$ ,  $W = \{w^k\}_1^q$  – множина комбінаторних конфігурацій. Верхній індекс  $k$  ( $k \in \{1, \dots, q\}$ ) у  $w^k$  позначає порядковий номер  $w^k$  у  $W$ ,  $q$  – кількість  $w^k$  у  $W$ .

Досить часто задачі цього класу моделюються в рамках цілочислового лінійного програмування. Математична модель цього підходу формулюється у такому вигляді. Знайти екстремум лінійної функції

$\sum_{i=1}^n c_i x_i$  при умовах  $\sum_{i=1}^n a_{il} x_i = b_l, l = \overline{1, m}, x_i \geq 0, i = \overline{1, n}, x_i - \text{цілі для } i = \overline{1, p}, p \leq n$ , де  $c_i, a_{il}, b_l$  – задані цілі числа,  $x_i$  – змінні.

Виходячи з цієї моделі вважають, що цільова функція в комбінаторній оптимізації залежить від багатьох змінних, а  $x_i$  є елементами комбінаторної конфігурації  $w = (w_1, \dots, w_n)$ , які перемножуються на задані числа  $c_i, a_{il}$ . Але це неможливо, оскільки  $w_i$  можуть мати будь-яку природу. Змінні  $x_i$  не є елементами  $w$ , а модель цілочислового лінійного програмування не відображає суті задач комбінаторної оптимізації. Цілочислове лінійне програмування розроблялося для економічних задач, для яких математична постановка формулюється так: задано одну множину  $A$ , елементи  $a_i \in A$  якої не мають між собою зв'язків. Натомість кожен елемент  $a_i \in A, i \in \{1, \dots, n\}$ , характеризується певною властивістю (вагою)  $x_i$ . Аргументом цільової функції у них, як правило, є вибірки (сполучення, розміщення), а вхідні дані – послідовність значень ваг  $x_1, \dots, x_n$  елементів  $a_i$  заданої множини  $A$ , кількість яких збігається з кількістю елементів у  $w$ . Звідси твердження, що аргументом цільової функції в цих задачах є послідовність вхідних даних  $x_1, \dots, x_n$ , а не комбінаторна конфігурація  $w = (w_1, \dots, w_n)$ . Відповідно вважають, що цільова функція в задачах комбінаторної оптимізації залежить від багатьох змінних. Послідовність  $x_1, \dots, x_n$  є вхідними даними певної задачі, а значення  $x_i$  неявно залежить від комбінаторної конфігурації  $w$ , тобто  $x_i(w)$ . Тоді постає проблема визначення цієї залежності в задачах комбінаторної оптимізації.

#### Моделювання вхідних даних функціями натурального аргументу

Для задання цільової функції в явному вигляді та зведення її до одного виразу для різних класів задач комбінаторної оптимізації вхідні дані змодельовано скінченними послідовностями. Значення ваг між елементами множин  $A$  та  $B$  (вхідні дані) задамо однією або двома симетричними або несиметричними матрицями  $C$  та  $Q(w^k), Q(w^k)$  – комбінаторна матриця (матриця транспозиції, матриця розподілення) [4]. Якщо значення ваг описуються однією матрицею  $C$ , то для визначення наявності зв'язків між елементами заданих множин для  $k$ -го варіанту розв'язку задачі уведемо симетричну або несиметричну  $(0,1)$ -матрицю  $Q(w^k)$ . Елемент  $g_{lt}(w^k) = 1$ , якщо між  $a_l \in A$  та  $b_t \in B$  або  $a_l \in A$  та  $a_t \in A$  для варіанту  $w^k$  існує зв'язок, і  $g_{lj}(w^k) = 0$  в іншому разі;  $g_{lt}(w^k) \in Q(w^k)$ . Елементи  $h$  наддіагоналей симетричної комбінаторної матриці  $Q(w^k)$  подамо комбінаторною функцією  $\beta(f(j), w^k) \Big|_1^m = (\beta_1(f(1), w^k), \dots, \beta_m(f(m), w^k))$ , а елементи  $h$  наддіагоналей симетричної матриці  $C$  – функцією натурального аргументу  $\varphi(j) \Big|_1^m = (\varphi(1), \dots, \varphi(m))$ , де  $m = \frac{n(n-1)}{2}$  – кількість елементів  $h$  наддіагоналей матриць  $C$  та  $Q(w^k), h = \overline{1, n-1}$ . Якщо матриці  $Q(w^k)$  і  $C$  – несиметричні, то  $\beta(f(j), w^k) \Big|_1^m$  та  $\varphi(j) \Big|_1^m$  містять усі їхні елементи, а  $m=n^2$  (або  $m = n \tilde{n}$ ). Для множини перестановок та підмножини ізоморфних комбінаторних конфігурацій цільову функцію, з допомогою якої проводиться кореляція вхідних даних та її аргументу запишемо в такому вигляді:

$$F(w^k) = \sum_{j=1}^m \beta_j(f(j), w^k) \varphi(j). \quad (1)$$

Нетотожні комбінаторні конфігурації  $w^k$  і  $w^i$  назовемо ізоморфними, якщо кількість елементів у них – однакова  $w^k \neq w^i, k, i \in \{1, \dots, q\}$ . Для задач розпізнавання уводяться міри подібності.

Наведемо прилади моделювання деяких задач комбінаторної оптимізації, в яких вхідні дані змодельовано функціями натурального аргументу.



### Приклади задач комбінаторної оптимізації та способи їхнього моделювання

Розглянемо прикладні задачі комбінаторної оптимізації, пошук оптимального розв'язку в яких проводиться на множині комбінаторних конфігурацій різних типів.

*Задача розміщення різногабаритних об'єктів.* На практиці ця задача виникає досить часто. Вона формулюється таким чином. Множину об'єктів, кожен з яких має різні розміри, необхідно розмістити на заданій поверхні так, щоб сумарна довжина зв'язків і площа, яку вони займають, були б мінімальними, а зазори між об'єктами дорівнювали заданій величині. Цю задачу можна звести до одногабаритної, використавши алгоритм компоновки (частковий випадок задачі кластеризації) базових елементів у кластери (об'єкти) з наступним їхнім розміщенням на поверхні. Вона відноситься до першого типу.

Задача розміщення різногабаритних об'єктів за аргументом цільової функції досить природно розділяється на такі підзадачі [3, 5]:

а) компоновка базових елементів в одногабаритні об'єкти; Змістовна її постановка така. Задано  $n$  базових елементів різних типів, між якими існують зв'язки. Необхідно ці елементи розподілити по кластерах так, щоб кількість зв'язків між останніми була б мінімальною, або кількість зв'язків між елементами, об'єднаними у кластери, була б найбільшою. Ця задача задається однією множиною  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ , між елементами якої існують зв'язки, причому  $a_l \in K^s$ ,  $s \in \{1, \dots, P\}$ ,  $l \in \{1, \dots, n\}$ ,  $K^s$  –  $s$ -й тип елемента  $a_l \in A$ ,  $P$  – кількість типів. Ваги між  $a_l, a_t \in A$ ,  $l \neq t$ , задамо симетричною матрицею  $C$  (функція  $\varphi(j) \Big|_1^m$ ). Для визначення розподілення елементів множини  $A$  по підмножинах  $w_t^k$  для  $k$ -го варіанту розв'язку задачі уведемо симетричну комбінаторну (0,1)-матрицю розподілення  $Q(w^k)$  (функція  $\beta(f(j), w^k) \Big|_1^m$ ). Елемент цієї матриці  $g_{lt}(w^k) = 1$ , якщо  $a_l$  і  $a_t$  належать до однієї підмножини (об'єкта), і  $g_{lt}(w^k) = 0$  в іншому випадку. З цього випливає, що цільова функція в цій задачі зводиться до виразу (1), а її аргумент – розбиття  $n$ -елементної множини  $A$  на підмножини.

б) Задача об'єднання найменших посадочних місць так, щоб в них розмістилися об'єкти, утворені розв'язанням задачі компоновки. Вона також відноситься до задач розбиття.

в) розміщення одногабаритних об'єктів на регулярному полі позицій. На поверхні з регулярною сіткою, яка виконує роль посадочних місць, необхідно розмістити задану множину об'єктів, що мають між собою зв'язки, таким чином, щоб сумарна довжина зв'язків була б мінімальною. Вона задається на двох множинах:  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ , елементи  $a_l$  якої відповідають об'єктам, які необхідно розмістити на заданій поверхні, та  $B = \{b_1, \dots, b_{\tilde{n}}\}$ , кожен елемент  $b_t$  якої визначає посадочне місце для розміщення  $a_l \in A$ ,  $n \leq \tilde{n}$ . Покладемо, що  $n = \tilde{n}$ . Зв'язки існують між  $a_l, a_t \in A$ , кількісне значення яких задамо симетричною матрицею  $C$  (відповідно функцією  $\varphi(j) \Big|_1^m$ ), та між елементами  $b_l, b_t \in B$ , значення яких опишемо комбінаторною симетричною матрицею транспозиції  $Q(w^k)$  або  $\beta(f(j), w^k) \Big|_1^m$ . В результаті, значення цільової функції зводиться до виразу (1), а її аргумент – перестановка.

Для вирішення кожної з цих підзадач розробляються незалежні алгоритми, які працюють як вбудовані процедури в ітераційному режимі, що характерно для гібридних алгоритмів. Оптимальний розв'язок знаходиться на декількох комбінаторних множинах. Цільова функція в цих підзадачах зводиться до виразу (1), а її аргументом є розбиття  $n$ -елементної множини  $A$  на підмножини, та перестановка.

*Задача про купу каміння.* Ця задача формулюється так. Задано множину каменів  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ , кожному з яких присвоєно додатне число – його вагу  $V_j$ . Необхідно розділити цю множину на  $d$  частин так, щоб вага самої важкої із куп була б найменшою.

Ця задача відноситься до другого типу і задається на одній множині  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ , але між  $a_l \in A$  відсутні зв'язки. Натомість вхідні дані задано скінченною послідовністю (функцією натурального аргументу)  $\varphi(j) \Big|_1^n$ , значення якої  $\varphi(j)$  визначають вагу  $j$ -го каменя. Аргументом цільової функції в ній є розбиття  $n$ -елементної множини  $A$  на підмножини.

Для знаходження розподілення елементів множини  $A$  по підмножинах  $w_t^k$  для  $k$ -го варіанту розв'язку задачі уведемо комбінаторну функцію  $\beta(f(j), w^k) \Big|_1^n = (\beta_1(f(1), w^k), \dots, \beta_n(f(n), w^k))$ , де  $\beta_j(f(j), w^k) \in \{0, 1\}$ , і  $\beta_j(f(j), w^k) = 1$ , якщо  $a_l$ -й елемент входить у

$w_t^k$  -у підмножину розбиття  $w^k$ , а  $\beta_j(f(j), w^k) = 0$  в іншому разі. Для підмножини  $w_t^k$  значення цільової функції обчислюється за виразом (1), а для  $w^k$  набуває такого вигляду

$$F(w^k) = \max_{\substack{w_t^k \subseteq w^k \\ t=1, \eta^k}} \left( \sum_{j=1}^n \beta_j(f(j), w_1^k) \varphi(j), \dots, \sum_{j=1}^n \beta_j(f(j), w_{\eta^k}^k) \varphi(j) \right).$$

Задача про купу каміння полягає у знаходженні такого  $w^{k*}$ , для якого цільова функція  $F(w^k)$  на підмножині  $W_{\eta^k} \subset W$  набуває найменшого значення, тобто  $F(w^{k*}) = \min_{w^k \in W_{\eta^k} \subset W} F(w^k)$ .

### Висновки

Розроблений метод моделювання прикладних задач з використанням комбінаторної оптимізації дозволяє виявити характерні властивості цих задач, сформулювати для них адекватну математичну постановку, завдяки якій нескладно розробляти нові або використовувати відомі алгоритми для їхнього ефективного розв'язання.

### Список використаної літератури

1. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность: Пер. с англ. Москва: Мир, 1985. 510 с
2. Сергиенко И.В., Каспицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. Киев: Наук. думка, 1981. 281 с.
3. Тимофеева Н.К. Вопросы разработки алгоритмического и программного обеспечения, предназначенного для решения одного класса задач конструкторского проектирования цифровой аппаратуры: автореф. дис... канд. физ.-мат. наук: 01.05.03. Киев, 1984. 24 с.
4. Ивахненко А.Г. Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем. Киев: Наук. Думка, 1982. 296 с.
5. Тимофієва Н.К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації: автореф. дис... докт. техн. наук: 01.05.02. Київ, 2007. 32 с.
6. Тимофеева Н.К. Зависимость целевой функции от нескольких переменных в задаче размещения объектов и ее решение методом структурно-алфавитного поиска. *Кибернетика и системный анализ*. 2013. № 2. С. 106 – 114.

### References

1. Papadimidriu X. Kombinatornaja optimizatsija. Algoritmy i slojnoct: Per. s angl. – Moskva: Mir, 1985. 510 s.
2. Sergienko I. V., Kasphtitzkaja M. F. Modeli i metodu reshenija na EVM kombinatornux zadath optimizatzi, Kiev: Nauk Dumka, 1981. 281 s.
3. Timofeeva N.K. Voprosy razrabotki algoritmitsheskogo i progrannogo obespethenija, prednaznathennogo dlja reshenuja odnogo klassa zadath konctruktorskogo proektirovanija shifrovo'j aparatury: avtoref. dys...kand. fiz.-mat. nauk 01.05.03. Kiev, 1984. 24 s.
4. Ivaxnenko A.G. Induktivny'j metod samoorganizatsiji modele'j slognux sistem. Kiev: Nauk Dumka, 1982. 296 s.
5. Tymofijeva N.K. Teoretyko-thyslovi metody rozvjazannja zadath kombinatorno'j optymizatsiji. avtoref. dys...dokt. texn. nauk, 01.05.02. Kyjiv, 2007. 32 s.
6. Timofeeva N.K. Zavisimost thelevo'j funkthiji ot neskolnix peremennyx v zadathe razmeshenija obektov i ee reshenie metodom strukturno-alfavitnogo poiska. *Kibernetika i sistemny'j analiz*. 2013. № 2. С. 106 – 114.

УДК 519.711

А.В. УСОВ, Ю.Є. СІКІРАШ  
Одеський національний політехнічний університет

### МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В ОБ'ЄКТАХ, ЩО ЗАЗНАЮТЬ ТЕПЛООВОГО ВПЛИВУ

*Розглянуто методи ідентифікації математичних моделей термомеханічних процесів в об'єктах, що зазнають теплового впливу. Пропонується математична модель, алгоритм вибору управляючих параметрів системи стабілізації теплофізичних процесів, що формуються в об'єктах при тепловому впливі. Вихідна математична модель з нелінійними параметрами, яка описує термомеханічні процеси в об'єктах, що зазнають теплового впливу, методом послідовних наближень зведена до ітераційного процесу, де на кожному кроці розв'язується задача, яка описується лінійним рівнянням параболічного типу з нелінійними фазовими обмеженнями. Наявність ідентифікаційної математичної моделі, що описує термомеханічні процеси при тепловому впливі на моделюючий об'єкт, дозволяє проектувати системи управління для отримання оптимальних характеристик оброблюваних поверхонь деталей машин.*

*Ключові слова: ідентифікація, математична модель, об'єкти з розподіленими параметрами, термомеханічні процеси, комп'ютерна підтримка.*

А.В. УСОВ, Ю.Е. СИКИРАШ  
Одесский национальный политехнический университет

### МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ОБЪЕКТАХ, ПОДВЕРЖЕННЫХ ТЕПЛООВОМУ ВОЗДЕЙСТВИЮ

*Рассмотрены методы идентификации математических моделей термомеханических процессов в объектах, подверженных тепловому воздействию. Предлагается математическая модель, алгоритм выбора управляющих параметров системы стабилизации теплофизических процессов, формирующихся в объектах при тепловом воздействии. Исходная математическая модель с нелинейными параметрами, описывающая термомеханические процессы в объектах, подверженных тепловому воздействию, методом последовательных приближений сведена к итерационному процессу, где на каждом шаге решается задача, описываемая линейным уравнением параболического типа с нелинейными фазовыми ограничениями. Наличие идентификационной математической модели, описывающей термомеханические процессы при тепловом воздействии на моделируемый объект, позволяет проектировать системы управления для получения оптимальных характеристик обрабатываемых поверхностей деталей машин.*

*Ключевые слова: идентификация, математическая модель, объекты с распределенными параметрами, термомеханические процессы, компьютерная поддержка.*

A.V. USOV, Yu.Ye. SIKIRASH  
Odessa National Polytechnic University

### METHODS OF IDENTIFICATION OF MATHEMATICAL MODELS OF THERMOMECHANICAL PROCESSES IN OBJECTS UNDER THERMAL INFLUENCE

*In this paper, we propose a mathematical model, an algorithm for choosing control parameters of the stabilization system for thermo physical processes that are formed in objects during thermal exposure. Methods for the identification of mathematical models of thermo mechanical processes in objects exposed to heat are considered. A one-dimensional mathematical model is proposed that describes the processes of heat conduction in solids, an algorithm for choosing control parameters of the stabilization system for thermal processes that are formed in objects during thermal exposure. The original mathematical model with nonlinear parameters describing thermo mechanical processes in objects exposed to heat by the method of successive approximations is reduced to an iterative process, where the problem described by a linear parabolic equation with nonlinear phase constraints is solved at each step. The model took into account restrictions on the maximum temperature in the surface layer, which should not exceed the temperature of structural transformations in the material of the surface layer. Considered the most important from a practical point of view, the case when the surface layer is not subjected to bending. The problem of optimal modeling of an object with restrictions on thermal stresses and on the highest temperature is reduced to solving a system of linear ordinary differential equations with*

restrictions on phase variables and control. A control was found which transforms the thermo mechanical state of the surface layer from the initial position to the specified final thermal position with a fixed accuracy in a minimum time.

In order to optimize the control of the thermo mechanical state of an object, the criteria for the quality of the object's surfaces with maximum thermal effects are included in the restrictive part of the identification model. The presence of an identification mathematical model describing the thermo mechanical processes during thermal effects on the object being simulated allows the design of control systems to obtain optimal characteristics of the machined surfaces of machine parts.

Keywords: identification, mathematical model, objects with distributed parameters, thermo mechanical processes, computer support.

### Постановка проблеми

Процеси в розподілених ланках об'єктів характеризуються, насамперед, числом змінних стану, що визначає порядок диференціального рівняння відносно змінної часу.

Розподілений об'єкт характеризується вимірністю, тобто числом геометричних координат, необхідних для повного опису процесу. При цьому потрібно мати на увазі, що хоча реальні фізичні об'єкти тривимірні, їх математичні моделі можуть мати меншу вимірність [1].

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Серед явищ, що супроводжують функціонування об'єкта з розподіленими параметрами, що зазнають теплового впливу, важливе місце займають термомеханічні процеси. Вони протікають у всіх без виключення елементах технологічної системи (металорізальному обладнанні; інструменті; парах, що труться; деталі, яка обробляється, і т.д.). Найбільше термомеханічні процеси впливають на рівень нагрівання елементів об'єкта та їх напружено-деформований стан [2,3,4].

Аналіз існуючих математичних моделей, які описують термомеханічні процеси в об'єктах, свідчить про відсутність відомостей про їх адекватність та ідентифікацію [5,6]. У зв'язку з розвитком технологій та систем, які визначають сучасні підходи до моделювання, аналізу та синтезу теплофізичних процесів в об'єктах з розподіленими параметрами, з'явилась можливість впровадження комп'ютерної підтримки питань, що розглядаються [7].

### Мета дослідження

Якість робочих поверхонь об'єктів, що зазнають теплового впливу, формується під дією термомеханічних явищ. Так, через високу теплонапруженість [2] деяких видів обробки або експлуатації, на оброблюваних поверхнях об'єктів формуються дефекти типу тріщин, структурних та фазових перетворень, що змінюють вихідну твердість. Будучи концентраторами напруженостей, вказані дефекти в процесі експлуатації призводять до передчасних відмовам механізмів. В деяких випадках їх наявність на робочих поверхнях важко навантажених виробів є критерієм браку.

Тому розробка математичних моделей термомеханічних процесів в об'єктах, що зазнають теплового впливу, їх ідентифікація у просторі станів та на їх основі розробка оптимальних критеріїв є актуальними.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Відомо, що при високотемпературному нагріванні теплофізичні параметри матеріалів, що нагріваються, (границя міцності —  $\sigma_{\text{в}}$ , коефіцієнт теплопровідності —  $\lambda$  та ін.) зазнають значних змін. Однак, з огляду на складність відповідних викладок, при дослідженні задач оптимального нагріву з фазовими обмеженнями, ці фактори, як правило, не беруться до уваги, або беруться до уваги частково, не повною мірою [3].

В цій роботі пропонується математична модель, алгоритм вибору управляючих параметрів системи стабілізації теплофізичних процесів, які формуються в об'єктах при тепловому впливі. Вихідна математична модель з нелінійними параметрами, яка описує термомеханічні процеси в об'єктах, що зазнають теплового впливу, методом послідовних наближень зведена до ітераційного процесу, де на кожному кроці розв'язується задача, яка описується лінійними рівняннями параболічного типу з нелінійними фазовими обмеженнями.

### Постановка задачі.

Процес нагрівання поверхневого шару об'єкта під температурним впливом описується наступними співвідношеннями [4]:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad x \in (0, l), t \in (0, \infty) \quad (1)$$

$$T(x, 0) = T^{\circ} = \text{const}, \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

$$\lambda(T) \frac{\partial T(l, t)}{\partial x} = \alpha [v(t) - T(l, t)], \quad t \in [0, \bar{t}], \quad 0 < \bar{t} < \infty, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = -\frac{q}{\lambda(T)}, \quad t \in [0, \bar{t}], \quad (4)$$

де  $T$  – температура ( $^{\circ}\text{C}$ );  $t$  – час;  $c$  – коефіцієнт теплоємності;  $\rho$  – густина;  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності;  $l$  – товщина поверхневого шару;  $x$  – просторова координата;  $\alpha$  – коефіцієнт теплообміну;  $v(t)$  – управління,  $v(t) \in V$ ,  $V = \{v = v(t) : v(t) \in L_2[0, \bar{t}]\}$ ;  $q$  – тепловий потік, що поступає на поверхневий шар.

В проміжку зміни температур  $[T_1, T_2]$  функція  $\lambda(T)$  додатна та має обмежену похідну по  $T$  завдяки теплофізичним властивостям матеріалу. Окрім того, припустимо, що в межах можливих значень робочих температур  $T \in [T_1, T_2]$  значення функції  $\lambda(T)$  визначаються виразом:

$$0 < \beta_1 \leq \lambda(T) \leq \beta_2. \quad (5)$$

За вказаних умов система рівнянь (1) – (4) при кожному фіксованому  $v(t) \in V$  має узагальнений розв’язок із простору  $V_2^{1,0}(\Omega_i)$ , де  $\Omega_i = \{(x, t) : x \in (0, l), t \in (0, \bar{t})\}$ .

За умовою задачі неприпустимо, щоб поверхневий шар під температурним впливом був нагрітий за межами пружно-пластичної зони деформації та втратив несучі властивості.

Зазвичай в об’єктах використовуються матеріали, що руйнуються при нагріванні крихко, без скільки-небудь помітних деформацій, або матеріали, які переходять під впливом термонапружень у пластичний стан.

Модель термопружності в квазістатичній постановці і в припущенні, що  $\alpha_T$  – коефіцієнт лінійного розширення та  $E$  – модуль пружності не залежать від температури, розв’язується аналітично [4, 5]. Аналіз термонапружень показує, що в умовах моделі, яка розглядається, розтягуючі напруження найбільших значень досягають на осі, а стисливі – на поверхні об’єкту, який нагрівається. Беручи до уваги вищезазначене, обмеження на термонапруження можна записати у вигляді [13]:

$$\frac{\alpha_T E}{1 - \psi} \left( -T(0, t) + \frac{1 + 3\Gamma}{l} \int_0^l T(\xi, t) d\xi - \frac{6\Gamma}{l^2} \int_0^l \xi T(\xi, t) d\xi \right) \leq \sigma_1[T(0, t)], \quad (6)$$

$$\frac{\alpha_T E}{1 - \psi} \left( T(l, t) - \frac{1 - 3\Gamma}{l} \int_0^l T(\xi, t) d\xi - \frac{6\Gamma}{l^2} \int_0^l \xi T(\xi, t) d\xi \right) \leq \sigma_2[T(l, t)], \quad (7)$$

де  $\sigma_1[T(0, t)] = \begin{cases} \sigma_p[T(0, t)] - \text{для крихких матеріалів,} \\ \sigma_{0,2}[T(0, t)] - \text{для пластичних матеріалів;} \end{cases}$

$\sigma_2[T(l, t)] = \begin{cases} \sigma_c[T(l, t)] - \text{для крихких матеріалів,} \\ \sigma_{0,2}[T(l, t)] - \text{для пластичних матеріалів;} \end{cases}$

$\psi$  – коефіцієнт Пуассона;  $\Gamma \in [0, 1]$  – параметр, що характеризує ступінь защемлення від повороту краю шару, що обробляється;  $\sigma_p(T)$ ,  $\sigma_c(T)$ ,  $\sigma_{0,2}(T)$  – границі міцності на розтягнення, стиснення та границя плинності відповідно.

Окрім виконання нерівностей (6) – (7), вимагатимемо, щоб у моделі враховувались обмеження на максимальну температуру у поверхневому шарі. Вона не повинна перевищувати, наприклад, температуру структурних перетворень  $T_s$  у матеріалі поверхневого шару, тобто:

$$T(l, t) \leq T_s. \quad (8)$$

Знайдемо управління  $v^\circ(t) \in V$ ,  $t \in [0, t^\circ]$ , що переводить за мінімальний час  $t^\circ$ ,  $0 < t^\circ < \bar{t}$ , термомеханічний стан поверхневого шару, який описується системою рівнянь (1) – (4), із початкового положення (2) у задане кінцеве теплове положення  $\bar{T}(x)$  з фіксованою точністю:

$$\int_0^l [T(x, t^\circ, v^\circ) - \bar{T}(x)]^2 dx \leq \varepsilon, \quad \varepsilon \geq 0,$$

так, щоб для всіх  $t \in [\varphi, t^\circ]$ ,  $\varphi = \text{const} > 0$ , виконувались нерівності (6) – (8).

Для розв’язання поставленої задачі скористуємось методом послідовних наближень [6]. В силу принципу максимуму [7]:



$$m \leq T(x, t) \leq M, \text{ де } M = \max \left\{ \max_{t \in [0, t]} v(t), T^\circ \right\}, \quad m = \min \left\{ \min_{t \in [0, t]} v(t), T^\circ \right\}. \quad (9)$$

Нехай

$$T_1 = m, \quad T_2 = M, \quad \lambda_0 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}. \quad (10)$$

Системі рівнянь (1) – (4) поставимо у відповідність наступний ітераційний процес:

$$c\rho \frac{\partial T_{k+1}}{\partial t} - \lambda_0 \frac{\partial^2 T_{k+1}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\lambda(T_k) - \lambda_0) \frac{\partial T_k}{\partial x} \right], \quad T_{k+1}(x, 0) = T^\circ, \quad x \in (0, l), \quad (11)$$

$$\lambda_0 \frac{\partial T_{k+1}}{\partial x} - \alpha[v(t) - T_{k+1}(x, t)] \Big|_{x=l} = [\lambda_0 - \lambda(T_k)] \frac{\partial T_k}{\partial x} \Big|_{x=l}, \quad \frac{\partial T_{k+1}}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{q}{\lambda(T_k)}. \quad (12)$$

Розв'язок задачі (1) – (4) будемо шукати як границю розв'язків задач (11) – (12) в просторі  $W_2^{1,0}(\Omega_i)$ .

Так як функція  $\lambda(T)$  додатна, задовольняє співвідношенню (5) та має обмежену по  $T$  похідну на відрізку  $[T_1, T_2]$ , то при будь-якому фіксованому управлінні  $v(t) \in V$  розв'язки  $T_{k+1}$  системи рівнянь (11) – (12) збігаються при  $k \rightarrow \infty$  до розв'язку системи (1) – (4) у нормі типу  $W_2^{1,0}$ .

Для зручності наступних викладок запишемо систему рівнянь (11) – (12) і обмеження (6) – (7) в безрозмірних одиницях [8]:

$$a_0 = \frac{\lambda_0}{c\rho}, \quad u = \alpha_T(v - T^\circ), \quad u^- = \alpha_T(v^- - T^\circ), \quad u^+ = \alpha_T(v^+ - T^\circ), \quad r = \frac{x}{l}, \quad \theta = \alpha_T(T - T^\circ),$$

$$\tau = \frac{a_0 t}{l^2}, \quad \sigma_1^* = \frac{(1-\psi)\sigma_1}{E}, \quad \sigma_2^* = \frac{(1-\psi)\sigma_2}{E}, \quad \theta_g = \alpha_T(T_{cp} - T^\circ), \quad \tilde{T} = \frac{a_0 \tilde{t}}{l^2}, \quad B_i = \frac{\alpha l}{\lambda_0}, \quad (13)$$

$$\tilde{\theta} = \alpha_T(\tilde{T} - T^\circ), \quad \frac{q}{\lambda_0} = q^*.$$

Вихідна задача (11) – (12) із врахуванням безрозмірних змінних (13) набуде вигляду:

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \theta_k}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left( \frac{\lambda \theta_{k-1}}{\lambda_0} - 1 \right) \frac{\partial \theta_{k-1}}{\partial r} \right], \quad r \in (0, 1), \quad \tau \in (0, \tilde{T}), \quad \theta_k(r, 0) = 0, \quad r \in [0, 1], \quad (14)$$

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial \tau} \Big|_{r=1} = B_i[u(\tau) - \theta_k(1, \tau)] + \frac{\lambda_0 - \lambda \theta_{k-1}}{\lambda_0} \frac{\partial \theta_{k-1}}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad \frac{\partial \theta_k}{\partial \tau} \Big|_{r=0} = q^*, \quad (15)$$

$$-\theta_k(0, \tau) + (1 + 3\Gamma) \int_0^1 \theta_k(\xi, \tau) d\xi + 6\Gamma \int_0^1 \xi \theta_k(\xi, \tau) d\xi \leq \sigma_1^*[\theta_k(0, \tau)], \quad (16)$$

$$\theta_k(1, \tau) - (1 - 3\Gamma) \int_0^1 \theta_k(\xi, \tau) d\xi - 6\Gamma \int_0^1 \xi \theta_k(\xi, \tau) d\xi \leq \sigma_2^*[\theta_k(1, \tau)]. \quad (17)$$

Обмеження на максимальну температуру відповідно матимуть вигляд:

$$\theta_k(1, \tau) \leq \theta_s. \quad (18)$$

Скориставшись скінченням інтегральним перетворенням Фур'є [9], запишемо розв'язок системи рівнянь (14) – (15) у вигляді ряду:

$$\theta_k(r, \tau, u) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n X_n^{(k)}(u, \tau) \cos(\mu_n r), \quad \text{де } D_n = \frac{2B_i}{(\mu_n^2 + B_i^2 + B_i) \cos(\mu_n)}; \quad (19)$$

$\mu_n \geq 0$  – корені рівняння  $B_i \cos(\mu_n) = \mu_n \sin(\mu_n)$ .  $X_n^{(k)}(u, \tau), n = 1, 2, \dots$  – компоненти вектора розв'язків нескінченної системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dX_n^{(k)}}{d\tau} = -\mu_n^2 X_n^{(k)} + \mu_n^2 (u + I_n^{(k-1)}), \quad X_n^{(k)}(0) = 0, \quad (20)$$

Нерівності (16) – (17) приймуть вигляд:



$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{in} X_n^{(k)} - e_i \leq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{де } C_{3n} = F_n = \frac{2B_i}{\mu_n^2 + B_i^2 + B_i}; \quad (21)$$

$$C_{2n} = F_n \left( 1 - \frac{6\Gamma}{\mu_n^2} - \frac{(1+3\Gamma)B_i}{\mu_n^2} + \frac{6\Gamma}{\mu_n^2 \cos(\mu_n)} \right); \quad (22)$$

$$C_{1n} = F_n \left( \frac{(1-3\Gamma)B_i - 6\Gamma}{\mu_n^2} - \frac{1}{\cos(\mu_n)} \left( 1 - \frac{6\Gamma}{\mu_n^2} \right) \right), \quad G \in [0, 1];$$

$$e_1 = \sigma_1 \sum_{n=1}^{\infty} D_n X_n^{(k)}, \quad e_2 = \sigma_2 \sum_{n=1}^{\infty} D_n X_n^{(k)} \cos(\mu_n), \quad e_3 = \theta_s.$$

Система функцій  $\{\cos(\mu_n r)\}$  ортогональна та повна у просторі  $L_2[0,1]$ . Тому для усіх  $r \in [0,1]$  для функції  $\tilde{\theta}(r)$  справедливе розвинення [10]:

$$\tilde{\theta}(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|\cos(\mu_n^r)\|^2} g_n \cos(\mu_n^r), \quad \text{де } g_n = \int_0^1 \tilde{\theta}(r) \cos(\mu_n^r) dr. \quad (23)$$

Сформулюємо скінченновимірну задачу оптимального управління. Для цього обмежимося у співвідношеннях (17), (18), (21) першими  $N$  членами і отримаємо [11]:

$$\frac{dx^N}{d\tau} = -A^N (X^N - I^N) + B^N u, \quad X^N(0) = 0_{RN}, \quad (24)$$

$$C^N X^N \leq E(x^N), \quad (25)$$

де  $(X^N - I^N) = (X_1^{(k)} - I_1^{(k-1)}, \dots, X_N^{(k)} - I_N^{(k-1)})$  –  $N$ -вимірний вектор-функція;  
 $A^N = \text{diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_N^2)$  – діагональна матриця  $N \times N$ ;  $B^N = (\mu_1^2, \dots, \mu_N^2)^T$ ,  $C^N$  – матриця  $3 \times N$  з елементами  $C_{in}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $n = \overline{1, N}$ ;  $E = (e_1(X^N), e_2(X^N), e_3(X^N))^T$ .

Таким чином, можна перейти до наступної скінченновимірної задачі.

Знайти управління  $u^N \in V$ , що переводить систему (24) за мінімальний час  $\tau^N \in (0, \tilde{T})$  із положення  $0_{RN}$  у множину  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|\cos(\mu_n^r)\|^2} \left( X_n^k \frac{\sin(\mu_n)}{\mu_n} - g_n \right)^2 \leq \varepsilon$ , при виконанні для усіх

$\tau^N \in [\varphi, \tau^N]$  обмежень (25). У праці [14] наведено алгоритм, який дозволяє розв'язувати аналогічні задачі незалежно від вимірності  $N$ .

Запишемо умови, за яких скінченновимірні наближення збігаються за функціоналом швидкодії. Будемо розглядати найбільш важливий з практичної точки зору випадок, коли поверхневий шар не піддається згинанню, тобто випадок  $\Gamma = 0$ .

Тоді задача оптимального моделювання об'єкта з обмеженнями на термонапруження та на найбільшу температуру зводиться до розв'язання системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{d\tau} = A(\tau)x + B(\tau)u + D(\tau), \quad \tau \in [0, T], \quad x(0) = x_0 \neq 0_{RN}, \quad (26)$$

з обмеженнями на фазові змінні та управління

$$F_i(x, u, \tau) \leq 0, \quad i = \overline{1, s}, \quad (27)$$

де  $x = x(\tau) = (x_1(\tau), \dots, x_N(\tau))$  –  $N$ -вимірний вектор;  $A(\tau), B(\tau), D(\tau)$  – відомі матриці вимірності відповідно  $(N \times N), (N \times 1), (N \times 1)$  з кусково-неперервними коефіцієнтами;  $u = u(\tau) \in U$  – управління,  $U = \{u(\tau) = (u_1(\tau), \dots, u_m(\tau))\} \in L_2^m[0, T]$ .

Функції  $F_i(x, u, \tau)$ ,  $i = \overline{1, s}$  – кусково-неперервні по  $\tau$ , опуклі за сукупністю змінних  $(x, u)$  та мають по цим змінним похідні, що задовольняють умові Лівшиця по  $(x, u)$ .

Шукане управління  $u^\circ(\tau) \in U$  переводить систему (26) із положення  $x_0$  у положення  $0_{RN}$  за мінімальний час  $\tau^\circ \in (0, T]$  так, що для усіх  $\tau \in [0, \tau^\circ]$  виконуються нерівності (27).

Згідно алгоритму [8] будемо послідовні оцінки знизу часу швидкодії  $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k \leq \tau^\circ$ .

У якості нормалі на кроці  $k$  рекомендується брати [10] антиградієнт функціоналу  $\rho(p, \tau_k)$ , що характеризує відстань від точки  $\theta_s$  до множини  $S(\tau_k)$ :

$$\rho(p, \tau_k) = \sum_{i=1}^S \int_0^T g_i(x(u, t), u(t), v_i(t), \tau_k) dt + \frac{1}{2} (x(u, \tau_k), x(u, \tau_k)) \quad (28)$$

Якщо  $\tau_k < \tau^\circ$ , то напрям нормалі визначається за формулою:

$$l_k = (-1_{L_2[0, T]} - \tilde{x}(\tau_k)) \quad (29)$$

де  $\tilde{x}$  знаходиться із розв'язку задачі  $P(\tilde{p}, \tau_k) = \inf\{\rho(p, \tau_k) : p \in S(\tau_k)\}$ .

### Результати.

Мінімізація функціоналу (28) забезпечується, якщо на  $k$ -ій ітерації у скінченний момент часу  $\tau_k^\circ$  виконуються нерівності:

$$\frac{\|x(u, \tau_k^\circ)\|}{\|x_0\|} \leq \varepsilon_1, \quad \theta_k = \theta(u_k, \tau_k) = \sum_{i=1}^3 \int_0^{\tau_k^\circ} [\max\{F_i(x(u_k, t), u_k, t), 0\}]^2 dt < 0, 1\varepsilon\tilde{\sigma} = \varepsilon_2, \quad (30)$$

де  $\tilde{\sigma} = \frac{\tilde{\theta} + \tilde{\sigma}_p + \tilde{\sigma}_c}{3}$  – середнє значення величин  $\tilde{\theta}, \tilde{\sigma}_p, \tilde{\sigma}_c$ .

Реалізація наведеного алгоритму забезпечує існування  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \tau^\circ$  при будь-яких  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , залежних від номера  $k(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  таких, що при  $k > k(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$   $\|x(u_k, \tau_k)\|_{RN} < \varepsilon_1$ ,

$\sum_{i=1}^S \int_0^{\tau_0} [\max\{F_i(x(u_k, t), u_k, t), 0\}]^2 dt < \varepsilon_2$ ,  $u^\circ(\tau) = \lim\{u_k(\tau)\}$  оптимального управління.

Для оптимізації управління термомеханічним станом об'єкту необхідно в обмежувальну частину ідентифікаційної моделі внести критерії якості оброблюваних поверхонь об'єкту при максимальних показниках теплового впливу [12].

### Висновки

Наявність ідентифікаційної математичної моделі, що описує термомеханічні процеси при тепловому впливі на моделюючий об'єкт, дозволяє проектувати системи управління для отримання оптимальних характеристик оброблюваних поверхонь деталей машин.

### Список використаної літератури

1. Воронов А.А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. Москва: Наука, 1979. 336 с.
2. Макаров А.Д. Оптимизация процессов резания. Москва: Машиностроение, 1976. 278 с.
3. Якимов А.В., Усов А.В., Слободяник П.Т. Теплофизика механической обработки. Киев: Лыбидь, 1991. 240 с.
4. Вигак В.М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. Киев: Наук. думка, 1988. 313 с.
5. Усов А.В., Дубров А.Н., Дмитришин Д.В. Моделирование систем с распределенными параметрами. Одесса: Астропринт, 2002. 664 с.
6. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. Москва: Физматгиз, 1963. 254 с.
7. Ладыженская О.А. Соломников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва: Наука, 1967. 736 с.
8. Голицhev И.И. Решение некоторых задач для параболических уравнений методом последовательных приближений. Уфа: ВНИЦ Уро АН СССР, 1989. 172 с.
9. Снеддон И. Преобразования Фурье. Москва: ИЛ, 1955. 540 с.
10. Кириh Н.Е. Последовательные оценки экстремалей управляемых динамических систем. Ленинград: ЛГУ, 1975. 160 с.
11. Морозкин Н.Д. О сходимости конечномерных приближений в задаче оптимального нагрева. Журнал

- вычислительной математики и математической физики.* 1996. № 10, т.36. С. 10-22.
12. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. Москва: Наука, 1980. 518 с.
  13. Бурак Я.И., Подетригач Я.С. Оптимизация нагрева пластин и оболочек. Киев: Наук. думка, 1979. 364 с.
  14. Веремей Е.И. Линейные системы с обратной связью: учебное пособие. Санкт-Петербург: Лань, 2013. 448 с.

#### References

1. Voronov, A.A. (1979) Ustoychivost, upravlyaemost, nablyudaemost. Moscow: Nauka.
2. Makarov, A.D. (1976) Optimizatsiya protsessov rezaniya. Moscow: Mashinostroyeniye.
3. Yakimov, A.V., Usov, A.V., Slobodianik P.T. (1991) Teplofizika mehanicheskoy obrabotki. Kiev: Lybid.
4. Vigak, V.M. (1988) Upravlenie temperaturnymi napryazheniyami i peremescheniyami. Kiev: Nauk. dumka.
5. Usov, A.V., Dubrov, A.N., Dmitrishin, D.V. (2002) Modelirovanie sistem s raspredelennymi parametrami. Odessa: Astroprint.
6. Parkus, G. (1963) Neustanovivshiesya temperaturnye napryazheniya. Moscow: Fizmatgiz.
7. Ladyzhenskaya, O.A. Solomnikov, V.A., Uraltseva, N.N. (1967) Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa. Moscow: Nauka.
8. Golichev, I.I. (1989) Reshenie nekotorykh zadach dlya parabolicheskikh uravneniy metodom posledovatelnykh priblizheniy. Ufa: VNTS Uro AN SSSR.
9. Sneddon, I. (1955) Preobrazovaniya Fure. Moscow: IL.
10. Kirin, N.E. (1975) Posledovatelnyye otsenki ekstremaley upravlyayemykh dinamicheskikh sistem. Leningrad: LGU.
11. Morozkin, N.D. (1996) O skhodimosti konechnomernykh priblizheniy v zadache optimalnogo nagreva. *Zhurnal vyichislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki.* **36**, 10, pp. 10-22.
12. Vasilev, F.P. (1980) Chislennyye metodyi resheniya ekstremalnykh zadach. Moscow: Nauka.
13. Burak, Ya.I., Podetrigach, Ya.S. (1979) Optimizatsiya nagreva plastin i obolochek. Kiev: Nauk. dumka.
14. Veremey, E.I. (2013) Lineynyye sistemyi s obratnoy svyazyu: uchebnoye posobie. Sankt-Peterburg: Lan.

УДК 004.896

О. В. ЧОПОРОВА, С. В. ЧОПОРОВ, А. О. ЛІСНЯК  
Запорізьки національний університет

## ВИКОРИСТАННЯ МАШИННОГО НАВЧАННЯ ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КВАДРАТНОЇ ПЛАСТИНКИ

*Розглянуто особливості використання методів машинного навчання для прогнозування напружено-деформованого стану квадратної пластинки. Тестову вибірку, яка містить можливі стани пластинки у залежності від геометричних і фізико-механічних параметрів, побудовано з використанням аналітичних формул і методу скінченних елементів. Для машинного навчання використано методи бібліотек мови програмування Python: sklearn і keras. Побудовано моделі навчання на базі штучних нейронних мереж. Побудовані моделі дозволяють прогнозувати прогин у центрі пластинки, а також максимальне значення інтенсивності напружень за Мізесом.*

*Ключові слова: машинне навчання, штучна нейронна мережа, напружено-деформований стан, пластинка, прогнозування, регресія.*

О. В. ЧОПОРОВА, С. В. ЧОПОРОВ, А. А. ЛІСНЯК  
Запорізький національний університет

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КВАДРАТНОЙ ПЛАСТИНКИ

*Рассмотрены особенности использования методов машинного обучения для прогнозирования напряженно-деформированного состояния квадратной пластинки. Тестовая выборка, которая содержит возможные состояния в зависимости от геометрических и физико-механических параметров, построена с использованием аналитических формул и метода конечных элементов. Для машинного обучения использованы методы библиотек языка программирования Python: sklearn и keras. Построенные модели обучения на базе искусственных нейронных сетей, которые позволяют прогнозировать прогиб в центре пластинки, а также максимальное значение интенсивности напряжений по Мизесу.*

*Ключевые слова: машинное обучение, искусственная нейронная сеть, напряженно-деформированное состояние, пластинка, прогнозирование, регрессия.*

О. V. CHOPOROVA, S. V. CHOPOROV, A. O. LISNIAK  
Zaporizhzhia National University

## USING MACHINE LEARNING TO PREDICT THE STRESS-STRAIN STATE OF A SQUARED PLATE

*This article is devoted to prediction the stress-strain state of a squared plate using machine learning. The article shows how to using machine learning calculate the deflection and the von Mises stress of a clamped, square isotropic plate with uniform load.*

*The dataset has been generated using the analytical formula and the finite element model. Input parameters of the data set are following: size of plate's side, thickness of the plate, Young's modulus, Poison's coefficient, and pressure load. Initial parameters have been random generated. The analytical formula allows to calculate the maximum deflection of the plate. At the same time, the finite element model evaluates all quantities of the stress-strain state of the plate. Hence, output parameters are following: calculated using analytical formula maximum deflection, calculated using FEM maximum deflection, minimum and maximum rotations of a normal, principal and shear stresses, von Mises stress.*

*Initially, sklearn' regressors have been employed to predict the maximum deflection of a plate using the analytically calculated value of deflection. Regressors have been benchmarked using 700 records for learning and 300 records for testing. The best accuracy has been obtained with Extra-trees regressor.*

*Next, artificial neural network model (the ANN model) has been developed to predict the maximum deflection of a plate using the analytically calculated value of deflection. The ANN model consists of the inner layer with 5 neurons, 5 inner layers (5 neurons per layer) and outer layer with 1 neuron. The training set includes 700 of random selected records from the dataset. Benchmarks of the ANN model allows to conclude that the most suitable at the regression problem are the Adam optimizer and the hyperboloid tangent activation function.*

*Finally, artificial neural network model has been developed to predict the maximum deflection and von Mises Stress of a plate using corresponding values of the FEM model. Benchmarks of the ANN model showed that 11 inner layers with at least 7 neurons per layer are the most suitable to predict the maximum deflection and von Mises Stress at the same time.*

*Keywords: machine learning, artificial neural network, stress-strain state, plate, prediction, regression.*

### **Постановка проблеми**

Автоматизоване проектування об'єктів сучасної техніки пов'язане з необхідністю швидкого прогнозування їх стану або поведінки у залежності від геометричних і/або фізико-механічних параметрів. Класичні методи математичного моделювання дозволяють робити такі прогнози з необхідною точністю. Проте підготовка адекватних математичних моделей та проведення відповідних обчислювальних експериментів можуть бути тривалими за часом. Можливою альтернативою є розробка методів і моделей машинного навчання, які дозволять робити швидкі оцінки необхідних параметрів стану об'єкту. З практичної точки зору моделі машинного навчання для прогнозування значень параметрів стану конструкції можуть слугувати як інтерактивні асистенти у процесі проектування.

Задачу прогнозування параметрів стану об'єкта за його геометричними та фізико-механічними параметрами можна віднести до класу задач регресії. У запропонованій до Вашої уваги роботі на прикладі прогнозування напружено-деформованого стану затисненої за периметром квадратної пластинки з ізотропного матеріалу, яка знаходиться під дією рівномірно розподіленого по поверхні поперечного тиску, досліджено моделі машинного навчання та можливі реалізації цих моделей засобами бібліотеки Keras мови програмування Python [1].

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Останнім часом зі зростанням популярності штучних нейронних мереж збільшується кількість досліджень щодо розробки моделей та застосування їх можливостей у задачах механіки деформованого твердого тіла. Наприклад, у роботах [2–4] досліджено можливості машинного навчання для розв'язання задач механіки руйнування. Зокрема, у роботі [2] для навчання нейронної мережі прогнозувати можливі зони руйнування балок використано дані 64 обчислювальних експериментів та 3 натурних. У роботі [3] розроблено нейронну мережу, яка базується на фільтрі Калмана (англ. Kalman filter), для прогнозування руйнування швидкісної дороги на мосту шляхом обробки даних про температуру та коливання. У роботі [4] для прогнозування руйнування за даними про вібрації розроблено модель на основі самоорганізаційної карти Кохонена (англ. Self-organizing map).

У роботі [5] досліджено можливості нейронних мереж для прогнозування максимальних переміщень у залізничних балках. Модель нейронної мережі побудовано як функцію двох змінних: фрикційного параметру та швидкості навантаження. Для навчання використано 663 точки, що дозволило отримати максимальну похибку відносно скінченно-елементної моделі у 5,4%.

Модель нейронної мережі для прогнозування критичного навантаження (у контексті втрати стійкості) двотаврової балки з отворами розроблено у роботі [6]. Розроблена модель враховує сім геометричних параметрів і дозволяє обчислити критичне навантаження з точністю у межах від 3,7% до 0,4% за час, менший однієї мілісекунди.

Спосіб підвищення точності та ефективності обчислення функцій обмежень у задачах оптимального проектування конструкцій на базі апроксимації похибки розв'язання системи диференціальних рівнянь запропоновано у роботі [7]. Модель нейронної мережі використовується для обчислення похибки аналітико-чисельного алгоритму обчислення довговічності балочної конструкції відносно скінченно-елементного рішення.

Покроковий алгоритм донавчання нейронної моделі, який дозволяє розв'язувати задачі динаміки будівельних конструкцій, розроблено у роботі [8]. Розроблений алгоритм дозволяє прогнозувати напружено-деформований стан конструкції, яка знаходиться під дією тривалого або короткочасного навантаження.

Для розв'язання задач проектування також використовують генетичні алгоритми. Наприклад, у роботі [9] для оптимального проектування будівельних конструкцій. У роботі [10] запропоновано метод розв'язання нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, який застосовує генетичні алгоритми для знаходження оптимальних значень параметрів наближених розв'язань. Проте його практичне застосування пов'язане з необхідністю емпіричного підбору деяких параметрів та великою кількістю ітерацій для отримання прийнятного результату.

Отже, аналіз останніх досліджень і публікацій дозволяє зробити висновок про актуальність розробки моделей на базі нейронних мереж для прогнозування напружено-деформованого стану. Можливості нейронних мереж для прогнозування стану оболонкових конструкцій потребують дослідження.

### Мета дослідження

Мета дослідження – розробка штучної нейронної мережі для прогнозування напружено-деформованого стану затисненої за периметром квадратної пластинки із ізотропного матеріалу, яка знаходиться під дією рівномірно розподіленого по поверхні поперечного тиску.

Об'єкт дослідження – напружено-деформований стан квадратної пластинки із ізотропного матеріалу, яка знаходиться під дією рівномірно розподіленого по поверхні поперечного тиску.

Предмет дослідження – методи і моделі машинного навчання для регресійного аналізу.

Задачі дослідження:

- 1) розробити алгоритм формування вибірки для навчання та тестування моделей;
- 2) дослідити можливості бібліотеки sklearn для регресійного аналізу і прогнозування максимального прогину пластинки;
- 3) розробити нейронну мережу для прогнозування максимального прогину пластинки;
- 4) розробити нейронну мережу для прогнозування максимальних значень прогину та інтенсивності напружень за Мізесом у пластинці.

### Викладення основного матеріалу дослідження

#### 1. Алгоритм побудови вибірки для навчання та тестування моделей

Максимальний прогин (у центрі) квадратної пластинки із ізотропного матеріалу, що знаходиться під дією рівномірно розподіленого по поверхні поперечного тиску, сторони якої жорстко затиснені, обчислюється за допомогою відомої аналітичної формули:

$$w_{\max} = 0,00126 \cdot q \cdot a^4 \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3}, \quad (1)$$

де  $q$  – значення тиску;  $a$  – розмір сторони пластинки;  $h$  – її товщина;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $E$  – модуль Юнга.

Математичну модель пластинки довільної форми можна отримати з використанням теорії Тимошенко-Міндліна (теорія зсувних деформацій першого порядку). Енергія деформацій скінченного елемента об'єму  $V_e$ , серединна площина якого збігається з  $xOy$ , має вигляд:

$$U_p = \frac{1}{2} d_e^T \int_{V_e} (z^2 B_f^T D_f B_f) dV_e d_e + \frac{\kappa}{2} d_e^T \int_{V_e} (B_c^T D_c B_c) dV_e d_e, \quad (2)$$

де  $d_e^T = \{w_1 \theta_{x1} \theta_{y1} \dots w_m \theta_{xm} \theta_{ym}\}$  – вектор узагальнених переміщень ( $w$  – прогин серединної площини,  $\theta_x, \theta_y$  – обертання нормалі серединної площини відносно відповідних осей координат);  $B_f$  і  $B_c$  – матриці зв'язків між переміщеннями та деформаціями;  $D_f$  і  $D_c$  – матриці зв'язків між напруженнями та деформаціями; параметр  $\kappa$  – коефіцієнт, що враховує нерівномірність розподілу дотичних напружень у перерізі (для ізотропного матеріалу  $\kappa = 5/6$ );  $m$  – кількість вузлів у скінченному елементі. Матриці  $B_f$  і  $B_c$  для ізотропного матеріалу мають вигляд:

$$B_f = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial y} & \frac{\partial N_m}{\partial x} \end{bmatrix},$$

$$B_c = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & N_1 & 0 & \dots & \frac{\partial N_m}{\partial x} & N_m & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & N_1 & & \frac{\partial N_m}{\partial y} & 0 & N_m \end{bmatrix},$$

де  $N_i$  – функція форми  $i$ -го вузла скінченного елемента.

Матриці  $D_f$  і  $D_c$  відповідають плосконапруженому стану та мають такий вигляд:

$$D_f = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad D_c = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix},$$



де  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $G$  – модуль зсуву. Після інтегрування (2) по товщині отримаємо таку формулу для матриці жорсткості:

$$K_{ep} = \frac{h^3}{12} \int_{\Omega_e} (B_f^T D_f B_f) d\Omega_e + \kappa h \int_{\Omega_e} (B_c^T D_c B_c) d\Omega_e, \quad (3)$$

Загальний алгоритм побудови вибірки для навчання та тестування таких.

1. Згенерувати випадкові значення параметрів  $a, h, E, \nu$  і  $q$  у діапазонах можливих значень. Діапазон можливих значень необхідно обрати виходячи із фізичного смислу та обмежень теорій і методів, що використані для побудови математичних моделей. Наприклад,  $0,4 \leq a \leq 1,6$  (м),  $0,01 \leq h \leq 0,1$  (м),  $10^5 \leq E \leq 3 \cdot 10^5$  (МПа),  $0 \leq \nu \leq 0,45$ ,  $0,01 \leq q \leq 0,1$  (МПа).

2. Обчислити значення максимального прогину  $w_{\max}$  за допомогою формули (1).

3. Якщо  $10^{-5} < w_{\max}$ , то обчислити компоненти напружено-деформованого стану за допомогою методу скінченних елементів на базі формули (3) для локальної матриці жорсткості; перейти до наступного кроку. Інакше перейти на крок 1.

4. Зберегти значення параметрів  $a, h, E, \nu$  і  $q$ , максимального прогину  $w_{\max}$  і компоненти напружено-деформованого стану у csv-файл. Перейти на крок 1.

## 2. Прогнозування максимального прогину пластинки з використанням регресорів бібліотеки sklearn

Дерева рішень у машинному навчанні відображають представлені гілками дерева дані про об'єкт на множині рішень. При регресійному аналізі значення, що отримуються у результаті побудови дерев, усереднюють. Водночас кожне дерево будеться, зазвичай, на маленькій підмножині навчальної множини. У бібліотеці sklearn реалізовано різні алгоритми регресійного аналізу з використання дерев рішень. Як тестові розглянемо такі алгоритми: AdaBoost, Bagging, Extra-trees і Gradient boosting.

Для машинного навчання вихідну множину значень розділяють на дві частини: навчальну і тестову. Навчальна частина складається зі значень вхідних параметрів, які використовуються алгоритмом для побудови дерев. Тестова частина, зазвичай, менша за навчальну, її значення використовуються для перевірки (у випадку регресійного аналізу) точності навчання. Точність регресійного аналізу, зазвичай, оцінюють шляхом обчислення середнього квадратичного відхилення значень, обчислених для тестової частини у результаті машинного навчання, від вихідних значень.

Першим кроком регресійного аналізу є завантаження даних із csv-файлу і розділення його на вектори вхідних і вихідних параметрів за допомогою бібліотеки Pandas (у прикладі нижче вхідними параметрами є  $a, h, E, \nu$  і  $q$ , а вихідним – значення максимального прогину  $w_{\max}$ , обчислене за допомогою аналітичної формули):

```
data = pandas.read_csv('./data/fixed_square_plate.csv', delimiter=',')
X = pandas.DataFrame(data, columns=['a', 'h', 'E', 'nu', 'q'])
y = pandas.DataFrame(data, columns=['analytical'])
```

Далі необхідно нормалізувати вхідні та вихідні дані:

```
x_scalar = StandardScaler()
x_scalar.fit(X)
X = x_scalar.transform(X)
y_scalar = StandardScaler()
y_scalar.fit(y)
y = y_scalar.transform(y)
```

Наступним кроком нормалізована множина даних розбивається на навчальну та тестову підмножини (параметр `test_size` визначає долю вихідної множини, яка відповідає тестовій підмножині):

```
X_train, X_test, y_train, y_test = train_test_split(X, y, test_size=0.3,
random_state=31)
```

Останнім кроком є створення екземпляра алгоритму регресії (`n_estimators` – кількість дерев у апроксимації):

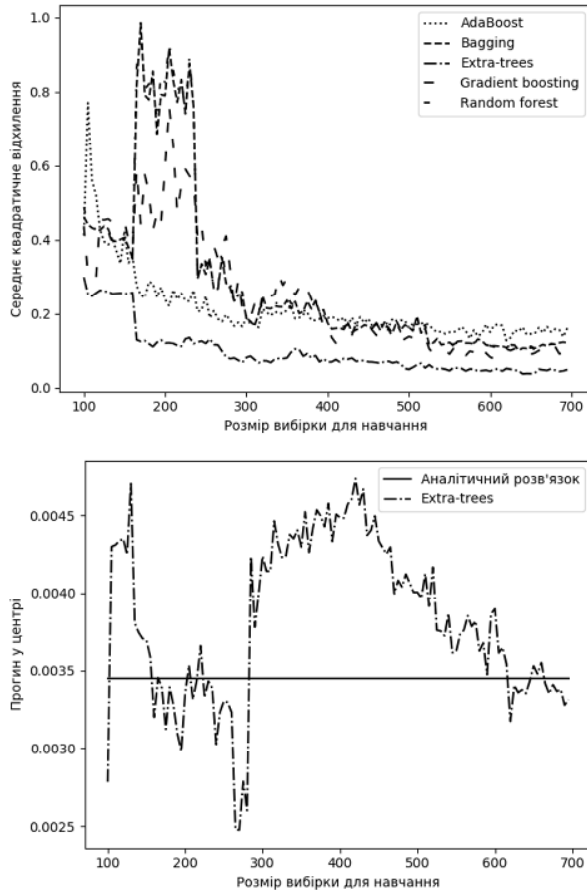
```
etr = ExtraTreesRegressor(n_estimators=350, random_state=31)
```

Для навчання на тестовій підмножині використовується метод `fit`:

```
etr.fit(X_train, y_train)
predicted = etr.predict(X_test)
```

Для регресійного аналізу прогину квадратної пластинки можна використати вибірку, що містить результати 1000 обчислювальних експериментів. Якщо цю вибірку розбити на дві частини (навчальну та тестову) у пропорції 7:3, то результат регресійного аналізу з використанням регресорів бібліотеки sklearn матиме вигляд, наведений на рис. 1. Найменше середнє квадратичне відхилення значень, обчислених за допомогою алгоритму регресії, від значень прогину у тестовій підмножині отримано при виборі алгоритму Extra-trees.

На рис. 1, б порівнюються значення, обчислені за допомогою алгоритму Extra-trees, із значенням обчисленим формулою (1) для алюмінієвої пластинки з такими параметрами:  $a=1$  м,  $h=0,01$  м,  $E=203200$  МПа,  $\nu=0,27$ ,  $q=0,05$  МПа.



а

б

Рис. 1. Порівняння алгоритмів регресійного аналізу

Отже, при використанні менше 500 значень для навчання алгоритму Extra-trees похибка може складати 30%, а при використанні більше 600 значень похибка приблизно 15%.

### 3. Модель нейронної мережі для прогнозування максимального прогину пластинки

Для прогнозування прогину пластинки мережа штучних нейронів повинна складатися з декількох шарів. Перший шар (зовнішній) повинен мати кількість нейронів, яка дорівнює кількості вхідних параметрів. Останній шар (також зовнішній) повинен мати кількість нейронів, яка дорівнює кількості вихідних значень. Внутрішні шари моделі можуть мати довільну кількість нейронів (визначення оптимальної кількості внутрішніх шарів і нейронів кожного шару є самостійною задачею). У випадку прогнозування максимального прогину пластинки отримаємо модель (рис. 2, а), яка має зовнішній шар з 5 нейронами для обробки вхідних параметрів і 1 нейроном для обчислення прогину.

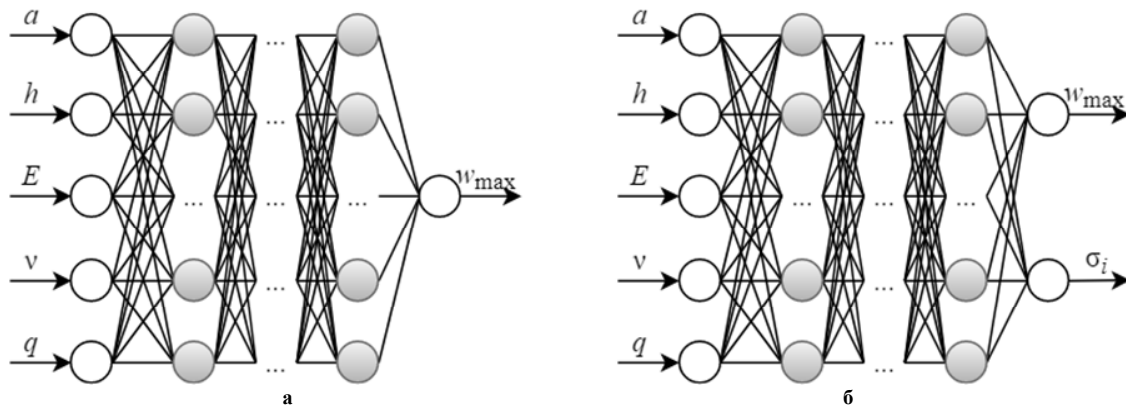


Рис. 2. Модель нейронної мережі для прогнозування максимального прогину квадратної пластинки

Засобами мови програмування Python і бібліотеки машинного навчання Keras таку нейронну мережу можна реалізувати и вигляді функції:

```
def make_model(activation='tanh', optimizer='adam', lossfunc='mean_squared_error',
input_neurons=5, input_dimension=5, inner_layers=2, inner_neurons=5, output_neurons=1):
    model = Sequential()
    model.add(Dense(input_neurons, input_dim=input_dimension, activation=activation))
    for j in range(inner_layers):
        model.add(Dense(inner_neurons, activation=activation))
    model.add(Dense(output_neurons, activation='linear'))
    model.compile(loss=lossfunc, optimizer=optimizer)
    return model
```

де activation – функція активації (вона описує залежність вихідного сигналу нейрона від вхідного); optimizer – алгоритм обчислення ваг у нейронній мережі при мінімізації похибки; lossfunc – функція оцінки похибки (штрафна функція); input\_neurons – кількість вхідних нейронів у зовнішньому шарі; input\_dimension – розмірність вхідних параметрів; inner\_layers – кількість внутрішніх (схованих) шарів мережі; inner\_neurons – кількість нейронів у кожному внутрішньому шарі; output\_neurons – кількість нейронів у вихідному шарі.

Кроки завантаження даних, їх нормалізації, та розбиття множини на підмножини для навчання і тестування у випадку нейронної мережі ідентичні крокам, описаним вище для алгоритмів регресії.

Для навчання мережі штучних нейронів необхідно спочатку створити екземпляр моделі, потім заповнити його даними для навчання та тестування:

```
model = make_model()
model.fit(X_train, y_train, validation_data=(X_test, y_test), epochs=2100,
batch_size=32)
```

X\_train – підмножина значень вхідних параметрів для навчання мережі; y\_train – підмножина значень вихідного параметру для навчання мережі; X\_test – підмножина значень вхідних параметрів для тестування мережі; y\_test – підмножина значень вихідного параметру для тестування мережі; epochs – кількість епох, що визначає максимальну кількість проходів по навчальній підмножині; batch\_size – розмір вибірки, що використовується за одну епоху для навчання.

На рис. 3 порівнюється середнє квадратичне відхилення при навчанні з використанням різних алгоритмів обчислення ваг у нейронній мережі для мінімізації похибки. Можна побачити, що найменше середнє квадратичне відхилення отримано при використанні алгоритму Adam (скорочено від Adaptive Moment Estimation) [11], який базується на аналізі середнього градієнтів і квадратів градієнтів штрафної функції.

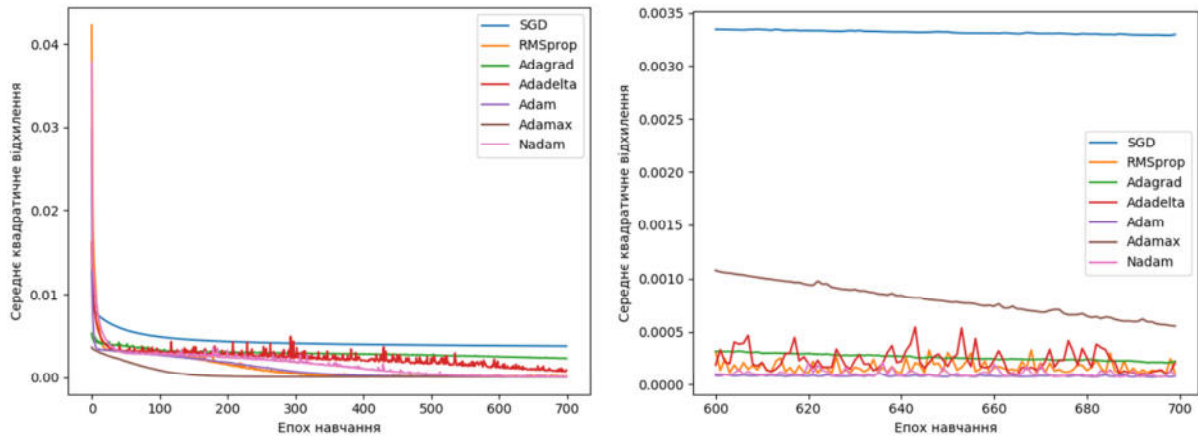


Рис. 3. Порівняння алгоритмів оптимізації нейронної мережі

У регресійному аналізі найбільш ефективними є сигмоїдні функції активації [12]. Теоретично такі функції дозволяють апроксимувати неперервну величину з довільною точністю [12]. Обчислювальний експеримент (рис. 4) показав, що при обчисленні максимального прогину у пластинці найменше середнє квадратичне відхилення на тестовій вибірці отримано при використанні гіперболічного тангенсу.

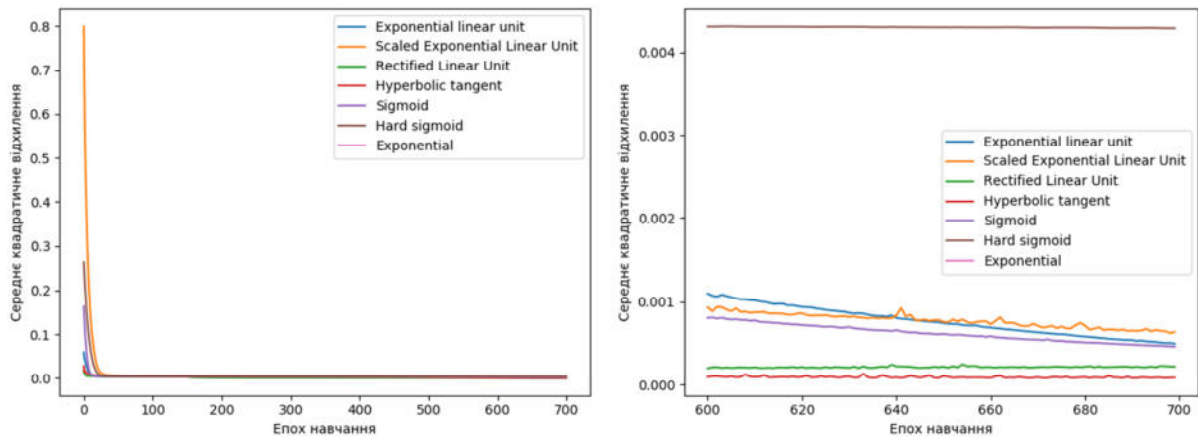


Рис. 4. Порівняння функцій активації у нейронній мережі

Обчислювальні експерименти показали, що найменше середнє квадратичне відхилення від значень тестової підмножини буде при 1 або 3 внутрішніх шарах мережі (рис. 5, а). Водночас, якщо використати один внутрішній шар, то найменше середнє квадратичне відхилення буде, якщо використовувати 6 нейронів у цьому шарі (рис. 5, б).

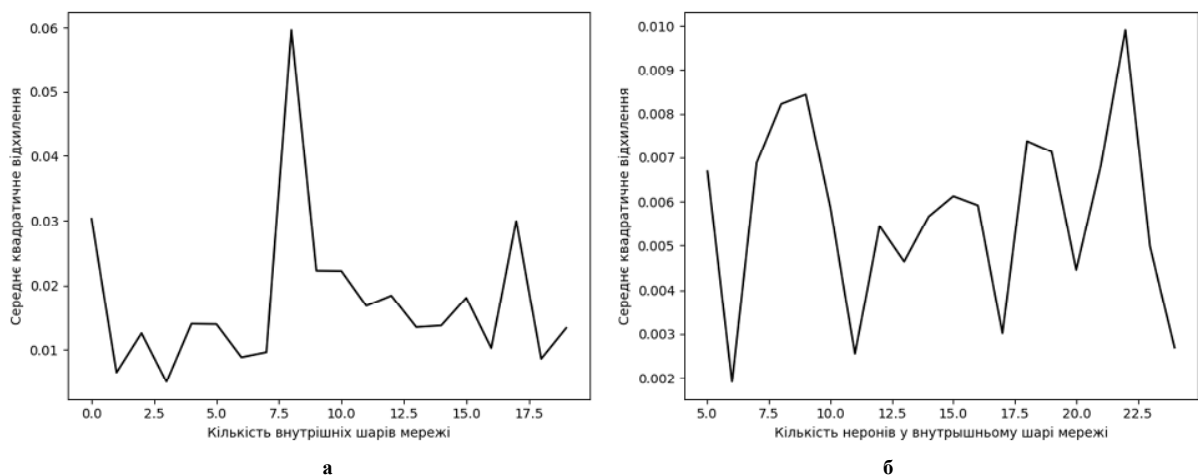


Рис. 5. Вплив кількості внутрішніх шарів і нейронів у внутрішніх шарах

На рис. 6 порівняно значення прогину, отримані за допомогою аналітичної формули, зі значеннями, отриманими за допомогою нейронної мережі, у залежності від довжини сторони пластинки (рис. 6, а) та її товщини (рис. 6, б). Можна побачити, що похибка відносно аналітичного розв'язку у межах 15%.

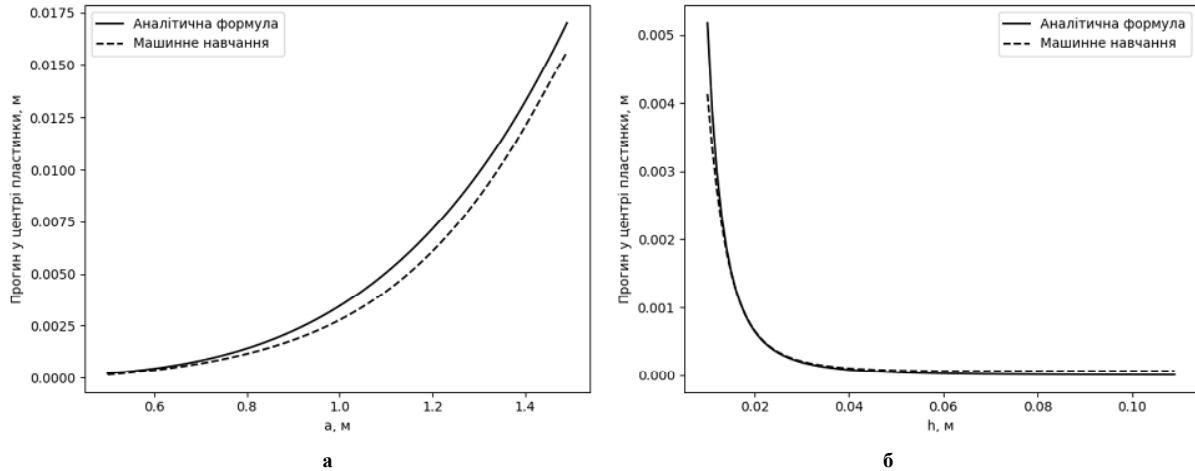


Рис. 6. Порівняння аналітичного розв'язку з результатами машинного навчання

Отже, мережу штучних нейронів можна використовувати для прогнозування прогину квадратної пластинки із ізотропного матеріалу.

#### 4. Модель нейронної мережі для прогнозування максимальних значень прогину та інтенсивності напружень у пластинці

Однією з переваг штучних нейронних мереж є можливість прогнозування одразу декількох значень (векторів значень). Для прогнозування прогину та, наприклад, інтенсивності напружень у пластинці мережа штучних нейронів повинна у вихідному шарі мати два нейрони (рис. 2, б). Отже, у функції створення моделі зміниться лише значення одного параметру: кількості вихідних нейронів – `output_neurons=2`.

Всі кроки підготовки даних, за виключенням першого, описані вище, залишаться без змін. На першому кроці зміниться формування векторів вхідних і вихідних параметрів. Як і раніше вхідними будуть  $a$ ,  $h$ ,  $E$ ,  $\nu$  і  $q$ . Вихідних буде два параметри: обчислені за допомогою методу скінченних елементів максимальні прогин та інтенсивність напружень:

```
X = pd.DataFrame(data, columns=['a', 'h', 'E', 'nu', 'q'])
y = pd.DataFrame(data, columns=['w_max', "mises_max"])
```

На рис. 7 порівняно значення прогину (рис. 7, а) та інтенсивності напружень (рис. 7, б), отримані за допомогою методу скінченних елементів, зі значеннями, отриманими за допомогою нейронної мережі, у залежності від довжини сторони пластинки. Водночас на рис. 8 порівняно значення прогину (рис. 8, а) та інтенсивності напружень (рис. 8, б), отримані за допомогою методу скінченних елементів, зі значеннями, отриманими за допомогою нейронної мережі, у залежності від товщини пластинки.

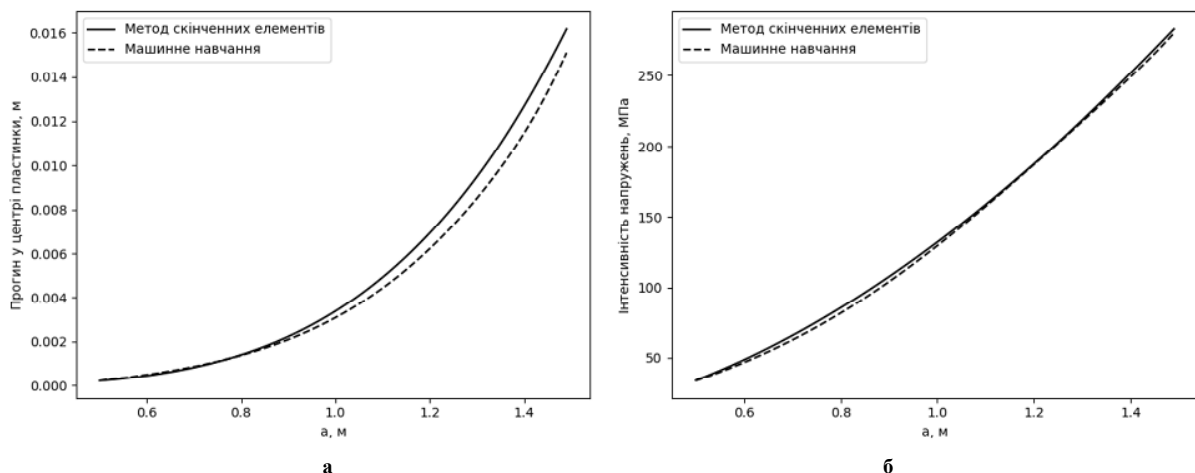


Рис. 7. Порівняння скінченно-елементного розв'язку з результатами машинного навчання: прогин та інтенсивність напружень у залежності від довжини сторони пластинки

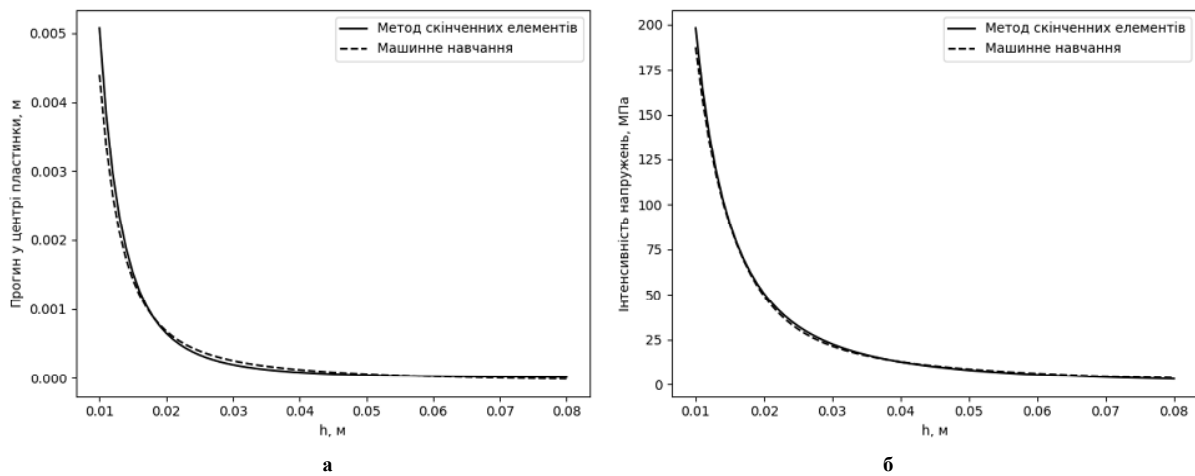


Рис. 8. Порівняння скінченно-елементного розв'язку з результатами машинного навчання: прогин та інтенсивність напружень у залежності від товщини пластинки

Отже, штучні нейронні мережі дозволяють роботи прогноз одночасно декількох характеристик напружено-деформованого стану конструкції. Водночас похибка відносно скінченно-елементного розв'язку у межах 15%.

### Висновки

У відповідності до мети роботи розроблено штучну нейронну мережу для прогнозування напружено-деформованого стану квадратної пластинки із ізотропного матеріалу, яка знаходиться під дією рівномірно розподіленого по поверхні поперечного тиску.

1. Розроблено алгоритм формування вибірки для навчання та тестування моделей. Розроблений алгоритм базується на використанні аналітичної формули та методу скінченних елементів для обчислення компонент напружено-деформованого стану.

2. Досліджено можливості бібліотеки *sklearn* для регресійного аналізу і прогнозування максимального прогину пластинки. Найкращим виявлено алгоритм *Extra-trees*, який дозволяє прогнозувати значення прогину з похибкою приблизно 15% відносно аналітичного рішення.

3. Розроблено нейронну мережу для прогнозування максимального прогину пластинки. Як найбільш ефективні у задачі прогнозування виявлені гіперболічний тангенс як функція активації та алгоритм оптимізації мережі *Adam*. Розроблена мережа дозволяє прогнозувати прогин з похибкою 15% відносно аналітичного розв'язку. Проте мережева модель значно гнучкіша з точки зору можливості обробки більш складних даних.

4. Розроблено нейронну мережу для прогнозування максимальних значень прогину та інтенсивності напружень за Мізесом у пластинці. Штучна нейронна мережа дозволила прогнозувати обидві характеристики стану пластинки з точністю у межах 15%.

Основною перевагою штучної нейронної мережі є швидкість прогнозування: обчислення необхідних характеристик у порівнянні з методом скінченних елементів відбувається майже миттєво (мілісекунди). Отже, «натреновані» штучні нейронні мережі можуть слугувати як інтерактивні доможники у процесі проектування.

Перспективи подальших досліджень пов'язані з розробкою штучних нейронних мереж, які дозволять прогнозувати напружено-деформований стан за кресленням або зображенням оболонкових конструкцій з використанням машинного зору і алгоритмів класифікації.

### Список використаної літератури

1. Keras. URL: <https://www.tensorflow.org/guide/keras> (дата звернення: 19.06.2019).
2. Abambres M., Marcy M., Doz G. Potential of Neural Networks for Structural Damage Localization // *engrXiv*. 2018. URL: <https://engrxiv.org/rghpf/> (дата звернення: 19.06.2019). DOI: 10.31224/osf.io/rghpf.
3. Damage detection of a highway bridge under severe temperature changes using extended Kalman filter trained neural network / C. Jin, S. Jang, X. Sun [et. al] // *Journal of Civil Structural Health Monitoring*. 2016. Vol. 6, Iss. 3, P. 545–560.



4. Onur Avci P. O., Abdeljaber A. O. Self-Organizing Maps for Structural Damage Detection: A Novel Unsupervised Vibration-Based Algorithm // *Journal of Performance of Constructed Facilities*. 2016. Vol. 30, Iss. 3. P. 1–11.
5. Potential of neural networks for maximum displacement predictions in railway beams on frictionally damped foundations / M. Abambres, R. Corrêa, A. P. da Costa, F. Simões // *engrXiv*. 2019. URL: <https://engrxiv.org/m3b7j/> (дата звернення: 20.06.2019). DOI: 10.31224/osf.io/m3b7j
6. Neural Network-based formula for the buckling load prediction of I-section cellular steel beams / M. Abambres, K. Rajana, K. Tsavdaridis, T. Ribeiro // *engrXiv*. 2018. URL: <https://engrxiv.org/wg7hd/> (дата звернення: 20.06.2019). DOI: 10.31224/osf.io/wg7hd
7. Зеленцов Д. Г. Нейронные сети как средство повышения точности и эффективности решения задач оптимизации // *Комп'ютерне моделювання: аналіз, управління оптимізація*. 2018. № 2. С. 18–26.
8. Максимова О. М. Развитие и применение нейросетевых технологий для задач механики и строительных конструкций // *Вестник ИрГТУ*. 2013. № 8 (79). С. 81–88.
9. Лесовик Р. В. Оптимальное проектирование строительных конструкций на основе генетического алгоритма // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2010. С. 20–24.
10. Вакал Л. П. Генетичні алгоритми як інструмент розв'язання нелінійних крайових задач // *Комп'ютерні засоби, мережі та системи*. 2015. № 14. С. 16–23.
11. Kingma D. P. Ba J. L. Adam: A Method for Stochastic Optimization // *arXiv*. 2014. URL: <https://arxiv.org/abs/1412.6980> (дата звернення: 20.06.2019)
12. Du K.-L., Swamy M. N. S. *Neural Networks and Statistical Learning*. London: Springer, 2014. DOI: 10.1007/978-1-4471-5571-3

#### Reference

1. Keras. URL: <https://www.tensorflow.org/guide/keras> (дата звернення: 19.06.2019).
2. Abambres M., Marcy M., Doz G. Potential of Neural Networks for Structural Damage Localization // *engrXiv*. 2018. URL: <https://engrxiv.org/rghpf/>. DOI: 10.31224/osf.io/rghpf.
3. Damage detection of a highway bridge under severe temperature changes using extended Kalman filter trained neural network / C. Jin, S. Jang, X. Sun [et. al] // *Journal of Civil Structural Health Monitoring*. 2016. Vol. 6, Iss. 3, P. 545–560.
4. Onur Avci P. O., Abdeljaber A. O. Self-Organizing Maps for Structural Damage Detection: A Novel Unsupervised Vibration-Based Algorithm // *Journal of Performance of Constructed Facilities*. 2016. Vol. 30, Iss. 3. P. 1–11.
5. Potential of neural networks for maximum displacement predictions in railway beams on frictionally damped foundations / M. Abambres, R. Corrêa, A. P. Da Costa, F. Simões // *engrXiv*. 2019. URL: <https://engrxiv.org/m3b7j/>. DOI: 10.31224/osf.io/m3b7j
6. Neural Network-based formula for the buckling load prediction of I-section cellular steel beams / M. Abambres, K. Rajana, K. Tsavdaridis, T. Ribeiro // *engrXiv*. 2018. URL: <https://engrxiv.org/wg7hd/>. DOI: 10.31224/osf.io/wg7hd
7. Zelentsov D. G. Neyronnyie seti kak sredstvo povyisheniya tochnosti i effektivnosti resheniya zadach optimizatsii // *Kompiuterne modeliuvannia: analiz, upravlinnia optymizatsiia*. 2018. № 2. С. 18–26.
8. Maksimova O. M. Razvitie i primenenie neyrosetevyih tehnologiy dlya zadach mehaniki i stroitelnyih konstruktsiy // *Vestnik IrGTU*. 2013. № 8 (79). С. 81–88.
9. Lesovik R. V. Optimalnoe proektirovanie stroitelnyih konstruktsiy na osnove geneticheskogo algoritma // *Stroitel'naya mehanika inzhenernyih konstruktsiy i sooruzheniy*. 2010. С. 20–24.
10. Vakal L. P. Henetychni alhorytmy yak instrument rozv'iazannia nelineinykh kraiovykh zadach // *Kompiuterni zasoby, merezhi ta systemy*. 2015. № 14. С. 16–23.
11. Kingma D. P. Ba J. L. Adam: A Method for Stochastic Optimization // *arXiv*. 2014. URL: <https://arxiv.org/abs/1412.6980> (дата звернення: 20.06.2019)
12. Du K.-L., Swamy M. N. S. *Neural Networks and Statistical Learning*. London: Springer, 2014. DOI: 10.1007/978-1-4471-5571-3

УДК 681.3.012:621.1

Г.Г. ШВАЧИЧ

Національна металургічна академія України, м. Дніпро  
Б.І. МОРОЗ, І.М. УДОВИК, С.Д. ПРИХОДЧЕНКО  
Національний технічний університет "Дніпровська політехніка", м. Дніпро

## РОЗПОДІЛЕНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ ВЕКТОРІВ РОЗВ'ЯЗКІВ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

*Статтю присвячено розподіленому моделюванню візуалізації векторів розв'язків прикладних задач на основі схем підвищеного порядку точності. Більш високе прискорення обчислень порівняно з кінцево-різницевою підходом ілюструється використанням аналітичних розв'язків, які дозволяють проводити обчислення одночасно та паралельно за всіма часовими шарами. Показано, що найбільш перспективним підходом до математичного моделювання прикладних задач слід вважати той, що ґрунтується на числово-аналітичних розв'язках. Аналіз результатів візуалізації показав, що ізолінії згладжуються, а це найточніше відображає обчислювальний алгоритм. Таким чином, при створенні сервісних програм обробки й видачі результатів до друку у вигляді графіків та ізоліній, запропонований підхід дозволяє звести до мінімуму роботу над вхідними та вихідними даними досліджуваного класу задач.*

*Ключові слова:* багатопроцесорна обчислювальна система, прискорення, візуалізація, розподілене моделювання, числово-аналітичний розв'язок.

Г.Г. ШВАЧИЧ

Национальная металлургическая академия Украины, г. Днепро  
Б.И. МОРОЗ, И.М. УДОВИК, С.Д. ПРИХОДЧЕНКО  
Национальный технический университет "Днепровская политехника", г. Днепро

## РАСПРЕДЕЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ВЕКТОРОВ РЕШЕНИЙ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

*Статья посвящена распределенному моделированию визуализации векторов решений прикладных задач на основе схем повышенного порядка точности. Более высокое ускорение вычислений по сравнению с конечно-разностным подходом иллюстрируется использованием аналитических решений, которые позволяют проводить вычисление одновременно и параллельно по всем временным слоям. Показано, что наиболее перспективным подходом к математическому моделированию прикладных задач следует считать тот, который основывается на численно-аналитических решениях. Анализ результатов визуализации показал, что изолинии сглаживаются, а это точно отражает вычислительный алгоритм. Таким образом, при создании сервисных программ обработки и выдачи результатов на печать в виде графиков и изолиний, предложенный подход позволяет свести к минимуму работу над входными и выходными данными исследуемого класса задач.*

*Ключевые слова:* многопроцессорная вычислительная система, ускорение, визуализация, распределенное моделирование, численно-аналитическое решение.

G.G. SHVACHYCH

National metallurgical academy of Ukraine, Dnipro,  
B.I. MOROZ, I.M. UDOVYK, S.D. PRYKHODCHENKO  
National Technical University "Dnipro Polytechnic", Dnipro

## DISTRIBUTED MODELLING OF VISUALIZATION OF VECTORS FOR APPLIED TASKS' SOLUTIONS

*The article is devoted to the distributed modeling of the visualization of solution vectors of applied problems on the basis of schemes of the raised order of accuracy. A higher acceleration of computation compared to the finite difference approach is illustrated by the use of analytic solutions which allow computing simultaneously and in parallel in all-time layers. It is shown that the most promising approach to mathematical modeling of applied problems that should be considered is the one that is based on numerical-analytic solutions. A higher acceleration of computing compared to the finite difference approach is due to the use of analytical solutions which allow computing simultaneously and in parallel in all-time layers without the use of combined memory. In addition, the usage of numerical-analytic solutions allows to perform calculations simultaneously at*

any moment for each time layer, therefore, it does not require the organization of the information transfer from the slow memory to the RAM, that is, the interprocessor data exchange is excluded. This explains the significant acceleration of the solution of the tasks that were modeled by using numerical-analytic methods.

To conduct the computing experiments on the basis of the application of a multiprocessor computer system, a package of applications which implements the solution of the coefficient inverse heat conduction problems by the method of mathematical modeling is proposed. The application package is designed with taking into account the requirements of the object-oriented programming. Herewith the solution of the coefficient problems is reduced to the problems of the optimal control, for which the algorithms of the calculation are laid in the package. Also, the application package includes a data visualization unit.

The analysis of the results of the rendering showed that the isolines are smoothed out, which most accurately reflects the computational algorithm. Thus, the proposed approach allows to minimize work on the input and output data of the studied class of tasks when creating the service programs for processing and issuing the results for printing in the form of graphs and isolines. Since the values of the basic nodes are arranged in a grid area, the operations on each time layer are not associated with each other. Therefore, when constructing graphs or isolines the calculations can be performed parallel and simultaneously.

The application package is used for planning and processing the results of the thermophysical experiment by inverse methods. The developed algorithms used in the application package are quite simply rebuilt to solve other coefficients and boundary inverse heat conduction problems.

Keywords: multiprocessor computer system, acceleration, visualization, distributed modeling, numerical and analytical decision

### Постановка проблеми

Значне прискорення обчислень прикладних задач за рахунок кінцево-різницевих схем досягається за рахунок ефекту розпаралелювання. Проте на окрему увагу заслуговують числово-аналітичні алгоритми розв'язування прикладних задач. Більш високе прискорення обчислень порівняно з кінцево-різницевим підходом можна досягти використанням аналітичних розв'язків, які дозволяють проводити обчислення одночасно та паралельно за всіма часовими шарами та не використовують при цьому комбінованої пам'яті. Отже, найбільш перспективним підходом до математичного моделювання прикладних задач слід вважати той, що ґрунтується на числово-аналітичних розв'язках.

Ефективним засобом під час опрацювання задач тепло- й масообміну в металургійному виробництві вважають застосування технологій паралельних обчислень на розподілених системах кластерного типу, що мають порівняно невелику вартість і досить легко масштабуються як за кількістю процесорів, так і за обсягом оперативної пам'яті [2, 12]. Отже, розподілене моделювання візуалізації векторів розв'язків прикладних задач на основі схем підвищеного порядку точності є задачею важливою та актуальною.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Тепло- й масообмінні процеси металургійного виробництва слід розглядати як великі системи [8 – 10]. Відзначимо, що на сьогодні розв'язування складних, великих за обсягом задач вимагає потужних комп'ютерів і характеризується словом паралельний, тобто існують паралельні комп'ютери, обчислювальні системи, паралельні обчислювальні методи тощо [3 – 5]. У широкий вжиток цей термін увійшов майже відразу після появи перших комп'ютерів, а точніше, після усвідомлення того факту, що створені комп'ютери не в змозі розв'язати протягом оптимального терміну багато актуальних для практики задач. Появу в обчислювальних системах нових і коштовних засобів комунікації, більш досконалої елементної бази стимулював розвиток високопродуктивних обчислень на базі багато процесорних обчислювальних систем [1, 7].

Крім того, відзначимо, що клас задач, який розглядається в даній роботі, як правило, розв'язується на основі застосування апарату різницевих рівнянь, суть якого полягає в тому, що здійснюється заміна похідних різницевиими співвідношеннями. При цьому з точки зору числового алгоритму розв'язок різницевих рівнянь розподіляється на явні та неявні схеми [11]. У явній схемі значення шуканої функції визначаються послідовно, шар за шаром. Проте, незважаючи на очевидну простоту та зручність обчислень, така схема має один істотний недолік. Якщо розміри сітки  $l > h$ , то похибки округлення можуть стати настільки великими, що отриманий розв'язок втрачає сенс. Відомо, що для застосування явної схеми повинна виконуватися умова:  $l/h^2 \leq 0,5$ . Але справедливим виявляється таке емпіричне правило: якщо зменшувати величини  $l$  і  $h$ , то похибка апроксимації частинних похідних кінцево-різницевиими похідними теж зменшуватиметься. Проте, чим дрібнішою буде сітка, тим ще більше обчислень необхідно зробити, а це означає, що тим більшими будуть похибки округлення. Неявні схеми дозволяють вести обчислення з великим кроком без істотного погіршення точності, але такий підхід вимагає більшого обсягу обчислень.

Розглянутий аналіз показує, що методи розв'язку даного класу задач мають бути не тільки різноманітними, але й поєднувати кількісні оцінки з можливостями якісного аналізу. На сьогодні намітилися певні тенденції в розробці числово-аналітичних методів із складною логічною структурою, але вони мають порівняно з кусково-різницевиими методами вищий порядок точності й можливість побудови алгоритмів з адаптацією за порядками апроксимації [13, 14]. З погляду обчислення цей підхід відрізняється деякою громіздкістю, але він показує своєрідний еталон для порівняння з іншими практичними методами. Разом з тим, зважаючи на те, що обчислювальний експеримент здійснюється на багатопроекторній системі, можна стверджувати, що обставина, яка стримувала розвиток числово-аналітичного підходу, тепер втрачає свою актуальність. У зв'язку з цим у даній роботі набула подальшого розвитку ідея розробки схем підвищеного порядку точності на основі числово-аналітичного підходу до обчислень широкого класу досліджуваних задач.

**Невирішені частини проблеми.** Числовий розв'язок типової задачі металургійної теплофізики, особливо багатомірної та нестационарної, породжує величезну кількість даних. Тому великого значення набувають питання систематизування й інтерпретування цієї інформації, надання їй фізичних характеристик. Наприклад, побудова графіків або ізоліній є досить поширеним способом подання інформації. Разом з тим, сервісні пакети, які використовуються, базуються на обробці масивів даних, впорядкованих відносно вузлів сіткової області. Як правило, вони не застосовують апріорну інформацію про методи побудови. Це можна пояснити хіба лише тим, що в практиці використання методів кінцево-різницевої апроксимзації склалася стійка думка про невизначеність зміни шуканої функції в інтервалах між вузловими точками сіткової області.

На думку авторів роботи [6, 15] прості ідеї, які лежать в основі примітивної заміни похідних кінцевими різницями, без аналізу та врахування специфічних властивостей розв'язків конкретного класу задач не можуть бути успішними. Підчас опрацювання обчислювального алгоритму необхідно використовувати апріорну інформацію про задачу, та в першу чергу – про її належність до того чи іншого класу гладкості функцій. Зазначений підхід став базовим для розподіленого моделювання векторів розв'язків прикладних задач. Його важливість в даній роботі ілюструється на прикладі початково-крайової задачі.

#### Формулювання мети дослідження

Мета дослідження полягає в розробці числового розв'язку задачі металургійної теплофізики на основі застосування багатопроекторних систем. Окрему увагу необхідно приділити числово-аналітичним алгоритмам розв'язування поставлених задач. Більш високе прискорення обчислень порівняно з кінцево-різницевим підходом виконати за рахунок застосування аналітичних розв'язків, які дозволяють проводити обчислення одночасно та паралельно за всіма часовими шарами без використання комбінованої пам'яті. Для проведення обчислювальних експериментів на основі застосування багатопроекторної обчислювальної системи запропонувати пакет прикладних програм (ППП), що реалізує розв'язок коефіцієнтних обернених задач теплопровідності методом математичного моделювання. ППП розробити з урахуванням вимог об'єктно-орієнтованого програмування. При цьому розв'язок коефіцієнтних задач зводити до задач оптимального керування, алгоритми обчислювання яких закласти в пакеті. Також ППП повинен включати блок візуалізації даних.

#### Викладення основного матеріалу дослідження

Розглядається розв'язок крайової задачі для рівняння теплопровідності. Нехай потрібно знайти функцію, яка описується рівнянням вигляду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

при цьому

$$u(0, x) = 0, \quad u(t, 0) = 1, \quad u(t, 2) = 1. \quad (2)$$

Побудуємо рівномірну сітку, крок якої відповідно:

$$Dx1 = 0,01; \quad Dt1 = 0,001. \quad (3)$$

Нехай послідовний алгоритм реалізується за неявною схемою методом прогонки. Тоді після дискретизації рівняння (1) отримують СЛАР вигляду:

$$U_{p,1} - U_{0,p,1} = \left( \frac{Dt1}{Dx1^2} \right) [U_{p+1,1} + U_{p-1,1} - 2U_{p,1}], \quad (4)$$

при цьому номери внутрішніх сіткових вузлів відповідають виразу:  $p = \overline{1, 2m-1}$ ; шукані сіткові функції  $-U_{0,1} = 1$ ,  $U_{2m,1} = 1$ ,  $U_{p,1}$ ; значення величин  $U_{0,p,1}$  беруться з попереднього часового шару.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (4) має тридіагональну структуру, а саме:

$$C_p U_{p+1,1} - U_{p,1} + D_p U_{p-1,1} = f_p, \quad (5)$$

при цьому

$$\left. \begin{aligned} C_p = D_p &= \frac{Dt1/Dx1^2}{(1 + Dt1/Dx1^2)}, \\ f_p &= \frac{-U_{0,p,1}}{(1 + Dt1/Dx1^2)}, \quad \text{якщо } p = \overline{1, 2m-1} \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

Досить простий та зручний послідовний спосіб розв'язку різницевої крайової задачі (4) – (6) являє собою один із варіантів методу виключення невідомих за схемою Гауса й має назву методу прогонки. Мале число арифметичних операцій, а також досить слабка чутливість до обчислювальних похибок роблять прогонку дуже зручним засобом для реалізації послідовних обчислювальних алгоритмів.

Наведемо деякі аспекти обчислювального характеру при комп'ютерному моделюванні. При розв'язуванні нестационарних задач за допомогою неявних (або явних) методів розрахунки завжди ведуться за часовими шарами послідовно. Якщо вся інформація про сусідній шар поміщається в оперативну пам'ять, то особливих ускладнень не виникає. Але, якщо задача є настільки великою, що не відповідає викладеній раніше умові, то доводиться користуватися комбінованою пам'яттю. Час перенесення інформації з повільної пам'яті в оперативну є пропорційним числу точок у шарі. Час знаходження розв'язку задачі на черговому шарі також є пропорційним числу точок у шарі. Але період виконання однієї операції значно менший від середнього значення часу пересилання одиниці інформації з повільної пам'яті в оперативну. Тому при подібному обчисленні велика частина часу буде відводитися на організацію пересилань, тобто витратяться непродуктивно. Отже, виникає таке питання: чи можна якимось чином підвищити ефективність використання комп'ютерної пам'яті при розв'язуванні зазначеного класу задач? А якщо є можливість, то як? Відповіді на запитання можна отримати при більш детальному вивченні графа алгоритму розв'язку поставленої задачі. По-перше, очевидно, що таку проблему можна вирішити за рахунок паралельного процесора. А по-друге, особливості розпаралелювання задачі повинні бути такими, щоб час відповідних обчислень і обробка даних в оперативній пам'яті були б більшими за час, який відводиться на пересилання даних. Нарешті, для того, щоб позбутися від використання комбінованої пам'яті при розв'язуванні задачі (1), необхідно застосувати до такого рівняння або числово-аналітичний підхід, або один із методів математичної фізики, наприклад, інтегральне перетворення Лапласа за часом.

*Числово-аналітичний підхід.* У кожному вузлі ( $x = x_p$ ) сіткової області розв'язок заданого рівняння шукається в класі аналітичних функцій, які допускають його подання у вигляді ряду Тейлора, тобто

$$u_{p+\varepsilon_x,1}(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_x^n u_{p,n+1}(t), \quad (7)$$

при цьому нормована змінна

$$\varepsilon_x = \frac{x - x_p}{x_{p+1} - x_p} \in [-1, 1]; \quad (8)$$

невідомі тейлорівські компоненти шуканої функції  $u$  визначаються таким чином:

$$u_{p,n+1}(t) = \frac{(x_{p+1} - x_p)^n}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \Big|_{x=x_p}. \quad (9)$$



Після підстановки ряду (9) у співвідношення (7), використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, одержимо систему диференціальних наслідків у формі системи звичайних диференціальних рівнянь (СЗДР). Розглядаючи отримане співвідношення як рекурентне за величиною  $n$ , можемо записати відповідні наслідки. Тоді загальний розв'язок рівняння (3.1) набуває вигляду:

$$u_{p+\varepsilon_{x,1}}(x,t) = \left\{ u_{p,1}(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_x^{2n}}{(2n)!} \left( \frac{Dx1^2}{a} \right)^n \frac{\partial^n u_{p,1}(t)}{\partial t^n} \right\} - \frac{\varepsilon_x}{\lambda} \cdot \left\{ u_{p,2}(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_x^{2n}}{(2n+1)!} \left( \frac{Dx1^2}{a} \right)^n \frac{\partial^n u_{p,2}}{\partial t^n} \right\}. \quad (10)$$

Необхідно відзначити, що обчислювальна система може використовуватися і для збільшення обсягу доступної оперативної пам'яті. Так, із збільшенням в  $N$  разів числа процесорів, у стільки ж збільшується й обсяг доступної оперативної пам'яті. Ця обставина стає вельми суттєвою під час розв'язку багатовимірних задач, коли виникають проблеми з пам'яттю обчислювального середовища (свопінг та ін.). Тому для більш повного аналізу ефективності розробленої багатопроекторної системи було проведено обчислювальні експерименти при моделюванні багатовимірних задач.

Розглянемо особливість конструювання схем розщеплення для розподіленого моделювання прикладних задач. Для того, щоб з'явилася можливість переходу до суттєво більш складних алгоритмів, необхідно розроблену методологію поставити на фундаментальну теоретичну основу. Для цього можна використати різницеві схеми розщеплення як один із найбільш важливих засобів моделювання багатовимірних нестационарних задач математичної фізики. Різницева схема розщеплення – це один з важливих засобів розрахунку багатовимірних нестационарних задач математичної фізики. Річ у тім, що різницева схема, в яких число арифметичних дій, потрібних для переходу між часовими шарами, пропорційне числу невідомих значень шуканих функцій, прийнято називати *економічними*. Відомо, що обчислення за явними схемами дуже прості. Якість арифметичних дій у них не підлягає удосконаленню. Проте, будучи економічною, явна схема є стійкою тільки при жорсткому її обмеженні на крок сітки у часі. Різницева схема розщеплення на основі сукупності пропозицій, не зовсім еквівалентних одна одній, але таких, що мають стереотипну мету звести задачу тривимірного поширення області залежності до послідовності схем, включають невідомі величини, які діють поперемінно за координатними напрямками і зводять розв'язок таких задач до скалярних прогонок. Тому різницева схема розщеплення вважається економічною і, безумовно, стійкою, тобто ніби поєднує в собі переваги явної і неявної схем.

Окрім цього, відзначимо, що найбільший ефект від застосування сучасних систем обробки інформації з високим рівнем паралелізму, ймовірно, досягається в тих випадках, коли описані схеми використовуються для виконання матричних обчислень у лінійній алгебрі або в методах розв'язування диференціальних рівнянь з частинними похідними. Якщо була можливість під час розв'язку згаданих рівнянь використати один процесор на один вузол розрахунку, то тоді можна виконати обчислення в усіх вузлах паралельно й одночасно. Певна річ, що це нереально. Типова скінченно-різницева сітка складається з 50x50 або 100x100 вузлів, тому для її обчислення при такій архітектурі знадобиться система з 2500 або 10000 процесорів.

Застосування числово-аналітичних розв'язків дозволяє для кожного часового шару проводити обчислення одночасно в будь-який момент, а, отже, не вимагає організації пересилання інформації з повільної пам'яті в оперативну, тобто виключається міжпроцесорний обмін даними. Цим і пояснюється суттєве прискорення розв'язування тих задач, які моделювалися за допомогою числово-аналітичних методів.

Нині набули значного поширення різні програмні продукти, які часто називають пакетами або комплексами програм. У даній роботі йдеться про пакет прикладних програм, призначений для обробки теплофізичних експериментів оберненими методами. Основна мета створення ППП – це надання практичної допомоги дослідникові на всіх етапах обробки теплофізичного експерименту оберненими методами за допомогою персонального обчислювального кластера.

Отже, досліджується клас обернених теплових задач металургійної теплофізики. Їх постановка формулюється з точки зору співвідношення “причина-наслідок”. До причинних характеристик теплообмінного процесу згідно з прийнятою моделлю відносяться граничні умови та їх параметри, початкові умови, теплофізичні властивості та под. У такій інтерпретації встановлення причинно – наслідкових зв'язків являє собою мету прямих задач теплообміну. І навпаки, якщо за певною інформацією про температурне поле потрібно відновити причинні характеристики, то маємо ту або іншу постановку обернених задач теплообміну (ОЗТ), що належать до класу некоректних з позицій Адамара задач.



В основу методу ідентифікації рівнянь теплопровідності за даними теплофізичного експерименту покладено інтерпретацію ОЗТ як задач оптимального керування [5]. Математична модель при цьому розглядається як керована за сукупністю вхідних параметрів, заданих вектором  $R$ . Під ними маються на увазі коефіцієнти рівняння теплопровідності. При заданих значеннях компонент вектора  $R$  розв'язок рівняння теплопровідності з початковими та граничними умовами являє собою не тільки функцію просторових координат і часу, але й вхідних параметрів. Припустивши, що в певні моменти часу тепловий стан зразка відомий, а деякі параметри вектора  $R$  невідомі, ми приходимо до задачі оптимального керування. Введення в розгляд функціонала дозволяє сформулювати сам метод ідентифікації алгоритму розв'язку ОЗТ. Структура ММ при цьому зводиться до двох керованих моделей:

- температурної (модель 1),
- потокової (модель 2).

Така постановка дозволила розділити параметри керування для вектора  $R$ . Так, за допомогою моделі 1 можна по дати керування у вигляді коефіцієнта температуропровідності, а моделі 2 – коефіцієнта теплопровідності.

Завдяки вибраному способу апроксимації розв'язок рівняння теплопровідності (метод прямих) зводиться до стандартних обчислювальних процедур – методу прогонки і використання диференціальних наслідків аналітичних розв'язків на вузлах сітки за умови, що  $p = 1, 2m_x - 1, m_x \in Z$ .

Область припустимих значень параметрів вектора  $R$  у ММ вибирається з огляду на апріорні відомості про модель. У ППП ця процедура формалізується введенням в алгоритм ряду умов. Методологія підходу зведена до побудови мінімізуючої послідовності функціонала, а саме:

$$J(R) = (T_e - T_p)^2, \quad (11)$$

де  $T_e, T_p$  – значення температури, вони відомі з експерименту та розрахунку, які отримані у результаті розв'язків ММ.

У такій постановці обчислення коефіцієнтної ОЗТ зводиться до задачі оптимального керування, алгоритм розв'язку якої реалізовано в даному ППП.

Результати візуалізації даних експериментальних досліджень відображено на рис. 1. З аналізу результатів візуалізації видно, що ізолінії згладжуються, а це найточніше відображає обчислювальний алгоритм. Таким чином, при створенні сервісних програм обробки й видачі результатів до друку у вигляді графіків та ізоліній, пропонується підхід дозволяє звести до мінімуму роботу над вхідними та вихідними даними досліджуваного класу задач. Оскільки значення базових вузлів упорядковуються сітковою областю, то на кожному часовому шарі операції, які відображено у формулі (10), не пов'язуються між собою. Тому розрахунки при побудові графіків або ізоліній можуть виконуватися паралельно й одночасно.

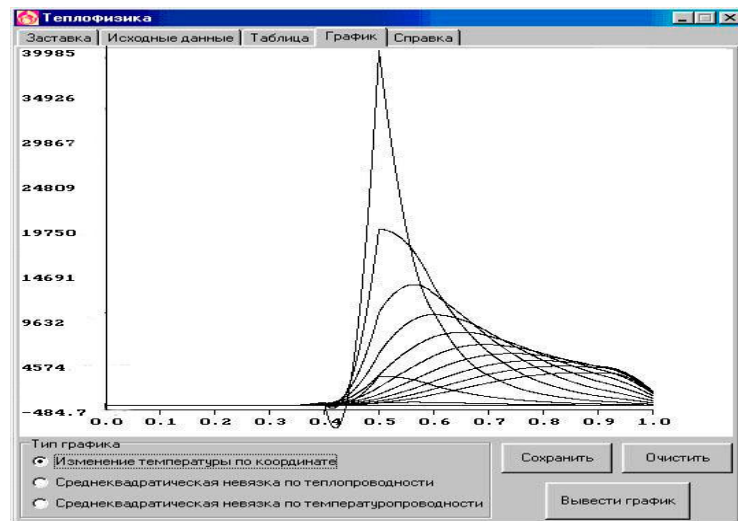


Рис. 1. Обробка результатів розв'язку тестової задачі у вигляді графіків

ППП використовується при плануванні й обробці результатів теплофізичного експерименту оберненими методами. Розроблені алгоритми, використані в ППП, досить просто перебудовуються на розв'язок інших коефіцієнтних і граничних ОЗТ.

### Висновки

Розглянутий у даній роботі підхід до числово-аналітичної концепції візуалізації векторів у розв'язках дозволяє отримати будь-які необхідні дані для побудови гладких графіків або ізоліній на відповідних сітках. Максимальні ж паралельні форми алгоритму становлять предмет особливого інтересу, оскільки визначають мінімально можливий час реалізації алгоритму візуалізації.

Для проведення обчислювальних експериментів на базі застосування багатопроцесорної обчислювальної системи розроблено пакет прикладних програм, що реалізує розв'язок коефіцієнтних обернених задач теплопровідності методом математичного моделювання. ППП розроблено з урахуванням вимог об'єктно-орієнтованого програмування. При цьому обчислення коефіцієнтних ОЗТ зводиться до задач оптимального керування, алгоритми розв'язку яких реалізовано в цьому ППП. Зауважимо, що ППП також включає блок візуалізації даних.

### Список використаної літератури

1. Башков Є.О., Іващенко В.П., Швачич Г.Г. Високопродуктивна багатопроцесорна система на базі персонального обчислювального кластера. *Проблеми моделювання та автоматизації проектування*. Донецьк, 2011. № 9 (179). С. 312 – 324.
2. Іващенко В.П., Швачич Г.Г., Шмукин А.А. Дослідження проблеми підбору компонентів модульної багатопроцесорної системи в задачі термічної обробки металовиробу. *Системні технології: регіональний збірник наукових праць*. Дніпропетровськ, 2013. № 2(85). С.78–92.
3. Ivaschenko V.P., Shvachych G.G., Semenov S.G. Efficient parallelization algorithms of the applied tasks in multiprocessor computing systems. *Системні технології: Регіональний міжвузівський збірник наукових праць*. Дніпро, 2017. № 2(109). С. 57 – 66.
4. Іващенко В.П., Швачич Г.Г., Шмукин А.А. Параллельные вычисления и прикладные задачи металлургической теплофизики. *Системні технології: Регіональний збірник наукових праць*. Дніпропетровськ, 2008. № 3(56). С. 123 – 138.
5. Роуч П. Вычислительная гидромеханика. М.: Мир, 1980. 616 с.
6. Іващенко В.П., Швачич Г.Г., Іващенко О.В. Чисельно-аналітична концепція розв'язків прикладних задач на основі схем підвищеного порядку точності. *Комп'ютерне моделювання: аналіз, управління, оптимізація*. Дніпро, 2017. № 1(1). С. 85-90.
7. Воеводин В. В. Математические модели и методы в параллельных процессах. М.: Наука, 1986. 296 с.
8. Іващенко В.П., Швачич Г.Г., Шмукин А.А. Параллельные вычисления и прикладные задачи металлургической теплофизики. *Системні технології: регіональний збірник наукових праць*. Дніпропетровськ, 2008. № 3(56). С. 123 – 138.
9. Shvachych G.G., Pobochii I.A., Ivaschenko E.V., Busygin V.V. Research of the problem of compatibility in the multi-processing compound systems. *Science review*. Warsaw, 2018. № 1, № 2(9). P. 19 – 23.
10. Швачич Г.Г., Шмукин А.А. Особенности конструирования параллельных вычислительных алгоритмов для ПЭВМ в задачах тепло- и массообмена. *Восточно-европейский журнал передовых технологий*. Харьков, 2014. № 3. С. 42 – 47.
11. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
12. Швачич Г.Г. К вопросу конструирования параллельных вычислений при моделировании задач идентификации параметров окружающей среды. *Математичне моделювання*. Дніпродзержинськ, 2006. № 2 (14). С. 23 – 34.
13. Швачич Г.Г., Шмукин А.А. Особенности конструирования параллельных вычислительных алгоритмов для ПЭВМ в задачах тепло- и массообмена. *Восточно-европейский журнал передовых технологий*. Дніпродзержинськ, 2014. № 3. С. 42 – 47.
14. Іващенко В.П., Швачич Г.Г., Ткач М.А. Особливості використання багатоядерних процесорів в багатопроцесорних обчислювальних системах. *Новітні комп'ютерні технології*. Кривий Ріг, 2013. Вип. XI. С. 132 – 135.
15. Shvachych G.G., Kholod E.G., Ivaschenko E.V., Busygin V.V. Visualization of the decisions of applied problems in multiprocessor system. *Natural and Technical Sciences*, Budapest, 2018. V. 1(17), February. P. 65 – 69.

### Transliteration

1. Bashkov Ye.O., Ivashchenko V.P., Shvachych H.H. Vysokoproduktyvna bahatoprotsesorna systema na bazi personalnogo obchysliuvalnogo klastera. Problemy modeliuвання ta avtomatyzatsii proektuvannya. Donetsk, 2011. № 9 (179). S. 312 – 324.
2. Ivashchenko V.P., Shvachych H.H., Shmukyn A.A. Doslidzhennia problemy pidboru komponentiv modulnoi bahatoprotsesornoї systemy v zadachi termichnoi obrobky metalovyrobu. Systemni tekhnologii: rehionalnyi zbirnyk naukovykh prats. Dnipropetrovsk, 2013. № 2(85). S.78–92.
3. Ivaschenko V.P., Shvachych G.G., Semenov S.G. Efficient parallelization algorithms of the applied tasks in multiprocessor computing systems. *Systemni tekhnologii: Rehionalnyi mizhvuzivskiyi zbirnyk naukovykh prats. Dnipro*, 2017. № 2(109). С. 57 – 66.
4. Ivashchenko V.P., Shvachych G.G., Shmukin A.A. Parallelnyye vychisleniya i prikladnyye zadachi metallurgicheskoy teplofiziki. Sistemni tekhnologii: Regionalnyi zbirnik naukovikh prats. Dnipropetrovsk. 2008. № 3(56). S. 123 – 138.
5. Rouch P. Vychislitel'naya gidromekhanika. M.: Mir. 1980. 616 s.Regionalnyi zbirnik naukovikh prats. Dnipropetrovsk. 2008. № 3(56). S. 123 – 138.
6. Ivashchenko V.P., Shvachych H.H., Ivashchenko O.V. Chyselno-analitychna kontsepsiia rozviazkiv prykladnykh zadach na osnovi skhem pidvyshchenoho poriadku tochnosti. Kompiuterne modeliuвання: analiz, upravlinnia, optymizatsiia. Dnipro, 2017. № 1(1). S. 85-90.
7. Voyevodin V. V. Matematicheskiye modeli i metody v parallelnykh protsessakh. M.: Nauka. 1986. 296 s.
8. Ivashchenko V.P., Shvachych G.G., Shmukin A.A. Parallelnyye vychisleniya i prikladnyye zadachi metallurgicheskoy teplofiziki. Sistemni tekhnologii: regionalnyi zbirnik naukovikh prats. Dnipropetrovsk. 2008. № 3(56). S. 123 – 138.
9. Shvachych G.G., Pobochii I.A., Ivaschenko E.V., Busygin V.V. Research of the problem of compatibility in the multi-processing compound systems. *Science review*. Warsaw, 2018. № 1, № 2(9). P. 19 – 23.
10. Shvachych G.G., Shmukin A.A. Osobennosti konstruirovaniya parallelnykh vychislitelnykh algoritmov dlya PEVM v zadachakh teplo- i massoobmena. Vostochno-evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy. Kharkov. 2014. № 3. S. 42 – 47.
11. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M.: Nauka. 1966. 724 s.
12. Shvachich G.G. K voprosu konstruirovaniya parallelnykh vychisleniy pri modelirovanii zadach identifikatsii parametrov okruzhayushchey sredy. Matematichne modelyuvannya. Dniprodzerzhinsk. 2006. № 2 (14). S. 23 – 34.
13. Shvachych G.G., Shmukin A.A. Osobennosti konstruirovaniya parallelnykh vychislitelnykh algoritmov dlya PEVM v zadachakh teplo- i massoobmena. Vostochno-evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy. Dniprodzerzhinsk. 2014. № 3. S. 42 – 47.
14. Ivashchenko V.P., Shvachych H.H., Tkach M.A. Osoblyvosti vykorystannia bahatoiadernykh protsesoriv v bahatoprotsesornykh obchysliuvalnykh systemakh. Novitni kompiuterni tekhnologii. Kryvyi Rih, 2013. Vyp. XI. S. 132 – 135.
15. Shvachych G.G., Kholod E.G., Ivaschenko E.V., Busygin V.V. Visualization of the decisions of applied problems in multiprocessor system. *Natural and Technical Sciences*, Budapest, 2018. V. 1(17), February. P. 65 – 69.

UDC 681.3.012: 621.1

G.G. SHVACHYCH, I.A. POBOCHII, O.V. IVASCHENKO  
National Metallurgical Academy of Ukraine, Dnipro  
L.F. SUSHKO  
State Agrarian and Economic University, Dnipro

## MATHEMATICAL MODELING OF THERMOPHYSICAL PROPERTIES OF MATERIALS USING INVERSE METHODS

*A proper class of the mathematical models had been deduced for investigating the thermophysical properties of materials by means of reverse methods. Procedure for treatment of the mathematical models is reduced to the extreme statement that allowed to develop the effective algorithms for solving the coefficient problems of the optional order of accuracy. Results of the test problems solving on the basis of the offered approach had been presented. A package of applied problems had been developed for solving the coefficient problems of the heat-conducting with the methods of mathematical simulation. Creation of package had been carried out considering the requirements of the object-oriented programming. The simulation procedure had been realized on the basis of application of multiprocessor computer system. The package of applied programs is intended for treatment of thermophysical experiments with reverse methods.*

*Keywords: coefficient tasks, extreme raising, mathematical models, heat conductivity, heat transfer.*

Г.Г. ШВАЧИЧ, І.А. ПОБОЧИЙ, О.В. ІВАЩЕНКО  
Національна металургійна академія України, м. Дніпро  
Л.Ф. СУШКО  
Дніпровський державний аграрно-економічний університет

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОФІЗИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛІВ ОБЕРНЕНИМИ МЕТОДАМИ

*Для дослідження теплофізичних властивостей матеріалів оберненими методами виведений відповідний клас математичних моделей. Процедура обробки математичних моделей зведена до екстремальної постановки, що дозволило розробити ефективні алгоритми розв'язування коефіцієнтних завдань довільного порядку точності. Наводяться результати розв'язування тестових завдань на основі запропонованого підходу. Розроблено пакет прикладних програм для розв'язування коефіцієнтних завдань теплопровідності методами математичного моделювання. Створення пакету виконано з урахуванням вимог об'єктно-орієнтованого програмування. Процедура моделювання була реалізована на основі застосування багатопроцесорної обчислювальної системи. Пакет прикладних програм призначений для обробки теплофізичних експериментів оберненими методами.*

*Ключові слова: коефіцієнтні задачі, екстремальна постановка, математичні моделі, теплопровідність, перенесення тепла.*

Г.Г. ШВАЧИЧ, І.А. ПОБОЧИЙ, О.В. ІВАЩЕНКО  
Национальная металлургическая академия Украины, г. Днепро  
Л.Ф. СУШКО  
Днепровский государственный аграрно-экономический университет

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ ОБРАТНЫМИ МЕТОДАМИ

*Для исследования теплофизических свойств материалов обратными методами выведен соответствующий класс математических моделей. Процедура обработки математических моделей сведена к экстремальной постановке, что позволило разработать эффективные алгоритмы решения коэффициентных задач произвольного порядка точности. Приводятся результаты решения тестовых задач на основе предложенного подхода. Разработан пакет прикладных программ для решения коэффициентных задач теплопроводности методами математического моделирования. Создание пакета выполнено с учетом требований объектно-ориентированного программирования. Процедура моделирования была реализована на основе применения многопроцессорной вычислительной системы. Пакет прикладных программ предназначен для обработки теплофизических экспериментов обратными методами.*

*Ключевые слова: коэффициентные задачи, экстремальная постановка, математические модели, теплопроводность, перенос тепла.*

### Introduction

The problem relevance of developing numerical methods for solution of multidimensional systems of parabolic quasilinear equations describing the processes of heat and mass transfer can be considered as undeniable [1, 2]. One of the most interesting examples of such systems can be the equations of hydrodynamics and metallurgical thermophysics. Apparently, the mass solution of non-stationary problems of high accuracy order at the current level of technical capability and on the basis of traditional methods developed up to now seems to be possible only in the following circumstances.

First, the advent of new and inexpensive communication means of the computing technology stimulated development of new information technologies: structural programming, network operating systems, object-oriented programming, parallel information processing systems, etc. The parallel processing organization of information flows, the connection of parallelization problems with architecture of a personal computer (PC), parallel programming systems, methods and algorithms of parallel computing are the key themes of the computer technology development at this stage [3, 4].

Secondly, by now, certain trends have been emerged for development of computational methods with complex logical structure, which have a higher accuracy order comparing to the traditional finite difference methods [5,6]. Considerable progress in the solution of multidimensional spatial problems can be considered as a series of proposals that are not entirely equivalent to each other, yet which pursue one stereotypical goal to reduce the three-dimensional distribution problem of the variables change area to a sequence of schemes involving unknown quantities in only one direction, alternately in longitudinal, transverse, and vertical. Thus, the adoption, as a methodological basis, of difference schemes of splitting, firstly, ensures an economical and stable implementation of numerical models by scalar sweep method. And, secondly, it is known that the greatest effect of a parallel processor can be achieved when it is applied to perform matrix calculations of a linear algebra.

In this paper, the identification of heat conduction processes is considered on the equations solution example of the heat conductivity in the Cartesian coordinate system for the area of  $y \in [y_0, yL], t \in [0, \infty)$ . Obviously, for given input data, this problem solution is simply realized by finite difference methods. Using the implicit timing schemes and the central differences in the spatial variable, we obtain a system of linear algebraic equations (SLAE) of a three-diagonal structure. Using the sweep method, we construct an economical difference scheme for solving a direct problem. From this algebraic SM analysis, it follows that for the grid area of the sought-for function definition  $y_p, p = 1, 2, 3, \dots, 2m, m \in Z$  in each  $y_p - th$  grid node, the coefficients of SLAE include discrete values  $\lambda_{p,1}, C_{v_{p,1}}$ . As can be seen, the number of unknowns  $\lambda_{p,1}, C_{v_{p,1}}$  is twice the number of grid equations. Such an unlocked SLAE, with known temperature values in the mesh nodes along a spatial variable, can have an infinite set of solutions with respect to unknowns  $\lambda_{p,1}, C_{v_{p,1}}$ . Hence, a purely formal approach does not allow us to formulate a solution of IHC coefficient in the considered formulation.

### Research problem statement

The research purpose is to derive the corresponding class of temperature and gradient simulation models for research of the materials' thermophysical properties by reverse methods. The main research purpose is that the SM processing procedure as those that are controlled by input parameters, reduce, on the residual principle basis, to an extreme formulation. This approach allows to develop effective algorithms for solving quotient problems on SM of arbitrary accuracy order with adaptation of time modes of a thermophysical experiment.

Hereafter, we shall assume that the one-dimensional formulation of the thermal conductivity problems is the basic of a computational SM where there should be constructed the effective IHC solutions and algorithms for experimental data processing for the material thermophysical characteristics determination.

### Formation and analysis of simulations models of materials thermophysical properties definition

The problem solution could be obtained if the desired temperature dependences  $\lambda(T), C_v(T)$  are localized in the quadrants in the form of piecewise constant dependencies on temperature, both on the spatial variable and on time, and as a SM, construct the temperature and gradient dependence. We show that for each such spatiotemporal quadrant, the closed solutions of the original differential problem are effectively constructed by the Cauchy problem solutions:



$$T_{p+\varepsilon_{X,1}}(\varepsilon_t, \varepsilon_y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\varepsilon_y^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{a_p^n} \frac{d^n T_{p,1}(\varepsilon_t)}{d\varepsilon_t^n} - \left( \frac{1}{\lambda_p} \right) \frac{\varepsilon_y^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{1}{a_p^n} \frac{d^n T_{p,2}(\varepsilon_t)}{d\varepsilon_t^n} \right\}, \quad (1)$$

where  $p = \overline{1, 2m-1}$  are the numbers of grid nodes in the spatial area  $y \in [y_0, y_L]$ ;  $T_{p,1}(\varepsilon_t), T_{p,2}(\varepsilon_t)$  are the Cauchy data (temperature and flow) given at the nodes of the grid area with  $\varepsilon_y = 0$ ;  $a_p$  is an unmatched grid coefficient of the temperature conductivity ( $a_p = \frac{\lambda_{p,1}}{CV_{p,1}} \frac{Dt1}{Dy1^2}$ ). The spatial and temporal variables in (1) are normalized by the dependences:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{y - y_p}{y_{p+1} - y_p} \in [-1, 1] \\ \varepsilon_t &= \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \in [0, 1] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

For the  $p$ -th grid nodes distributed uniformly, the Cauchy problem solution allows constructing the closed simulation models of unknown Cauchy data in the form of a system of ordinary differential equations (SODE). Putting in (1)  $\varepsilon_y = \pm 1$  we obtain the SODE of the  $N$ -th order:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{1/a_p^n}{(2n)!} T_{p,1}^{(n)}(\varepsilon_t) &= \frac{1}{2} (T_{p+1,1}(\varepsilon_t) + T_{p-1,1}(\varepsilon_t)) \\ - \frac{1}{\lambda_p} \sum_{n=0}^N \frac{1/a_p^n}{(2n+1)!} T_{p,2}^{(n)}(\varepsilon_t) &= \frac{1}{2} (T_{p+1,1}(\varepsilon_t) - T_{p-1,1}(\varepsilon_t)) \end{aligned} \right\}, \quad N \in Z, \quad (3)$$

- continuous in the time area. For instance, with  $N = 1$  we obtain a first-order SODE in the Cauchy form, where the right-hand sides are assumed to be known functions of time. In this case, it is expedient to construct a solution in a piecewise analytical form:

$$\left. \begin{aligned} T_{p,1}(\varepsilon_t) &= T_{p,1}^*(\varepsilon_t) + (T_{p,1}(0) - T_{p,1}^*(0)) \ell^{-2a_p \varepsilon_t} \\ T_{p,2}(\varepsilon_t) &= T_{p,2}^*(\varepsilon_t) + (T_{p,2}(0) - T_{p,2}^*(0)) \ell^{-6a_p \varepsilon_t} \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

, where  $\{T_{p,1}^*(\varepsilon_t), T_{p,2}^*(\varepsilon_t)\}$  are particular solutions of inhomogeneous equations,  $\{T_{p,1}(\theta), T_{p,2}(\theta)\}$  are known initial data. In the more general case, for an arbitrary value of the integer parameter of  $N$  arrangement, it is expedient to proceed from the differential equations (3) to a normal first-order SODE with a Cauchy form. Thus, the partial differential equation integration is reduced to the first-order SODE integration in Cauchy form, which can be used to solve the coefficient problems as those that are controlled by the SM in relation to the coefficients of heat and temperature conductivity. It should also be emphasized that the inclusion of the integer  $N$  parameter in the SM as an input value allows constructing the SM with an arbitrary accuracy order and an approximate order adoption.

#### The reduction of determination problem of materials' thermal-physical properties to extreme formulation

One of the promising directions for processing heat transfer problems by reverse methods is to bring them to extreme formulations by numerical methods of optimization theory. In the exact extreme formulation,



the definition of parameters  $\lambda_{p,1}$  and  $Cv_{p,1}$  on SM (3) or (4) will correspond to minimization of discrepancies in the form of functionals:

$$\left. \begin{aligned} J_{p,1}(R) &= (T_{p,1}(\varepsilon_t, R) - f(\varepsilon_t, R))^2 \\ J_{p,2}(R) &= (T_{p,2}(\varepsilon_t, R) - Q(\varepsilon_t, R))^2 \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

, where  $R$  are the sought-for control parameters.

The  $J_{p,1}, J_{p,2}$  values in space  $L_2$  in such a formulation can be considered as functions of the variables  $R$ . Their numerical value determines the distance in the functional space  $L_2$  between the given  $f(\varepsilon_t, R), Q(\varepsilon_t, R)$  quantities known from the experiment and that are being modeled by  $T_{p,1}(\varepsilon_t, R), T_{p,2}(\varepsilon_t, R)$  on the controlled SM (3,4).

In each concrete case, on the basis of a priori information, it is possible to describe with some certainty, a certain admissible set of input parameters  $R$ . Then, if we regard the SM as controllable, then the control parameters should be selected so that the functionals (5) are minimal. If the acceptable range for changing control parameters are covered by  $R_v$ , grid nodes, then for their given values the functionals (5) can be calculated. Thus, the  $\{J(R_v)\}$  sequence is minimizing if the limit allows to determine its minimum. In the vicinity of the minimum, the value of the functional can be represented by a Taylor series expansion:

$$J_{v+\varepsilon_91}(q) = J_{v,1} + \varepsilon_R J_{v,2} + \varepsilon_R^2 J_{v,3} + \dots, \quad (6)$$

where  $\varepsilon_q = \frac{R - R_v}{R_{v+1} - R_v}$  is the normalized argument of the function;  $J_{v,2}, J_{v,3}, \dots$  – are the Taylor's components of the first and second order.

Retaining in the expansion (6) three summands and using the central differences for the Taylor components  $J_{v,2}, J_{v,3}$

$$\left. \begin{aligned} J_{v,2} &= \frac{1}{2}(J_{v+1,1} - J_{v-1,1}) \\ J_{v,3} &= \frac{1}{2}(J_{v+1,1} + J_{v-1,1} - 2J_{v,1}) \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

after taking the derivative and after equating its value to zero, it becomes possible to construct an interpolation formula:

$$R = R_v - \left(\frac{1}{2}\right)(R_{v+1} - R_v) \frac{J_{v+1} - J_{v-1}}{J_{v+1} + J_{v-1} - 2J_v}, \quad (8)$$

which allows arranging an iteration cycle. From this algorithm it follows that once the separation segment of the sought-for control parameter  $\{R_{p+1}, R_{p-1}\}$ , is set, where the disparity in the functional (5) changes sign, further refinement of the control parameter in solving IHC can be refined recursively by formula (8) with any preassigned accuracy.

### Experimental data and the processing

An important stage of the research was to develop a package of applied programs (PAP) for the coefficient problems solution of heat conduction by methods of simulation modeling [6]. The package was created taking into account the requirements of object-oriented programming. The simulation procedure was based on application of a multiprocessor computing system [7]. The PAP is designed for processing thermophysical experiments by inverse methods. Its creation main purpose was to provide practical assistance to the researcher at all stages of experimental data processing.

In this section of the research, additional conditions are considered allowing to divide the researched problem into two: the temperature and flow. The first one allows solving the coefficient problems in the whole given range of temperature variation with the control parameter in the form of the thermal diffusivity coefficient (model 1), the other is in the form of thermal conductivity or heat capacity (model 2). This approach corresponds to the classical methods of technical thermophysics. The SM 1 and 2 research is carried out by the method of straight lines. Moreover, model 1 (for example, algebraic or functional) and model 2 (gradient) allow solving the coefficient problem in an extreme formulation. As a test problem, it was proposed to determine the thermophysical properties of a particular industrial material [8]. The properties of coke made from gas coal were researched. For this, the temperature field of a sample with the shape of a cylinder was simulated. When solving such a coefficient problem, the following initial data were used: the thermal diffusivity coefficient  $a_0 = a$ ,  $N = 5$ . The results of simulation performed by means of a multiprocessor computing system are shown in Fig. 1. The solution of the coefficient problem was carried out with control over the dimensionless coefficient of thermal diffusivity with  $R = a / a_0$ . From the simulation results analysis (Fig. 1) it follows that the disparity minimum corresponds to the value of the parameter  $R \approx 1$ . The exact value of the control parameter  $R = 1$ . For the heat conduction problem from tabular data  $\lambda = 0,16$ . Such a parameter identification is shown in Fig. 2.

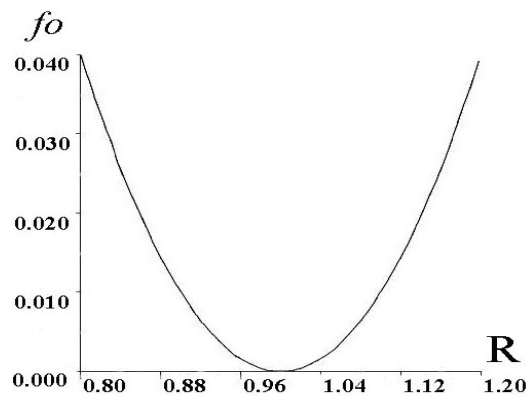


Fig. 1. The computation results graph of the coefficient problem with  $R = a / a_0$  the control parameter relative to the thermal diffusivity coefficient

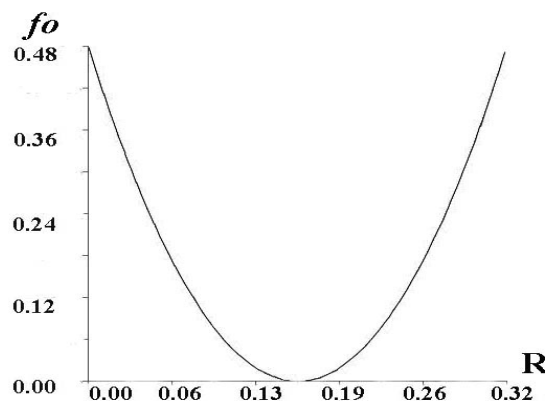


Fig. 2. The computation results graph of the coefficient problem with  $R = \lambda$  the control parameter relative to the thermal conductivity coefficient

The developed algorithm for solving the coefficient problem can be considered satisfactory, since its version using exact input data absolutely coincides with the exact result of the analytical solution, and the errors in the computational results of the recovered causal characteristics, wherein included the input data error, approximately equal the output data error.

### Conclusions

The solution of the inverse coefficient problem in the proposed formulation is reduced to a direct determination of the functionals values sequences (5) in simulation models (3) and the computation of the minimal carriers in them  $J_{\min}$ . The determination procedure of  $J_{\min}$  can be implemented by simple sorting or by changing the sign  $J^*(a) \cdot J^*(b)$  on the segment of  $R=a, R=b$ , where for the linear functional value (5) ( $a < b$ ). It is clear that  $J^*(R) = 0$  a separated segment  $R \in [a, b]$  has a root. The values refinement of this root can be realized with any preassigned accuracy in dependence (8) or, for example, by the chords or tangents method.

It should be noted that the partition of the total time interval into independent intervals with the solution of inverse problems in each of them according to the scheme indicated above allows determining the unknown parameters value as temperature functions  $T_{p,1}(T)$ . Therefore, the subsequent stage of processing experimental data is to construct the temperature dependences  $\lambda_{p,1}(T), Cv(T)$  in the form of certain polynomial expansions of one degree or another by the method of mathematical planning and regression analysis. At this stage, to verify and establish the adequacy, it is advisable to use a discrete nonlinear SM within a full space-time interval.

### References

1. Роуч П. Вычислительная гидромеханика. М.: Мир, 1980. 616 с.
2. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. М.: Мир, 1982. 296 с.
3. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. СПб.: БХВ-Петербург, 2002. 600 с.
4. Parallel processing systems / Edited by David J. Evans. Cambridge University Press, 1982. 416 p.
5. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1981. 304 с.
6. Иващенко В.П., Швачич Г.Г., Шмукин А.А. Параллельные вычисления и прикладные задачи металлургической теплофизики. *Системні технології: регіональний збірник наукових праць*. Дніпропетровськ, 2008. № 3(56). С. 123 – 138.
7. Иващенко В.П., Швачич Г.Г., Ткач М.А. Перспективы применения сетевого интерфейса InfiniBand в многопроцесорных вычислительных системах при решении задач с расширяемой областью вычисления. *Системні технології: Регіональний міжвузовський збірник наукових праць*. Дніпропетровськ, 2014. № 2(91). С. 3 – 9.
8. Ильченко К. Д., Чеченев В. А., Иващенко В. П., Терещенко В. С. Теплофизические свойства промышленных материалов: Справочник. Днепропетровск: Січ, 1999. 152 с.

### Transliteration

1. Rouch P. Vychislitel'naya gidromekhanika. M.: Mir. 1980. 616 s.
2. Na Ts. Vychislitel'nyye metody resheniya prikladnykh granichnykh zadach. M.: Mir. 1982. 296 s.
3. Voevodin V.V., Voevodin Vl.V. Parallelnyye vychisleniya. SPb.: BKhV-Peterburg. 2002. 600 s.
4. Parallel processing systems / Edited by David J. Evans. Cambridge University Press, 1982. 416 p.
5. Kovenya V.M. Yanenko N.N. Metod rasshchepleniya v zadachakh gazovoy dinamiki. Novosibirsk: Nauka. Sib. otd-niye. 1981. 304 s.
6. Ivashchenko V.P., Shvachych G.G., Shmukin A.A. Parallelnyye vychisleniya i prikladnyye zadachi metallurgicheskoy teplofiziki. Sistemni tekhnologii: regionalniy zbirnik naukovikh prats. Dnipropetrovsk. 2008. № 3(56). S. 123 – 138.
7. Ivashchenko V.P., Shvachych G.G., Tkach M.A. Perspektivy primeneniya setevogo interfeysa InfiniBand v mnogoprotseornykh vychislitelnykh sistemakh pri reshenii zadach s rasshiryayemoy oblasti vychisleniya. Sistemni tekhnologii: Regionalniy mizhvuzovskiy zbirnik naukovikh prats. Dnipropetrovsk. 2014. № 2(91). S. 3 – 9.
8. Ilchenko K. D., Chechenev V. A., Ivashchenko V. P., Tereshchenko V. S. Teplofizicheskiye svoystva promyshlennykh materialov: Spravochnik. Dnepropetrovsk: Sich. 1999. 152 s.

УДК 539.3

А.Г. ШПОРТА, Т.С. КАГАДІЙ  
Національний ТУ «Дніпровська політехніка»

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЗАДАЧАХ ЕЛЕКТРОПРУЖНОСТІ

*Описано практичні потреби розв'язання проблем, які виникають під час моделювання контактних взаємодій. Вказано важливість розробки методів розрахунку цих взаємодій, а також вивчення конкретних контактних задач. Розроблено асимптотичний метод, що дозволяє побудувати доцільне рівняння апроксимації та оцінити застосування різноманітних гіпотез для розрахунку напружено-деформованого стану елементів модельної задачі.*

*Висвітлюється актуальність застосування активних (насамперед п'єзоелектричних та п'єзоелектромагнітних) матеріалів у якості функціональних частин різноманітних електронних пристроїв, а також пов'язані з цим питаннями проблеми. Зроблено висновок про ефективність використання запропонованого методу для аналізу різноманітних задач математичної фізики.*

*Ключові слова: перенесення навантаження, метод збурень, теорія пружності, в'язкопружність, нелінійність, двовимірні задачі електропружності, п'єзоелектрики.*

А.Г. ШПОРТА, Т.С. КАГАДІЙ  
НТУ «Дніпровская политехника»

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

*Описаны практические потребности решения проблем, которые возникают в процессе моделирования контактных взаимодействий. Указана важность разработки методов расчета этих взаимодействий, а также изучения конкретных контактных задач. Разработан асимптотический метод, который позволяет построить подходящее уравнение аппроксимации и оценить применение различных гипотез для расчета напряженно-деформированного состояния элементов модельной задачи.*

*Освещается актуальность применения активных (в первую очередь пьезоэлектрических и пьезоэлектромагнитных) материалов в качестве функциональных частей различных электронных устройств, а также связанные с этим вопросы проблемы. Сделан вывод об эффективности использования предложенного метода для анализа различных задач математической физики.*

*Ключевые слова: перенос нагрузки, метод возмущений, теория упругости, вязкоупругость, нелинейность, двумерные задачи электроупругости, пьезоелектрики.*

А.Н. SHPORTA, T.S. KAGADIY  
National TU Dnipro Polytechnic

## MATHEMATICAL MODELING IN PROBLEMS OF ELECTRIC ELASTICITY

*The practical needs of solving problems that arise in the process of modeling contact interactions are described. The importance of developing methods for calculating these interactions, as well as the study of specific contact problems, is indicated. The developed asymptotic method is considered, which allows one to construct a reasonable (reasonable) equation of approximation and evaluate the application of various hypotheses to calculate the stress-strain state of the elements of a model problem. The circle of analytical solutions for nonlinear elasticity and linear viscoelasticity theory problems was expanded by means of elaborating perturbation method.*

*The elaborated method allows to pass from the solution of the complex mixed challenges of mechanics to the consecutive solution of potential theory problems of which is the most developed section of mathematical physics. The solutions of a row of new complex challenges received thanks to offered approach give the chance to analyze intense the deformed condition of bodies with supporting elements. These results can be used in engineering calculations of the pile bases and the bases.*

*It highlights the relevance of the use of active (primarily piezoelectric and piezoelectromagnetic) materials as functional parts of various electronic devices, as well as problems related to this issue. In this case, as a small parameter in the asymptotic analysis, it was suggested to consider the ratio of the rigidity characteristics of the material. the effectiveness of the method depends on whether it is possible to formulate the corresponding boundary-value problems for the basic equations. It is shown that this can indeed be done and, consequently, the boundary-value problems of the theory of elasticity for plane orthotropic bodies are reduced to successively solvable problems of potential theory. In this paper, an attempt is made to generalize the above method to two-dimensional problems of electroelasticity. As a model problem, a flat homogeneous anisotropic plate, where two mutually perpendicular planes of elastic symmetry pass through each point.*

*The conclusion is made about the effectiveness of using the proposed method for analyzing various problems of mathematical physics.*

*Keywords: loading transfer, perturbation method, elasticity theory, viscoelasticity, nonlinearity, spatial and flat problem, piezoelectrics.*

### **Постановка проблеми**

Сучасні конструкції та механізми мають комплекс складних властивостей. Агресивна середовище і використання новітніх технологій зумовлюють необхідність робити попередні оцінки напружено-деформованого стану конструкції. Для цього можуть бути використані відповідні аналітичні розв'язки задач. Моделі для пошуку таких розв'язків мають важливі позитивні якості (простота, наочність), але не можуть достатньо чітко визначити область застосування.

Передача зусиль і тисків від одних деталей до інших відбувається при їх взаємному зіткненні. Тому проблема моделювання контактних взаємодій має особливе значення для машинобудування та будівництва через те, що такі моделі характеризують процеси руйнування і довговічності, міцності, зносостійкості конструкцій і споруд. Необхідність у вирішенні цих питань, яка проявилася на практиці, зумовила важливість розробки методів розрахунку контактних взаємодій, а також дослідження деяких певних контактних задач [1-3].

Активні матеріали, перш за все п'єзоелектричні і п'єзоелектромагнітні, часто використовуються в якості функціональних частин різних електронних пристроїв (датчики, перетворювачі і виконавчі механізми включно). Це пов'язано з тим, що такі матеріали здатні змінювати свою форму під дією електричного або магнітного поля. У багатьох випадках розміри згаданих пристроїв надзвичайно малі, але, тим не менш, вони можуть піддаватися впливу дуже великих механічних, електричних і магнітних полів. Крім того, ці пристрої зазвичай виготовляються з елементів, які можуть бути виготовлені з різних матеріалів (п'єзоелектричні або п'єзоелектромагнітні елементи, електроди і т. д.).

Разом з цим, розв'язання крайових (граничних) задач із урахуванням анізотропії пружної середовища пов'язано з додатковими труднощами. У випадку прямолінійної анізотропії доводиться розглядати пару зв'язаних аналітичних функцій, що залежать від різноманітних комплексних змінних. Для середовища з криволінійною анізотропією безпосереднє застосування методів теорії аналітичних функцій взагалі виявляється неможливим.

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Під час розв'язання різного роду задач, що відносяться до теорії пружності, широко використовуються методи малого параметра (фізичного або геометричного). Дана тема досить важлива і розглядалася різними авторами, але в зв'язку зі складністю постановки, задачі, як і раніше, є актуальними.

У працях [4-5] задачі про передачу навантаження розв'язуються чисельно-аналітичними методами.

Застосування п'єзоелектриків в сучасній техніці змушує дослідників розглядати електромагнітопружність як єдину науку, яка об'єднує електродинаміку, теорію магнетизму і механіку суцільного середовища, які практично вивчалися окремо. Це пов'язано з тим, що при деформації деяких матеріалів на їх поверхнях з'являються електричні заряди, пропорційні деформації. Але, виявляється, не можна нехтувати і зворотним ефектом, який проявляється виникненням механічної напруги при наявності впливу електричного поля [6].

Ці труднощі вдається подолати у деяких спеціальних випадках (мала анізотропія, спеціальний закон зміни пружних властивостей, тощо), при цьому відповідна задача для ізотропної середовища приймається, зазвичай, за еталон простоти. Згідно з цим підходом асимптотичний аналіз рівнянь теорії пружності для ортотропних тіл виконується з використанням параметрів, які характеризують анізотропію матеріалу.

### **Мета дослідження**

Контактні задачі безпосередньо відносяться до завдань машинобудування і будівництва, так як вони визначають процеси зносу, міцності, руйнування і довговічності конструкцій і споруд.

Урахування реальних властивостей матеріалу, таких, як криволінійна анізотропія призводить до значних математичних труднощів. Тому потреба в аналітичних рішеннях дуже значна.

Аналітичні рішення дозволяють визначити правильність отриманих іншими методами результатів, досліджувати особливі точки.

Оскільки ізотропні матеріали в електропружності не представляють інтересу, природно, що особливу увагу слід приділити анізотропним матеріалам. У цьому випадку в якості малого параметра в асимптотичному аналізі було запропоновано розглянути співвідношення характеристик жорсткості матеріалу. Щоб врахувати можливі залежності між компонентами вектора переміщення і швидкістю їх зміни за координатами, пропонується ввести афінні перетворення, які залежать від зазначеного малого параметра. Форма цих перетворень показує, що розв'язки відповідних систем рівнянь, отримані для



асимптотичного інтегрування, мають різні властивості. Це проявляється в різниці порядків компонентів, а також в різній швидкості зміни розв'язків.

Розв'язки крайових задач слід знаходити у вигляді суперпозиції компонентів, які відповідають цим типам напружено-деформованого стану.

В даній статті запропоновано застосовувати для розв'язання задач електропружності асимптотичний метод.

#### Викладення основного матеріалу дослідження

У згаданих вище випадках наближені аналітичні розв'язки допомагають знайти розв'язки задач з якісними характеристиками, отримати асимптотику, аналізувати особливі точки і часто є підставою для чисельних розрахунків. У зв'язку з цим необхідно узагальнити підхід до розв'язання плоских і просторових задач пружності на основі кінцевої деформації або фізично нелінійної теорії пружності. Завдяки використанню розробленого методу дослідження, розширюється коло задач нелінійної та лінійної теорії пружності (в'язкопружність), які можна розв'язувати аналітичними методами.

Спочатку, при використанні методу збурень відштовхуються від рівнянь рівноваги в переміщеннях. Вводиться малий параметр фізичного характеру, необхідний при асимптотичному інтегруванні системи. Щоб зрозуміти можливі співвідношення між компонентами вектора переміщень і швидкостями їх зміни за координатами, необхідно ввести афінні перетворення змінних (залежні від малого параметру).

Розглянемо задачу, коли через кожную точку однорідної анізотропної пластини проходять дві взаємно перпендикулярні площини пружної симетрії. Робиться припущення, що ці площини перпендикулярні відповідно декартовим координатним осям  $x, y$ . Отримаємо наступні рівняння рівноваги, електростатики, електропружного стану та співвідношення Коші:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial y} - \frac{\partial Y_y}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$e_x = s_{11}^D \sigma_x + s_{12}^D \sigma_y + g_{11}^{\sigma_0} D_x, \quad e_y = s_{21}^D \sigma_x + s_{22}^D \sigma_y + g_{12}^{\sigma_0} D_x, \quad \gamma_{xy} = s_{66}^D \tau_{xy} + g_{26}^{\sigma, D} D_y, \\ Y_x = -g_{11}^{\sigma, D} \sigma_x - g_{12}^{\sigma, D} \sigma_y + \beta_{11}^{\sigma} D_x, \quad Y_y = -g_{26}^{\sigma, D} \tau_{xy} + \beta_{22}^{\sigma} D_y, \quad (3)$$

$$e_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad e_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}. \quad (4)$$

Тут  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  – нормальні дотичні напруження;  $D_x, D_y$  і  $Y_x, Y_y$  – компоненти вектора індукції та напруженості електричного поля;  $s_{ij}$  – коефіцієнти деформації тілі, що вимірюються при постійній індукції електричного поля;  $g_{kj}^{\sigma, D}$  – п'єзоелектричні модулі деформації та напруженості, що вимірюються при постійних напруженнях індукції;  $\beta_{kl}^{\sigma}$  – коефіцієнти діелектричної сприйнятливості, що вимірюються при постійних напруженнях;  $U, V$  – компоненти вектора переміщення пластини. З першого рівняння системи (2) випливає, що існує деяка скалярна функція  $\varphi = \varphi(x, y)$ , така, що

$$D_1 = D_x = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad D_2 = D_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Розв'язання тієї чи іншої крайової задачі може бути зведене до інтегрування системи рівнянь

$$U_{xx} + \varepsilon u_{yy} + \varepsilon m V_{xy} - (a_{11} - \varepsilon a_{26}) \varphi_{xy} = 0, \\ \varepsilon V_{xx} + q V_{yy} + \varepsilon m U_{xy} + \varepsilon a_{26} \varphi_{xx} - q a_{12} \varphi_{yy} = 0, \\ -(a_{11} - \varepsilon a_{26}) U_{xy} + \varepsilon a_{26} V_{xx} - q a_{12} V_{yy} + \varepsilon b_{22} \varphi_{xx} + b_{11} \varphi_{yy} = 0, \quad (5)$$



$$\varepsilon = \frac{G}{B_1}, \quad q = \frac{B_2}{B_1}, \quad m = 1 + \frac{\nu_2 B_1}{G} = 1 + \frac{\nu_1 B_2}{G},$$

$$a_{11} = g_{11}^{\sigma,D} + \nu_2 g_{12}^{\sigma,D}, \quad a_{26} = g_{26}^{\sigma,D}, \quad a_{12} = g_{12}^{\sigma,D} + \nu_1 g_{11}^{\sigma,D},$$

$$b_{22} = a_{26}^2 + \beta_{22}^{\sigma} \frac{\sigma}{G}, \quad b_{11} = g_{11}^{\sigma,D} a_{11} + g_{12}^{\sigma,D} a_{12} \frac{B_2}{B_1} + \beta_{11}^{\sigma} \frac{\sigma}{B_1}$$

при відповідних граничних умовах. Компоненти тензора напружень та вектора напруженості у цьому випадку записуються наступним чином:

$$\sigma_1 = B_1(u_x + \nu_2 V_y - a_{11} \varphi_y), \quad \sigma_2 = B_2(\nu_1 u_x + V_y - a_{12} \varphi_y)$$

$$\tau = G(u_y + V_x + a_{26} \varphi_x);$$

$$\mathcal{E}_1 = -B_1 a_{11} u_x - B_2 a_{12} V_y + B_1 b_{11} \varphi_y; \quad (6)$$

$$\mathcal{E}_2 = -G a_{26} u_y - G a_{26} V_x + G b_{22} \varphi_x.$$

Тут  $\sigma_1 = \delta \sigma_x$ ,  $\sigma_2 = \delta \sigma_y$ ,  $\tau = \delta \tau_{xy}$ ,  $Y_1 = \delta Y_x$ ,  $Y_2 = \delta Y_y$ ,  $B_1 = \frac{E_1 \delta}{1 - \nu_1 \nu_2}$ ,  $B_2 = \frac{E_2 \delta}{1 - \nu_1 \nu_2}$ ,  
 $G = G^* \delta$ ,  $\delta$  – товщина пластини. Індеси  $x, y$  у рівняннях (5) і співвідношеннях (6) позначають диференціювання за координатами;  $E_1, E_2$  – модулі пружності вздовж головних напрямків  $x, y$ ;  $G_x$  – модуль зсуву;  $\nu_1, \nu_2$  – коефіцієнти Пуассона. У реальних ортотропних матеріалах величина  $\varepsilon = \frac{G}{B_1}$

завжди значно менша за одиницю. Співвідношення  $q = \frac{B_2}{B_1}$  може бути різним ( $q \leq 1$  або  $q \geq 1$ ), але завжди залишається більшим за  $\varepsilon$ . Тому величину  $\varepsilon$  можна розглядати як малий параметр при асимптотичному інтегруванні системи (5). Значення  $q$  у подальшому будемо покладати близьким до одиниці. Введемо наступні перетворення:

$$\xi_1 = \alpha \varepsilon^{\frac{1}{2}} x, \quad \eta_1 = y, \quad u = U^{(1)}, \quad V = \varepsilon^{\frac{3}{2}} V^{(1)}, \quad \varphi = \varepsilon^{\frac{3}{2}} \varphi^{(1)}, \quad (7)$$

$$\xi_2 = x, \quad \eta_2 = \beta \varepsilon^{\frac{1}{2}} y, \quad u = \varepsilon^{\frac{3}{2}} U^{(2)}, \quad V = V^{(2)}, \quad \varphi = \varepsilon^2 \varphi^{(2)}, \quad (8)$$

В процесі механічного навантаження п'єзоматеріалів, коли граничні умови задаються у напруженнях, переміщеннях або їх комбінаціях, розв'язки відповідних крайових задач слід представляти у вигляді суперпозиції розв'язків цих двох типів напружено-деформованого стану:

$$u = u^{(1)} + u^{(2)}, \quad V = V^{(1)} + V^{(2)}, \quad \varphi = \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}.$$

Під час пошуку функцій  $u^{(n)}$ ,  $V^{(n)}$ ,  $\varphi^{(n)}$  ( $n = 1, 2$ ) у вигляді ряду за степенями параметра  $\varepsilon$ , необхідно обрати відповідні асимптотичні послідовності. Вид асимптотичної послідовності визначається структурою рівнянь (5) та порядком за  $\varepsilon$  відхилю у крайових умовах, що виникає після розв'язання задачі у нульовому наближенні ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Щоб урахувати усі можливі випадки, ці функції будемо визначати у вигляді рядів по параметру  $\varepsilon^{1/2}$  (з перетворень (7), (8) видно, що рядів за меншими степенями параметра  $\varepsilon$  виникнути не може):

$$U^{(n)} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} U^{n,j}, \quad V^{(n)} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} V^{n,j}, \quad \varphi^{(n)} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{n,j} \varphi^{n,j} \quad (n = 1, 2) \quad (9)$$

Коефіцієнти  $\alpha$ ,  $\beta$  також представимо у вигляді рядів за параметром  $\varepsilon^{1/2}$ , причому  $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ , а коефіцієнти  $\alpha_j, \beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) знаходяться з тих самих умов, що й для пружних матеріалів, а саме: у кожному з наближень у лівій частині рівнянь для визначення основних функцій  $U^{1,j}, V^{2,j}$  повинні залишатися оператори Лапласа цих функцій, а у першій частині повинні бути відсутніми компоненти вектора переміщень або їх похідні (у пружній задачі для визначення основних функцій у кожному з наближень праві частини обертаються на нуль. Вирази для допоміжних функцій  $V^{1,j}, U^{2,j}, \varphi^{1,j}, \varphi^{2,j}$  при цьому знаходяться простим інтегруванням.

Підставимо перетворення (7) у систему (5) і використаємо відповідні розкладання. Після розщеплення отриманої системи за параметром  $\varepsilon^{1/2}$  прийдемо до нескінченної системи рівнянь відносно функцій  $U^{1,j}, V^{1,j}, \varphi^{1,j}$  ( $j = 0, 1, \dots$ ). При цьому будемо вважати, що  $\alpha_{11} \sim \varepsilon \beta_{11}$ ,  $b_{22} \sim \varepsilon^2 b_{11}$ ,  $a_{12} \sim a_{26} \sim \varepsilon^3 b_{11}$ . Наведемо ці рівняння для перших трьох наближень ( $j = 0, 1, 2$ ).

$$\begin{aligned} U_{\xi\xi}^{1,0} + U_{\eta\eta}^{1,0} = 0, \quad qV_{\eta\eta}^{1,0} + mU_{\xi\eta}^{1,0} = 0, \quad -a_{11}U_{\xi\eta}^{1,0} + \varepsilon b_{11}\varphi_{\eta\eta}^{1,0} = 0, \\ U_{\xi\xi}^{1,1} + U_{\eta\eta}^{1,1} = 0, \quad qV_{\eta\eta}^{1,1} + mU_{\xi\eta}^{1,1} = 0, \quad -a_{11}U_{\xi\eta}^{1,1} + \varepsilon b_{11}\varphi_{\eta\eta}^{1,1} = 0, \\ U_{\xi\xi}^{1,2} + U_{\eta\eta}^{1,2} - a_{11}\varphi_{\xi\eta}^{1,0} = 0, \quad qV_{\eta\eta}^{1,2} + mU_{\xi\eta}^{1,2} = 0, \quad -a_{11}U_{\xi\eta}^{1,2} + \varepsilon b_{11}\varphi_{\eta\eta}^{1,2} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

Тут і надалі прийнято, що диференціювання (індекси  $\xi, \eta$ ) виконується за тими координатами  $\xi_n, \eta_n$  ( $n = 1, 2$ ), індекси яких співпадають з першими верхніми індексами функцій. Після підстановки перетворень (8) у систему (5) з використанням відповідних розкладань і розщеплення за параметром  $\varepsilon^{1/2}$  отримаємо нескінченну систему рівнянь відносно функцій  $U^{2,j}, V^{2,j}, \varphi^{2,j}$  ( $j = 0, 1, \dots$ ), які визначають розв'язок другого типу. З системи (11) витікає, що у перших двох наближеннях ( $j = 0, 1$ ) основні функції  $U^{1,j}$  ( $V^{2,j}$  для напруженого стану другого типу) визначаються з рівнянь Лапласа (при  $q = 1$  або очевидній заміні однієї зі змінних), а допоміжні функції знаходяться простим інтегруванням через основні. У третьому наближенні ( $j = 2$ ) і далі функції  $U^{1,j}$  (напружений стан першого типу) визначають з рівняння Пуассона за умови відомої правої частини, що містить тільки знайдену у попередніх наближеннях функцію  $\varphi$ . Аналогічна ситуація має місце у напруженому стані другого типу для функції  $V^{2,j}$ , але починаючи з четвертого наближення ( $j = 3$ ) і далі. Вирази для переміщень, напружень та напруженостей (6) представлені у вигляді рядів. Напружено-деформовані стани першого та другого типів пов'язані через граничні умови. Оскільки основні функції  $U^{2,j}, V^{2,j}$  визначаються з рівнянь Лапласа (Пуассона), то ефективність методу залежить від того, чи вдається сформулювати відповідні крайові задачі для знаходження цих функцій.

**Аналіз граничних умов.** Нехай на лінії, що обмежує (наприклад,  $x = const$ ,  $V^{2,j}$ ) відомі нормальні  $\sigma_I$  та дотичні  $\tau$  напруження  $\sigma_I = f_1(y)$ ,  $\tau = f_2(y)$ ,  $\varphi = f_3(y)$ .

Робимо припущення, що  $f_n(y)$  можуть бути представлені рядами

$$f_n(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} f_{n,j}(y), \quad (n = 1, 2).$$

Тоді на лінії, що обмежує  $x = const$   $\sigma_{1,j} = f_{1,j}$ ,  $\tau_j = f_{2,j}$ ,  $\varphi_j = f_{3,j}$ .

Використовуючи результати попереднього пункту, приходимо до інтегрування рівнянь напруженого стану першого типу ( $j = 0$ ) при наступних граничних умовах для основних функцій:

$$U_{\xi}^{1,0} = (B_1 \varepsilon^{1/2})^{-1} f_{1,0}, \quad V_{\xi}^{2,0} = G^{-1} f_{2,0} - U_{\eta}^{1,0}.$$

Аналогічним чином неважко отримати крайові умови для функцій  $U^{1,0}$ ,  $V^{2,0}$  у випадку мішаної задачі. Аналіз граничних умов показує, що для всіх крайових задач граничні умови у нульовому наближенні ( $j=0$ ) напруженого стану першого типу не залежать ні від більш високих наближень, ні від розв'язків рівнянь напруженого стану другого типу. Тому функція  $U^{1,0}$  знаходиться незалежно від інших. Далі простим інтегруванням через  $U^{1,0}$  визначаються функції  $\varphi^{1,0}$ . Після чого повністю визначаються граничні умови для знаходження функції  $V^{2,0}$  також із рівняння Лапласу. Після розв'язання цього рівняння і знаходження функцій  $U^{2,0}$  і  $\varphi^{2,0}$ , отримаємо граничні умови для знаходження функції  $U^{1,1}$ .

**Висновки та перспективи подальшого розвитку.** Для пружних (в'язкопружних) ортотропних матеріалів розроблено асимптотичний метод [2,3], який дозволив звести дослідження задач для тіла, що механічно деформується до послідовного розв'язання крайових задач теорії потенціалу. В даній роботі вказаний метод узагальнюється на двовимірні задачі електропружності.

Ефективність методу залежить від того, чи можливо сформулювати відповідні крайові задачі для основних рівнянь. Показано, що це дійсно можна зробити, отже, крайові задачі теорії електропружності для плоских ортотропних тіл зводяться до задач теорії потенціалу, які можна послідовно розв'язувати. Цей факт відкрив нові можливості для дослідження багатьох практично важливих задач, які не мали не лише аналітичних, а й чисельних розв'язків.

#### Список використаної літератури

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости: монография, Москва: Наука, 1980. 303 с.
2. Маневич Л.И., Павленко А.В., Коблик С.Г. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела: монография. Донецк: Вища школа, 1982. 152 с.
3. Маневич Л.И., Павленко А.В. Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов: монография. Київ: Вища школа, 1991. 131 с.
4. Острик В.І. Вдавлювання напівбезмежного штампа в пружну смугу за наявності тертя і зчеплення. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. Львів, 2008. №1. с. 138 – 149.
5. Острик В.І., Улітко А.Ф. Кругова міжфазна тріщина за умови фрикційного контакту поверхонь. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. Львів, 2004. №1. с. 84 – 94.
6. Партон В.В., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических электропроводных тел. Москва: монография. Наука, 1988. 472 с.

#### References

1. Galin L.A. Kontaknyie zadachi teorii uprugosti i vyazkouprugosti: monograflya, Moskva: Nauka, 1980. 303 s
2. Manevich L.I., Pavlenko A.V., Koblik S.G. Asimptoticheskie metodyi v teorii uprugosti ortotropnogo tela: monograflya. Donetsk: Vischa shkola, 1982. 152 s.
3. Manevich L.I., Pavlenko A.V. Asimptoticheskiy metod v mikromehanike kompozitsionnyih materialov: monograflya. KiYiv: Vischa shkola, 1991. 131 s.
4. Ostryk V.I. Vdavliuvannia napivbezmezhnogo shtampa v pruzhnu smuhu za naiavnosti tertia i zchepлення. *Mat. metody ta fiz.-mekh. polia*. Lviv, 2008. №1. s. 138 – 149.
5. Ostryk V.I., Ulitko A.F. Kruhova mizhfazna trishchyna za umovy fryktsiinoho kontaktu poverkhon. *Mat. metody ta fiz.-mekh. polia*. Lviv, 2004. №1. s. 84 – 94.
6. Parton V.V., Kudryavtsev B.A. Elektromagnitoupругost pezoelektricheskikh elektroprovodnyih tel. Moskva: monograflya. Nauka, 1988. 472 s.

УДК 656.13

Е.В. ШВЕЦОВА, В.Н.ШУТЬ  
Брестский государственный технический университет

### АЛГОРИТМ СОСТАВЛЕНИЯ ПЛАНА ПЕРЕВОЗОК НА ГОРОДСКИХ ЛИНИЯХ В ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ БЕСПИЛОТНЫМИ ТРАНСПОРТНЫМИ СРЕДСТВАМИ

*В данной статье описывается система беспилотного городского пассажирского транспорта на базе мобильных автономных роботизированных транспортных средств и рассматривается алгоритм составления непротиворечивого плана перевозок с помощью такой системы, “перевозок по требованию пассажиров”. Актуальность предложенной системы обусловлена изменяющимися социальными и экономическими условиями в крупных населенных пунктах, такими как рост численности городского населения, увеличение количества транспортных средств на автомобильных дорогах, удорожание проезда как в частном, так и в общественном транспорте, а также современными возможностями научного и технического прогресса, такими как интеллектуальные транспортные системы, позволяющие контролировать, прогнозировать, анализировать дорожно - транспортную обстановку. Целью статьи является описание интеллектуальной информационно-транспортной системы способной повысить качество и эффективность пассажирских перевозок в «загруженной» городской транспортной среде, а также принести экономические выгоды за счет снижения потерь при их использовании. В предложенной работе рассматривается математическая модель компьютерного управления беспилотной транспортной системой. Результатом работы является описание алгоритма организации городских “перевозок по требованию пассажиров” с использованием транспортных средств, управляемых компьютерными интеллектуальными системами без участия человека. Модель, описанная в работе, позволяет сделать городские пассажирские перевозки более гибкими и адаптивными к непрерывно меняющимся условиям насыщенной дорожно-транспортной среды средних и крупных городов, неся при этом не только экономическую, но и экологическую пользу, обеспечивая существенный рост пропускной способности городской транспортной системы, высокий уровень комфортабельности поездки для пассажира. Новизна работы состоит в использовании перманентно выполняющегося компьютерно-информационного управления транспортом без участия человека, обеспечивающего как сбор и обработку данных, так и анализ, и принятие решений.*

*Ключевые слова:* транспортно-информационная управляющая система, беспилотный пассажирский транспорт, инфобус, интеллектуальная транспортная система, информационный транспорт, организация перевозок, адаптивная транспортная система.

A. Shviatsova, V. Shuts  
Brest state technical university

### THE ALGORITHM OF DEVELOPMENT A DELIVERY PLAN ON URBAN LINES IN AN INTELLEAGENT MANAGEMENT SYSTEM OF UNMANNED VEHICLES

*This article describes an unmanned urban passenger transport system based on mobile autonomous robotic vehicles and discusses an algorithm for developing a consistent transportation plan using such a system, “traffic on demand of passengers.” The relevance of the proposed system is due to the changing social and economic conditions in large settlements, such as the growth of the urban population, the increase in the number of vehicles on the roads, the increased cost of travel in both private and public transport, as well as modern possibilities of scientific and technological progress, such as intelligent transport systems that allow you to monitor, predict, analyze the traffic situation. The purpose of the article is to describe an intelligent information and transport system that capable of improving the quality and efficiency of passenger traffic in a “loaded” urban transport environment, and also bring economic benefits by reducing losses in their use. The proposed paper deals with a mathematical model of computer control of an unmanned transport system. The result of the work is a description of the algorithm for organizing*

*urban "carriage on passenger demand" using vehicles controlled by computer intelligent systems without human participation. The model described in the paper allows us to make urban passenger transportation more flexible and adaptive to the continuously changing conditions of saturated road and transport environment of medium and large cities, while delivering not only economic but also environmental benefits, providing a significant increase in throughput of the urban transport system, high level of comfort for the passenger. The novelty of the work lies in the use of computer-information transport management that is performed permanently without the participation of a person, providing both data collection and processing, analysis and decision-making.*

*Keywords: transport-information management system, unmanned passenger transport, infobus, intelligent transport system, information transport, transport organization, adaptive transport system.*

### Постановка проблемы

Рост числа личного автомобильного транспорта привел к перенасыщенности общественных магистралей и регулярному появлению транспортных коллапсов на них, что делает использование частного автомобиля мало эффективным. Решением этих проблем в средних городах и мегаполисах является активное развитие общественного транспорта. Однако стоимость эксплуатации такого транспорта постоянно растет из-за ограниченности выбора транспортных средств нужной вместимости, отсутствия точной информации о пассажиропотоке в режиме реального времени, из-за ошибок человеческого фактора и т.д., что делает большинство современных систем городского транспорта планово-убыточными, а недорогую транспортировку больших масс людей в пределах черты города невыполнимой. Тем не менее, городские власти вынуждены осуществлять поддержку общественного транспорта во избежание транспортного коллапса.

В постиндустриальную эпоху интеллектуальные информационные технологии стали использоваться практически во всех сферах человеческой деятельности, включая и транспортные системы. Примером тому служат появление в крупных городах интеллектуальных транспортных систем, управляемых из единого информационного центра, предоставляющего информацию о дорожной обстановке с фото и видеорежимом, наличии мест на стоянках и т.д. [1]. Такие системы направлены на повышение мобильности и гибкости современных городских пассажирских перевозок, а также несут в себе значительные экономические выгоды, так как по производительности способны не уступать метро и в тоже время ниже по стоимости изготовления и обслуживания.

В предлагаемой работе описан алгоритм осуществления городских пассажирских перевозок с помощью интеллектуальной информационно-транспортной системы, основанной на использовании роботизированных беспилотных транспортных средств малой вместимости, называемых инфобусами, которые управляются из единого координирующего информационного центра. Система призвана разгрузить перенасыщенную обстановку на городских автомагистралях путем предоставления провозной способности, сопоставимой с метро.

### Анализ последних достижений и публикаций

Только следующие реализованные за последние годы европейские проекты по созданию интеллектуальных систем для транспорта позволяют судить о важности внедрения информационных технологий в данную сферу:

- ADASIS (Advanced Driver Assistant Systems Interface Specification) – использование точных картографических данных в средствах навигации для получения водителем прогноза ситуации на дороге впереди по ходу движения [2];
- AIDE (Adaptive Integrated Driver-Vehicle Interface) – использование специального электронного оборудования и программного обеспечения, позволяющего концентрировать внимание водителя в момент обгона и отключения функций приборов в салоне автомобиля, отвлекающих внимание во время совершения сложного маневра [3];
- SAFESPOT – программа поддержки появления большего количества «умных» машин на «умных» дорогах [4]

Осуществляется широкое применение интеллектуальных нейросетевых алгоритмов для автоматизированного управления транспортом, о чем свидетельствуют следующие научные работы: D.Thomas, B. Kooor "A Genetic Algorithm Approach to Autonomous Smart Vehicle Parking system" 2018 г.; Kurniawan, Sulistiyo, & Wulandari, "Genetic Algorithm for Capacitated Vehicle Routing Problem with considering



traffic density", 2015; Potuzak "Time Requirements of Optimization of a Genetic Algorithm for Road Traffic Network Division Using a Distributed Genetic Algorithm", 2014; Mulloorakam & Nidhiry, "Combined Objective Optimization for Vehicle Routing Using Genetic Algorithm", 2019; Wang, Ning, & Schutter, "Optimal Trajectory Planning and Train Scheduling for Urban Rail Transit Systems", 2016.

### Формулирование цели исследования

Целью данной работы является описание математической модели построения плана перевозки пассажиров по их требованию на маршруте с помощью интеллектуальной информационно-транспортной системы.

Основной транспортной единицей в предложенной информационно-транспортной системе является беспилотный электрокар небольшой вместимости до тридцати человек, называемый инфобусом [5]. Движение инфобусов (рис.1) управляется единым координирующим сервером, который может объединять в зависимости от интенсивности пассажиропотока транспортные средства в кассеты, состоящие из различного числа транспортных единиц: один инфобус, два, три и т.д. Механические соединения в кассете отсутствуют, т.к. являются виртуальными, как в автопоездах [6]. На маршрут высылается такое число инфобусов, чтобы суммарная вместимость их была равна или незначительно превышала объем пассажиропотока. Пассажир, оплачивая проезд на остановке отправления через терминал системы, указывает пункт, в который он намеревается ехать. Этими действиями пассажир регистрирует свое появление в системе с требованием на доставку в нужный ему пункт назначения. Доставка пассажира в пункт назначения должна быть преимущественно безостановочная, либо с минимальным числом остановок от пункта отправления и до пункта назначения.

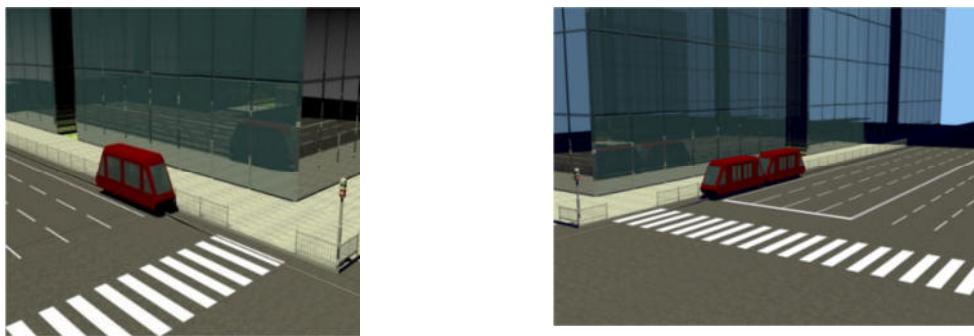


Рис.1. Автопоезд из одного и двух инфобусов на перекрестке

Движение инфобусов по маршруту должно быть бесконфликтным, т.е. инфобусы не должны задерживать друг друга, и осуществляться от Накопителя 1 к Накопителю 2, расположенных в конечных пунктах маршрута (рис.2).

Движение инфобусов осуществляется в улично-дорожных условиях города при влиянии в той или иной степени со стороны других участников движения. Уменьшить такое влияние на движение инфобусов можно за счет выделения специальной полосы движения, как это делается для общественного транспорта типа автобуса или троллейбуса. Полоса движения инфобусов непосредственно примыкает к тротуару и отделена от него ограждением, а от основной дороги слева сплошной линией (рис.1). В некоторых случаях может использоваться легкое ограждение в форме установленных на сплошной линии пластмассовых конусов.

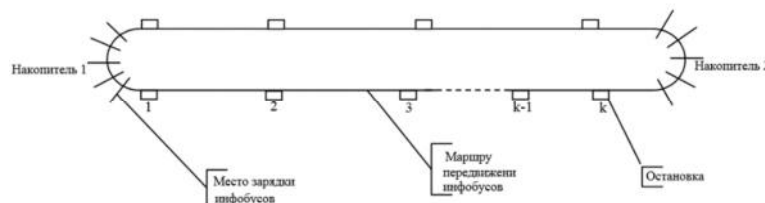


Рис.2.Схема маршрута движения инфобусов



Таким образом, данная информационно-транспортная система включает в себя [6-11]:

- - единый координирующий сервер;
- - выделенная полоса движения;
- - остановочные пункты, снабженные терминалами оплаты и сбора информации;
- - парк беспилотных транспортных средств, называемых инфобусами, фиксированной небольшой емкости, связанных с координирующим сервером, команды которого обрабатываются транспортным средством.

Функционирование системы осуществляется следующим образом [6-11]:

- - пассажир на остановочном пункте, оплачивая проезд через терминал, указывает также и пункт назначения;
- - координирующий сервер, принимая информацию с терминалов, формирует матрицу корреспонденций  $M_z, Z=1,2,\dots$ , в которой фиксируется каждый прибывающий на остановку пассажир с его требованием на его доставку;
- - по накоплении определенного числа пассажиров в матрице корреспонденций  $M_z, Z=1,2,\dots$  координирующий сервер формирует план доставки пассажиров, отправляя инфобусы для развозки пассажиров по станциям назначения;
- - интервалы времени движения между остановками и время стоянки на остановках известны.

План доставки пассажиров - процедура последовательной отправки инфобусов из Накопителя 1 (Рис.2) на маршрут с присвоением ему индивидуального номер и указанием множества станций назначения. На информационном табло остановки, а также на дисплее инфобуса отображается список пунктов назначения, на которые инфобус повезет пассажиров. Пассажиры, пункт назначения которых совпадает с набором остановок инфобуса, садятся в транспортное средство. Остальные ждут другого инфобуса.

Каждый элемент  $m_{ij}$  матрицы корреспонденций  $M_z, Z=1,2,\dots$  равен числу пассажиров, следующих с остановки  $i$  на остановку  $j, i, j = \overline{1, k}$ . Здесь  $k$  число остановок одного направления маршрута (рис.2). Элементы матрицы  $M_z$  на главной диагонали и под главной диагональю равны нулю, т.к. пассажир не может следовать на остановку, на которой он сел, и не может следовать в обратном направлении [7,8,9,10]:

$$M_Z = \begin{pmatrix} 0 & m_{12} & m_{13} & \dots & \dots & m_{1j} & \dots & m_{1k} \\ 0 & 0 & m_{23} & \dots & \dots & m_{2j} & \dots & m_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & m_{i+1} & \dots & m_{ij} & \dots & m_{ik} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & m_{k-1k} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

План развозок для текущей матрицы корреспонденций должен обеспечивать бесконфликтность движения инфобусов на маршруте, т.е. инфобусы не должны задерживать друг друга. Начало разработки плана развозок пассажиров наступает в момент, когда один из элементов матрицы  $M_z$  начинает удовлетворять условию (2) и, следовательно, все элементы матрицы  $M_z$  к началу развозки меньше объема инфобуса  $V$ :  $m_{ij} = a * V, a \in (0.8, 1), i = \overline{1, k-1}, j = \overline{1, k}$ .

План развозок составляется последовательно для каждой строки. Выполнение плана развозок осуществляется в той же последовательности. Для строки  $i$  число пассажиров на  $i$ -ой остановке подсчитывается по формуле:  $m_i = \sum_{j=i+1}^k m_{ij}, i = \overline{1, k-1}$ .

Для любой  $i$ -ой строки матрицы корреспонденций  $M_z$  возможно сразу указать нижнюю  $n_{ниг}$  и верхнюю  $n_{иг}$  границы необходимого числа всех инфобусов для вывоза всех пассажиров с  $i$ -ой остановки:

$$n_{i_{гр}} = \left\lceil \frac{m_i}{V} \right\rceil = \left\lceil \frac{\sum_{j=i+1}^k m_{ij}}{V} \right\rceil, \quad n_{i_{вг}} = k - i, \quad i = \overline{1, k-1}$$

### Описание основного материала исследования

План движения для инфобусов составляется для каждой строки  $i$  матрицы корреспонденций  $M_z$ , которая содержит информацию о требованиях пассажиров, едуших с остановки  $i$  на дальнейшие остановки.

Для гарантии бесконфликтности движения транспортных средств их отправка будет осуществляться сначала к самым дальним пунктам назначения от остановки следования пассажир, потом к ближним:  $j = k, k-1, \dots, i+1$ . Каждый инфобус при этом получает свой порядковый номер  $\dot{n}_i = \overline{1, n_i}$ ,  $n_{i_{вг}} \leq n_i \leq n_{i_{гр}}$ ,  $n_i \in N$ ,  $n_i$  - число инфобусов, необходимое для вывоза всех пассажиров с остановки  $i$  на все остановки маршрута  $i+1, i+2, \dots, k$ . Причем такой инфобус  $n_i$  имеет некоторое множество доступных ему для развозки остановок, в дальнейшем оно будет именоваться *потенциальным множеством остановок* инфобуса  $\dot{n}_i$  и обозначаться  $J_{\dot{n}_i, P}$ . В это множество будут входить все остановочные пункты маршрута, располагающиеся за начальным пунктом отправления инфобуса  $\dot{n}_i$ , за исключением тех остановок, на которые предыдущие инфобусы, развозящие с этой же остановки, уже доставили пассажиров. Однако осуществлять доставку пассажиров такой инфобус будет не во все пункты этого множества, а лишь в некоторые из них, которые составят *реальное множество остановок* инфобуса  $\dot{n}_i$ , обозначаемое  $J_{\dot{n}_i}$  и являющееся подмножеством потенциального множества остановок  $J_{\dot{n}_i, P}$ , то есть  $J_{\dot{n}_i} \subset J_{\dot{n}_i, P}$ .

Так, если инфобус под номером 1 проследует с первой остановки только на три последние остановки:  $k, k-1, k-2$  (Рис.2), а инфобус под номером 2 на  $k-3$  и  $k-4$ , то потенциальное множество  $J_{1P} = \{2, 3, \dots, k\}$ , а реальное множество остановок  $J_1 = \{k-2, k-1, k\}$ . Для следующего за ним с этой же остановки второго инфобуса потенциальное множество остановок будет определяться как  $J_{2P} = \{2, 3, \dots, k\} \setminus J_1 = \{2, 3, \dots, k-3\}$ , а реальное множество остановок будет  $J_2 = \{k-4, k-3\}$ ,  $J_2 \subset J_{2P}$ .

Можно обобщить, что потенциальное множество остановок произвольного инфобуса  $\dot{n}_i$ ,  $\dot{n}_i = \overline{1, n_i}$  при развозке с остановки  $i$  есть разность множества всех остановок маршрута, начиная с остановки  $i+1$ , и множества, являющимся совокупностью остановок, на которые предыдущие инфобусы осуществили

$$\text{развозку: } J_{\dot{n}_i, P} = \{i+1, i+2, \dots, k\} \setminus \bigcup_{l=1}^{\dot{n}_i-1} J_l.$$

Реальное множество остановок, на которые рассмотренный первый инфобус повезет пассажиров, определяется вместимостью транспортного средства и может быть описано условиями:

$$\begin{cases} m_{1k} + m_{1k-1} + m_{1k-2} \leq V \\ m_{1k} + m_{1k-1} + m_{1k-2} + m_{1k-3} > V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=k-2}^k m_{1j} \leq V \\ \sum_{j=k-3}^k m_{1j} > V \end{cases}. \quad (1)$$

В целях описания алгоритма вводится понятие точной верхней грани потенциального множества остановок инфобуса  $\dot{n}_i$ , опирающееся на математическое определение супремума множества: точная верхняя грань или наименьшая верхняя грань числового множества  $M(\sup M)$  в математике называется наименьший элемент множества  $M$ , который больше или равен всех элементов этого множества [12]. Остановка с наибольшим порядковым номером потенциального множества остановок инфобуса  $\dot{n}_i$ ,  $\dot{n}_i \in \{1, 2, \dots, n_i\}$  всегда будет являться точной верхней границей множества  $J_{\dot{n}_i, P}$  и обозначаться  $\sup J_{\dot{n}_i, P}$ , всегда входя в реальное множества остановок инфобуса  $\dot{n}_i$ . Будут ли в это множество входить другие остановки, зависит от объема инфобуса и количества следующих на них пассажиров.

Также для определения реального множества остановок  $J_{\dot{n}_i}$  инфобуса  $\dot{n}_i$ ,  $\dot{n}_i \in \{1, 2, \dots, n_i\}$  в алгоритме используется величина  $\Delta_{\dot{n}_i}$ , которая представляет число остановок, вошедших в реальное множество остановок инфобуса  $\dot{n}_i$ ,  $\dot{n}_i \in \{1, 2, \dots, n_i\}$ , без остановки  $\sup J_{\dot{n}_i P}$ , или  $\Delta_{\dot{n}_i} = |J_{\dot{n}_i}| - 1$ . Так для инфобуса 1 из примера  $\Delta_1 = |2| - 1 = 2$ , а для инфобуса 2  $\Delta_2 = |2| - 1 = 1$ .

Для инфобуса 1 потенциальное множество остановок  $J_{1P}$ , величина  $\Delta_1$ , а также реальное множество остановок  $J_1$  определяется из условий:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{1P} = \{2, 3, \dots, k\} \\ \sum_{j=\sup J_{1P}-\Delta_1}^{\sup J_{1P}} m_{1j} \leq V, \quad \sum_{j=\sup J_{1P}-\Delta_1-1}^{\sup J_{1P}} m_{1j} > V \\ J_1 = \{j | \sup J_{1P} - \Delta_1 \leq j \leq \sup J_{1P}\} \end{array} \right. \quad (2) \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} J_{1P} = \{2, 3, \dots, k\} \\ \sum_{j=K-2}^K m_{1j} \leq V, \quad \sum_{j=K-2-1}^K m_{1j} > V \\ J_1 = \{j | K - 2 \leq j \leq K\} \end{array} \right. \quad (3)$$

Аналогичным образом можно определить реальное множество остановок  $J_2$  для инфобуса 2. Инфобус 2 может проследовать на все прочие остановки маршрута, не вошедшие в множество остановок инфобуса номер 1. Следовательно, множество потенциальных остановок инфобуса 2  $J_{2P} = \{2, 3, \dots, k\} \setminus J_1 = \{2, 3, \dots, k-3\}$ . Соответственно  $\sup J_{2P} = k-3$ . Реальное множество остановок для второго инфобуса определится условиями:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{1k-3} + m_{k-4} \leq V \\ m_{1k-3} + m_{k-4} + m_{k-5} > V \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=k-4}^{k-3} m_{1j} \leq V \\ \sum_{j=k-5}^{k-3} m_{1j} > V \end{array} \right.$$

Для  $J_{2P}$ ,  $J_2$  и  $\Delta_2$  можно записать:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{2P} = \{2, 3, \dots, k\} \setminus J_1 \\ \sum_{j=\sup J_{2P}-\Delta_2}^{\sup J_{2P}} m_{1j} \leq V, \quad \sum_{j=\sup J_{2P}-\Delta_2-1}^{\sup J_{2P}} m_{1j} > V \\ J_2 = \{j | \sup J_{2P} - \Delta_2 \leq j \leq \sup J_{2P}\} \end{array} \right. \quad (4) \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} J_{2P} = \{2, 3, \dots, k\} \setminus \{k-2, k-1, k\} = \{2, \dots, k-3\} \\ \sum_{j=(k-3)-1}^{k-3} m_{1j} \leq V, \quad \sum_{j=(k-3)-2}^{k-3} m_{1j} > V \\ J_2 = \{j | k-4 \leq j \leq k-3\} \end{array} \right. \quad (5)$$

Из (5) следует, что  $J_2 = \{k-4, k-3\}$ . Суть формирования реальных множеств остановок  $J_1$  и  $J_2$  инфобусов 1 и 2 продемонстрирована на следующем примере. Вместимость инфобуса  $V = 25$ . На определенный момент есть матрица  $M_z$ , у которой элементы  $m_{1k-5}, m_{1k-4}, m_{1k-3}, m_{1k-2}, m_{1k-1}, m_{1k}$  имеют соответственно значения 5, 9, 12, 7, 8, 11:

$$M_z = \begin{pmatrix} 0 & m_{12} & \dots & \dots & 5 & 9 & 12 & 7 & 8 & 11 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & m_{2k} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & m_{ik} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & m_{k-lk} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Для первого инфобуса, развозящего пассажиров с первой остановки:  $J_{1P} = \{2, \dots, k\}$  Следовательно,  $\sup J_{1P} = k$  и согласно условиям (2),(3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=\sup J_{1p}-\Delta_1}^{\sup J_{1p}} m_{1j} = \sum_{j=k-2}^k m_{1j} = 7 + 8 + 11 = 25 \leq 25 \\ \sum_{j=\sup J_{1p}-\Delta_1-1}^{\sup J_{1p}} m_{1j} = \sum_{j=k-2-1}^k m_{1j} = 12 + 7 + 8 + 11 = 38 > 25 \end{array} \right. \Rightarrow J_1 = \{k-2, k-1, k\}, \Delta_1 = 2.$$

Для второго инфобуса  $J_{2p} = \{2, 3, \dots, k\} \setminus J_1 = \{2, 3, \dots, k-3\}$ ,  $\sup J_{2p} = k-3$  и согласно условиям (4),(5):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=\sup J_{2p}-\Delta_2}^{\sup J_{2p}} m_{1j} = \sum_{j=(k-3)-1}^{k-3} m_{1j} = 12 + 9 = 21 \leq 25 \\ \sum_{j=\sup J_{2p}-\Delta_2-1}^{\sup J_{2p}} m_{1j} = \sum_{j=(k-3)-1-1}^{k-3} m_{1j} = 5 + 12 + 9 = 26 > 25 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} J_2 = \{k-4, k-3\} \\ \Delta_2 = 1 \end{cases}.$$

Для произвольного инфобуса  $\dot{n}_i$ ,  $\dot{n}_i \in \{1, 2, \dots, n_i\}$  потенциальное множество остановок  $J_{\dot{n}_i p}$ , величина  $\Delta_{\dot{n}_i}$  и реальное множество остановок  $J_{\dot{n}_i}$  определяются из следующих условий:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{\dot{n}_i p} = \{i+1, \dots, k\} \setminus \bigcup_{l=0}^{\dot{n}_i-1} J_l, J_0 = \emptyset, \dot{n}_i \in \{1, 2, \dots, n_i\}, \\ \Delta_{\dot{n}_i} = \{0, 1, 2, \dots\}, \sum_{j=\sup J_{\dot{n}_i p}-\Delta_{\dot{n}_i}}^{\sup J_{\dot{n}_i p}} m_{1j} \leq V, \sum_{j=\sup J_{\dot{n}_i p}-\Delta_{\dot{n}_i}-1}^{\sup J_{\dot{n}_i p}} m_{1j} > V, \\ J_{\dot{n}_i} = \{j \mid j \in N_0, \sup J_{\dot{n}_i p} - \Delta_{\dot{n}_i} \leq j \leq \sup J_{\dot{n}_i p}\}. \end{array} \right. \quad (6)$$

Согласно системе условий (6) формируется совокупность реальных множеств остановок  $\bigcup J_{\dot{n}_i}$ ,  $\dot{n}_i \in \{1, 2, \dots, n_i\}$  инфобусов для  $i$ -ой строки матрицы корреспонденций  $M_z$ ,  $Z=1, 2, \dots$ . Данная совокупность является планом развозки для  $i$ -ой строки матрицы корреспонденций  $M_z$ . Действительно, индекс  $\dot{n}_i$ ,  $\dot{n}_i \in \{1, 2, \dots, n_i\}$  реального множества остановок  $J_{\dot{n}_i}$  указывает на порядковый номер инфобуса, а содержание множества  $J_{\dot{n}_i}$  указывает на номера остановок, на которых данный инфобус будет останавливаться. Совокупность  $\bigcup_{i=1}^{k-1} J_{\dot{n}_i}$ ,  $\dot{n}_i \in \{1, 2, \dots, n_i\}$  соответствует плану развозки для всей текущей матрицы корреспонденций  $M_z$ ,  $Z=1, 2, \dots$ . Развозка пассажиров с  $i$ -ой остановки осуществляется через последовательную отправку инфобусов по нарастанию их порядковых номеров, т.е.  $1, 2, \dots, n_i$ .

### Выводы

Представлен алгоритм работы транспортно-информационной системы нового типа, способной осуществлять автономно либо с минимальным участием человека сбор информации о заявках пассажиров, формировать и осуществлять план их развозки посредством использования роботизированных беспилотных транспортных средств. Сбор информации, обработка информации и принятие решений в такой системе протекают постоянно и составляют ее основу. Единичным транспортным средством в системе является беспилотный электрокар-инфобус. Работа выполнена при поддержке Европейского гранта «Grant Agreement Number 2013-4550/001-001» по проекту Ve-Safe – Белорусская сеть безопасных дорог совместно с тремя европейскими университетами: университет Сапиенца (Рим), Афинский политехнический университет и университет Лаффборо (Англия).

### Список литературы

1. Государственное казенное учреждение города Москвы Центр организации дорожного движения Правительства Москвы [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.gucodd.ru/index.php/2011-09-01-0502-01/2012-04-11-08-43-56> (дата обращения : 07.02.2016).
2. ADASIS Advancing map-enhanced driver assistance systems URL: <https://adasis.org/> (дата обращения: 30.05.2019).
3. AIDE - Adaptive Integrated Driver-vehicle InterfacE [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.aide-eu.org/> (дата обращения: 30.05.2019).
4. Cooperative vehicles and road infrastructure for road safety [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.safespot-eu.org/> (дата обращения: 30.05.2019).
5. Пролиско, Е., Шуть, В. Динамическая модель работы транспортной системы «ИНФОБУС». Материалы научно-технической конференции «Искусственный интеллект. Интеллектуальные транспортные системы», Брест, Беларусь, 2016, с. 49-54.
6. Проект Safe Road Trains for the Environment (SARTRE) [Электронный ресурс].URL: [http://en.wikipedia.org/wiki/Safe\\_Road\\_Trains\\_for\\_the\\_Environment](http://en.wikipedia.org/wiki/Safe_Road_Trains_for_the_Environment)(дата обращения:19.02.2019 )
7. Касьяник, В., Шуть, В. 2012. Мобильный помощник водителя в выборе стратегии вождения. Искусственный интеллект, 3, Донецк: ИПИИ «Наука і освіта». с. 253-259.
8. Vasili Shuts, Valery Kasyanik. 2011. Mobile Autonomous robots – a new type of city public transport. Transport and Telecommunication.12(4). p. 52-60.
9. Persia, L., Barnes J., Shuts V., Prolisko E., Kasjanik V., Kapskii D., Rakitski A. High capacity robotic urban cluster-pipeline passengers transport. Материалы Международной научно-технической конференции «Искусственный интеллект. Интеллектуальные транспортные системы (Be-Safe 2016)», посвященной 50-летию Брестского государственного технического университета, (25-28 мая), Брест, 2016, с. 62-68.
10. Пролиско Е.Е., Шуть В.Н. Математическая модель работы «ИНФОБУСОВ». Матеріали VII-ої Українсько-польської науково-практичної конференції «Електроніка та інформаційні технології (ЕЛІТ-2015)»,(27-30 серпня) , Львів-Чинадієво, 2015 . с. 59-62.
11. Шуть, В., Пролиско, Е. 2016. Альтернативный метро транспорт на базе мобильных роботов. Штучний інтелект, 2 (72). с. 170-175.
12. Rudin, W. 1976. Chapter 1. The Real and Complex Number Systems. Principles of Mathematical Analysis. McGraw-Hill: p. 4

### References

1. Gosudarstvennoe kazennoe uchrezhdenie goroda Moskvyyi Tsentr organizatsii dorozhnogo dvizheniya Pravitelstva Moskvyyi [Elektronnyiy resurs]. – Rezhim dostupa: <http://www.gucodd.ru/index.php/2011-09-01-0502-01/2012-04-11-08-43-56> (data obrascheniya : 07.02.2016).
2. ADASIS Advancing map-enhanced driver assistance systems URL: <https://adasis.org/> (data obrascheniya: 30.05.2019).
3. AIDE - Adaptive Integrated Driver-vehicle InterfacE [Elektronnyiy resurs]. – Rezhim dostupa: <http://www.aide-eu.org/> (data obrascheniya: 30.05.2019).
4. Cooperative vehicles and road infrastructure for road safety [Elektronnyiy resurs]. – Rezhim dostupa: <http://www.safespot-eu.org/> (data obrascheniya: 30.05.2019).
5. Prolisko, E., Shut, V. Dinamicheskaya model raboty transportnoy sistemyi «INFOBUS». Materialyi nauchno-tehnicheskoy konferentsii «Iskusstvennyiy intellekt. Intellektualnyie transportnyie sistemyi», Brest, Belarus, 2016, s. 49-54.
6. Proekt Safe Road Trains for the Environment (SARTRE) [Elektronnyiy resurs].URL: [http://en.wikipedia.org/wiki/Safe\\_Road\\_Trains\\_for\\_the\\_Environment](http://en.wikipedia.org/wiki/Safe_Road_Trains_for_the_Environment)(data obrascheniya:19.02.2019 )
7. Kasyanik, V., Shut, V. 2012. Mobilnyiy pomoschnik voditelya v vyibore strategii vozhdeniya. Iskusstvennyiy intellekt, 3, Donetsk: IPII «Nauka i osvita». c. 253-259.

8. Vasili Shuts, Valery Kasyanik. 2011. Mobile Autonomous robots – a new type of city public transport. *Transport and Telecommunication*.12(4). p. 52-60.
9. Persia, L., Barnes J., Shuts V., Prolisko E., Kasjanik V., Kapskii D., Rakitski A. High capacity robotic urban cluster-pipeline passengers transport. *Materialy Mezhdunarodnoy nauchno-tehnicheskoy konferentsii «Iskusstvennyiy intellekt. Intellektualnyie transportnyie sistemyi (Be-Safe 2016)», posvyaschennoy 50-letiyu Brestskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta, (25-28 maya), Brest, 2016* , s. 62-68.
10. Prolisko E.E., Shut V.N. Matematicheskaya model raboty «INFOBUSOV». *Materiali VII-oYi UkraYinsko-polskoYi naukovo-praktyichnoYi konferentsiYi «Elektronika ta infarmatsiyni tehnologiYi (EIIT-2015)»,(27-30 serpnya)* , Lviv-ChinadiEvo, 2015 . c. 59-62.
11. Shut, V., Prolisko, E. 2016. Alternativnyiy metro transport na baze mobilnyih robotov. *Shtuchniy intellekt*, 2 (72). s. 170-175.
12. Rudin, W. 1976. Chapter 1. The Real and Complex Number Systems. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill: p. 4.



---

---

## ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРІЯ ТА КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ

---

---

УДК 004.92

А.С. БОГАЦЬКА, Д.В. ВОРОНЦОВА, А.О. ДАШКЕВИЧ,  
Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут"

### 3D РЕКОНСТРУКЦІЯ ПАМ'ЯТНИКА АРХІТЕКТУРИ НА ОСНОВІ НАБОРІВ ФОТОГРАФІЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

*Виконана 3D реконструкція пам'ятника архітектури маєтку Шидловських засобами таких програмних пакетів, як Autodesk Maya, Zbrush, ImageModeler, Agisoft PhotoScan, додатку для запікання карт Crazy Bump та Adobe Photoshop CS6 на основі аналізу робіт сучасних спеціалістів віртуальної історичної реконструкції. В ході дослідженні розроблялись проектні рішення моделі, її матеріалів, освітлення сцени та налаштування камер. Отримана 3D модель може використовуватись у просвітницьких цілях, здійснювати наочну репрезентацію для збереження і візуалізації історико-культурної спадщини.*

*Ключові слова: моделювання, 3D модель, віртуальна історична реконструкція, маєток Шидловських*

А.С. БОГАЦЬКАЯ, Д.В. ВОРОНЦОВА, А.А. ДАШКЕВИЧ  
Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

### 3D РЕКОНСТРУКЦІЯ ПАМ'ЯТНИКА АРХІТЕКТУРИ НА ОСНОВЕ НАБОРОВ ФОТОГРАФИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

*Выполнена 3D реконструкция памятника архитектуры усадьбы Шидловских с помощью таких программных пакетов, как Autodesk Maya, Zbrush, ImageModeler, Agisoft PhotoScan, приложение для запекания карт Crazy Bump и Adobe Photoshop CS6 на основе анализа современных специалистов виртуальной исторической реконструкции. В ходе исследования разрабатывались проектные решения модели, ее материалов, освещения сцены и настройки камер. Полученная 3D модель может использоваться в просветительских целях, осуществлять наочную репрезентацию для сохранения и визуализации историко-культурного наследия.*

*Ключевые слова: моделирование, 3D модель, виртуальная историческая реконструкция, усадьба Шидловских*

A.S. BOGATSKA., D.V. VORONTSOVA, A.O. DASHKEVICH  
National technical university «Kharkiv polytechnic institute»

### 3D RECONSTRUCTION OF HISTORICAL BUILDING BASED ON SETS OF IMAGES

*Historical and cultural heritage plays a special role in preservation of the past. The architectural component, which includes memorable places, estates, monuments, museum exposition, creates a memory studio that not only reflects the past of the country, but also forms the contemporary youth consciousness. One of the widespread types of architectural historical complex reconstruction is computer graphics. Due to digital display of objects one is able to see and evaluate the shapes and difficulty of hysterical buildings architecture, to feel the spirit and epoch. One of the most famous of Kharkiv region historical buildings is Shidlovsky estate, owners of which were foreman of Kharkiv and Izym Sloboda cossack regiments. The gradual destruction of the then of Sloboda architecture masterpiece had lasted until 2018, until the fire occurred in the main building, as a result of which all the overlapping and roofing elements burned out. It was establish, that Shidlovsky building wasn't to be subject to virtual historical reconstruction. So creating of the above mentioned 3D model is quite relevant.*

*Within the frame work of the project design solutions were developed as far issue about sequence of modal development, its materials, scene lighting and camera settings. Relying on the program pack Image Modeller the setting points of the house were identify. With the help of Autodesk Maya program the biggest part of the model was created. Elements of decorations were made by burning heights cards method with the help of CrazyBump application. Another part of decorations were executed in photogrammetry technique with the help of Agisoft PhotoScan program. The final step was represented by the processes of textures and visualization of scene.*

*As the result, a 3D model of the architectural building Shidlovsky estate was received on the basis of the analysis of paper of the best modern specialists in the virtual-historical reconstruction field. The received 3D model can be used in educational process, namely to preserve and visualize historical and cultural heritage.*

*Key words: modelling, 3D model, virtual and historical reconstruction, Shidlovsky estate*

### Постановка проблеми

Особисту роль у збереженні минулого відіграє історико-культурна спадщина. Архітектурний компонент, до якого відносяться пам'ятні місця, пам'ятники, маєтки, монументи, меморіальні комплекси, музейні експозиції, створює студію пам'яті, яка не лише відображає минуле країни, а й формує сучасну свідомість молоді. Дуже важливо на сьогодні максимально зберегти та відновити історичні споруди.

Одним із розповсюджених видів реконструкції історичних архітектурних комплексів є комп'ютерна графіка. Саме за допомогою цифрового відображення об'єктів маємо сьогодні можливість побачити та оцінити форми, складність архітектури історичних споруд, відчуті настрої та епоху. Комп'ютерна модель об'єкта суттєво відрізняється за ступенем своєї автентичності від реконструкцій, виконаних дослідником «вручну» без допомоги комп'ютера на папері у вигляді малюнка або настільного макета. Останнім часом, успішний розвиток інформаційних технологій відкрив перед істориками, археологами, музеєзнавцями і іншими фахівцями-гуманітаріями нову сторінку в важливій справі збереження історико-культурної спадщини.

Однією з найвідоміших садиб Харківської області є маєток Шидловських, господарі якого були старшинами Харківського та Ізюмського слобідських козацьких полків (Рис.1а). За радянських часів садибний будинок був відданий в розпорядження сільськогосподарської школи, що кардинально змінило як зовнішнє, так і внутрішнє архітектурне оздоблення маєтку. Поступове руйнування деколи взірця слобожанської архітектури тривало аж до 2018-го року, доки в головній будівлі не сталася пожежа, в результаті якої вигоріли всі перекриття і покрівля (Рис.1б). Було виявлено, що хазяйський будинок Шидловських, не підлягав віртуальній історичній реконструкції. Отже створення 3D моделі вищевказаної будівлі сприятиме збереженню та візуалізації історико-культурної спадщини.



Рис. 1. Маєток Шидловських до і після пожежі

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Одним із розповсюджених видів реконструкції історичних архітектурних комплексів є комп'ютерна графіка. Саме за допомогою цифрового відображення об'єктів маємо сьогодні можливість побачити та оцінити форми, складність архітектури історичних споруд, відчуті настрої та епоху. Перші підходи до синтезу джерел з використанням програм тривимірного моделювання були сформульовані на рубежі 1980-1990-х рр. археологом П. Рейллі в ряді статей [1] і монографії «Археологія та інформаційний століття: глобальні перспективи» [2], він і став засновником напряму «віртуальна археологія» (англ. virtual archaeology, digital archaeology). На рубежі 1990-2000-х рр. дослідження з використанням тривимірних технологій в галузі історичної реконструкції з'являються на гуманітарних факультетах університетів США [3,4], в вузах Великобританії [5], а також Франції [6], Італії [7], Іспанії [8], Австрії [9] та інших країн. У своїй статті Дональд Сандрес наголошує на тому, що як колись фотографія стала невід'ємною частиною археологічного процесу, так і зараз 3D моделювання повинно стати основним методом, який потрібно використовувати для дослідів навчання і публікацій [10]. Число публікацій, присвячених застосуванню тривимірних технологій в історії і археології, все більш зростає, зростання інтересу до подібного роду тематики можна простежити за серією публікацій міжнародних наукових

співтовариств «History and computing»[11] та відомих журналів, таких як Archaeology magazine [12] і спеціалізованих журналів, таких як Virtual Retrospect [13], присвячених застосуванню технологій тривимірного моделювання в археологічних та історичних дослідженнях.

Командою науковців запропоновано метод автоматизованого планування точок зору та безпечних траєкторій вільного простору для отримання аерофотознімків для щільної монокулярної реконструкції [14]. Відповідні дослідження здійснюються і при реконструкції підводних об'єктів [15].

Одним з найважливіших досягнень у текстуруванні 3-d об'єктів є запропонований спосіб створення текстури на довільній поверхні. Підхід полягає у тому, що створивши шматок 2D текстури програма неодноразово розподіляє її на поверхню, поки модель не буде повністю покрита. Вона відтворюється за допомогою композиційних операцій під час попередньої обробки або безпосередньо з поверхнею під час виконання. Цей підхід допомагає зменшити вимоги для текстур і потребує менше ресурсу пам'яті [16].

#### Мета дослідження

Метою досліджень було віртуальне відтворення пам'ятнику архітектури маєтку Шидловських засобами комп'ютерної графіки на основі аналізу робіт сучасних спеціалістів цифрової історичної реконструкції.

#### Викладення основного матеріалу дослідження

Першим етапом була досліджена та проаналізована предметна область. Мерчанський палац побудований із цегли й оштукатурений. В основі плану двоповерхового маєтку лежить витягнутий прямокутник з криволінійними торцями (Рис.2). Планування вздовж паркового фасаду анфіладне, з двостороннім розміщенням кімнат, в іншій частині — вільне, з приміщеннями криволінійної форми. У західному торці велика овальна зала з перекриттям на два яруси. Входи облаштовані з бокових фасадів, на перший поверх — через тамбури, на другий — по зовнішніх критих сходах.



Рис. 2. Вид зверху двоповерхового маєтку

Головний північний фасад палацу на поперечній осі акцентований портиком, пілони якого з трьох сторін оздоблені канелюрованими пілястрами з капітелями іонічного ордера, прикрашеними гірляндами (Рис 3). Фасади прикрашені рустами та скульптурними вазами на п'єдесталах у півциркульних нішах, барельєфними композиціями (Рис.4) над нішами та вікнами першого поверху, ліпними гірляндами під вікнами другого поверху торцевих стін.



Рис. 3. Фасад палацу

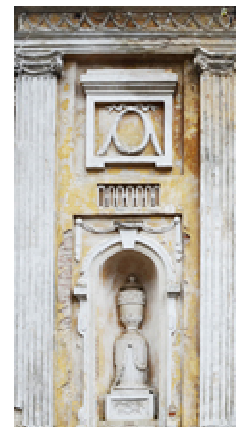


Рис. 4. Скульптурні вазы



Другим етапом було моделювання. Основними джерелами для реконструкції зовнішнього вигляду будівлі стали фотографічні матеріали. Даний тип джерел дуже специфічний і вимагає особливого підходу, особливо для вирішення завдань, пов'язаних з обчисленням розмірів будівлі та пропорційного співвідношення його частин. Фотоматеріали були представлені фотографіями садиби початку ХХ ст., а також більш пізнього часу, за якими можна відновити зовнішній вигляд будинку та сучасними знімками з дрону. Було вирішено побудувати основні форми використовуючи програму ImageModeler для створення множини опорних точок будівлі (Рис.5).

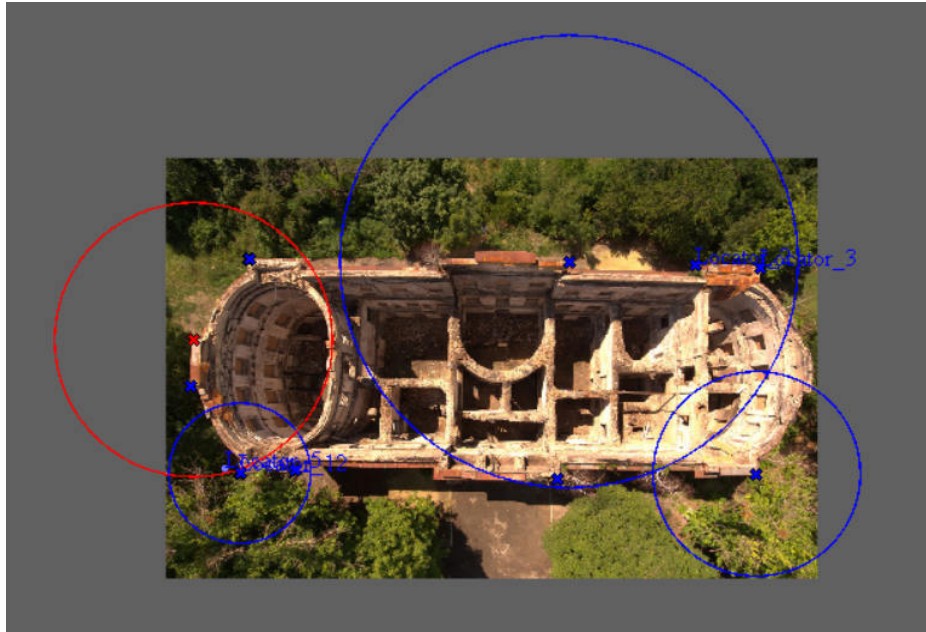


Рис. 5. Процес створення множини опорних точок будівлі

Розробка моделі мастки здійснювалась методами полігонального та сплайнового моделювання на основі визначених вимог засобами програмного комплексу Autodesk Maya (Рис. 6 а,б). Усі основні елементи були створені з примітивів і за допомогою основних інструментів таких як: Scale, Rotate, Move, DeleteFaces, ExtrudeEdge, SlideEdge .

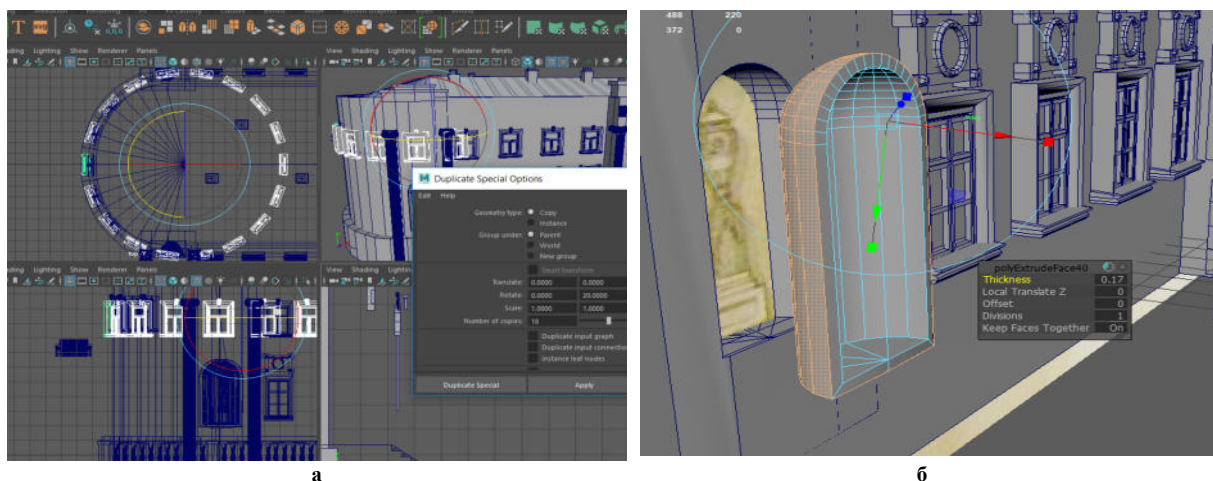


Рис. 6. Відтворення мастки засобами полігональної та сплайнової технік моделювання

Деякі елементи декору були змодельовані за допомогою методу запікання карт висот засобами програми CrazyBump. Ще частину елементів декору було виконано технікою фотограмметрії, а саме елементи ліпнини будівлі було відскановано програмою Agisoft PhotoScan та отримано відповідну геометрію.

Завершальним етапом були процеси текстурування та візуалізації сцени. Вибір рендеру Arnold сприяв використанню відповідних матеріалів. Щоб досягнути більшої реалістичності, були використані матеріали, створені з використанням текстури Bitmap. Було також створено освітлення у сцені засобами

світильника Ai Sky dome Light, який симулює освітлення з півсфери або купола, представляючи собою небо. Далі було виконано налаштування камер та здійснено рендер (Рис 7).



**Рис. 7. Рендер фінальної сцени**

### **Висновки**

Розроблено тривимірну модель будинку Шидловських, який є частиною історичного архітектурного ансамблю Слобожанщини, з використанням методів полігонального, сплайнового моделювання, методу запікання карт і техніки фотограмметрії. В ході роботи були застосовані такі програмні пакети, як Autodesk 3D Maya, Autodesk ImageModeler, додаток для запікання карт Crazy Bump, редактор графіки Adobe Photoshop CS6 та програма Agisoft PhotoScan. При моделюванні значну увагу було приділено детальності розробки моделі та досягненню максимальної реалістичності. Отримана 3D модель може використовуватись в просвітницьких цілях, здійснювати наочну репрезентацію для збереження і візуалізації історико-культурної спадщини.

### **Список використаної літератури**

1. Reilly P. Towards a virtual archaeology: Computer Applications in Archaeology: Oxford, 1990. P. 133–139.
2. Reilly P., Rahtz S. Archaeology and the information age: a global perspective. London, 1992.
3. Vote E. L. A New Methodology for Archaeological Analysis: Using Visualization and Interaction to Explore Spatial Links in Excavation Data :A dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of doctor of philosophy in special studies. Rhode Island, 2001:123.
4. Manuelian P. D. Virtual Pyramids — Real Research: The Giza Archives Project Goes Live Online: A Modern Journal of Ancient Egypt KMT.: Weaverville, 2005. Vol. 16 (3). P. 68–80.
5. Richard B., Denard H. The Pompey Project: Digital Research and Virtual Reconstruction of Rome's First Theatre: Journal of Computers and the Humanities. 2003. Vol. 37 (1). P. 129–140.
6. Wells, S., Frischer, B., et al., Rome Reborn in Google Earth," in CAA 2009. Making History Interactive. 37th Proceedings of the CAA Conference March 22-26, 2009: Williamsburg, Virginia 373-379.
7. Forte M., Pietroni E., Rufa C., Bizzarro A., Tilia A, Tilia S. DVR-Pompei: a 3D information system for the house of the Vettii in OpenGL environment: Proceedings of the 2001 Conference on Virtual Reality, Archeology, and Cultural Heritage, Glyfada, Greece, November 28–30. 2001. P. 307–314.
8. Leon A. G. La Génesis de un Museo del Guadalquivir del siglo XXI. Anastylosis virtual del valle del Guadalquivir en el siglo II d. C: La Baetica de Adriano: Virtual Archaeology Review. 2010. № 1. P. 27–37.
9. Abdelhafiz A., Zimmermann N., Eßer G., Mayer I. Generating a photo realistic virtual model for the large Domitilla-catacomb in Rome : 9th Conf. Optical 3-D Measurement Techniques, Vienna, July 1–3. 2009. P. 38–47.
10. Donald H. Sanders. Why do Virtual Heritage?: Archaeology magazine, March 13, 2008 [Электронный ресурс]. URL: <http://www.archaeology.org/online/features/virtualheritage>
11. Zherebyatev D.I., Konchakov R.B. Ispolzovanie tehnologiy sozdaniya 3-d-igr kak instrumenta sohraneniya i rekonstruktsii istoricheskikh pamyatnikov: Materialy H konf. assotsiatsii «Istoriya i kompyuter». – M: Tambov: Izd-vo Tamb. un-ta, 2006.
12. Powell E. A. The Past in High-Def. The world's ancient heritage is coming to your desktop in 3-D:

- Archaeology magazine, Volume 62 Number 3, May/June 2009 [Електронний ресурс]. URL: [http://www.archaeology.org/0905/etc/high\\_def.html](http://www.archaeology.org/0905/etc/high_def.html).
13. Archéovision. Publications dans l'environnement de la PFT3D ou bien de projets de recherche 3D auxquels la PFT3D a collaboré. [Електронний ресурс]. URL: <http://archeovision.cnrs.fr/spip.php?rubrique29>.
  14. . Steven M. Seitz, Noah Snavely Exploring Photo Collections in 3D: University of Washington. University of Washington, 2006.
  15. Benjamin Hepp Optimization for Aerial Multi-View Stereo Reconstruction: Zurich matthias niessner Plan3D: Technical University of Munich, Stanford University :Zurich.
  16. Prabhakar C. J. 3D Surface Reconstruction of Underwater Objects Department of Studies in Computer Science: International Journal of Computer Applications: National Conference on Advanced Computing and Communications - NCAAC, April Kuvempu University, Shangaraghatta-577451 Karnataka, India Praveen Kumar P U, 2012.

#### References

1. Reilly P. Towards a virtual archaeology: Computer Applications in Archaeology: Oxford, 1990. P. 133–139.
2. Reilly P., Rahtz S. Archaeology and the information age: a global perspective. London, 1992.
3. Vote E. L. A New Methodology for Archaeological Analysis: Using Visualization and Interaction to Explore Spatial Links in Excavation Data :A dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of doctor of philosophy in special studies. Rhode Island, 2001:123.
4. Manuelian P. D. Virtual Pyramids — Real Research: The Giza Archives Project Goes Live Online: A Modern Journal of Ancient Egypt KMT.: Weaverville, 2005. Vol. 16 (3). P. 68–80.
5. Richard B., Denard H. The Pompey Project: Digital Research and Virtual Reconstruction of Rome's First Theatre: Journal of Computers and the Humanities. 2003. Vol. 37 (1). P. 129–140.
6. Wells, S., Frischer, B., et al., Rome Reborn in Google Earth," in CAA 2009. Making History Interactive. 37th Proceedings of the CAA Conference March 22–26, 2009: Williamsburg, Virginia 373–379.
7. Forte M., Pietroni E., Rufa C., Bizzarro A., Tilia A, Tilia S. DVR-Pompei: a 3D information system for the house of the Vettii in openGL environment: Proceedings of the 2001 Conference on Virtual Reality, Archeology, and Cultural Heritage, Glyfada, Greece, November 28–30. 2001. P. 307–314.
8. Leon A. G. La Génesis de un Museo del Guadalquivir del siglo XXI. Anastylisis virtual del valle del Guadalquivir en el siglo II d. C: La Baetica de Adriano: Virtual Archaeology Review. 2010. № 1. P. 27–37.
9. Abdelhafiz A., Zimmermann N., Eßer G., Mayer I. Generating a photo realistic virtual model for the large Domitilla-catacomb in Rome : 9th Conf. Optical 3-D Measurement Techniques, Vienna, July 1–3. 2009. P. 38–47.
10. Donald H. Sanders. Why do Virtual Heritage?: Archaeology magazine, March 13, 2008 [Электронний ресурс]. URL: <http://www.archaeology.org/online/features/virtualheritage/>
11. Zherebyatev D.I., Konchakov R.B. Ispolzovanie tehnologiy sozdaniya 3-d-igr kak instrumenta sohraneniya i rekonstruktsii istoricheskikh pamyatnikov: Materialyi H konf. assotsiatsii «Istoriya i kompyuter». – M: Tambov: Izd-vo Tamb. un-ta, 2006.
12. Powell E. A. The Past in High-Def. The world's ancient heritage is coming to your desktop in 3-D: Archaeology magazine, Volume 62 Number 3, May/June 2009 [Електронний ресурс]. URL: [http://www.archaeology.org/0905/etc/high\\_def.html](http://www.archaeology.org/0905/etc/high_def.html).
13. Archéovision. Publications dans l'environnement de la PFT3D ou bien de projets de recherche 3D auxquels la PFT3D a collaboré. [Електронний ресурс]. URL: <http://archeovision.cnrs.fr/spip.php?rubrique29>.
14. . Steven M. Seitz, Noah Snavely Exploring Photo Collections in 3D: University of Washington. University of Washington, 2006.
15. Benjamin Hepp Optimization for Aerial Multi-View Stereo Reconstruction: Zurich matthias niessner Plan3D: Technical University of Munich, Stanford University :Zurich.
16. Prabhakar C. J. 3D Surface Reconstruction of Underwater Objects Department of Studies in Computer Science: International Journal of Computer Applications: National Conference on Advanced Computing and Communications - NCAAC, April Kuvempu University, Shangaraghatta-577451 Karnataka, India Praveen Kumar P U, 2012.



УДК 515:69.02

А. Ю. БРАЙЛОВ, В. И. ПАНЧЕНКО

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

### **АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОСНОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИЗМЕРЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ НЕДОСТУПНОЙ ТОЧКИ**

*В настоящем исследовании разработано аналитическое основание для предложенной геометрической модели бесконтактного определения координат недоступной точки объекта при заданном расположении геодезического оборудования. Аналитическое основание геометрической модели необходимо для создания алгоритма обработки результатов измерений. Выявлена проблема и определены первостепенные задачи. Суть проблемы заключается в противоречии между необходимостью разработать единое комплексное системное аналитическое основание (аналитическую модель) получения требуемого результата и наличием возможности определить только отдельные различные элементы аппарата измерения. Задачи исследования: 1. Создать адекватное аналитическое основание для разработанной геометрической модели. 2. Разработать алгоритмически корректную аналитическую модель для обработки результатов измерений экспериментального (эмпирического) определения координат недоступной точки объекта. 3. Доказать возможность практического использования разработанной аналитической модели. Выдвинута гипотеза: два визирных луча, описанные полученными уравнениями, пересекаются в некоторой точке тогда и только тогда, когда координаты произвольных точек на этих лучах станут равными. Аналитическое основание геометрической модели измерений параметров недоступной точки состоит из тринадцати блоков. Расчетная проверка разработанного аналитического основания выполнена на реальных экспериментальных данных. Для получения экспериментальных данных использовался геодезический прибор для измерения вертикальных и горизонтальных углов на местности (теодолит 2Т30П). С помощью нитяного дальномера зрительной трубы теодолита измеряются расстояния. В соответствии с разработанной геометрической моделью определены координаты четырех точек. Численные значения координат измеряются и вычисляются в миллиметрах. Доказана возможность и перспективность практического использования разработанной аналитической модели.*

*Ключевые слова: геометрическая модель, аналитическая модель, уравнение прямой в пространстве, точка, координаты, методика, измерение, оборудование.*

О. Ю. БРАЙЛОВ, В. І. ПАНЧЕНКО

Одеська державна академія будівництва та архітектури

### **АНАЛІТИЧНА ОСНОВА ГЕОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ ВИМІРЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ НЕДОСЯЖНОЇ ТОЧКИ**

*У даному дослідженні розроблена аналітична основа для запропонованої геометричної моделі безконтактного визначення координат недоступної точки об'єкту при заданому розміщенні геодезичного обладнання. Аналітична основа геометричної моделі необхідна для розроблення алгоритму оброблення результатів вимірювань. Виявлено проблему і визначені першочергові задачі. Суть проблеми полягає в наявності протиріччя між необхідністю розроблення єдиної комплексної системної аналітичної основи (аналітичної моделі) одержання потрібного результату та наявністю можливості визначити тільки окремі різні елементи апарату вимірювання. Задачі дослідження: 1. Створити адекватну аналітичну основу для розробленої геометричної моделі. 2. Розробити алгоритмічно коректну аналітичну модель для обробки результатів вимірювань експериментального (емпіричного) визначення координат недоступної точки об'єкта. 3. Довести можливість практичного використання розробленої аналітичної моделі. Висунуто гіпотезу: два візирних променя, описані отриманими рівняннями, перетинаються в деякій точці тоді і тільки тоді, коли координати довільних точок на цих променях стануть рівними. Аналітична основа геометричної моделі вимірювань параметрів недоступною точки складається з тринадцяти блоків. Розрахункова перевірка розробленої аналітичної основи виконана на реальних експериментальних даних. Для отримання експериментальних даних використовувався геодезичний прилад для вимірювання вертикальних і горизонтальних кутів на місцевості (теодоліт 2Т30П). За допомогою ниткового далекоміра зорової труби теодоліта вимірюються відстані. Відповідно до геометричної моделі визначені координати чотирьох точок. Числові значення координат вимірюються та розраховуються в міліметрах. Доведена можливість і перспективність практичного використання розробленої аналітичної моделі.*

*Ключові слова: геометрична модель, аналітична модель, рівняння прямої в просторі, точка, координати, методика, вимірювання, обладнання.*

A. Yu. BRAILOV, V. I. PANCHENKO  
Odessa State Academy of Civil Building and Architecture

### THE ANALYTICAL FOUNDATION THE GEOMETRICAL MODEL FOR THE MEASUREMENTS OF PARAMETERS OF AN INACCESSIBLE POINT

The present research deals with the development of the analytical foundation used in the proposed geometrical model for contactless definition of the coordinates of an inaccessible point of an object at given position of the geodetic equipment. The analytical foundation of geometrical model is needed for the development of an algorithm of processing the results of measurements. The problem is revealed and possible ways of its resolution are defined. The problem essence consists in the contradiction between a need to develop the uniform complex system analytical foundation (analytical model) to obtain the required result and the existing limited possibilities to define only certain particular elements of the device of measurement. Research problems: 1. To create an adequate analytical foundation for the developed geometrical model. 2. To develop an algorithmically correct analytical model for the processing of measured results of experimental (empirical) definition of coordinates of an inaccessible point of an object. 3. To prove a possibility of practical use of the developed analytical model. The underlying hypothesis is that two visible rays, described by the obtained equations, are crossed in some point if and only if the coordinates of points on these rays become the same. The analytical foundation of the geometrical model of measurements of parameters of an inaccessible point consists of thirteen blocks. Numerical verification of the developed analytical foundation was carried on using real experimental data. Experimental data were obtained using a geodetic device for measurement of vertical and horizontal corners to an object on district (a theodolite 2Т30П). Using a threaded rangefinder of a telescope of a theodolite, distances were measured. According to the developed geometrical model coordinates of four points are defined. Numerical values of coordinates are measured and calculated in millimeters. A practical use of the developed analytical model is suggested.

Keywords: geometrical model, analytical model, the straight line equation in space, a point, coordinates, a technique, a measurement, the equipment.

#### Актуальность исследования

В проведенных исследованиях разработана геометрическая модель для бесконтактного определения координат недоступной точки объекта при заданном расположении геодезического оборудования [1–5]. Такая геометрическая модель является наглядной схемой использования оборудования инженером.

Разработанная геометрическая модель измерения параметров недоступной точки объекта позволяет свести к минимуму получение и обработку экспериментальных данных, а также подготовку исходных данных для расчета необходимых параметров (Рис. 1).

Для определения численных значений параметров недоступной точки объекта необходимо разработать адекватное полученной геометрической модели аналитическое основание (аналитическую модель). Поэтому проводимое исследование актуально.

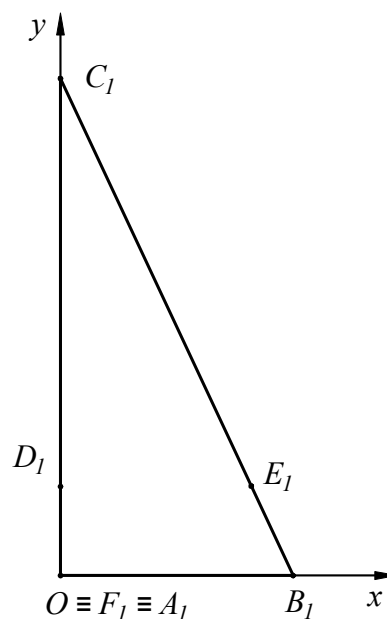


Рис. 1. Двухмерная геометрическая модель измерений параметров недоступной точки объекта

### Постановка проблеми

Объектом исследования является историческое здание. Предмет исследования настоящей статьи — аналитическое основание (аналитическая модель), соответствующая разработанной геометрической модели измерения параметров недоступной точки объекта [1–5].

Под *аппаратом измерения* понимается совокупность определяемых параметров, выполняемых операций и используемых элементов оборудования для получения требуемого результата.

Геометрическая модель отображает отдельные элементы аппарата измерения и различные места расположения инженерного геодезического оборудования. Аналитическое основание должно алгоритмически корректно, соответствующим образом (адекватно), *обобщать* в единую систему все *отдельные различные элементы* аппарата измерения и применяемого оборудования с целью бесконтактного определения геометрических параметров объекта.

*Суть проблемы* заключается в *противоречии* между необходимостью разработать *единое комплексное системное* аналитическое основание (аналитическую модель) получения требуемого результата и наличием возможности определить только *отдельные различные элементы* аппарата измерения. Такое противоречие может быть разрешено разработкой алгоритмически корректной адекватной аналитической модели для построенной геометрической модели.

### Анализ исследований и публикаций

В проведенных исследованиях обоснована необходимость построения геометрической модели конструктивного компонента исторического здания [1, 2].

Разработана трехмерная геометрическая модель определения координат точек компонента здания [3]. Построена двухмерная геометрическая модель такой трехмерной модели [4].

Выполнен анализ геометрической модели определения параметров недоступной точки объекта [5].

На основании выполненного анализа определен рациональный способ привязки двухмерной модели к декартовой системе координат по критерию минимального количества измерений (Рис. 1). Такой способ позволяет обосновать выбор эффективной трехмерной модели для выполнения измерений.

Полученный рациональный способ привязки геометрической модели (выполнения) измерений к декартовой системе координат упрощает технологию проведения измерений, структуру методики обработки результатов эксперимента и, в конечном счете, снижает затраты на геодезические работы [5].

Тем не менее, алгоритмически корректное аналитическое основание (аналитическая модель) для обработки результатов измерений не получены. Поэтому данная статья посвящена разработке аналитического основания построенной геометрической модели измерений.

### Цель и задачи исследования

*Целью статьи* является разработка аналитической модели определения координат недоступной точки объекта для заданного расположения геодезического оборудования.

*Задачи исследования:*

1. Создать адекватное аналитическое основание для разработанной геометрической модели.
2. Разработать алгоритмически корректную аналитическую модель для обработки результатов измерений экспериментального (эмпирического) определения координат недоступной точки объекта.
3. Доказать возможность практического использования разработанной аналитической модели.

### Основной материал исследования

Аналитическое основание геометрической модели измерений параметров недоступной точки получается следующим образом.

1. Каноническое уравнение прямой линии имеет вид [6, 7]:

$$\frac{x - x_M}{r_x} = \frac{y - y_M}{r_y} = \frac{z - z_M}{r_z}, \quad (1)$$

где  $x_M, y_M, z_M$  – координаты некоторой заданной точки  $M(x_M, y_M, z_M)$  пространства в системе  $Oxyz$ ;

$x, y, z$  – координаты произвольной точки  $N(x, y, z)$  в пространстве на визирном луче;

$r_x, r_y, r_z$  – координаты направляющего вектора  $\vec{r}(r_x, r_y, r_z)$ , совпадающего с визирным лучом.

2. Уравнение прямой линии, проходящей через две заданные точки  $A(x_A, y_A, z_A)$  и  $D(x_D, y_D, z_D)$  визирного луча  $AD$  (Рис. 1), отображается выражением:

$$\frac{x - x_A}{x_D - x_A} = \frac{y - y_A}{y_D - y_A} = \frac{z - z_A}{z_D - z_A}, \quad (2)$$

где  $\overline{AD}(x_D - x_A, y_D - y_A, z_D - z_A)$  – направляющий вектор с координатами

$$\begin{cases} r_{xD} = x_D - x_A, \\ r_{yD} = y_D - y_A, \\ r_{zD} = z_D - z_A. \end{cases} \quad (3)$$

Уравнение прямой линии, проходящей через две заданные точки  $B(x_B, y_B, z_B)$  и  $E(x_E, y_E, z_E)$  визирного луча  $BE$  (Рис. 1), отображается выражением:

$$\frac{x - x_B}{x_E - x_B} = \frac{y - y_B}{y_E - y_B} = \frac{z - z_B}{z_E - z_B}, \quad (4)$$

где  $\overline{BE}(x_E - x_B, y_E - y_B, z_E - z_B)$  – направляющий вектор с координатами

$$\begin{cases} r_{xE} = x_E - x_B, \\ r_{yE} = y_E - y_B, \\ r_{zE} = z_E - z_B. \end{cases} \quad (5)$$

3. Уравнение прямой линии, заданной параллельным ей вектором  $\vec{r}(r_{xM}, r_{yM}, r_{zM})$  и точкой  $M(x_M, y_M, z_M)$ , в параметрическом виде представляется системой уравнений (6):

$$\begin{cases} x = r_{xM} \cdot t_M + x_M, \\ y = r_{yM} \cdot t_M + y_M, \\ z = r_{zM} \cdot t_M + z_M, \end{cases} \quad (6)$$

где  $t_M$  – параметр, определяющий положение точки  $M$  на визирном луче.

4. Уравнения (6) для прямых линий (визирных лучей)  $AD$  и  $BE$  разработанной геометрической модели (Рис. 1) представляются системами уравнений (7) и (8) соответственно:

$$\begin{cases} x = r_{xD} \cdot t_D + x_D, \\ y = r_{yD} \cdot t_D + y_D, \\ z = r_{zD} \cdot t_D + z_D, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} x = r_{xE} \cdot t_E + x_E, \\ y = r_{yE} \cdot t_E + y_E, \\ z = r_{zE} \cdot t_E + z_E, \end{cases} \quad (8)$$

где  $t_D$  – параметр, определяющий положение точки  $D$  на визирном луче  $AD$ ;

$t_E$  – параметр, определяющий положение точки  $E$  на визирном луче  $BE$ .

5. Координаты  $x_C; y_C; z_C$  (Рис. 1) определяемой точки  $C(x_C; y_C; z_C)$  можно выразить через уравнения (7) и (8):

$$\begin{cases} x_{DC} = r_{xD} \cdot t_{DC} + x_D, \\ y_{DC} = r_{yD} \cdot t_{DC} + y_D, \\ z_{DC} = r_{zD} \cdot t_{DC} + z_D, \end{cases} \quad (9)$$

где  $t_{DC}$  – значение параметра  $t$  для точки  $C$  на визирном луче  $AD$ ;

$$\begin{cases} x_{EC} = r_{xE} \cdot t_{EC} + x_E, \\ y_{EC} = r_{yE} \cdot t_{EC} + y_E, \\ z_{EC} = r_{zE} \cdot t_{EC} + z_E, \end{cases} \quad (10)$$

где  $t_{EC}$  – значение параметра  $t$  для точки  $C$  на визирном луче  $BE$ .

6. *Гипотеза 3.* Визирный луч  $AD$ , описанный уравнением (7), и визирный луч  $BE$ , описанный уравнением (8), пересекаются в некоторой точке  $C(x_C, y_C, z_C)$  тогда и только тогда, когда координаты  $x, y, z$  произвольных точек на этих лучах станут равными:

$$\begin{cases} x_{DC} = x_{EC}, \\ y_{DC} = y_{EC}, \\ z_{DC} = z_{EC}, \end{cases} \quad (11)$$

где  $x_{DC}; y_{DC}; z_{DC}$  – координаты точки,  $C(x_{DC}, y_{DC}, z_{DC})$  на визирном луче  $AD$ ;  
 $x_{EC}; y_{EC}; z_{EC}$  – координаты точки  $C(x_{EC}, y_{EC}, z_{EC})$  на визирном луче  $BE$ .

7. Для определения значений параметров  $t_{DC}$  и  $t_{EC}$ , при которых визирные лучи  $AD$  и  $BE$  пересекутся в требуемой точке  $C$ , подставим в уравнения (11) правые части уравнений (9) и (10).

Аналитическое выражение гипотезы 3 в параметрическом виде представляется системой уравнений (12), (13), (14):

$$\begin{cases} r_{xD} \cdot t_{DC} + x_D = r_{xE} \cdot t_{EC} + x_E, & (12) \\ r_{yD} \cdot t_{DC} + y_D = r_{yE} \cdot t_{EC} + y_E, & (13) \\ r_{zD} \cdot t_{DC} + z_D = r_{zE} \cdot t_{EC} + z_E. & (14) \end{cases}$$

Координаты направляющих векторов  $r_{xD}, r_{yD}, r_{zD}, r_{xE}, r_{yE}, r_{zE}$  определяются уравнениями (3) и (5).

8. Для нахождения значений параметров  $t_{DC}$  и  $t_{EC}$  выразим из уравнений (12), (13), (14) параметр  $t_{DC}$ :

$$\begin{aligned} t_{DC} &= \frac{r_{xE} \cdot t_{EC} + x_E - x_D}{r_{xD}}, \\ t_{DC} &= \frac{r_{yE} \cdot t_{EC} + y_E - y_D}{r_{yD}}, \\ t_{DC} &= \frac{r_{zE} \cdot t_{EC} + z_E - z_D}{r_{zD}}. \end{aligned} \quad (15)$$

9. Подставляя, например, первое равенство из выражений (15) в уравнение (13), выразим параметр  $t_{EC}$ :

$$\begin{aligned} r_{yD} \cdot \left( \frac{r_{xE} \cdot t_{EC} + x_E - x_D}{r_{xD}} \right) + y_D &= r_{yE} \cdot t_{EC} + y_E, \\ r_{yD} \cdot r_{xE} \cdot t_{EC} + r_{yD} \cdot x_E - r_{yD} \cdot x_D + r_{xD} \cdot y_D &= r_{xD} \cdot r_{yE} \cdot t_{EC} + r_{xD} \cdot y_E, \\ r_{yD} \cdot r_{xE} \cdot t_{EC} - r_{xD} \cdot r_{yE} \cdot t_{EC} &= r_{xD} \cdot y_E - r_{yD} \cdot x_E + r_{yD} \cdot x_D - r_{xD} \cdot y_D, \\ t_{EC} \cdot (r_{yD} \cdot r_{xE} - r_{xD} \cdot r_{yE}) &= r_{xD} \cdot y_E - r_{yD} \cdot x_E + r_{yD} \cdot x_D - r_{xD} \cdot y_D, \\ t_{EC} &= \frac{r_{xD} \cdot y_E - r_{yD} \cdot x_E + r_{yD} \cdot x_D - r_{xD} \cdot y_D}{r_{yD} \cdot r_{xE} - r_{xD} \cdot r_{yE}}. \end{aligned} \quad (16)$$

10. Вычислив значение параметра  $t_{EC}$  по формуле (16) и подставив его в уравнение (15), определяется значение параметра  $t_{DC}$ .

11. Значения координат  $x_{DC}; y_{DC}; z_{DC}$  определяемой точки  $C(x, y, z)$  вычисляются после подстановки значения параметра  $t_{DC}$  в уравнения (9).

12. Значения координат  $x_{EC}; y_{EC}; z_{EC}$  определяемой точки  $C(x, y, z)$  вычисляются после подстановки значения параметра  $t_{EC}$  (16) в уравнения (10).

13. Сравнением значений координат точки  $C(x, y, z)$ , полученных на этапах 11 и 12, определяется погрешность предлагаемого метода.

Абсолютные погрешности рассчитанных координат определяются системой уравнений (17):

$$\begin{cases} \Delta_x = |x_{DC} - x_{EC}|, \\ \Delta_y = |y_{DC} - y_{EC}|, \\ \Delta_z = |z_{DC} - z_{EC}|. \end{cases} \quad (17)$$

Относительные погрешности каждого измерения определяются системой уравнений (18):

$$\begin{cases} \Sigma_{xD} = \frac{\Delta_x}{x_{DC}} \cdot 100; \Sigma_{xE} = \frac{\Delta_x}{x_{EC}} \cdot 100; \\ \Sigma_{yD} = \frac{\Delta_y}{y_{DC}} \cdot 100; \Sigma_{yE} = \frac{\Delta_y}{y_{EC}} \cdot 100; \\ \Sigma_{zD} = \frac{\Delta_z}{z_{DC}} \cdot 100; \Sigma_{zE} = \frac{\Delta_z}{z_{EC}} \cdot 100. \end{cases} \quad (18)$$

Докажем на экспериментальных данных возможность практического использования полученного аналитического основания для разработанной геометрической модели.

Для получения экспериментальных данных использовался геодезический прибор для измерения вертикальных и горизонтальных углов на местности (теодолит 2Т30П). С помощью нитяного дальномера зрительной трубы теодолита измеряются расстояния.

В соответствии с разработанной геометрической моделью (Рис. 1) определены координаты точек А, В, D, E:  $x_A=0, y_A=0, z_A=0; x_B=9830, y_B=0, z_B=0; x_D=0, y_D=4000, z_D=354; x_E=5780, y_E=7015, z_E=630$ . Численные значения координат измеряются и вычисляются в миллиметрах.

Для доказательства возможности практического использования разработанной аналитической модели выполняются расчеты.

1. Рассчитываются координаты  $r_{xD}, r_{yD}, r_{zD}$  направляющего вектора  $r_D$  по формулам (3):

$$\begin{aligned} r_{xD} &= x_D - x_A = 0 - 0 = 0; \\ r_{yD} &= y_D - y_A = 4000 - 0 = 4000; \\ r_{zD} &= z_D - z_A = 354 - 0 = 354. \end{aligned}$$

2. Рассчитываются координаты  $r_{xE}, r_{yE}, r_{zE}$  направляющего вектора  $r_E$  по формулам (5):

$$\begin{aligned} r_{xE} &= x_E - x_B = 5780 - 9830 = -4050; \\ r_{yE} &= y_E - y_B = 7015 - 0 = 7015; \\ r_{zE} &= z_E - z_B = 630 - 0 = 630. \end{aligned}$$

3. Рассчитывается значение  $t_{EC}$  параметра визирного луча  $BEC$  по формуле (16):

$$t_{EC} = (r_{xD} \cdot y_E - r_{yD} \cdot x_E + r_{yD} \cdot x_D - r_{xD} \cdot y_D) / (r_{yD} \cdot r_{xE} - r_{xD} \cdot r_{yE}) = (0 \cdot 7015 - 4000 \cdot 5780 + 4000 \cdot 0 - 0 \cdot 4000) / (4000 \cdot (-4050) - 0 \cdot 7015) = (-23120000) / (-16200000) = 1,42716.$$

4. Рассчитывается значение  $t_{DC}$  параметра визирного луча  $ADC$  по второй формуле системы (15):

$$t_{DC} = (r_{yE} \cdot t_{EC} + y_E - y_D) / r_{yD} = (7015 \cdot 1,427 + 7015 - 4000) / 4000 = (10010,405 + 3015) / 4000 = 13025,405 / 4000 = 3,256.$$

5. Рассчитывается координаты  $x_{DC}, y_{DC}, z_{DC}$  точки  $C(x, y, z)$  визирного луча  $ADC$  по формулам (9):

$$\begin{aligned} x_{DC} &= r_{xD} \cdot t_{DC} + x_D = 0 \cdot 3,256 + 0 = 0; \\ y_{DC} &= r_{yD} \cdot t_{DC} + y_D = 4000 \cdot 3,256 + 4000 = 13025,56 + 4000 = 17025,56; \\ z_{DC} &= r_{zD} \cdot t_{DC} + z_D = 354 \cdot 3,256 + 354 = 1152,624 + 354 = 1506,6. \end{aligned}$$

6. Рассчитывается координаты  $x_{EC}, y_{EC}, z_{EC}$  точки  $C(x, y, z)$  для визирного луча  $BEC$  по формулам (10):

$$\begin{aligned} x_{EC} &= r_{xE} \cdot t_{EC} + x_E = -4050 \cdot 1,42716 + 5780 = -5779,998 + 5780 = 0,002 = 0; \\ y_{EC} &= r_{yE} \cdot t_{EC} + y_E = 7015 \cdot 1,42716 + 7015 = 10011,53 + 7015 = 17026,53; \\ z_{EC} &= r_{zE} \cdot t_{EC} + z_E = 630 \cdot 1,42716 + 630 = 899,111 + 630 = 1529,11. \end{aligned}$$

7. Рассчитываются абсолютные погрешности  $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$  определенных координат точки  $C(x_C, y_C, z_C)$  по формулам:

$$\begin{aligned} \Delta_x &= |x_{DC} - x_{EC}| = (0 - 0) \cdot (-1) = 0 \text{ мм}; \\ \Delta_y &= |y_{DC} - y_{EC}| = (17025,56 - 17026,53) \cdot (-1) = 0,97 = 1 \text{ мм}; \\ \Delta_z &= |z_{DC} - z_{EC}| = (1506,6 - 1529,11) \cdot (-1) = 22,51 = 23 \text{ мм}. \end{aligned}$$

8. Рассчитываются относительные погрешности каждой координаты  $x_{DC}, x_{EC}, y_{DC}, y_{EC}, z_{DC}, z_{EC}$  точки  $C$  для двух визирных лучей  $ADC$  и  $BEC$  соответственно:

$$\begin{aligned} \Sigma_{xD} &= (\Delta_x / x_{DC}) \cdot 100 = (0/0) \cdot 100 = 0 \%; \\ \Sigma_{yD} &= (\Delta_y / y_{DC}) \cdot 100 = (0,97 / 17025,56) \cdot 100 = 0,00006 = 0 \%; \\ \Sigma_{zD} &= (\Delta_z / z_{DC}) \cdot 100 = (22,51 / 1506,6) \cdot 100 = 1,49 \%; \\ \Sigma_{xE} &= (\Delta_x / x_{EC}) \cdot 100 = (0/0) \cdot 100 = 0 \%; \\ \Sigma_{yE} &= (\Delta_y / y_{EC}) \cdot 100 = (0,97 / 17026,53) \cdot 100 = 0,00006 = 0 \%; \\ \Sigma_{zE} &= (\Delta_z / z_{EC}) \cdot 100 = (22,51 / 1529,11) \cdot 100 = 1,47 \%. \end{aligned}$$

### Выводы

1. Разработанное аналитическое основание соответствует предложенной геометрической модели для бесконтактного определения координат недоступной точки объекта при заданном расположении геодезического оборудования.



2. Разработана алгоритмически корректная аналитическая модель для обработки результатов измерений экспериментального (эмпирического) определения координат недоступной точки объекта.

3. Разработанная алгоритмически корректная аналитическая модель является теоретическим основанием для создания программного обеспечения современного геодезического оборудования и САПР.

4. Доказана возможность практического использования разработанной аналитической модели.

5. Абсолютная погрешность практического использования разработанной аналитической модели для определения координат точки С составила 23 мм при среднем значении координаты  $z=1518$  мм и 0 мм по координатам  $x, y$  при среднем значении координаты  $y =17026$  мм. Средняя относительная погрешность по координате  $z$  равна 1,48 %, по координатам  $x, y$  — 0 %.

#### Список использованной литературы

1. Браилов А. Ю., Панченко В. И. Обоснование построения геометрической модели крыши исторического здания. *Праці Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького. Сер. Сучасні проблеми геометричного моделювання*. 2015. С. 23–29.
2. Браилов А. Ю., Якимов А. А., Панченко В. И., Устьянский В. А. К вопросу проектирования конструктивных компонентов в строительстве. *Проблемы техники: научно-производственный журнал*. Одесса: ОНМУ. 2015. № 2. С. 55–62.
3. Браилов А. Ю., Панченко В. И., Устьянский В. А. Геометрическая модель определения координат точек кровли исторического здания. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2016. Вип. 3(58). С. 482–486.
4. Браилов А. Ю., Панченко В. И., Косенко С. И. Геометрическая модель определения параметров недоступной точки объекта. *Современные проблемы геометрического моделирования: тезисы докладов XXI-й Международной научно-практической конференции*. Мелітополь: МДПУ ім. Б. Хмельницького. 2019. С. 6–7.
5. Браилов А. Ю., Панченко В. И., Косенко С. И. Анализ геометрической модели определения параметров недоступной точки объекта. *Сучасні проблеми моделювання: збірник наукових праць*. Мелітополь: МДПУ ім. Б. Хмельницького. 2019. Вип. 15. С. 38–47.
6. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов*. М.: Наука, 1986. 544 с.
7. Корн Г, Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. М.: Наука, 1978. 832 с.

#### References

1. Brailov A. Yu., Panchenko V. I. (2015) Substantiation constructing geometrical model of the roof of the historical building. *Pratsi Melitopolskoho derzhavnoho pedahohichnoho universitetu imeni Bogdana Khmelnytskogo. Ser. Suchasni problemi geometrychnogo modelyuvannya*. 23–29.
2. Brailov A. Yu., Yakimov A. A., Panchenko V. I., Ustyanski V. A. (2015) To the question of designing of constructive components in building. *Problemi tehniki: nauchno-proizvodstvennyi zhurnal*. Odessa: ONMU. 2. 55–62.
3. Brailov A. Yu., Panchenko V. I., Ustyanski V. A. (2016) Geometrical model for the determination of points coordinates of the historical building roof. *Visnyk Khersonskogo natsionalnoho tekhnichnoho universitetu*. 3(58). 482–486.
4. Brailov A. Yu., Panchenko V. I., Kosenko S. I. (2019) The geometric model of the determination the parameters of an inaccessible point of an object. *Sovremennyye problemi geometricheskogo modelirovaniya: tezisi dokladov XXI-y Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii*. Melitopol: MDPU Im. B. Khmelnytskogo. 6–7.
5. Brailov A. Yu., Panchenko V. I., Kosenko S. I. (2019) Analysis of the geometric model of the determination the parameters of an inaccessible point of an object. *Suchasni problemi modelyuvannya: zbirnyk naukovykh prats*. Melitopol: MDPU Im. B. Khmelnytskogo. 15. 38–47.
6. Bronshteyn I. N., Semendyaev K. A. (1986) *Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchaschihsya vtuzov*. M.: Nauka, 544 p.
7. Korn G, Korn T. (1978) *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov*. M.: Nauka, 832 p.

УДК 004.925.8:629.7

В.В. ВАНІН, Г.А. ВІРЧЕНКО, А.Й. НЕЗЕНКО

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

### ДЕЯКІ ПИТАННЯ ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХНІ КРИЛА ЛІТАКА ПРОТЯГОМ ЖИТТЄВОГО ЦИКЛУ ВИРОБУ

*У даній публікації розглянуто деякі питання формоутворення поверхні крила літака протягом його життєвого циклу, що включає такі стадії як дослідження й обґрунтування розроблення, процес розроблення, виробництво та експлуатацію. Показано, що геометричні параметри суттєво впливають на якість створюваного складного технічного виробу. Окреслено основні напрямки проведення відповідних перспективних наукових прикладних розвідок щодо належного опрацювання зазначених завдань засобами сучасного комп'ютерного геометричного моделювання.*

*Ключові слова: геометричне моделювання, життєвий цикл технічного виробу, поверхня крила літака.*

В.В. ВАНИН, Г.А. ВИРЧЕНКО, А.И. НЕЗЕНКО

Национальный технический университет Украины  
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»

### НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ КРЫЛА САМОЛЕТА В ТЕЧЕНИЕ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА ИЗДЕЛИЯ

*В данной публикации рассмотрены некоторые вопросы формообразования поверхности крыла самолета в течение его жизненного цикла, включающего такие стадии как исследования и обоснование разработки, процесс разработки, производство и эксплуатация. Показано, что геометрические параметры существенно влияют на качество создаваемого сложного технического изделия. Определены основные направления проведения соответствующих перспективных научных прикладных исследований по надлежущей проработке указанных задач средствами современного компьютерного геометрического моделирования.*

*Ключевые слова: геометрическое моделирование, жизненный цикл технического изделия, поверхность крыла самолета.*

V.V. VANIN, G.A. VIRCHENKO, A.J. NEZENKO

National Technical University of Ukraine  
«Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»

### SOME QUESTIONS OF GEOMETRIC MODELING OF THE AIRPLANE WING SURFACE DURING THE LIFE CYCLE OF THE PRODUCT

*The purpose of this article is a general description of the processes of geometric modeling of such a complex technical product as an airplane throughout its life cycle. The main stages of the life of industrial products are the rationale for the feasibility of its development, the design process, production and operation. The wing is the main unit of the airplane, which creates a lifting aerodynamic force. The quality of the surface of the wing substantially affects many technical characteristics of the entire aircraft. The quality of the wing surface is determined during its design, is realized by production, and is checked and maintained during the operation of the airplane. The geometric parameters of a complex technical product vary throughout its life cycle. There is a certain relationship between the values of parameters that are determined during design, obtained at production and are realized at the stage of long years of operation of the aircraft. The main task of the successful formation of the wing surface is to correctly take into account the practical results of the use of the technical product at the initial stage of designing the next sample of industrial product. To do this, it is necessary to monitor the change of the geometric parameters of the aircraft during its life cycle and to create appropriate computer geometric models. Various CADs are used for this during design; coordinate measuring devices are additionally used in production and operation. Integrated use of these geometric models allows achieving the goal of effective shaping of the wing surface throughout the life cycle of the aircraft. The described approach requires the development of new methods and techniques of computer geometric modeling of complex technical objects. This scientific publication is devoted to some of these issues.*

*Keywords: geometric modeling, technical product life cycle, airplane wing surface.*

### Постановка проблеми

У нинішніх умовах широкого використання комп'ютерних інформаційних технологій геометричне моделювання здатне відігравати провідну роль не тільки під час проектування складних промислових виробів, а також при їх виготовленні та експлуатації. Поєднання зазначених стадій життєвого циклу продукції в єдиний керований автоматизований процес із метою проведення її комплексної оптимізації становить важливу науково-прикладну проблему. Для її успішного вирішення необхідне створення належної методології комп'ютерного формоутворення складних технічних об'єктів, яка охоплює весь життєвий цикл зазначеної продукції.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Стадії життєвого циклу промислової продукції та їх зміст визначено стандартом [1]. Останні охоплюють виникнення задуму та обґрунтування можливості й доцільності створення виробу, відповідні науково-дослідні, дослідно-конструкторські та дослідно-технологічні роботи, розроблення продукції, її виробництво та експлуатацію з утилізацією включно.

Науковою школою прикладної геометрії Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» напрацьовано методологію структурно-параметричного геометричного моделювання, яка спрямована на ефективне автоматизоване формоутворення складних технічних об'єктів, зокрема, машинобудування [2-11].

Роботу [2] присвячено питанням удосконалення ескізного проектування літака, публікації [3-5] – провідній інтегруючій ролі геометричного моделювання в сучасних системах автоматизованого проектування. Видання [6] містить базові положення структурно-параметричного формоутворення. У працях [7-11] розглядаються деякі питання моделювання поверхонь крила літака в аспекті життєвого циклу цього виробу.

### Мета дослідження

Завдання даної статті полягає в подальшому узагальненні задач геометричного моделювання поверхні крила літака протягом усього його життєвого циклу. При цьому головний акцент робиться на моніторинг змінювання геометричних параметрів, встановлення взаємозв'язків між їх проектними та фактичними значеннями, створення належних комп'ютерних моделей. Комплексне інтегроване використання останніх дозволяє підвищувати ефективність процесів формоутворення поверхні крила літака. Описаний підхід потребує розробки нових методів та прийомів комп'ютерного геометричного моделювання складних технічних об'єктів.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Уявлення про геометричні параметри зовнішніх поверхонь сучасного літака дає рис. 1.

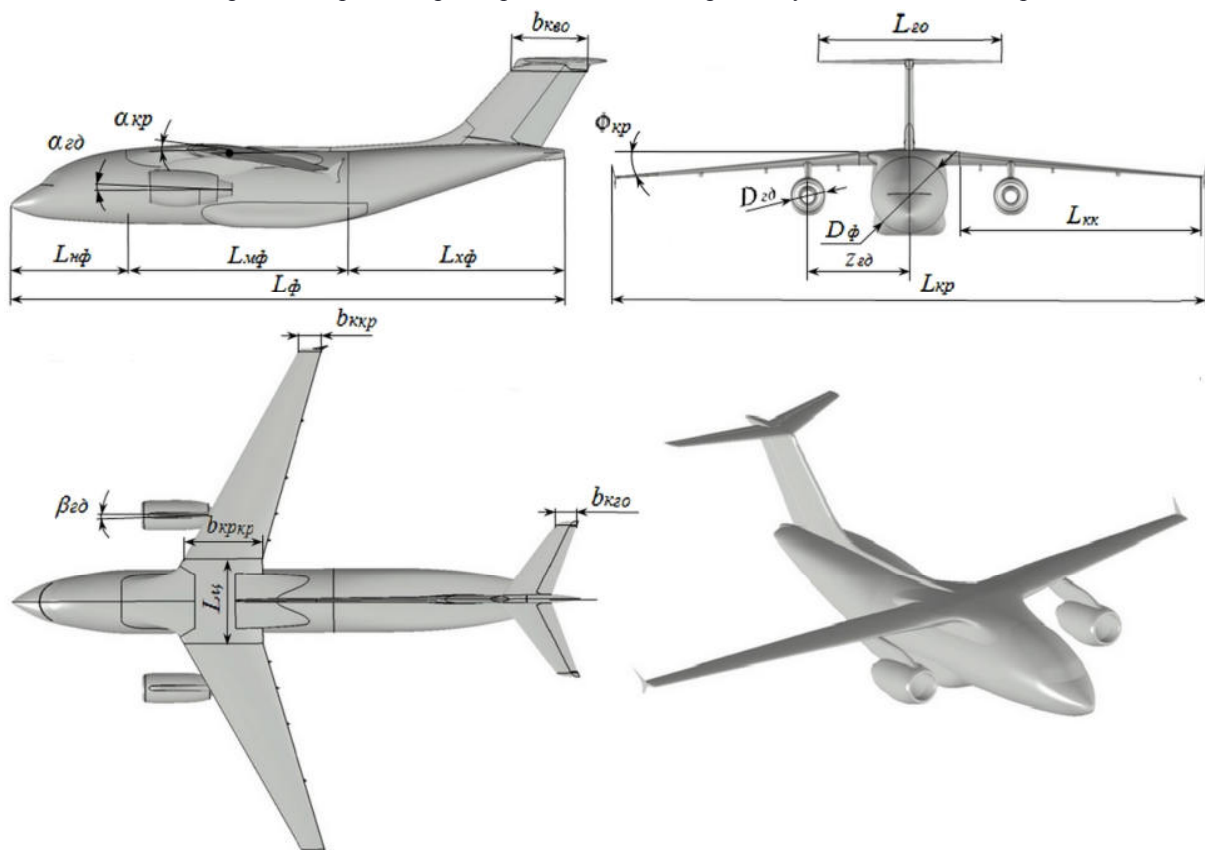


Рис. 1. Деякі геометричні параметри літака

Серед наведених величин:  $L_\phi$  – довжина фюзеляжу, яка складається з довжин носової  $L_{нф}$ , міделевої  $L_{мф}$  і хвостової  $L_{хф}$  частин;  $\alpha_{кр}$  та  $\alpha_{гд}$  – кути встановлення крила та гондол двигунів відносно горизонтальної площини літака;  $\beta_{гд}$  – кут встановлення гондол двигунів відносно вертикальної площини літака;  $L_{кр}$  і  $L_{гд}$  – розмах крила й горизонтального оперення;  $L_\psi$  та  $L_{кк}$  – довжина центроплану та консолі крила;  $\varphi_{кр}$  – кут V-подібності крила;  $b_{кркр}$ ,  $b_{кргд}$ ,  $b_{кго}$ ,  $b_{кго}$  – відповідно коренева й кінцева хорди крила, кінцева хорда горизонтального та вертикального оперення;  $D_\phi$  і  $D_{гд}$  – міделеві діаметри фюзеляжу й гондол двигунів;  $z_{гд}$  – координата  $z$  розташування гондол двигунів.

Зазначимо, що початок прямокутної декартової системи координат  $Oxyz$  літака розміщується в його крайній передній точці на осі  $x$ , яка є перетином площин горизонтальної (БПЛ – базової площини літака) та вертикальної (ПСЛ – площини симетрії літака).

Таким чином, для геометричного моделювання зовнішніх поверхонь літака широко використовуються параметри форми, розмірів та положення. Їх динамічний характер ілюструє рис. 2 на прикладі трьох конфігурацій крила: *стапельної* (геометрична модель створюється під час ескізного проектування і призначена для розробки конструкції та технологічного оснащення на етапі робочого проектування літака), *польотної* (відповідна модель відтворює модифікації форми та розмірів крила під час польоту літака) та *стоянкової* (належна геометрична модель будується на завершальному етапі виготовлення літака за результатами замірів фактично отриманих параметрів форми та розмірів).

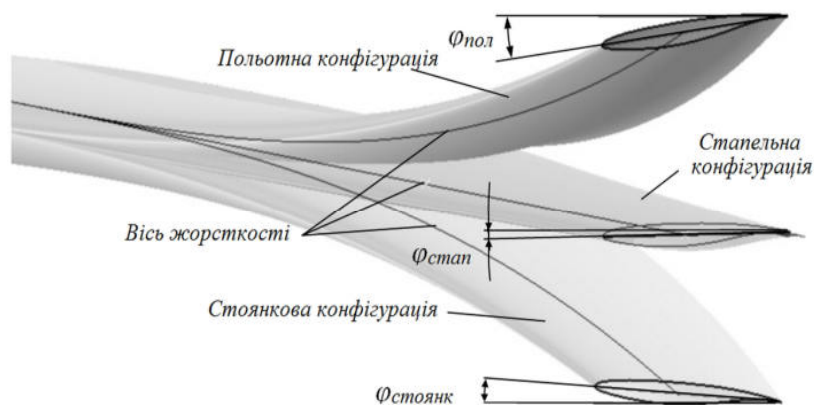


Рис. 2. Геометричні моделі поверхні крило літака у стапельній, стоянковій та польотній конфігурації

На рис. 3 показано характер зміни кута скриту  $\varphi$  вздовж розмаху  $z$  для різних конфігурацій крила.

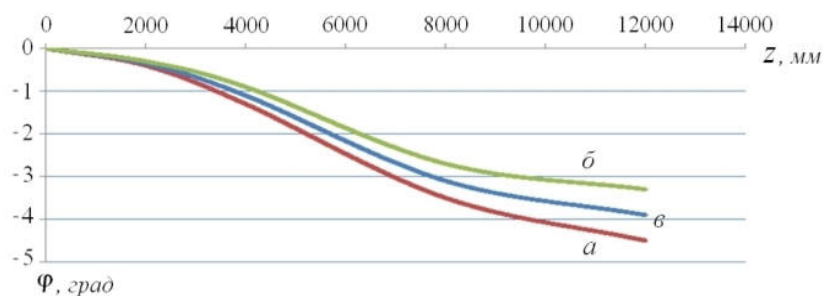


Рис. 3. Кути скриту вздовж розмаху крила літака:  
 $a$  – польотна конфігурація,  $\bar{b}$  – стоянкова конфігурація,  $\bar{v}$  – стапельна конфігурація

Розробка поверхонь стапельної та польотної конфігурацій крила виконується шляхом переміщення твірних аеродинамічних профілів уздовж напрямних, якими є вісь жорсткості, передня та задня кромки крила. При цьому реалізується належне неоднорідне масштабування профілів, що забезпечує необхідне змінювання не тільки їх хорд, а й відносної товщини та угнутості. Характер скриту крила визначається напрямними, а розташування площин поточних аеродинамічних профілів – відповідними дотичними до осі жорсткості як перпендикулярами до цих площин. Положення точок останньої у просторі визначаються згідно з виконаними розрахунками (аеродинамічними, на міцність і т. д.) для певних досліджуваних умов експлуатації літака.

Створення поверхонь стоянкової конфігурації крила здійснюється на завершальному етапі виготовлення літака за результатами замірів отриманих його параметрів форми та розмірів. Актуальність

даної геометричної моделі надалі підтримується під час експлуатації, тобто ця модель призначена для проведення поточного моніторингу та аналізу фактичної геометрії крила у процесі його експлуатації. Вихідними даними для моделювання крила готового виробу в стоянковій конфігурації є заміри з використанням сучасних лазерних або інших високоточних координатно-вимірвальних машин. Результатом є множина точок фактичної поверхні крила, тобто хмара заміряних точок (рис. 4).

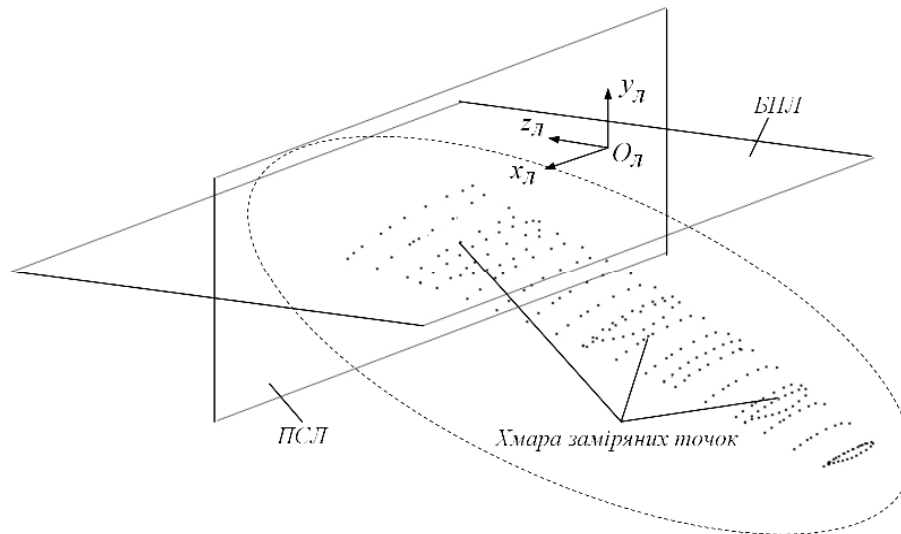


Рис. 4. Хмара заміряних точок фактичної поверхні крила

На даному рисунку через  $O_L, x_L, y_L, z_L$  позначено декартову систему координат літака. Перехід від дискретної точкової моделі поверхні фактичного крила у стоянковій конфігурації до належної неперервної моделі потребує застосування спеціалізованих способів, прийомів та методик геометричного моделювання.

#### Висновки

У публікації виконано подальше узагальнення задач геометричного моделювання поверхні крила літака протягом усього його життєвого циклу. Це пропонується здійснювати на основі проведення постійного моніторингу змінювання геометричних параметрів, встановлення взаємозв'язків між їх проектними та фактичними значеннями, побудови належних комп'ютерних моделей. Комплексне інтегроване застосування останніх дозволяє підвищувати ефективність автоматизованого формоутворення поверхні крила літака за рахунок правильного врахування під час початкової стадії проектування наступного зразка промислової продукції практичних результатів попереднього її використання.

#### Список використаної літератури

1. ДСТУ 3278-95. Система розроблення та поставлення продукції на виробництво. Основні терміни та визначення. Вид. офіц. Київ: Держстандарт України, 1995. 59 с.
2. Ванін В.В., Вірченко Г.А., Ванін І.В. Структурно-параметричні геометричні моделі як основа для узгодженої розробки літака на стадії ескізного проектування. *Наукові вісті Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут»*. Київ, 2006. № 4(48). С. 35-41.
3. Ванін В.В., Вірченко Г.А., Ванін В.В. Структурно-параметричні геометричні моделі як інваріантна складова комп'ютерних інформаційних технологій підтримки життєвого циклу виробів машинобудування. *Праці Таврійської державної агротехнічної академії*. Мелітополь, 2007. Вип. 4. Т. 36. С. 16-21.
4. Вірченко Г.А., Ванін В.В., Вірченко В.Г. Геометричне моделювання як одна з основних складових сучасних систем автоматизованого проектування. *Прикладна. геометрія та інженерна графіка*. Київ, 2007. Вип. 77. С. 129-134.
5. Ванін В.В., Вірченко Г.А., Ванін В.В. Структурно-параметричне геометричне моделювання як засіб підвищення ефективності групових технологій у машинобудуванні. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. Мелітополь, 2008. Вип. 4. Т. 39. С. 9-17.
6. Ванін В.В., Вірченко Г.А. Визначення та основні положення структурно-параметричного геометричного моделювання. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. Харків, 2009. Вип. 23. С. 42-48.



7. Ванін В.В., Вірченко Г.А. Структурно-параметричні геометричні моделі як засіб інтеграції автоматизованого проектування сучасного літака. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. Херсон, 2014. Вип. 3(50). С. 571-574.
8. Ванін В.В., Вірченко Г.А., Збруцький О.В. Комп'ютерні структурно-параметричні геометричні моделі як засоби конструкторсько-технологічної оптимізації літака. *Механіка гіроскопічних систем*. Київ, 2014. Вип.27. С. 111-119.
9. Вірченко Г.А., Незенко А.Й. Геометричне моделювання поверхонь спряження як засіб інтегрального оптимального формоутворення в життєвому циклі літака. *Сучасні проблеми моделювання*. Мелітополь, 2017. Вип. 8. С. 49-53.
10. Ванін В.В., Вірченко Г.А., Незенко А.Й. Особливості геометричного моделювання поверхні крила в аспекті життєвого циклу літака. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. Херсон, 2017. Вип. 3(62). Т. 2. С. 260-263.
11. Ванін В.В., Вірченко Г.А., Незенко А.Й. Моделювання зовнішніх обводів на стадіях виробництва та експлуатації життєвого циклу літака. *Прикладна геометрія, дизайн, об'єкти інтелектуальної власності та інноваційна діяльність студентів та молодих вчених: збірник доповідей VII-ї Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених (Київ, 26-27 квітня 2018 р.)*. Київ, 2018. С. 4-7.

#### **Spysok vykorystanoi literatury**

1. DSTU 3278-95. Systema rozroblennia ta postavlennia produktsii na vyrobnytstvo. Osnovni terminy ta vyznachennia. Vyd. ofits. Kyiv: Derzhstandart Ukrainy, 1995. 59 s.
2. Vanin V.V., Virchenko H.A., Vanin I.V. Strukturno-parametrychni heometrychni modeli yak osnova dlia uzghodzhenoї rozrobky litaka na stadii eskiznoho proektuvannia. *Naukovi visti Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu Ukrainy «Kyivskiy politekhnichnyi instytut»*. Kyiv, 2006. № 4(48). S. 35-41.
3. Vanin V.V., Virchenko H.A., Vanin V.V. Strukturno-parametrychni heometrychni modeli yak invariantna skladova kompiuternykh informatsiinykh tekhnolohii pidtrymky zhyttievoho tsykladu vyrobiv mashynobuduvannia. *Pratsi Tavriiskoi derzhavnoi ahrotekhnichnoi akademii*. Melitopol, 2007. Vyp. 4. T. 36. S. 16-21.
4. Virchenko H.A., Vanin V.V., Virchenko V.H. Heometrychne modeliuвання yak odna z osnovnykh skladovykh suchasnykh system avtomatyzovanoho proektuvannia. *Prykladna. heometriia ta inzhenerna hrafika*. Kyiv, 2007. Vyp. 77. S. 129-134.
5. Vanin V.V., Virchenko H.A., Vanin V.V. Strukturno-parametrychne heometrychne modeliuвання yak zasib pidvyshchennia efektyvnosti hrupovykh tekhnolohii u mashynobuduvanni. *Pratsi Tavriiskoho derzhavnoho ahrotekhnolohichnoho universytetu*. Melitopol, 2008. Vyp. 4. T. 39. S. 9-17.
6. Vanin V.V., Virchenko H.A. Vyznachennia ta osnovni polozhennia strukturno-parametrychnoho heometrychnoho modeliuвання. *Heometrychne ta kompiuterne modeliuвання*. Kharkiv, 2009. Vyp. 23. S. 42-48.
7. Vanin V.V., Virchenko H.A. Strukturno-parametrychni heometrychni modeli yak zasib intehratsii avtomatyzovanoho proektuvannia suchasnoho litaka. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu*. Kherson, 2014. Vyp. 3(50). S. 571-574.
8. Vanin V.V., Virchenko H.A., Zbrutskiy O.V. Kompiuterni strukturno-parametrychni heometrychni modeli yak zasoby konstruktorsko-tekhnolohichnoi optymizatsii litaka. *Mekhanika hiroskopichnykh system*. Kyiv, 2014. Vyp.27. S. 111-119.
9. Virchenko H.A., Nezenko A.I. Heometrychne modeliuвання poverkhon spriazhennia yak zasib intehralnoho optymialnoho formoutvorennya v zhyttievomu tsykli litaka. *Suchasni problemy modeliuвання*. Melitopol, 2017. Vyp. 8. S. 49-53.
10. Vanin V.V., Virchenko H.A., Nezenko A.I. Osoblyvosti heometrychnoho modeliuвання poverkhni kryla v aspekti zhyttievoho tsykladu litaka. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu*. Kherson, 2017. Vyp. 3(62). Т. 2. S. 260-263.
11. Vanin V.V., Virchenko H.A., Nezenko A.I. Modeliuвання zovnishnykh obvodiv na stadiiakh vyrobnytstva ta ekspluatatsii zhyttievoho tsykladu litaka. *Prykladna heometriia, dyzain, obiekty intelektualnoi vlasnosti ta innovatsiina diialnist studentiv ta molodykh vchenykh: zbirnyk dopovidei VII-yi Vseukrainskoi naukovopraktychnoi konferentsii studentiv, aspirantiv ta molodykh vchenykh (Kyiv, 26-27 kvitnia 2018 r.)*. Kyiv, 2018. S. 4-7.



УДК 514.18

О.В. ВОРОНЦОВ, Л.О. ТУЛУПОВА

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка

І.В. ВОРОНЦОВА

Полтавський коледж нафти і газу Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка

## ВИЗНАЧЕННЯ АПЛІКАТ ВНУТРІШНІХ ВУЗЛІВ ДИСКРЕТНИХ КАРКАСІВ ПОВЕРХОНЬ ПАРАЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСУ ЯК СУПЕРПОЗИЦІЙ ЗАДАНИХ АПЛІКАТ ОПОРНОГО КОНТУРУ

*В роботі проведено дослідження організації ланцюга послідовних суперпозицій суміжних точок для моделювання статично визначених дискретних каркасів поверхонь паралельного переносу із врахуванням величини рекурентної залежності, що є прообразом зовнішнього формоутворюючого навантаження у статико-геометричному методі дискретного геометричного моделювання. Результатом даного дослідження є одержані формули загального вигляду, що дозволяють формувати зрівноважені дискретні каркаси поверхонь паралельного переносу, складовими каркаса яких будуть криві другого порядку без розв'язання громіздких систем рівнянь, що сприяє підвищенню ефективності алгоритмів дискретного геометричного моделювання.*

*Ключові слова: статико-геометричний метод, геометричний апарат суперпозицій, величина рекурентної залежності, коефіцієнти суперпозицій.*

О. В. ВОРОНЦОВ, Л. А. ТУЛУПОВА

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка

І. В. ВОРОНЦОВА

Полтавський коледж нафти і газу Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ВНУТРЕННИХ УЗЛОВ ДИСКРЕТНЫХ КАРКАСОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСА КАК СУПЕРПОЗИЦИЙ ЗАДАНЫХ АППЛИКАТ ОПОРНОГО КОНТУРА

*В работе проведено исследование организации цепи последовательных суперпозиций смежных точек для моделирования статически определенных дискретных каркасов поверхностей параллельного переноса с учетом величины рекуррентной зависимости, которая является прообразом внешней формообразующей нагрузки в статико-геометрическом методе дискретного геометрического моделирования. Результатом данного исследования являются полученные формулы общего вида, позволяющие формировать уравновешенные дискретные каркасы поверхностей параллельного переноса, составляющими каркаса которых будут кривые второго порядка без решения громоздких систем уравнений, что способствует повышению эффективности алгоритмов дискретного геометрического моделирования.*

*Ключевые слова: статико-геометрический метод, геометрический аппарат суперпозиций, величина рекуррентной зависимости, коэффициенты суперпозиции.*

O.V. VORONTSOV, L.A. TULUPOVA

Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University

I.V. VORONTSOVA

Poltava Petroleum Geological College of Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University

## DETERMINATION OF INTERNAL KNOTS COORDINATES OF DISCRETE FRAMES OF PARALLEL TRANSFER SURFACES AS SUPERPOSITIONS OF SET SUPPORTING CONTOUR APPLICATES

*In this paper, it was investigated a chain organization of adjacent points successive superpositions. It was used for modeling statically determined discrete frames of parallel transfer surfaces considering a recurrent dependence value. This value is a prototype of an external form-forming load in the static-geometric method of discrete geometric modeling.*

*In the result of the research computing formulae in a general form are obtained. They allow forming balanced discrete frames of parallel transfer surfaces, where their components are second-order curves. According to this method it becomes possible to do without solving cumbersome systems of equations. Owing to this an efficiency of discrete geometric modeling algorithms significantly increases.*

*Forming discrete models of geometric images, particularly spatial covering models, by the static-geometric method demands a repeating compilation and solving of bulky systems of linear equations. This problem arises at different stages - of sketch design, control of a simulated surface shape and change of separate parameters. Thus, it is necessary to carry out new researches of methods and algorithms, which allow modeling balanced discretely defined geometric images without compiling and solving systems of equations. Involvement of the geometric apparatus of superpositions to form geometric images expands possibilities of the static-geometric method of discrete modeling due to a considerable saving of computing resources.*

*The research has shown that a superposition of  $n$  points can be replaced by a successive superpositions chain.*

*Formulae of determining discrete values of internal nodal points applicates of a balanced surface are obtained in the general form. These formulae can use set applicates of contour and central nodes or set applicates of contour nodes and a recurrent dependence value. This value is identical to an external shaping load value of the static-geometric method of geometric images modeling.*

*Thus, the results of this research allow modeling balanced discretely determined two-dimensional geometric images without compiling and solving bulky systems of linear equations. This increases an efficiency of discrete geometric modeling algorithms due to a considerable saving of computing resources.*

*Keywords: static-geometric method, geometrical apparatus of superpositions, value of recurrent dependence, superposition coefficients.*

**Постановка проблеми.** У процесі створення методик дискретного моделювання геометричних образів проектування об'єктів будівництва й архітектури поширеними є задачі переходу від дискретної інформації до неперервної, що розв'язуються методами інтерполяції, а також зворотні задачі переходу від неперервної інформації про геометричний образ до дискретної. Одним із перспективних напрямів розв'язання зазначених проблем є широке застосування методів дискретного геометричного моделювання, що дозволяють істотно спростити алгоритми і програми та забезпечити економію обчислювальних ресурсів.

Для дискретного моделювання геометричних образів можуть бути використані чисельний метод скінчених різниць, статико-геометричний метод, математичний апарат числових послідовностей, що мають свої переваги і недоліки відносно розв'язання конкретних практичних завдань.

У даній статті пропонується застосування у поєднанні з вище переліченими методами геометричного апарату суперпозицій, що дозволяє істотно підвищити ефективність і розширити можливості процесу дискретного моделювання геометричних образів. Зокрема моделювати врівноважені дискретно визначені поверхні паралельного переносу без складання і розв'язання великих систем лінійних рівнянь.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** У роботах [1, 2] авторів даної статті досліджено окремі варіанти ланцюгів суперпозицій і виведені формули обчислення величин коефіцієнтів суперпозицій, які дозволяють визначати координати довільного вузла геометричного образу, як суперпозиції координат заданих контурних вузлів. Можливі інші варіанти й інші підходи до організації ланцюгів суперпозицій, що дозволять підвищити ефективність алгоритмів дискретного геометричного моделювання за рахунок економії обчислювальних ресурсів.

У роботі [3] виведено у загальному вигляді формули визначення дискретних значень ординат вузлових точок врівноваженої кривої за даними ординатами двох контурних та центрального вузлів, або за даними ординатами двох контурних вузлів та величиною рекурентної залежності, що тотожна величині зовнішнього формуючого навантаження статико-геометричного методу моделювання геометричних образів, а також зроблено висновок про те, що властивості, які має одновимірна множина точок, можуть бути узагальнені до двовимірної множини, що формується за тими ж законами, якщо одновимірну множину розглядати як складову каркаса двовимірної, властивості дискретної моделі двовимірного геометричного образу також можуть бути одержані узагальненням відповідних властивостей одновимірного.

**Формулювання мети дослідження.** Метою даної роботи є дослідження організації ланцюга послідовних суперпозицій суміжних точок для моделювання дискретних каркасів поверхонь паралельного переносу із врахуванням величини рекурентної залежності, що є прообразом зовнішнього формуючого навантаження у статико-геометричному методі дискретного геометричного моделювання, а також одержання формул загального вигляду, що дозволяють формувати врівноважені дискретні каркаси поверхонь паралельного переносу, без розв'язання громіздких систем рівнянь і, тим самим, сприяють розширенню можливостей класичного методу скінчених різниць і статико-геометричного методу, підвищенню ефективності алгоритмів дискретного геометричного моделювання [4].

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Розглянемо приклади організації ланцюгів суперпозицій для визначення координат вузлових точок двовимірних числових послідовностей [1].

Формула

$$z_{i,j} = k_1 z_{i-1,j} + k_2 z_{i+1,j} + k_3 z_{i,j-1} + k_4 z_{i,j+1}, \quad (1)$$

де  $k_1, k_2, k_3, k_4$  – коефіцієнти суперпозиції аплікату  $z$  заданих суміжних вузлових точок, буде тотожною скінечно-різницевої п'ятигочковій залежності

$$4z_{i,j} = z_{i-1,j} + z_{i+1,j} + z_{i,j-1} + z_{i,j+1}. \quad (2)$$

Тому величину рекурентної залежності, яка буде прообразом зовнішнього формоутворюючого навантаження, для формування дискретного каркаса поверхні на основі суперпозицій заданих чотирьох вузлових точок можна записати у вигляді:

$$P_{i,j} = z_{i,j} - k_1 z_{i-1,j} - k_2 z_{i+1,j} - k_3 z_{i,j-1} - k_4 z_{i,j+1} \quad (3)$$

де  $P_{i,j}$  – дискретна величина рекурентної залежності.

За умови, що  $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 1$ ,

$$P_{i,j} = z_{i,j} - k_1 z_{i-1,j} - k_2 z_{i+1,j} - k_3 z_{i,j-1} - (1 - k_1 - k_2 - k_3) z_{i,j+1}. \quad (4)$$

Враховуючи результати досліджень, що одержані у роботі [3], розглянемо варіант організації ланцюга суперпозицій для визначення аплікату дев'яти (враховуючи умови симетрії опорного контуру – лише трьох) внутрішніх вузлів, як суперпозицій заданих аплікату центрального та усіх контурних вузлів, відсіку дискретного каркасу поверхні, план якого представлений на рисунку 1.

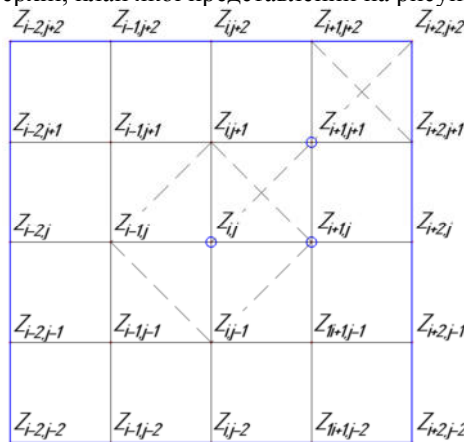


Рис. 1. План каркаса відсіку поверхні (9 внутрішніх вузлів).

Для поверхні паралельного переносу, у якій всі твірні конгруентні справедливими залежностями для будь-яких трьох суміжних точок:

$$z_i = k_1 z_{i-1} + k_2 z_{i+1} - P, \quad (5)$$

$$z_j = k_3 z_{j-1} + k_4 z_{j+1} - P, \quad (6)$$

де:

- 1)  $k_1, k_2, k_3, k_4$  – коефіцієнти суперпозиції аплікату суміжних вузлових точок;
- 2)  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0,5$ ;
- 3)  $z_{i+1} = z_{i-1}, z_{i+2} = z_{i-2}, z_{j+1} = z_{j-1}, z_{j+2} = z_{j-2}$ ,
- 4)  $P$  – величина рекурентної залежності, що дорівнює 0,5 величини зовнішнього формоутворюючого навантаження статико-геометричного методу:  $P = 0,5 \cdot KP$ .

Додаванням (5) та (6) одержимо нову залежність, що справедлива для будь-яких п'яти суміжних точок:

$$2z_{ij} = k_1 z_{i-1,j} + k_2 z_{i+1,j} + k_3 z_{i,j-1} + k_4 z_{i,j+1} - 2P,$$

або тотожну їй формулу:

$$z_{ij} = k_1 z_{i-1,j} + k_2 z_{i+1,j} + k_3 z_{i,j-1} + k_4 z_{i,j+1} - P, \quad (7)$$

де:

- 1)  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0,25$ ;
- 2)  $P$  – величина рекурентної залежності, що дорівнює 0,25 величини зовнішнього формоутворюючого навантаження статико-геометричного методу:  $P = 0,25 \cdot KP$ .

Враховуючи вищевикладене, для плану відсіку поверхні (рис. 1) із формул (5), (6) зможемо одержати:

$$z_i = z_{i+1} - P; \quad z_{i+1} = z_i + P; \quad (8)$$

$$z_j = z_{j+1} - P; \quad z_{j+1} = z_j + P. \quad (9)$$

Додаванням (8) та (9) одержимо:

$$2z_{ij} = z_{i+1,j} - P + z_{i,j+1} - P = z_{i+1,j} + z_{i,j+1} - 2P;$$

або тотожну їй формулу:

$$z_{ij} = 0,5 z_{i+1,j} + 0,5 z_{i,j+1} - P;$$

$$P = z_{ij} - 0,5z_{i+1,j} - 0,5z_{i,j+1}.$$

Для наступної вузлової точки:

$$z_{i+1} = 0,5z_i + 0,5z_{i+2} - P; \quad (10)$$

$$z_j = 0,5z_{j-1} + 0,5z_{j+1} - P. \quad (11)$$

Додаванням (10) та (11) одержимо:

$$2z_{i+1,j} = 0,5z_{i,j} + 0,5z_{i+2,j} + 0,5z_{i+1,j-1} + 0,5z_{i+1,j+1} - 2P;$$

або тотожну їй формулу:

$$z_{i+1,j} = 0,25z_{i,j} + 0,25z_{i+2,j} + 0,25z_{i+1,j-1} + 0,25z_{i+1,j+1} - P.$$

Враховуючи результати роботи [3], зможемо записати:

$$z_i = z_{i+2} - 4P; \quad z_{i+1} = z_{i+2} - 3P; \quad z_j = z_{j+2} - 4P; \quad z_{j+1} = z_{j+2} - 3P.$$

Додаванням одержимо формули для визначення аплікату внутрішніх вузлів:

$$2z_{i,j} = z_{i+2,j} - 4P + z_{i,j+2} - 4P; \quad 2z_{i,j} = z_{i+2,j} + z_{i,j+2} - 8P,$$

або:

$$z_{i,j} = 0,5z_{i+2,j} + 0,5z_{i,j+2} - 4P; \quad P = \frac{0,5z_{i+2,j} + 0,5z_{i,j+2} - z_{i,j}}{4}; \quad (12)$$

$$2z_{i+1,j} = z_{i+2,j} - 3P + z_{i+1,j+2} - 4P; \quad 2z_{i+1,j} = z_{i+2,j} + z_{i+1,j+2} - 7P;$$

або:

$$z_{i+1,j} = 0,5z_{i+2,j} + 0,5z_{i+1,j+2} - 3,5P; \quad P = \frac{0,5z_{i+2,j} + 0,5z_{i+1,j+2} - z_{i+1,j}}{3,5}; \quad (13)$$

$$2z_{i+1,j+1} = z_{i+2,j+1} - 3P + z_{i+1,j+2} - 3P; \quad 2z_{i+1,j+1} = z_{i+2,j+1} + z_{i+1,j+2} - 6P;$$

або:

$$z_{i+1,j+1} = 0,5z_{i+2,j+1} + 0,5z_{i+1,j+2} - 3P; \quad P = \frac{0,5z_{i+2,j+1} + 0,5z_{i+1,j+2} - z_{i+1,j+1}}{3}. \quad (14)$$

Таким чином, враховуючи вище наведене, формули (12 – 14) та результати роботи [3], для визначення аплікату довільного вузла за відомою аплікатою заданого контурного вузла у напрямі вісі  $i$ , зможемо записати:

$$z_{i+n} = z_i + n^2P; \quad P = \frac{z_{i+n} - z_i}{n^2};$$

$$z_i = z_{i+n} - n^2P; \quad z_{i+1} = z_{i+n} - (n^2 - 1^2)P; \quad z_{i+2} = z_{i+n} - (n^2 - 2^2)P;$$

$$z_{i+3} = z_{i+n} - (n^2 - 3^2)P; \dots; \quad z_{i+k} = z_{i+n} - (n^2 - k^2)P,$$

або:

$$z_{i+k} = z_{i+n} + (k^2 - n^2)P, \quad (15)$$

де:

$k$  — номер шуканого вузла;  $n$  — номер заданого контурного вузла.

Для визначення аплікату довільного вузла за відомою аплікатою заданого контурного вузла у напрямі вісі  $j$ , також зможемо записати:

$$z_{j+m} = z_j + m^2P; \quad P = \frac{z_{j+m} - z_j}{m^2};$$

$$z_j = z_{j+m} - m^2P; \quad z_{j+1} = z_{j+m} - (m^2 - 1^2)P; \quad z_{j+2} = z_{j+m} - (m^2 - 2^2)P;$$

$$z_{j+3} = z_{j+m} - (m^2 - 3^2)P; \dots; \quad z_{j+l} = z_{j+m} - (m^2 - l^2)P,$$

або:

$$z_{j+l} = z_{j+m} + (l^2 - m^2)P, \quad (16)$$

де:

$l$  — номер шуканого вузла;  $m$  — номер заданого контурного вузла.

Додаванням (15) та (16) одержимо формули для визначення аплікату внутрішніх вузлів, а також величини рекурентної залежності:

$$2z_{i+k,j+l} = z_{i+n,j+l} + (k^2 - n^2)P + z_{i+k,j+m} + (l^2 - m^2)P;$$

$$2z_{i+k,j+l} = z_{i+n,j+l} + z_{i+k,j+m} + (k^2 + l^2 - n^2 - m^2)P;$$

або:

$$z_{i+k,j+l} = 0,5 \cdot z_{i+n,j+l} + 0,5 \cdot z_{i+k,j+m} + (k^2 + l^2 - n^2 - m^2) \cdot 0,5 \cdot P; \quad (17)$$

$$P = \frac{z_{i+k,j+l} - 0,5z_{i+n,j+l} - 0,5z_{i+k,j+m}}{(k^2 + l^2 - n^2 - m^2) \cdot 0,5}, \quad (18)$$

де:

$k$  — номер шуканого вузла,  $n$  — номер заданого контурного вузла,  $z_{i+n,j+l}$  — задана апліката контурного вузла за напрямом осі  $i$ ;

$l$  — номер шуканого вузла,  $m$  — номер заданого контурного вузла,  $z_{i+k,j+m}$  — задана апліката контурного вузла за напрямом осі  $j$ ;

$P$  — величина рекурентної залежності, що дорівнює 0,25 величини зовнішнього формоутворюючого навантаження статико-геометричного методу:  $P = 0,25 \cdot KP$ .

**Висновки.** Проведені дослідження показують, що суперпозиція  $n$  точок може бути замінена ланцюгом послідовних суперпозицій.

Виведено у загальному вигляді формули (17), (18) визначення дискретних значень аплікати внутрішніх вузлових точок врівноваженої кривої поверхні за даними аплікатами контурних та центрального вузлів, або за даними аплікатами контурних вузлів та величиною рекурентної залежності, що тотожна величині зовнішнього формоутворюючого навантаження статико-геометричного методу моделювання геометричних образів.

Таким чином, результати проведених досліджень дозволяють моделювати врівноважені дискретно визначені двовимірні геометричні образи без складання і розв'язання великих систем лінійних рівнянь, що сприяє підвищенню ефективності алгоритмів дискретного геометричного моделювання за рахунок значної економії обчислювальних ресурсів.

#### **Список використаної літератури**

1. Vorontsov, O.V., Tulupova L.O., Vorontsova, I.V. (2016). Discrete modeling of mesh frames of covering surfaces by chains of superpositions. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Volume 69 (2), "Oxford University Press", 651 – 656.
2. Воронцов О.В. Визначення одновимірних геометричних образів ланцюгом послідовних суперпозицій із врахуванням величини рекурентної залежності / О.В. Воронцов, Л.О. Тулупова, І.В. Воронцова // Вісник Херсонського національного технічного університету / Вип. . 3(58) – Херсон: ХНТУ, 2016. – С. 487 – 491.
3. Воронцов О.В. Визначення координат внутрішніх вузлів, як суперпозицій заданих координат центрального та двох контурних вузлів дискретно представленої кривої / О.В. Воронцов, Л.О. Тулупова, І.В. Воронцова // Вісник Херсонського національного технічного університету / Вип. . 3(66), ТОМ 2 – Херсон: ХНТУ, 2018. – С. 120 – 124.
4. Vorontsov O. Discrete modeling of building structures geometric images. / O. Vorontsov, L. Tulupova, O. Vorontsova // International Journal of Engineering & Technology. Vol. 7 No. 3.2 (2018). P. 727 – 731.

#### **References**

1. Vorontsov, O.V., Tulupova L.O., Vorontsova, I.V. (2016). Discrete modeling of mesh frames of covering surfaces by chains of superpositions. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Volume 69 (2), "Oxford University Press", P.651 – 656.
2. Vorontsov O.V. Vyznachennia odnovymirnykh heometrychnykh obraziv lantsiuhom poslidovnykh superpozytsii iz vrakhuvanniam velychyny rekurentnoi zalezhnosti / O.V. Vorontsov, L.O. Tulupova, I.V. Vorontsova // Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu / Vyp. . 3(58) – Kherson: KhNTU, 2016. –P. 487 – 491.
3. Vorontsov O.V. Vyznachennia koordynat vnutrishnikh vuzliv, yak superpozytsii zadanykh koordynat tsentralnoho ta dvokh konturnykh vuzliv dyskretno predstavlenoi kryvoi / O.V. Vorontsov, L.O. Tulupova, I.V. Vorontsova // Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu / Vyp. . 3(66), ТОМ 2 – Kherson: KhNTU, 2018. – P. 120 – 124.
4. Vorontsov O. Discrete modeling of building structures geometric images. / O. Vorontsov, L. Tulupova, O. Vorontsova // International Journal of Engineering & Technology. Vol. 7 No. 3.2 (2018). P. 727 – 731.



УДК 514.18

О.М. ГУМЕН, О.О. ЛЕБЕДЕВА

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

## ДОСЛІДЖЕННЯ ЧОРНОТИ ПОВЕРХНІ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ РОЗПОДІЛУ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ ВИРОБНИЧОГО ПРИМІЩЕННЯ

*Наукові дослідження стосовно енергоефективності приміщень та способів її підвищення активно розвиваються, що є свідченням беззаперечної актуальності даної проблеми. У роботі представлено огляд сучасного стану основних напрямків досліджень щодо моделювання розподілу температурних полів виробничого приміщення. Оскільки на температурний режим приміщення значно впливають матеріал та чорнота поверхонь, значну увагу при створенні моделі приділено саме цим складникам. Дане питання є актуальним і, як свідчить аналіз літературних джерел, недостатньо розглянутим на даний час.*

*Ступінь чорноти матеріалів залежить від таких факторів, як шорсткість і спосіб обробки поверхні, температура, довжина хвилі, покриття. Для проведення експериментального дослідження ступеня чорноти був розроблений спеціальний стенд. Потік випромінювання, що фіксується тепловізором, складається з потоку власного випромінювання тіла і потоку відбитого випромінювання сторонніх об'єктів. Розглядаючи результати проведених вимірювань, можна відзначити, що при підвищенні температури, а також при тривалому знаходженні зразків при підвищеній температурі ступінь чорноти зразків збільшується в зв'язку з процесами окислення на їх поверхні. Це дає змогу аналізувати застосування різних матеріалів, порівнюючи їх характеристики.*

*Метод візуалізації із залученням засобів просторового геометричного моделювання дозволяє доповнити аналіз та порівняння даних щодо температурних полів приміщення, отриманих експериментально, побудовою образної геометричної моделі. Такий підхід дозволяє створити відповідну інтегровану комплексну методологію моделювання теплових процесів, яка забезпечить підвищення ефективності дослідження різноманітних технологічних процесів у складних багатопараметричних динамічних системах.*

*Ключові слова: геометричне моделювання, чорнота поверхні, температурне поле, виробниче приміщення.*

Е.Н. ГУМЕН, О.А. ЛЕБЕДЕВА

Национальный технический университет Украины  
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЧЕРНОТЫ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПОМЕЩЕНИЯ

*Научные исследования по энергоэффективности помещений и способов ее повышения активно развиваются, что является свидетельством безоговорочной актуальности данной проблемы. В работе представлен обзор современного состояния основных направлений исследований по моделированию распределения температурных полей производственного помещения. Поскольку на температурный режим помещения значительно влияют материал и чернота поверхностей, значительное внимание при создании модели уделено именно этим составляющим. Данный вопрос является актуальным и, как показывает анализ литературных источников, недостаточно рассмотренным в настоящее время.*

*Степень черноты материалов зависит от таких факторов, как шероховатость и способ обработки поверхности, температура, длина волны, покрытие. Для проведения экспериментального исследования степени черноты был разработан специальный стенд. Поток излучения, фиксирующийся тепловізором, состоит из потока собственного излучения тела и потока отраженного излучения посторонних объектов. Рассматривая результаты проведенных измерений, можно отметить, что при повышении температуры, а также при длительном нахождении образцов при повышенной температуре степень черноты образцов увеличивается в связи с процессами окисления на их поверхности. Это позволяет анализировать применение различных материалов, сравнивая их характеристики.*

*Метод визуализации с привлечением средств пространственного геометрического моделирования позволяет дополнить анализ и сравнение данных относительно температурных полей помещения, полученных экспериментально, построением образной геометрической модели. Такой подход позволяет создать соответствующую интегрированную комплексную методологию*



*моделирования тепловых процессов, которая обеспечит повышение эффективности исследования различных технологических процессов в сложных многопараметрических динамических системах.*

*Ключевые слова: геометрическое моделирование, чернота поверхности, температурное поле, производственное помещение.*

O.M. GUMEN, O.O. LEBEDIEVA  
National Technical University of Ukraine  
«Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»

## STUDY OF SURFACE EMISSIVITY IN MODELLING THE DISTRIBUTION OF TEMPERATURE FIELDS IN INDUSTRIAL PREMISES

*Heaters and ventilation systems are used to ensure the regulatory requirements of the technological process and technical operation of the production premises. The development of appropriate approaches to the creation of industrial heating and ventilation systems for industrial buildings is a promising area for increasing the energy efficiency of buildings.*

*Scientific research on the energy efficiency of premises and ways to increase it is actively developing, which is evidence of the unconditional relevance of this problem. The paper presents an overview of the current state of the main areas of research on modeling the distribution of temperature fields in industrial premises. Since the temperature of the room is significantly influenced by the material and the blackness of the surfaces, considerable attention is paid to these components when creating a model. This issue is relevant and, as an analysis of literary sources shows, is not sufficiently considered at present.*

*The degree of material emissivity depends on factors such as roughness and surface treatment method, temperature, wavelength, coating. To conduct the experimental study of the emissivity degree, a special stand was developed. The radiation flux recorded by the thermal imager consists of the body's own radiation flux and the reflected radiation flux of foreign objects. Considering the results of the measurements, it can be noted that with increasing temperature, as well as with prolonged presence of samples at elevated temperatures, the emissivity degree of the samples increases due to oxidation processes on their surface. This allows you to analyze the use of different materials, comparing their characteristics.*

*The method of visualization with the involvement of spatial geometric modelling allows you to complement the analysis and comparison of data on the temperature fields of the room, obtained experimentally, by building a figurative geometric model. This approach allows you to create an appropriate integrated methodology for modelling thermal processes, which will increase the efficiency of research of various technological processes in complex multi-parametric dynamic systems.*

*Keywords: geometric modelling, surface emissivity, temperature field, industrial premises.*

### Постановка проблеми

Для забезпечення нормативних вимог технологічного процесу та технічної експлуатації виробничих приміщень застосовують нагрівачі та вентиляційні системи. Розроблення належних підходів до створення промислових систем опалення та вентиляції промислових будівель є перспективним напрямком підвищення енергоефективності будівель. Результативна їх робота можлива за умови використання раціональних режимів експлуатації відповідного технологічного устаткування, що дозволяє не тільки підвищувати якість створюваної продукції, але і зменшувати при цьому витрати та терміни її виготовлення. Тому проблема подальшого дослідження теплових процесів, зокрема розподілу температурних полів у виробничому приміщенні, за рахунок удосконалення процесів комп'ютерного геометричного моделювання є доволі актуальною.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Дослідницькі пошуки щодо нових підходів та розроблення сучасних методик підвищення енергоефективності приміщень, удосконалення способів її покращення активно проводяться. Використанню засобів геометричного моделювання для створення моделей багатопараметричних технологічних процесів присвячено, зокрема, публікації [1-3], геометричного моделювання систем та теплових процесів виробництва – праці [4-11]. Наукова розробка [12], яку присвячено поєднанню прийомів структурно-параметричного формоутворення та багатовимірної геометрії, є прикладом інтеграції автоматизованих методик для створення образної моделі об'єкта. Наведені наукові результати мають окремий характер і потребують подальшого доопрацювання. Тому питання дослідження температурних полів виробничого приміщення є актуальним і, як свідчить аналіз літературних джерел, недостатньо розглянутим на даний час у наукових публікаціях.

### Мета дослідження

Основною ціллю даної публікації є дослідження впливу чорноти поверхні з урахуванням усіх факторів на температурне поле робочої зони для раціонального вибору матеріалів покриття поверхонь. З

огляду на енергоефективність це забезпечить зниження споживання енергії зі збереженням комфорту і дотриманням технологічних норм, що є пріоритетом у ситуації постійного збільшення споживання енергії сучасними виробничими комплексами. Такий підхід дозволить задіяти відповідну інтегровану комплексну методологію геометричного моделювання для підвищення ефективності дослідження перебігу теплових процесів у складних багатопараметричних динамічних системах виробничого циклу.

#### Викладення основного матеріалу дослідження

Випромінювальною здатністю тіла, або чорнотою поверхні є кількість енергії, що випромінюється в одиницю часу одиницею поверхні нагрітого тіла, що має температуру  $T$ , в навколишнє середовище з температурою абсолютного нуля. Для абсолютно чорного тіла зв'язок між випромінювальною здатністю і абсолютною температурою виражається законом Стефана-Больцмана:

$$E_0 = C_0 T \quad (1)$$

де  $C_0$  – коефіцієнт випромінювання абсолютно чорного тіла,  
 $C_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} / (\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ ;  
 $T$  – абсолютна температура поверхні тіла,  $^{\circ}\text{C}$ ;  
 $E_0$  – випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла,  $\text{Вт}/\text{м}^2$ .

Ступінь чорноти матеріалів залежить від таких факторів, як шорсткість і спосіб обробки поверхні, температура, довжина хвилі, покриття. У довідкових виданнях дані щодо випромінювальної здатності більшості матеріалів відносяться до середини минулого століття, причому з урахуванням всіх перерахованих факторів дані не наводяться, а для деяких матеріалів вони суперечливі. Крім того, ступінь чорноти поверхонь може істотно змінюватися в зв'язку з окисленням матеріалів, особливо при знаходженні їх протягом тривалого часу при підвищеній температурі, в зв'язку з впливом навколишнього середовища (забрудненням поверхні і т.п.). Тому теоретичні методи визначення ступенів чорноти матеріалів не можуть врахувати сукупність зазначених чинників у повній мірі.

Для проведення експериментального дослідження ступенів чорноти відібраних зразків був розроблений експериментальний стенд (рис. 1).

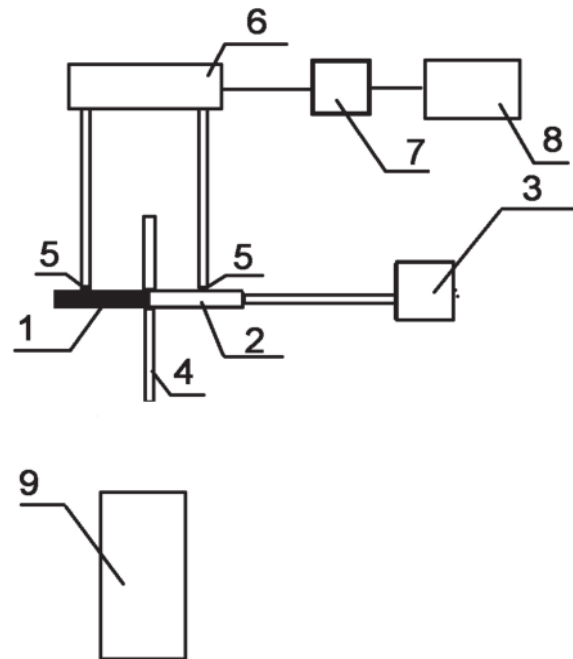


Рис. 1 – Експериментальний стенд для визначення ступеня чорноти  
(1 - поверхня з певним ступенем чорноти; 2 - досліджувана поверхня; 3 - джерело живлення; 4 - штатив;  
5 - терпари; 6 - блок холодних спаїв; 7 - комутатор; 8 - мілівольтметр; 9 - тепловізор)

Оснву конструкції стенду являє собою зразок у вигляді трубки діаметром 10 мм і довжиною 100 мм, встановлений у горизонтальному положенні на штативі 4. На одну половину поверхні зразка наноситься покриття з задалегідь відомим високим ступенем чорноти 1, а друга половина, ступінь чорноти якої слід визначити (поверхня 2), залишається чистою.

Всередині експериментального зразка встановлюється нагрівальний елемент (рис. 2), який підключається через клемний роз'єм до джерела електроживлення 3. Джерело живлення дозволяє

задавати різні значення струму і напруги на нагрівачі, забезпечуючи таким чином різні значення температур на поверхні зразка в необхідному діапазоні. Температура досліджуваного зразка вимірюється термопарами 5 і тепловізором 9. Термопари підключаються до блоку холодних спаїв і далі через комутатор 7 до вольтметра 8. Тепловізор встановлюється на деякій відстані від зразка, з його допомогою вимірюються радіаційні температури поверхонь 1 і 2.

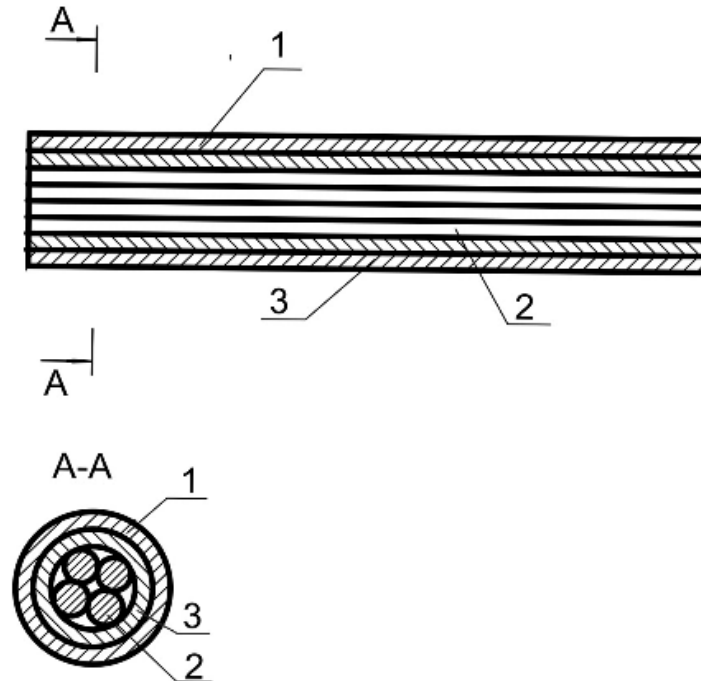


Рис. 2 – Нагрівальний елемент зразка (1 – досліджуваний зразок;  
2 – нагрівач; 3 – мідна трубка)

Аналізуючи результати проведених вимірювань, можна відзначити, що при підвищенні температури, а також при тривалому знаходженні зразків при підвищеній температурі ступінь чорноти зразків збільшується в зв'язку з процесами окислення на їх поверхні.

У ході експерименту після настання стаціонарного теплового режиму досліджуваного зразка реєструвалися такі параметри:

- свідчення термопар, закріплених на зразку;
- температура навколишнього середовища;
- радіаційні температури досліджуваної і еталонної ділянок зразка, виміряні за допомогою тепловізора Flir SC620.

### Висновки

Дослідження впливу чорноти поверхні на розподіл температурних полів виробничого приміщення проведено на підставі розрахунків і даних, отриманих в результаті експерименту. Результати проаналізовано, підкріплено побудовою образної геометричної моделі. Як бачимо, метод візуалізації із залученням засобів просторового геометричного моделювання температурних полів розширює можливості дослідження застосування різних матеріалів і покриттів у виробничому приміщенні. Такий підхід дозволяє створити відповідну інтегровану комплексну методологію моделювання теплових процесів з урахуванням усіх факторів впливу, яка забезпечить підвищення ефективності різноманітних технологічних процесів у складних багатопараметричних динамічних системах.

### Список використаної літератури

1. Ванін В.В., Гумен О.М. Деякі аспекти застосування засобів геометричного моделювання у проективному просторі. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ, 2011. Вип. 87. С. 90-93.
2. Гумен О.М., Селіна І.Б. Дослідження геометрії теплорозподілу із залученням комп'ютерно-інтегрованих технологій моделювання. *Інформаційні системи. Механіка та керування*. 2018. № 18. С. 28-33.

3. Гумен О.М., Яблонський П.М., Шаповал С.П., Коломієць Н.Я. Засоби просторового геометричного моделювання у дослідженні параметрів температурного поля приміщення. *Сучасні проблеми моделювання*. Мелітополь, 2018. Вип. 12. С. 58-62.
4. Gumen O., Spodyniuk N., Ulewicz M., Martyn Ye. Research of thermal processes in industrial premises with energy-saving technologies of heating. *Diagnostyka*. 2017. No 2 (18). P. 43-49.
5. Гумен О.М., Мартин Є.В., Сподинок Н.А., Лясковська С.Є. Інформаційні графічні засоби подання простору температурного поля промислових будівель. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. Херсон, 2017. Вип. 3 (62). Т. 2. С. 269-273.
6. Spodyniuk N., Gumen O., Omelchuk O. Thermal processes in industrial premises with using infrared heating systems. *Journal of civil engineering, environment and architecture*. 2017. No 64 (4/17). P. 105-115.
7. Сухов Г.С., Лепеш Г.В. Теоретические основы технологий дифференцированного электрообогрева производственных помещений. Расчёт обогрева объёма рабочего места. *Технико-технологические проблемы сервиса*. 2012. № 3 (21). С. 22-25.
8. Лепеш Г.В., Сухов Г.С., Карп Л.В., Шмелёв М.Ю. Разработка экспериментально-методического обеспечения для исследования физических характеристик радиационных электронагревателей. *Технико-технологические проблемы сервиса*. 2007. № 1 (1). С. 22-33.
9. Petras D., Kalus D. Effect of thermal comfort/discomfort due to infrared heaters installed at workplaces in industrial buildings. *Indoor and Built Environment*. 2000. No 9. P. 148-156.
10. Гумен О.М., Сподинок Н.А. 3D моделювання температурного простору при інфрачервоному опаленні виробничих приміщень. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. Херсон, 2018. Вип. 3 (66). Т. 2. С. 137-141.
11. Yurkevich Y., Spodyniuk N. Energy-saving infrared heating systems in industrial premises. *Budownictwo o zoptymalizowanym potencjale energetycznym*. 2015. No 2 (16). P. 140-144.
12. Вірченко Г.А., Гумен О.М., Смаковська Г.М. Інтеграція методів структурно-параметричного формоутворення та багатовимірної геометрії для автоматизованого проектування технічних об'єктів. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. Херсон, 2015. Вип. 3 (54). С. 542-546.

#### References

1. Vanin V.V., Gumen O.M. Deiaki aspekty zastosuvannya zasobiv heometrychnoho modeliuвання u proektyvnomu prostori. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafiika*. Kyiv, 2011. Vyp.87. S. 90-93.
2. Gumen O.M., Selina I.B. Doslidzhennia heometrii teplorozpodilu iz zaluchenniam kompiuterno-intehrovanykh tekhnologii modeliuвання. *Informatsiini systemy. Mekhanika ta keruvannia*. 2018. № 18. S. 28-33.
3. Gumen O.M., Yablonsky P.M., Shapoval S.P., Kolomyets N.Ya. Zasoby prostorovoho heometrychnoho modeliuвання u doslidzhenni parametriv temperaturnoho polia prymyshchennia. *Suchasni problemy modeliuвання*. Melitopol, 2018. Vyp. 12. S. 58-62.
4. Gumen O., Spodyniuk N., Ulewicz M., Martyn Ye. Research of thermal processes in industrial premises with energy-saving technologies of heating. *Diagnostyka*. 2017. No 2 (18). P. 43-49.
5. Gumen O.M., Martyn Ye.V., Spodyniuk N.A., Ljaskovska S.Ye. Informatsiini hrafiichni zasoby podannia prostoru temperaturnoho polia promyslovykh budivel. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu*. Kherson, 2017. Vyp. 3 (62). T. 2. S. 269-273.
6. Spodyniuk N., Gumen O., Omelchuk O. Thermal processes in industrial premises with using infrared heating systems. *Journal of civil engineering, environment and architecture*. 2017. No 64 (4/17). P. 105-115.
7. Sukhov G.S., Lepesh G.V. Teoreticheskiye osnovy tekhnologiy differentsirovannogo elektroobogreva proizvodstvennykh pomeshcheniy. Raschot obogreva obiyoma rabocheho mesta. *Tekhniko-tekhnologicheskiye problemy servisa*. 2012. № 3 (21). S. 22-25.
8. Lepesh G.V., Sukhov G.S., Karp L.V., Shmelov M.Yu. Razrabotka eksperimentalno-metodicheskogo obespecheniya dlya issledovaniya fizicheskikh kharakteristik radiatsionnykh elektronagrevateley. *Tekhniko-tekhnologicheskiye problemy servisa*. 2007. № 1 (1). S. 22-33.
9. Petras D., Kalus D. Effect of thermal comfort/discomfort due to infrared heaters installed at workplaces in industrial buildings. *Indoor and Built Environment*. 2000. No 9. P. 148-156.
10. Gumen O.M., Spodyniuk N.A. 3D modeliuвання temperaturnoho prostoru pry infrachervonomu opalenni vyrobnychyykh prymyshchen. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu*. Kherson, 2018. Vyp. 3 (66). T. 2. S. 137-141.
11. Yurkevich Y., Spodyniuk N. Energy-saving infrared heating systems in industrial premises. *Budownictwo o zoptymalizowanym potencjale energetycznym*. 2015. No 2 (16). P. 140-144.
12. Virchenko H.A., Gumen O.M., Smakovska H.M. Intehratsiia metodiv struktorno-parametrychnoho formoutvorennia ta bahatovymirnoi heometrii dlia avtomatyzovanoho proektuvannia tekhnichnykh obiektiv. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu*. Kherson, 2015. Vyp. 3 (54). S. 542-546.

УДК 519.85

В.М. КОМЯК, О.М. ДАНИЛІН, В.В. КОМЯК, С.С. ГОВАЛЕНКОВ

Національний університет цивільного захисту України

К.Т. КЯЗИМОВ

Академія Міністерства по Надзвичайним Ситуаціям Азербайджанської Республіки

### ФОРМАЛІЗАЦІЯ ТА ПРИКЛАДИ ЗАДАЧІ РОЗБИТТЯ ОБЛАСТІ НА ПІДОБЛАСТІ ЗА ВИЗНАЧЕНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

*Використовуючи поняття геометричної інформації, запропоновано спосіб формалізації обмежень в задачі розбиття області на підобласті. Побудовано математичну модель задачі розбиття та здійснена її декомпозиція на задачу розбиття заданої області з урахуванням її просторової форми на декілька видів підобластей, кожна з яких, в свою чергу, розбивається на підобласті за різними критеріями якості та обмеженнями. Описано практичне застосування задачі оптимізації розбиття за заданими обмеженнями.*

*Ключові слова - геометричний об'єкт, геометрична інформація, розбиття, трасування, математична модель, оптимізація.*

В.М. КОМЯК, А.Н. ДАНИЛИН, В.В. КОМЯК, С.С. ГОВАЛЕНКОВ

Национальный университет гражданской защиты Украины

К.Т. КЯЗИМОВ

Академия Министерства по Чрезвычайным Ситуациям Азербайджанской Республики

### ФОРМАЛИЗАЦИЯ И ПРИМЕРЫ ЗАДАЧИ РАЗБИЕНИЯ ОБЛАСТИ НА ПОДОБЛАСТИ ЗА ОПРЕДЕЛЕННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

*Используя понятие геометрической информации, предложен способ формализации ограничений в задаче разбиения области на подобласти. Построена математическая модель задачи разбиения и осуществлена ее декомпозиция на задачу разбиения заданной области с учетом ее пространственной формы на несколько видов подобластей, каждая из которых, в свою очередь, разбивается на подобласти по разным критериям качества и ограничениям. Описаны практическое применение задачи оптимизации разбиения по заданным ограничениями.*

*Ключевые слова: геометрический объект, геометрическая информация, разбиение, трассировка, математическая модель, оптимизация.*

V.M. KOMYAK, A.N. DANILIN, V.V. KOMYAK, S.S. HOVALENKOV

National university of the civil protection of the Ukraine

K.T. KYAZIMOV

Academy of the Ministry of Emergency Situations of the Republic of Azerbaijan

### FORMALIZATION AND EXAMPLES OF PROBLEMS OF PARTITIONING OF THE AREA AT THE APPROACH FOR THE RESTRICTIONS DEFINED

*The tasks of packing (layout, covering and partitioning) of spatial objects belong to geometrical design problems and are related to the optimization of geometric information about objects according to the function of purpose and constraints. Geometric information about a geometric object consists of three components: spatial forms, metric parameters of the form, which specify their dimensions, and parameters of placement in space.*

*The configuration space of an object is a space, the metric parameters and parameters of their placement are generalized variables. The configuration space of a set of objects is a direct product of the configuration spaces of each of the multiple object objects. Displaying a plurality of objects in their configuration space according to a given set of constraints specifies the spatial configuration of geometric objects.*

*In the article the further development of the notion of spatial configurations of geometric objects is obtained, and the limitations have been made that allowed to form a class of spatial configurations of the partition, in particular the division of the region into a subregion, each of which is split into subsets of different functions of the purpose and various constraints.*

*As examples, reviewed.*

*The task of partitioning a three-dimensional area (for example, a building) into two types of domains, the first is the areas by function (premises) with the maximization of their squares under given*



constraints; the second one is a subregion that defines a rational network of tracks to each of the regions by the given criterion and restrictions.

The task of partitioning the two-dimensional area (crop area). to two types of subsets, the first form is the regions (plots for different cultures) with the given ratio of their areas, provided they are maximized and with allowance for restrictions, the second species is a subdivision that determines the tracks to each of the subregions taking into account the given criteria and constraints.

Keywords: geometric object, geometric information, partition, traces, mathematical model, optimization.

### Постановка проблеми

Задачі упаковки (компоновки, покриття, розбиття) просторових об'єктів заданої форми належать до задач геометричного проектування [1–2] і пов'язані з математичним моделюванням геометричних об'єктів та їх взаємних відношень [3–6].

Однією із задач, яка класифікується як задача геометричного проектування є задача розбиття області на підобласті. На сьогоднішній день існує великий клас важливих практичних задач, який може бути зведений в математичній постановці до задач оптимального розбиття заданої множини на підмножини. Це, наприклад, задача розміщення підприємств з одночасним розбиттям заданого регіону на області споживачів, задача про виборчі округи, тощо. Задача оптимального розбиття заданих множин можна умовно розділити на 2 класи:

- задачі, в яких множина, яка підлягає розбиттю, є континуальною (неперервні задачі розбиття);

- задачі, в яких множина, яка підлягає розбиттю, складається з кінцевої кількості елементів (дискретні задачі розбиття).

В даній роботі розглядається дискретна задача розбиття області на групи підобластей різних видів, тобто кожна з них розбивається на підобласті за різними критеріями якості та обмеженнями.

До такої задачі відносяться актуальні практичні задачі облаштування територій (будівництво стоянок автотранспорту та проектування сполучних під'їзних доріг); паювання землі і прокладка допоміжних трас, що забезпечують доступ до будь-якого з ділянок; раціональної прокладки комунікаційних з'єднань в будівництві, судно- і авіабудуванні; тощо.

### Аналіз останніх досліджень та публікацій

Математична теорія неперервних задач оптимального розбиття множин, яка приведена в монографії Є.М. Кисельової та Н.З. Шора [7], базується на єдиному підході, а саме, зведенні нескінченновимірних задач оптимізації певним чином (наприклад, за допомогою функціоналу Лагранжа) до негладких, як правило, конечно мірних задач оптимізації, для чисельного вирішення яких застосовуються сучасні ефективні методи оптимізації - різноманітні варіанти  $g$ -алгоритмів, які розроблені в Інституті кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України під керівництвом Н.З. Шора. Методи вирішення дискретних задач розбиття наведені, наприклад, в роботах [8, 9].

### Мета дослідження

Метою статті є формалізація обмежень в задачі розбиття області на підобласті.

### Викладення основного матеріалу дослідження

В роботі розглядається наступна задача. Дана область  $S_0$  довільної просторової форми. Необхідно розбити область на  $m$  видів підобластей, кожна з яких розбивається на підобласті з різними критеріями якості та обмеженнями.

Як сказано вище, сформульована задача відноситься до класу задач геометричного проектування [1] і полягає в відображенні  $V$  деякого вихідної множини  $\Sigma$  елементів довільної природи в абстрактну множину  $\Omega$  відповідної структури при виконанні заданого набору обмежень  $\Lambda$ ,  $v: \Sigma \rightarrow \Omega$  Таке відображення називається конфігурацією і здійснюється в конфігураційному просторі [10]. Розглянемо ці поняття для задачі, що розглядається.

Конфігураційний простір геометричних об'єктів базується на формалізації поняття геометричної інформації. Геометрична інформація  $g = (\{s\}, \{\mu\}, \{p\})$  про об'єкт  $S$  включає в себе просторову форму  $\{s\}$ , його метричні характеристики  $\{\mu\}$  та параметри розміщення  $\{p\}$ .

Будемо задавати просторову форму  $\{s\}$  геометричного об'єкта рівнянням його границі у вигляді

$f(\xi, \mu) = 0$ , де  $\xi = (x, y, z) \in R^3$ ,  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\alpha)$ , константи, які характеризують його метричні властивості (розміри), назовемо їх параметрами просторової форми об'єкта  $S$ .

Зв'яжемо з об'єктом власну систему координат, початок якої – це полюс об'єкта. При афінних перетвореннях рух об'єкта змінює положення його власної системи координат відносно



нерухомої системи координат простору  $R^3$ . Для характеристики такого положення задамо параметри розміщення  $p = (p_1, p_2, \dots, p_\beta) = (x, y, z)$ ;  $\beta = 3$ . Сформуємо конфігураційний простір  $\Xi S$  об'єкта  $S$  з узагальненими змінними: метричними параметрами  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\alpha)$  та параметрами розміщення  $p = (p_1, p_2, \dots, p_\beta)$ . Тоді кожна точка  $g = (\mu, p) = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\alpha, p_1, p_2, \dots, p_\beta)$  конфігураційного простору  $\Xi S$  визначає геометричний об'єкта  $S(g) \subset R^3$ .

Позначимо через  $\Xi S_0$  конфігураційний простір об'єкта  $S_0$  з узагальненими змінними  $g_0 = (\mu^0, p^0)$  і нехай  $p^0(0,0,0)$  – початок власної нерухомої системи координат.

Нехай  $\Sigma = \{S^1, \dots, S^m\}$  - початкова множина геометричних об'єктів, де  $S^{jj}$ ,  $jj = 1, \dots, m$  відповідно множини з узагальненими змінними  $g^{jj} = (\mu^{jj}, p^{jj})$ , а  $\{s^1, s^2, \dots, s^{mm}\}$  - множина можливих їх просторових форм. Кожній точці  $g^{jj} \in \Xi(S^{jj})$  відповідає параметризований геометричний об'єкт  $S^{jj}(g^{jj}) \subset R^3$ . Конфігураційний простір буде мати вид  $\Xi\Sigma = \Xi S^1 \times \dots \times \Xi S^m$  з узагальненими змінними  $g' = \{g^1, \dots, g^m\}$ .

За допомогою теоретико - множинних операцій сформуємо складний геометричний об'єкт  $S_p = P(S^1, \dots, S^m)$ . Оператор  $P: \Sigma \rightarrow S_p$  задає структуру складного об'єкта. Тоді складеному об'єкту  $S_p$  в конфігураційному просторі  $\Xi\Sigma$  буде відповідати параметризований геометричний об'єкт  $S^p(g^1, \dots, g^m) = P(S^1(g^1), \dots, S^m(g^m))$ .

**Визначення 1** [10]. Відображення  $v: \Sigma \rightarrow \Xi\Sigma$  множини геометричних об'єктів  $\Sigma = \{S^1, \dots, S^m\}$  в конфігураційному просторі  $\Xi\Sigma$ , яке задовольняє заданому набору обмежень  $\Lambda$ , задає просторову конфігурацію геометричних об'єктів  $S^{jj}$ ,  $jj = 1, \dots, m$ .

Розглянемо множину об'єктів (складених об'єктів)

$$S^1 = \{S_1^1, \dots, S_{n_1}^1\}, \dots, S^{jj} = \{S_1^{jj}, \dots, S_{n_{jj}}^{jj}\}, \dots, S^m = \{S_1^m, \dots, S_{n_m}^m\}, \quad (1)$$

позначимо його, як

$$\hat{\Sigma} = \{S_1^1, \dots, S_{n_1}^1, \dots, S_1^m, \dots, S_{n_m}^m\}$$

та побудуємо конфігураційний простір  $\Xi \hat{\Sigma} = \Xi S_1^1 \times \dots \times \Xi S_{n_1}^1 \times \dots \times \Xi S_1^m \times \dots \times \Xi S_{n_m}^m$  з узагальненими змінними  $g = g_1^1, \dots, g_{n_1}^1, \dots, g_1^m, \dots, g_{n_m}^m$ .

Нехай  $\Sigma^0 = \hat{\Sigma} \cup S_0$ , аналогічно вище визначеному сформуємо конфігураційний простір

$$\Xi \Sigma^0 = \Xi S_0 \times \Xi S_1^1 \times \dots \times \Xi S_{n_1}^1 \times \dots \times \Xi S_1^m \times \dots \times \Xi S_{n_m}^m$$

з узагальненими змінними  $g^0 = g_0, g_1^1, \dots, g_{n_1}^1, \dots, g_1^m, \dots, g_{n_m}^m$ .

Задамо структуру складеного об'єкту у вигляді

$$S_p = P(S_1^1, \dots, S_{n_1}^1, \dots, S_1^m, \dots, S_{n_m}^m) = S_1^1 \cup \dots \cup S_{n_1}^1 \cup \dots \cup S_1^m \cup \dots \cup S_{n_m}^m.$$

Введемо поняття просторової конфігурації розбиття. Для формування системи обмежень  $\Lambda$  задамо на множині об'єктів із  $\Sigma^0$  бінарні та багатомісні відношення:

а) неперетин  $\{*\}$ , тобто  $S_\alpha^{jj}(g_\alpha^{jj}) * S_\beta^{jj+1}(g_\beta^{jj+1}) \quad \forall jj \geq 1, \dots, m-1, \forall \alpha \in \{1, \dots, n_{jj}\},$   
 $\forall \beta \in \{1, \dots, n_{jj+1}\}, \text{int} S_\alpha^{jj}(g_\alpha^{jj}) \cap \text{int} S_\beta^{jj+1}(g_\beta^{jj+1}) = \emptyset;$

б) перетин  $\{\bar{*}\}$ , тобто  $S_0(g_0) * S_p(g)$ , якщо  $S_0(g_0) \cap S_p(g) = S_0(g_0)$ ;

в) включення  $\{\circ\}$ , тобто  $S_\alpha^{jj}(g_\alpha^{jj}) \circ S_{0,jj}(g_{0,jj}) \quad \forall jj \geq 1, \dots, m-1, \forall \alpha \in \{1, \dots, n_{jj}\},$   
якщо  $\text{int} S_\alpha^{jj}(g_\alpha^{jj}) \subset S_{0,jj}(g_{0,jj})$ .

Слід зазначити, що  $\text{int} S$  – це топологічна внутрішність об'єкта  $S$ .

**Визначення 2.** Відображення  $\nu: \Sigma^0 \rightarrow \Xi \Sigma^0$  задає конфігурацію розбиття, якщо  $S_\alpha^{jj}(g_\alpha^{jj}) * S_\beta^{jj+1}(g_\beta^{jj+1}), S_0(g_0) * S_p(g)$  та  $S_\alpha^{jj}(g_\alpha^{jj}) \circ S_{0,jj}(g_{0,jj}) \quad \forall jj \geq 1, \dots, m-1,$   
 $\forall \alpha \in \{1, \dots, n_{jj}\}, \forall \beta \in \{1, \dots, n_{jj+1}\}.$

Сформулюємо математичну модель задачі. Необхідно визначити оптимальну геометричну інформацію  $g^*$ , що характеризує раціональність розбиття:

$$g^* = F(g), \quad (1)$$

де  $g = \{g^1, \dots, g^{jj}, \dots, g^m\}$ ,  $g^{jj} = g_1^{jj}, \dots, g_{n_{jj}}^{jj}$  – вихідна геометрична інформація в задачі розбиття;  $F$  – відображення, яке перетворює вихідну геометричну інформацію  $g$  в оптимальну геометричну інформацію  $g^*$ .

Інакше кажучи, необхідно визначити оптимальний вектор змінних параметрів  $u^*$ , що відповідає оптимальній геометричній інформації  $g^*$ , при якому функціонал якості  $Q(u)$ , що характеризує раціональність розбиття на  $m$  підобластей з урахуванням заданої системи обмежень  $\Lambda$ , досягав би екстремального значення:

$$u^* = \arg \underset{u \in U}{\text{extr}} Q(u), \quad (2)$$

де  $u = (u_1, \dots, u_{jj}, \dots, u_m)$ ;  $u_{jj} = (\mu_\alpha^{jj}, p_\alpha^{jj}), \alpha \in \{1, \dots, n_{jj}\}$  – змінні параметри компонент геометричної інформації  $g$ , що відносяться до характеристик розбиття з урахуванням відповідних обмежень.

Як приклади, розв'язані задачі розбиття області на два види областей: де перший вид підобластей враховує ефективність використання цільового об'єму (площі) від розв'язання задачі розбиття, а другий – від розв'язання задачі трасування.

Функціонал  $Q(u)$ , що описує якість одержуваного розв'язку задачі розбиття на два види областей, або задачі розбиття і трасування, відображає ефективність проектних рішень і складається з двох складових: перша враховує ефективність використання цільового об'єму (площі) від розв'язання задачі розбиття, а друга – від розв'язання задачі трасування.

Визначимо зміст обмежень на змінні параметри задачі:

$$U = \{u \mid R^P(u_P) \geq 0, R^T(u_T) \geq 0\}, \quad (3)$$

де  $R^P(u_P) = \{R_\eta^P(u_P) \geq 0, \eta \in [1, \dots, r_P]\}$  – обмеження задачі, що пов'язані з розбиттям;

$R^T(u_T) = \{R_\chi^T(u_T) \geq 0, \chi \in [1, \dots, r_T]\}$  – обмеження задачі, що пов'язані з трасуванням.

За фізичним змістом параметри, які визначаються, поділяються на параметри, що характеризують розбиття, і параметри, що характеризують, наприклад, трасування. Попередня особливість покладена в основу декомпозиції двохкритеріальної задачі на дві взаємопов'язані

підзадачі меншої розмірності: задачу розбиття і задачу трасування. Вищесказане призводить до доцільності розгляду спочатку задачі розбиття, а потім, на множині підобластей та їх границь, – задачі трасування. Скористаємося підходом ранжування критеріїв:

$$Q_P \succ Q_T, u_P^* = \arg \operatorname{ext}_{u_P \in U} Q_P(u_P), u_T^* = \arg \operatorname{ext}_{u_T \in U \subset U} Q_T(u_T, u_P^*), \quad (4)$$

де  $Q_P$  – критерій якості розбиття;  $Q_T$  – критерій якості трасування.

До постановки (1-4) зводяться наступні задачі.

Задача 1. Задача обґрунтування раціональної мережі шляхів евакуації, яка виникає на етапі проектування будівель. Оскільки шляхи евакуації пронизують весь будинок, а їх структура і розміри пов'язані з компонуванням приміщень, то підвищення ефективності протипожежних рішень може вступити в протиріччя з економічними і технічними показниками проектних рішень. Інакше кажучи, проектні рішення можна вважати неефективними, якщо рішення по забезпеченню безпеки людей будуть приводити до неефективного використання площ будівлі. Тому актуальною є задача обґрунтування об'ємно-планувальних рішень будівель, як з точки зору ефективного використання корисних площ будівель, так і з точки зору проектування шляхів евакуації з них.

Нехай для проектування визначені: тривимірна область  $S_0 \subset R^3$  будь-якої просторової форми, що описує  $N$  – поверхову будівлю, приміщення різного функціонального призначення на кожному поверсі з різною кількістю людей у них. Проектувальник визначає місця входу в будівлю  $u_i(x_i, y_i, z_i), i = 1, \dots, n$ , які задаються діапазоном значень  $(u_i - \Delta u_i, u_i + \Delta u_i)$ , і визначають місце розташування сходів. Сходи мають форму прямокутних паралелепіпедів. Виникає така задача.

Необхідно розбити область  $S_0$  на два типа підобластей, перший вид – це області  $S_{ff}, f = 1, \dots, n_j, j = 1, \dots, N$  за функціональним призначенням будівлі (поверхи  $S_{0j}$ , та приміщення на поверхах  $S_{ff}$ , з максимізацією їх об'ємів при обмеженнях норм проектування), другий – це області  $T^* = T_0^* \cup L^*$ , що визначають раціональну мережу коридорів  $T_0^* = \bigcup_j T_j^*$  та сходів

$L^* = \bigcup_{i=1,2,\dots \in \{1,2,\dots,n\}} L_i^*$  за заданим критерієм (наприклад, за критерієм часу руху потоків людей при

обмеженнях як на параметри потоку, так і на метричні характеристики (розміри) трас, що враховують норми будівництва).

Підходи до розв'язання задачі наведено в роботі [11].

Задача 2. Нехай для розбиття задано область  $S_0 \subset R^2$ , яка описує земельні площі, які виділяються під засіви різних культур. Необхідно розбити область  $S_0$  на два типа підмножин, перший вид – це ділянки для різних культур з заданим співвідношенням їх площ та з урахуванням агротехнічних, протипожежних вимог (з максимізацією їх площ), другий вид – це дороги до кожної з ділянок з урахуванням економічних обмежень (наприклад за критерієм мінімізацію часу вивозу урожаю, який планується).

Підходи до розв'язання задачі наведено в роботі [12].

#### Висновки

В статті введено поняття просторової конфігурації розбиття, за допомогою якого побудовано модель розбиття області на декілька видів підобластей, кожна з яких розбивається, в свою чергу, на підобласті за різними критеріями якості та обмеженнями. Розгляд метричних параметрів об'єктів в якості незалежних змінних розширює можливості застосування методів оптимізації стосовно задач розбиття області на підобласті і може бути використано при розбитті відсіків транспортних засобів для перевезення вантажів та їх зберігання, в системах розпізнавання образів, в робототехніці, тощо.

#### Перелік використаної літератури

1. Стоян Ю.Г. Основная задача геометрического проектирования. – Харьков: ИПМаш АН УССР, 1983. 36 с. (Препринт. НАН України, ИПМаш АН України, №181).
2. Stoyan Y.G. Mathematical methods for geometric design. Advances in CAD/CAM. Proceedings of PROLAMAT82, Leningrad, USSR, May 1982. P. 67–86, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 2003.

3. Стоян Ю.Г. Размещения геометрических объектов. К.: Наук. думка, 1975. 239 с.
4. Стоян Ю.Г., Гиль Н.И. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. К.: Наук. Думка, 1976. 247 с.
5. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. К.: Наук. думка, 1986. 268 с.
6. Элементы теории геометрического проектирования/ Яковлев С.В., Гиль Н.И., Комяк В.М. и др./ под редак. В.Л. Рвачева. К.: Наук, думка, 1995. 241с.
7. Киселева Е.М., Шор Н.З. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения. К: Наук. Думка, 2005. 562 с
8. Киселева Е.М., Коряшкина Л.С. Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств: линейные, нелинейные и динамические задачи. К: Наук. думка, 2013. 604 с.
9. Kiseleva E.M., Koriashkina, L.S. Theory of continuous optimal set partitioning problems as a universal mathematical formalism for constructing Voronoi diagrams and their generalizations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51, №4. P. 489–499.
10. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Пичугина О.С. Евклидовы комбинаторные конфигурации. Харьков: Константа, 2017. 404 с.
11. Комяк В.В., Комяк В.М., Соболев А.Н. Разбиение и трассировка в задачах пожарной безопасности строительства. Харків: НУЦЗУ, 2016. 160 с.
12. Комяк В.М., Соболев А.Н., Долгодуш М.Н. Рациональное разбиение посевных площадей по заданным требованиям. Харьков: УЦЗ Украины, 2008. 91с.

#### References

1. Stoyan Yu.G. Osnovnaya zadacha geometricheskogo proektirovaniya. – Harkov: IPMash AN USSR, 1983. 36 s. (Preprint. NAN Ukrainyi, IPMash AN Ukrainyi, #181).
2. Stoyan Y.G. Mathematical methods for geometric design. Advances in CAD/CAM. Proceedings of PROLAMAT82, Leningrad, USSR, May 1982. P. 67–86, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 2003.
3. Stoyan Yu.G. Razmescheniya geometricheskikh ob'ektov. K.: Nauk. dumka, 1975. 239 s.
4. Stoyan Yu.G., Gil N.I. Metody i algoritmy razmescheniya ploskih geometricheskikh ob'ektov. K.: Nauk. Dumka, 1976. 247 s.
5. Stoyan Yu.G., Yakovlev S.V. Matematicheskie modeli i optimizatsionnyie metody geometricheskogo proektirovaniya. K.: Nauk. dumka, 1986. 268 s.
6. Elementyi teorii geometricheskogo proektirovaniya/ Yakovlev S.V., Gil N.I., Komyak V.M. i dr./ pod redak. V.L. Rvacheva. K.: Nauk, dumka, 1995. 241с.
7. Kiseleva E.M., Shor N.Z. Nepreryivnyie zadachi optimalnogo razbieniya mnozhestv: teoriya, algoritmy, prilozheniya. K: Nauk. Dumka, 2005. 562 s
8. Kiseleva E.M., Koryashkina L.S. Modeli i metody resheniya nepreryivnyih zadach optimalnogo razbieniya mnozhestv: lineynye, nelineynye i dinamicheskie zadachi. K: Nauk. dumka, 2013. 604 s.
9. Kiseleva E.M., Koriashkina, L.S. Theory of continuous optimal set partitioning problems as a universal mathematical formalism for constructing Voronoi diagrams and their generalizations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51, #4. P. 489–499.
10. Stoyan Yu.G., Yakovlev S.V., Pichugina O.S. Evklidovyi kombinatornyie konfiguratsii. Harkov: Konstanta, 2017. 404 s.
11. Komyak V.V., Komyak V.M., Sobol A.N. Razbienie i trassirovka v zadachah pozharnoy bezopasnosti stroitelstva. HarkIv: NUTsZU, 2016. 160 s.
12. Komyak V.M., Sobol A.N., Dolgodush M.N. Ratsionalnoe razbienie posevnyih ploschadey po zadannyim trebovaniyam. Harkov: UTsZ Ukrainyi, 2008. 91s.

УДК 514.18

Т.А. КРЕСАН

Ніжинський агротехнічний інститут НУБіП України

С.Ф. ПИЛИПАКА, І.Ю. ГРИЩЕНКО, В.М. БАБКА

Національний університет біоресурсів і природокористування України

Т.П. ФЕДОРІНА

Ніжинський агротехнічний інститут НУБіП України

### НЕРУХОМИЙ І РУХОМИЙ АКСОЇДИ СУПРОВІДНОГО ТРИГРАННИКА ФРЕНЕ ПРОСТОРОВОЇ КРИВОЇ УКОСУ

*Рух супровідного тригранника по напрямній кривій залежить від її диференціальних характеристик: кривини і скруту. Для рухомого тригранника, як твердого тіла, існують нерухомий і рухомий аксоїди. В статті розглянуто частковий випадок, коли напрямною лінією є крива укусу. Кривина і скрут такої просторової кривої перебувають у лінійній залежності. Показано, що для такого класу кривих нерухомим аксоїдом є циліндрична поверхня, а рухомих – його розгортка. Рухомий аксоїд при обкочуванні його по нерухомому із сталою швидкістю ковзає вздовж спільної прямої дотику теж із сталою швидкістю. Розглянуто конкретний приклад.*

*Ключові слова: крива укусу, тригранник Френе, тверде тіло, просторовий рух, вісь миттєвого обертання і ковзання, рухомий і нерухомий аксоїди*

Т.А. КРЕСАН

Нежинский агротехнический институт НУБіП Украины

С.Ф. ПИЛИПАКА, И.Ю. ГРИЩЕНКО, В.Н. БАБКА

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

Т.П. ФЕДОРІНА

Нежинский агротехнический институт НУБіП Украины

### НЕПОДВИЖНЫЙ И ПОДВИЖНЫЙ АКСОИДЫ СОПРОВОЖДАЮЩЕГО ТРЕХГРАННИКА ФРЕНЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ ОТКОСА

*Движение сопровождающего трехгранника по направляющей кривой зависит от ее дифференциальных характеристик: кривизны и кручения. Для движущегося трехгранника, как твердого тела, существуют неподвижный и подвижный аксоиды. В статье рассмотрен частный случай, когда направляющей линией является кривая откоса. Кривизна и кручение такой пространственной кривой находятся в линейной зависимости. Показано, что для такого класса кривых неподвижным аксоидом является цилиндрическая поверхность, а подвижным – его развертка. Подвижный аксоид при обкатывании его по неподвижному с постоянной скоростью скользит вдоль общей прямой касания тоже с постоянной скоростью. Рассмотрен конкретный пример.*

*Ключевые слова: кривая откоса, трехгранник Френе, твердое тело, пространственное движение, ось мгновенного вращения и скольжения, неподвижный и подвижный аксоиды.*

T. A. KRESAN

IS NULES of Ukraine "Nizhyn Agrotechnical Institute

S.F. PYLYPAKA, I.YU. GRISCHENKO, V.M. BABKA

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

T.P. FEDORINA

IS NULES of Ukraine "Nizhyn Agrotechnical Institute"

### IMMOVABLE AND MOVABLE AXOID OF ACCOMPANYING TREE-EDGE OF FRENET OF THE SPATIAL SLOPE CURVE

*The motion of a solid body in space is characterized by movable and immovable axoid, which are line-shaped surfaces. It can be recreated if the moving axoid is roll on immovable one. The contact line in the process of rolling on takes place along the common production straight-line of surfaces. During rolling on, a simultaneous slip of the axoids along this straight line of contact can occur.*

*The movement of the accompanying three-edge of Frenet along the guide curve can be considered as a solid body motion, the regularity of which is determined by the differential characteristics of the curve - curvature and torsion of the curve in the function of the arc length. The three-edge moves translational along the ort of the tangent and rotational around the instantaneous axis of rotation. The position of this axis in the system of the three-edge depends on the ratio of curvature and torsion of the curve. Two movements - rotational around the axis of instantaneous rotation and translational in the direction of the ort of the tangent can be replaced by one screw motion around the instantaneous axis of rotation and slipping.*

Curves by their differential characteristics are divided into certain classes. If torsion of the curve is zero, then it is flat curve. The immovable axoid is cylindrical surface, movable – plane. The rolling of a movable axoid on a immovable in this case occurs without slipping.

In the article a partial case is considered when the guide line is the slope curve. The curvature and torsion of the spatial curve are linearly dependent. It is shown that for such a class of curves, an immovable axoid is a cylindrical surface, and a movable one is its scan, that is, a plane. However, in this case, when rolling the moving axoid on an immovable motion, there is a slip at the same time. When moving the three-edge on the guide curve of the slope with a constant velocity, the value of slip is also stable and depends on the angle of its lifting.

The article presents a mathematical description of the location of the instantaneous axes of rotation and sliding in a moving system of the three-edge and the transition to a fixed coordinate system. A concrete example is considered for the slope curve and a immovable and movable axoids is constructed for it.

Keywords: slope curve, the three-edge of Frenet, solid body, spatial motion, axis of instantaneous rotation and slip, immovable axoid, movable axoid

### Постановка проблеми

Переміщення супровідного тригранника Френе по напрямній кривій можна розглядати як рух твердого тіла. Він здійснює поступальний рух в напрямі орта дотичної і обертальний навколо миттєвої осі обертання. Цих два рухи можна звести до гвинтового навколо миттєвої осі обертання і ковзання. Однопараметрична множина таких осей по відношенню до рухомої системи тригранника утворює рухомий аксоїд, а по відношенню до нерухомої системи - нерухомий аксоїд.

Для кінематики твердого тіла рухомий і нерухомий аксоїди є важливими характеристиками. Завдяки аксоїдам можна відтворити рух твердого тіла в просторі обкочуванням рухомого аксоїда по нерухомому із одночасним їх ковзанням в загальному випадку вздовж спільної прямої дотику. Аксоїдами можуть бути як нерозгортні, так і розгортні лінійчаті поверхні. В статті розглянуто окремий випадок, коли напрямною кривою є просторова крива укусу.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

В механіці поширена практика розгляду руху твердого тіла по відношенню до рухомої системи координат. Такою системою, зокрема, може бути супровідний тригранник траєкторії однієї із точок тіла [1]. В праці [2] наведено приклад, в якому рух літака розглядається в системі тригранника Френе. В кінематичній геометрії аксоїди використовуються для утворення ротативних і спіроїдальних поверхонь [3 - 5]. Кінематику тригранника Френе, що рухається по просторовій або плоскій напрямній кривій, розглянуто в праці [6]. У статті [9] розглянуто конструювання нерухомого і рухомого аксоїдів супровідного тригранника Френе плоскої напрямної кривої.

### Мета дослідження

Розробити спосіб побудови нерухомого і рухомого аксоїдів тригранника Френе просторової кривої укусу.

### Викладення основного матеріалу досліджень

Якщо розглядати криву укусу по відношенню до горизонтальної площини, то вона характеризується тим, що кут  $\beta$  її підйому по відношенню до цієї площини є сталим. На рис. 1,а цей кут показано, як кут між ортом  $\tau$  дотичної до кривої в поточній точці і дотичною до її горизонтальної проекції. При русі тригранника по кривій кут  $\beta$  зберігає стале значення. Характерним для кривої укусу є те, що орт  $n$  головної нормалі супровідного тригранника при його русі по кривій залишається паралельним до горизонтальної площини.

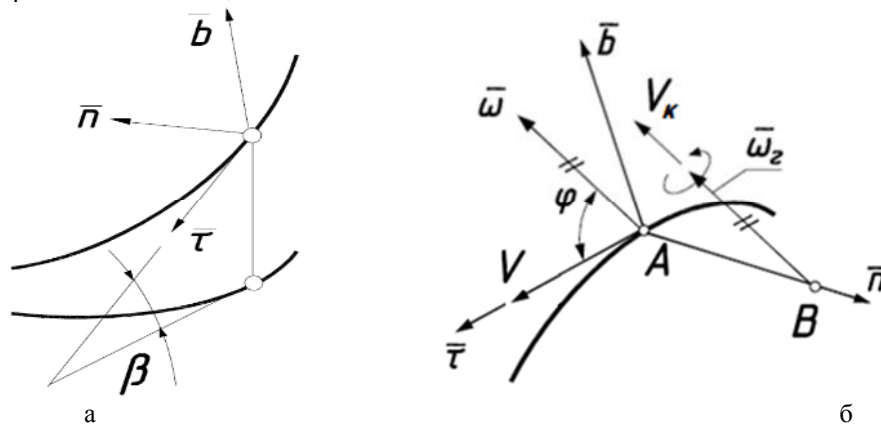


Рис. 1. До руху супровідного тригранника Френе по кривій укусу:  
а) розташування тригранника на кривій укусу; б) схема розташування векторів поступальної і кутової швидкостей



При переміщенні супровідного тригранника по просторовій напрямній кривій він здійснює два складових рухи: поступальний в напрямі орта дотичної  $\vec{\tau}$  із швидкістю  $V$  і обертальний навколо миттєвої осі обертання  $\vec{\omega}$  з кутовою швидкістю  $\omega$  (рис. 1,б). Віссю  $\vec{\omega}$  обертання тригранника є вектор Дарбу [1], який розташований в спрямній площині супровідного тригранника і складає кут  $\varphi$  із ортом дотичної  $\vec{\tau}$ . Від швидкості  $V$  руху тригранника по напрямній кривій не залежить напрям вектора Дарбу, тому зручно прийняти  $V=1$  м/с. Параметри вектора Дарбу залежать від значень кривини  $k$  і скруту  $\sigma$  кривої в точці  $A$  розташування тригранника. Його проекція на орт  $\vec{\tau}$  чисельно рівна скрутові  $\sigma$ , а на орт бінормалі  $\vec{b}$  - кривині  $k$ . Звідси можна знайти модуль вектора  $\vec{\omega}$  при  $V=1$  м/с, тобто чисельне значення кутової швидкості  $\omega$ :

$$|\vec{\omega}| = \omega = \sqrt{k^2 + \sigma^2}. \quad (1)$$

Поступальний і обертальний і рухи тригранника Френе можна замінити одним гвинтовим рухом. Він буде обертатися навколо нової осі з тією ж кутовою швидкістю  $\omega$  і ковзати вздовж неї із новою швидкістю  $V_k$ :

$$V_k = \sigma / \sqrt{k^2 + \sigma^2}. \quad (2)$$

Нова вісь називається миттєвою віссю обертання і ковзання  $\vec{\omega}_s$  (рис. 1,б) або кінематичним гвинтом. Вона паралельна вектору Дарбу і зміщена вздовж головної нормалі  $\vec{n}$  тригранника на відстань [6]:

$$AB = \frac{k}{k^2 + \sigma^2}. \quad (3)$$

Кінематичний гвинт характеризується параметром  $p$ : відношенням поступальної швидкості ковзання (2) до кутової швидкості обертання (1). Звідси отримуємо вираз для параметра кінематичного гвинта:

$$p = \frac{\sigma}{k^2 + \sigma^2}. \quad (4)$$

Скрут і кривина кривої укосу перебувають між собою у залежності, яка включає кут  $\beta$ :

$$\sigma = k \operatorname{tg} \beta. \quad (5)$$

Величина кутової швидкості обертання тригранника при його русі по кривій укосу зі швидкістю  $V=1$  м/с згідно (1) і поступальна швидкість ковзання згідно (2) із врахуванням (5) запишуться:

$$\omega = \frac{k}{\cos \beta}; \quad V_k = \sin \beta. \quad (6)$$

Параметр  $p$  і відстань  $AB$  і згідно виразів (4) і (3) набувають вигляду:

$$AB = \frac{\cos^2 \beta}{k}; \quad p = \frac{\sin \beta \cos \beta}{k}. \quad (7)$$

Знайдемо нерухомий і рухомий аксоїди тригранника Френе кривої укосу, які є лінійчатими поверхнями. Параметричні рівняння кривої укосу, заданої кутом підйому  $\beta = \text{const}$  і закономірністю зміни кривини  $k$  від довжини  $s$  власної дуги  $k=k(s)$ , запишуться [7]:

$$\begin{aligned} x &= \cos \beta \int \cos \left( \frac{1}{\cos \beta} \int k ds \right) ds; \\ y &= \cos \beta \int \sin \left( \frac{1}{\cos \beta} \int k ds \right) ds; \\ z &= s \sin \beta. \end{aligned} \quad (8)$$

Знайдемо напрям миттєвої осі обертання  $\vec{\omega}$  в нерухомій системі координат  $Oxyz$ . Нехай в системі тригранника Френе точка  $\omega$  (наприклад, кінець довільного вектора) задана координатами:

$$\left\{ \tau_{\omega}; \quad n_{\omega}; \quad b_{\omega} \right\}. \quad (9)$$

Для того, щоб перейти до координат цієї точки в нерухомій системі  $Oxyz$ , потрібно знати дев'ять кутів, які утворює кожен орт тригранника із осями нерухомої системи координат. Якщо позначити через

$\alpha_\tau, \beta_\tau, \gamma_\tau$  кути, що утворює орт дотичної  $\vec{\tau}$  з осями  $Ox, Oy, Oz$  нерухомої системи координат і аналогічно для головної нормалі  $\vec{n}$  і бінормалі  $\vec{b}$  - через  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$  і  $\alpha_b, \beta_b, \gamma_b$ , то точка  $\omega$  в проєкціях на нерухому систему запишеться [8]:

$$\begin{aligned}x_\omega &= \tau_\omega \cos \alpha_\tau + n_\omega \cos \alpha_n + b_\omega \cos \alpha_b; \\y_\omega &= \tau_\omega \cos \beta_\tau + n_\omega \cos \beta_n + b_\omega \cos \beta_b; \\z_\omega &= \tau_\omega \cos \gamma_\tau + n_\omega \cos \gamma_n + b_\omega \cos \gamma_b,\end{aligned}\tag{10}$$

Вектор  $\vec{\omega}$  розташований в спрямній площині тригранника і складає із ортом дотичної кут  $\varphi$  (рис. 1,б). Приведенням його до одиничного, знайдемо  $\cos \varphi = \sigma / \sqrt{k^2 + \sigma^2}$ . Отже, координати кінця вектора  $\vec{\omega}$  в системі тригранника запишуться:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}}; \\ 0; \\ \frac{k}{\sqrt{k^2 + \sigma^2}} \end{array} \right\}.\tag{11}$$

Враховуючи залежність (5), запишемо координати (11) через кут  $\beta$ :

$$\tau_\omega = \sin \beta; \quad n_\omega = 0; \quad b_\omega = \cos \beta.\tag{12}$$

Для знаходження напрямних косинусів вектора  $\vec{\omega}$ , вирази яких входять до рівнянь (10), необхідно мати перші і другі похідні рівнянь (8). Перші похідні мають вигляд:

$$\begin{aligned}x' &= \cos \beta \cos \left( \frac{1}{\cos \beta} \int k ds \right); \\y' &= \cos \beta \sin \left( \frac{1}{\cos \beta} \int k ds \right); \\z' &= \sin \beta.\end{aligned}\tag{13}$$

Диференціюємо (13) ще раз і отримуємо другі похідні:

$$\begin{aligned}x'' &= -k \sin \left( \frac{1}{\cos \beta} \int k ds \right); \\y'' &= k \cos \left( \frac{1}{\cos \beta} \int k ds \right); \\z'' &= 0.\end{aligned}\tag{14}$$

Величини кутів  $\alpha_\tau, \beta_\tau, \gamma_\tau, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \alpha_b, \beta_b, \gamma_b$  залежать від точки на напрямній кривій, в якій знаходиться супровідний тригранник. Їх косинуси, які є напрямними косинусами для ортів  $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$  в системі  $Oxyz$ , можна визначити через перші (13) і другі (14) похідні кривої (8) [8]:

$$\begin{aligned}\cos \alpha_\tau &= \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}; \\ \cos \beta_\tau &= \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}; \\ \cos \gamma_\tau &= \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}};\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}\cos \alpha_n &= \frac{Bz' - Cy'}{\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)(A^2 + B^2 + C^2)}}; \\ \cos \beta_n &= \frac{Cx' - Az'}{\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)(A^2 + B^2 + C^2)}}; \\ \cos \gamma_n &= \frac{Ay' - Bx'}{\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)(A^2 + B^2 + C^2)}}; \\ \cos \alpha_b &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \\ \cos \beta_b &= \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \\ \cos \gamma_b &= \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};\end{aligned}\tag{15}$$

де  $A = y'z'' - y''z'$ ;  $B = z'x'' - z''x'$ ;  $C = x'y'' - x''y'$ .

Слід зауважити, що напрямні косинуси (15) наведені для загального випадку параметричних рівнянь прямої кривої. Для окремого випадку, коли пряма крива задана у функції довжини її дуги  $s$  параметричними рівняннями  $x=x(s)$ ;  $y=y(s)$ ;  $z=z(s)$ , що має місце у рівняннях кривої (8), вирази (15) спрощуються, оскільки в цьому випадку  $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$ .

Підстановкою похідних (13), (14) у (15) отримаємо напрямні косинуси для кривої укоси (8):

$$\begin{aligned}\cos \alpha_\tau &= \cos \beta \cos \left( \frac{1}{\cos \beta} \int k ds \right); \\ \cos \beta_\tau &= \cos \beta \sin \left( \frac{1}{\cos \beta} \int k ds \right); \\ \cos \gamma_\tau &= \sin \beta; \\ \cos \alpha_n &= -\sin \left( \frac{1}{\cos \beta} \int k ds \right); \\ \cos \beta_n &= \cos \left( \frac{1}{\cos \beta} \int k ds \right); \\ \cos \gamma_n &= 0; \\ \cos \alpha_b &= -\sin \beta \cos \left( \frac{1}{\cos \beta} \int k ds \right); \\ \cos \beta_b &= -\sin \beta \sin \left( \frac{1}{\cos \beta} \int k ds \right); \\ \cos \gamma_b &= \cos \beta.\end{aligned}\tag{16}$$

Підставимо вирази (12) і напрямні косинуси (16) у (10), і після спрощень отримаємо:

$$x_\omega = 0; \quad y_\omega = 0; \quad z_\omega = 1.\tag{17}$$

Таким чином, вісь кінематичного гвинта (миттєвого обертання і ковзання) має в нерухомій системі координат сталий напрям, паралельний осі  $Oz$ . Тепер знайдемо положення осі кінематичного гвинта в нерухомій системі координат  $Oxyz$ . Точка  $B$ , через яку він проходить (рис. 1,б), в системі тригранника Френе згідно (7) має координати:

$$\tau_B = 0; \quad n_B = \frac{\cos^2 \beta}{k}; \quad b_B = 0.\tag{18}$$

Перейдемо від координат в системі тригранника до координат в системі  $Oxyz$ . Підставимо координати точки  $B$  (18) у формули переходу (10) і отримаємо:

$$\begin{aligned}x_B &= -\frac{\cos^2 \beta}{k} \sin\left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds\right); \\y_B &= \frac{\cos^2 \beta}{k} \cos\left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds\right); \\z_B &= 0.\end{aligned}\quad (19)$$

Вершина тригранника Френе знаходиться на напрямній кривій, параметричні рівняння (8) якої визначають координати точки розташування вершини тригранника при поточному значенні дуги  $s$ . Отже положення точки  $B$  в нерухомій системі координат буде складатися із суми двох складових: рівнянь (8) і (19). Зважаючи на те, що через цю точку проходить прямолінійна твірна аксоїда паралельно вектору (17), тобто осі  $Oz$ , запишемо параметричні рівняння нерухомого аксоїда:

$$\begin{aligned}X_u &= \cos \beta \int \cos\left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds\right) ds - \frac{\cos^2 \beta}{k} \sin\left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds\right); \\Y_u &= \cos \beta \int \sin\left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds\right) ds + \frac{\cos^2 \beta}{k} \cos\left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds\right); \\Z_u &= s \sin \beta + u,\end{aligned}\quad (20)$$

де  $u$  – друга незалежна змінна – довжина прямолінійної твірної.

Рухомим аксоїдом є множина положень осі кінематичного гвинта в системі тригранника Френе. В нашому випадку ця множина осей має сталий напрям в системі тригранника і змінну відстань  $AB$  (7) при  $k \neq const$ . В нерухомій системі координат  $Oxyz$  цей напрям паралельний осі  $Oz$ . Якщо орт  $\bar{n}$  рухомої системи сумістити із однією із осей нерухомої системи координат, наприклад, із віссю  $Oy$ , то напрямною кривою рухомого аксоїда буде ця вісь із закономірністю розташування осей за формулою (7)  $AB = \cos^2 \beta / k$ . Таким чином, рухомим аксоїдом буде горизонтально-проеціювальна площина із розподілом в ній осей кінематичного гвинта, паралельних осі  $Oz$ , за законом  $\rho = AB = \cos^2 \beta / k$ . Параметричні рівняння рухомого аксоїда запишуться:

$$\rho_p = \frac{\cos^2 \beta}{k}; \quad Z_p = u. \quad (21)$$

Покажемо, що поперечним перерізом циліндра (20) є еволюта горизонтальної проекції напрямної кривої (8). Параметричні рівняння еволюти мають вигляд:

$$x_e = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}; \quad y_e = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}. \quad (22)$$

Знаходимо перші і другі похідні рівнянь горизонтальної проекції кривої (8):

$$\begin{aligned}x' &= \cos \beta \cos\left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds\right); & y' &= \cos \beta \sin\left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds\right); \\x'' &= -k \sin\left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds\right); & y'' &= k \cos\left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds\right).\end{aligned}\quad (23)$$

Після підстановки перших двох рівнянь (8) і їх перших та других похідних (23) у (22) ми отримаємо вирази, які повністю збігаються із першими двома рівняннями (20). Отже, нерухомим аксоїдом є вертикальний циліндр, поперечним перерізом якого є еволюта горизонтальної проекції напрямної кривої.

Знайдемо довжину еволюти, яка описується двома першими рівняннями (20). Їх похідні мають вигляд:

$$X'_u = \frac{k' \cos^2 \beta}{k^2} \sin\left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds\right); \quad Y'_u = -\frac{k' \cos^2 \beta}{k^2} \cos\left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds\right). \quad (24)$$

За відомою формулою знаходимо довжину  $s_u$  кривої поперечного перерізу циліндра (20) – нерухомого аксоїда:

$$s_u = \int \sqrt{X'^2_u + Y'^2_u} ds = \int \frac{k' \cos^2 \beta}{k^2} ds = \cos^2 \beta \int \frac{dk}{k^2} = -\frac{\cos^2 \beta}{k}. \quad (25)$$

Вираз довжини дуги (25) (за винятком знака) точно збігається із виразом відстані  $AB$  (7). Це означає, що переріз рухомого аксоїда (21) у вигляді прямої лінії перекочується по перерізу нерухомого

аксоїда у вигляді еволюти горизонтальної проекції на прямої кривої без ковзання. В цілому перекочування рухомого аксоїда (площини (21) ) по нерухомому (циліндру (20) ) відбувається із одночасним ковзанням вздовж прямолінійної лінії контакту. Якщо швидкість руху тригранника по напрямній кривій дорівнює  $V=1$  м/с, то при перекочуванні рухомого аксоїда (площини (21) ) по нерухомому (циліндрі (20) ) рухомий аксоїд (площина) перекочується по нерухомому аксоїду (циліндрі), обертаючись при цьому із кутовою швидкістю  $\omega=k/\cos\beta$  і одночасно ковзає із сталою швидкістю вздовж спільної прямої дотику із поступальною швидкістю  $V_k=\sin\beta$ . При  $\beta=0$  (тобто для плоскої напрямної кривої) перекочування рухомого аксоїда по нерухомому відбувається без ковзання.

*Твердження.* При русі супровідного тригранника Френе по просторовій кривій укосу його нерухомим аксоїдом є полярний торс плоскої кривої – горизонтальної проекції кривої, тобто еволютний циліндр, а рухомим – його розгортка. При русі тригранника по кривій укосу із швидкістю  $V=1$  м/с рухомий аксоїд обкочується по нерухомому з кутовою швидкістю  $\omega=k/\cos\beta$  і одночасно ковзає вздовж спільної прямої дотику із швидкістю  $V=\sin\beta$ , де  $\beta$  – кут підйому кривої укосу.

Розглянемо приклад. Візьмемо наступну залежність  $k=k(s)$ :

$$k = \frac{1}{\sqrt{2as}}, \quad (26)$$

де  $a$  – стала величина.

Після підстановки (26) у (8) і подальшого інтегрування отримаємо параметричні рівняння кривої укосу:

$$\begin{aligned} x &= a \cos^2 \beta \left[ \cos \beta \cos \left( \frac{1}{\cos \beta} \sqrt{\frac{2s}{a}} \right) + \sqrt{\frac{2s}{a}} \sin \left( \frac{1}{\cos \beta} \sqrt{\frac{2s}{a}} \right) \right]; \\ y &= a \cos^2 \beta \left[ \cos \beta \sin \left( \frac{1}{\cos \beta} \sqrt{\frac{2s}{a}} \right) - \sqrt{\frac{2s}{a}} \cos \left( \frac{1}{\cos \beta} \sqrt{\frac{2s}{a}} \right) \right]; \\ z &= s \sin \beta. \end{aligned} \quad (27)$$

Підстановка виразу кривини (26) у (20) дає параметричні рівняння нерухомого аксоїда:

$$\begin{aligned} X_u &= a \cos^3 \beta \cos \left( \frac{1}{\cos \beta} \sqrt{\frac{2s}{a}} \right); \\ Y_u &= a \cos^3 \beta \sin \left( \frac{1}{\cos \beta} \sqrt{\frac{2s}{a}} \right); \\ Z_u &= s \sin \beta + u. \end{aligned} \quad (28)$$

Згідно (21) рівняння рухомого аксоїда запишуться:

$$\rho_p = \sqrt{2as} \cos^2 \beta; \quad Z_p = u. \quad (29)$$

На рис. 2 за рівняннями (28) побудовано нерухомий аксоїд у вигляді смуги на поверхні циліндра. Рухомим аксоїдом є відсік площини, дотичний до циліндра. Закономірність розташування прямолінійних твірних на площині описується рівнянням (29) і відповідає закономірності розташування відповідних кривих на циліндрі. Відсік площини обкочується по циліндрі і одночасно ковзає вгору вздовж прямої лінії контакту. Вершина  $A$  тригранника Френе, орти  $\bar{n}$  і  $\bar{b}$  якого знаходяться в площині рухомого аксоїда, описує вихідну криву укосу. На рис. 2,б показано горизонтальну проекцію, на якій нерухомий аксоїд проекціюється колом, а рухомий – прямою лінією. При  $\beta=0$  задачу можна розглядати, як плоску, при якій рухомий аксоїд у вигляді прямої обкочується без ковзання по кривій – еволюті вихідної кривої.

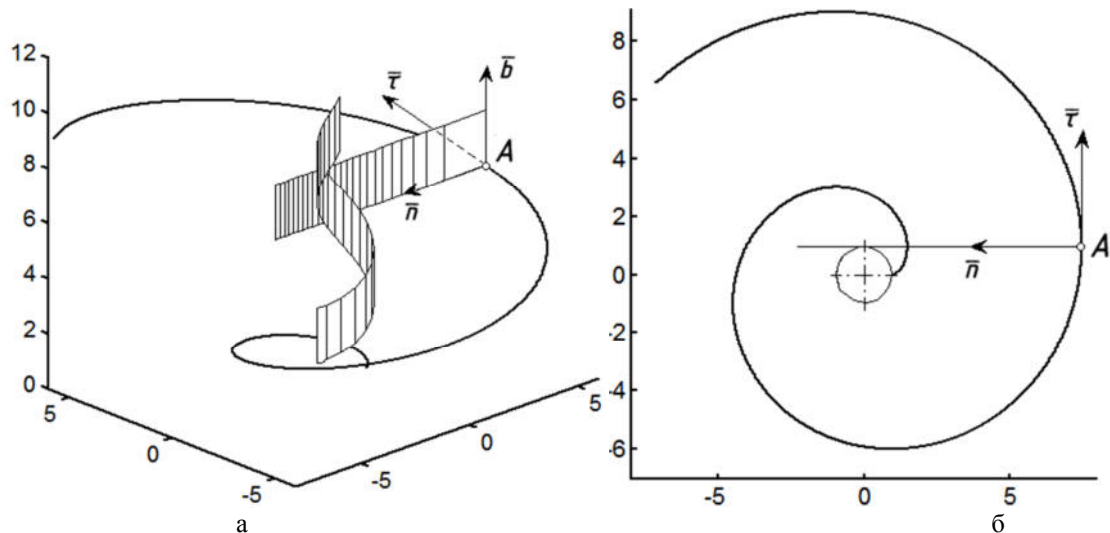


Рис. 2. Нерухомий і рухомий аксоїди кривої укусу, заданої параметричними рівняннями (27) при  $a=1$  і  $\beta=10^\circ$ :  
а) аксонометричне зображення;  
б) вигляд зверху

### Висновки

Рух тригранника Френе по кривій укусу можна розглядати, як переміщення твердого тіла у просторі. Нерухомим аксоїдом для такого переміщення є циліндрична поверхня, поперечним перерізом якої є еволюта горизонтальної проекції кривої укусу. Рухомим аксоїдом є площина – розгортка нерухомого циліндра. Вихідну криву можна відтворити перекочуванням рухомого аксоїда по нерухомому з одночасним ковзанням вздовж спільної прямої контакту. При русі тригранника по кривій укусу із швидкістю  $V=1$  м/с швидкість ковзання є сталою і чисельно рівна синусу кута підйому  $\beta$  лінії укусу. При  $\beta=0$  вихідна крива стає плоскою і обкочування рухомого аксоїда по нерухомому відбувається без ковзання.

### Список використаної літератури

1. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики: в 2 т. Москва: Наука, 1982 .Т. 1: Статика и кинематика. 352 с.
2. Лурье А.И. Аналитическая механика– Москва: ФМ, 1961. 823 с.
3. Ядгаров Д.Я., Шоломов И.Х. Применение дифференциальных уравнений к конструированию ротативных поверхностей с аксоидами торс-торс. *Исслед. в области теории дифференциальных уравнений и теории приближений*. 1982. С. 96 – 100.
4. Кирилов С.В. Параметрические уравнения некоторых спироидальных поверхностей. *Кибернетика графики и прикладная геометрия поверхностей: Труды МАИ*. 1972. № 296. С. 81 – 85.
5. Кривошапка С.Н., Шамбина С.Л. Исследование и визуализация ротативных и спироидальных поверхностей. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. Вип. 4. Прикл. геометрія та інж. графіка*. 2011. Том 49 . С. 33 – 41.
6. Панчук К.Л. Элементы кинематической геометрии кривой линии. *Омский научный вестник*. 2005. № 2 (31). С. 68 – 69.
7. Войтюк Д.Г., Пилипака С.Ф. Конструювання просторової кривої лінії із заданою кривиною, як траєкторії руху матеріальної точки. *Збірник наукових праць НАУ «Механізація сільськогосподарського виробництва»*. 2001. Т. 10 . С. 74 -78.
8. Милинский В.И. Дифференциальная геометрия. Ленинград: Кубуч, 1934. 332 с.
9. Кресан Т.А., Пилипака С.Ф., Кремець Я.С. Нерухомий і рухомий аксоїди супровідного тригранника Френе плоскої напрямної кривої . *Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць МДПУ ім. Б. Хмельницького*. 2018. № 13. С. 83 – 91.

### References

1. Loitsansky L.G., Lurie A.I. (1982) Theoretical mechanics: In two volumes. Moscow: Nauka T. 1: Statics and kinematics
2. Lurie A.I. (1961) Analytical Mechanics . Moscow: FM.
3. Yadgarov D.Ya., Sholomov I.H. (1982) Application of differential equations to the construction of rotary surfaces with axors of torsotors. *Isled. in the field of the theory of differential equations and the approximation theory.*, 96-100.
4. Kirilov S.V. (1972) Parametric equations of some spiroidal surfaces. *Cybernetics of graphics and applied geometry of surfaces: Proceedings of MAI*. 296, 81 - 85.



5. Krivoshapko S.N., Shambina S.L. (2011) Investigation and visualization of rotary and spiroidal. *Proceedings of the Tavria State Agrotechnological University*. Vip 4. Prikl. geometry and so on. graphics. **49**, 33 - 41.
6. Panchuk K..L. (2005) Elements of the kinematic geometry of the line curve. *Omsk Scientific Bulletin*. **2 (31)**, 68 - 69.
7. Voytyuk D.G., Pilipaka S.F. (2001) Construction of the spatial curve of a line with a given curvature as a trajectory of the motion of a material point. *Scientific Proceedings of the NAU "Mechanization of Agricultural Production"*. 10, 74 -78.
8. Milinsky V.I. (1934) Differential geometry. Leningrad: Kubuch.
9. Kresan T.A., Pylypaka S.F., Kretemets Ya.S. (2018) Immovable and movable axoid of accompaning three-edge of Frenet of flat sending curve. Modern modeling problems: coll. sciences works MDPU n. B. Khmel'nitsky. 13, 83 - 91.

УДК 519.6

О.М. ЛИТВИН, Ю.І. ПЕРШИНА, І.В. ЦАРЬОВ  
Українська інженерно-педагогічна академія

### ВІДНОВЛЕННЯ ВНУТРІШНЬОЇ СТРУКТУРИ ТРИВИМІРНОГО ОБ'ЄКТА З ВИКОРИСТАННЯМ НЕВЕЛИКОЇ КІЛЬКОСТІ ДАНИХ

*У статті запропоновано метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла, що використовує чотири томограми. Метод будується за допомогою введення оператора інтерфлотації функцій трьох змінних. Вказаний оператор відновлює (можливо, наближено) функцію трьох змінних в точках між заданими площинами за допомогою її слідів на цих площинах (томограм). Доведені теореми про похибку відновлення функції трьох змінних оператором інтерфлотації. Встановлено клас функцій, які описують внутрішню структуру тіла і які точно можуть бути відновлені за допомогою розробленого методу.*

*Ключові слова:* інтерфлотація, відновлення внутрішньої структури, інтерполяція, апроксимація.

О.Н. ЛИТВИН, Ю.И. ПЕРШИНА, И.В. ЦАРЕВ  
Украинская инженерно-педагогическая академия

### ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЫ ТРЕХМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕБОЛЬШОГО КОЛИЧЕСТВА ДАННЫХ

*В статье предложен метод восстановления внутренней структуры трехмерного тела, который использует четыре томограммы. Метод строится посредством введения оператора интерфлотации функций трех переменных. Указанный оператор восстанавливает (возможно, приближенно) функцию трех переменных в точках между заданными плоскостями с помощью ее следов на этих плоскостях (томограмм). Доказаны теоремы о погрешности восстановления функции трех переменных оператором интерфлотации. Установлено класс функций, описывающих внутреннюю структуру тела и которые точно могут быть восстановлены с помощью разработанного метода.*

*Ключевые слова:* интерфлотация, восстановление внутренней структуры, интерполяция, аппроксимация.

O.M. LYTVYN, I.I. PERSHYNA, I.V. TSAREV  
Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy

### RESTORATION OF THE INTERNAL STRUCTURE OF THREE-DIMENSIONAL OBJECTS USING A SMALL AMOUNT OF DATA

*One of the most informative method is a tomography that gives more information about the subject being studied than other known diagnostic methods. Significantly improve the informativeness of data obtained in tomography allows the use of various methods for solving three-dimensional problems of computed tomography, allowing to examine individual parts of the object under study at an arbitrary angle.*

*The article proposed a method of restoration of the internal structure of a three-dimensional body, which uses four tomograms. Experimental data is the equation of four planes. Without limiting generality, planes perpendicular to two axis axes, such as the axis  $Ox$  and  $Oy$ . Input data is also obtained from a computer tomography tomogram, which lie on given planes. In this paper, the definition of the trace of the function of three variables on a plane and the determination of tomograms in the mathematical sense are given as functions of two variables. In the work, the problem is solved, which is to construct an operator that will restore the investigated object by the specified input data and give a general view of functions that will be restored by a precisely constructed operator. The method is constructed by introducing the operator of interflatation of functions of three variables. The indicated operator restores (possibly, approximately) the function of three variables at points between the given planes using its traces on these planes (tomograms). Theorems on the error of recovery of a function of three variables by the operator of interflatation are proved. The class of functions describing the internal structure of the body and which can be accurately restored using the developed method is established.*

*Subsequently, the authors plan to explore the possibility of applying the results in practice to identify the internal structure of objects using only four tomograms. This method can be used for solving problems in a small-angle computed tomography.*

*Keywords: interflatation, restoration of internal structure, interpolation, approximation.*

### Вступ

Світові тенденції в галузі приладобудування в останній час набули значних змін. Це викликано необхідністю збільшення якості діагностики, що приводить як до утворення нових високоінформативних діагностичних приладів, так і до модернізації традиційних технологій.

Сучасний рівень медичної техніки дозволяє виявити структурні та функціональні зміни одного і того ж органу за допомогою приладів, що мають різний принцип дії. В подібних умовах на перше місце виходить інформаційна складова досліджень.

На даному етапі одним з найбільш інформативним методом є томографія, яка дає більше інформації про досліджуваний об'єкт, ніж інші відомі методи діагностики.

Істотно підвищити інформативність отриманих при томографії даних дозволяє використання різних методів розв'язання тривимірних задач комп'ютерної томографії, що дозволяють роздивитись окремі частини досліджуваного об'єкту під довільним кутом.

Отримання томограм за допомогою рентгенівського комп'ютерного томографа – це опромінення пацієнта. І одна із задач комп'ютерної томографії – зменшити опромінення. Тому актуальною є розробка методів відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою невеликої кількості вхідних даних, тобто томограм.

### Аналіз останніх досліджень

Авторами були розроблені високоточні методи тривимірної комп'ютерної томографії за допомогою операторів інтерфлетатії та мішаної апроксимації [1]. В роботах [2]-[4] представляється загальний метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою інформації про неї у вигляді томограм, заданих на системі трьох груп перерізаних площин, в кожній з яких площини паралельні. У роботах [2], [3] внутрішня структура тривимірного тіла відновлювалася з використанням операторів інтерфлетатії функцій трьох змінних (для випадку, коли експериментальні дані - томограми задаються точно), а в роботі [4] - за допомогою оператора мішаної апроксимації (для випадку, коли існує похибка в заданих експериментальних даних). Авторами також був досліджений новий метод відновлення внутрішньої структури динамічного тривимірного тіла (наприклад, серця) за допомогою оператора інтерфлетатії [5], [6]. У вказаних роботах використовуються експериментальних даних - томограм, паралельних осі  $x$ , томограм, паралельних осі  $y$  та томограм, паралельних осі  $z$ . Був проведений обчислювальний експеримент, в якому використовувалося 235 томограм. Але отримання томограм за допомогою рентгенівського комп'ютерного томографа - це опромінення пацієнта. І одна із задач комп'ютерної томографії - зменшити опромінення. Тому актуальною є розробка методів відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою невеликої кількості вхідних даних, тобто томограм.

В даній статті пропонується метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла, який використовує чотири томограми та будується за допомогою інтерфлетатії функцій трьох змінних. А також представляються загальні вигляди щільностей або коефіцієнтів поглинання об'єктів, які описуються функціями, що точно відновлюються за допомогою вказаної інформації.

### Постановка задачі.

Нехай функція  $f(x, y, z) \in C^{(s,p,0)}(\Omega)$ ,  $s, p = \overline{0, N}$ ,  $\Omega \subset R^3$  представляє собою щільність тривимірного тіла (чи коефіцієнт поглинання, послаблення тощо) та задані чотири площини  $x = x_k, y = y_\ell, k, \ell = 1, 2$ . Не обмежуючи загальності беремо площини, перпендикулярні двом координатним вісям, наприклад вісі  $Ox$  та  $Oy$ . З комп'ютерного томографа отримані томограми, які лежать на заданих площинах. Задача полягає в тому, щоб за вказаними вхідними даними побудувати оператор, який буде відновлювати досліджуваний об'єкт, та навести загальний вигляд функцій, які будуть відновлюватися точно побудованим оператором.

**Опис методу.** Наведемо необхідні визначення.

*Визначення 1.* Слідом функції  $f(x, y, z)$  на площині  $\Pi$  будемо називати функцію двох змінних  $\omega(x, y)$  або  $\omega(x, z)$ , або  $\omega(y, z)$ , яка в кожній точці цієї площини приймає ті ж значення, що й функція  $f(x, y, z)$

$$f(x, y, z)|_{\Pi} = \omega|_{\Pi}.$$

*Визначення 2.* Інтерфлетатією функції  $f(x, y, z)$  називається відновлення (можливо, наближене) функції  $f(x, y, z)$  в точках між заданими площинами за допомогою слідів на цих площинах.

Визначення 3. Томограмою на площині  $\Pi$  будемо називати одну з трьох функцій

$$T(\bar{x}) = \begin{cases} f(x_{\Pi}(y, z), y, z) \\ f(x, y_{\Pi}(x, z), z) \\ f(x, y, z_{\Pi}(x, y)) \end{cases}, \quad \bar{x} = \begin{cases} (x, y) \\ (x, z) \\ (y, z) \end{cases}$$

Визначимо оператор, за допомогою якого буде відновлюватися внутрішня структура тривимірного тіла, що задана у вигляді функції  $f(x, y, z)$ .

Теорема 1. Нехай функція  $f(x, y, z) \in C^{(s, p, 0)}(\Omega)$ ,  $s, p = \overline{0, N}$ ,  $\Omega \subset R^3$  представляє собою внутрішню структуру тривимірного тіла та задані чотири площини  $x = x_k, y = y_\ell, k, \ell = 1, 2$ . Оператор

$$L(x, y, z) = (L_1 + L_2 - L_1 L_2) f(x, y, z),$$

де

$$\begin{aligned} L_1 f(x, y, z) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{s=0}^N h_{i,s}(x) f^{(s, 0, 0)}(x_i, y, z); \\ L_2 f(x, y, z) &= \sum_{j=1}^2 \sum_{p=0}^N g_{j,p}(y) f^{(0, p, 0)}(x, y_j, z); \\ L_1 L_2 f(x, y, z) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{s=0}^N \sum_{p=0}^N h_{i,s}(x) g_{j,p}(y) f^{(s, p, 0)}(x_i, y_j, z), \end{aligned}$$

де  $h_{i,s}(x)$ ,  $g_{j,p}(y)$  - допоміжні функції з властивостями:

$$h_{u,s}(x_v) = \delta_{uv}, \quad g_{u,s}(y_v) = \delta_{uv},$$

$\delta_{uv}$  - символ Кронекера,

$$\sum_{i=1}^2 h_{i,s}(x) = 1, \quad \sum_{j=1}^2 g_{j,s}(y) = 1, \quad s, p = \overline{0, N}$$

є оператором інтерфлетатції функцій трьох змінних, який задовольняє умовам:

$$\left. \frac{\partial L(x, y, z)}{\partial x^p} \right|_{x=x_k} = \left. \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x^p} \right|_{x=x_k}, \quad p = \overline{0, N}, \quad k = 1, 2; \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial L(x, y, z)}{\partial y^s} \right|_{y=y_l} = \left. \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y^s} \right|_{y=y_l}, \quad s = \overline{0, N}, \quad l = 1, 2; \quad (2)$$

Оператор інтерфлетатції, визначений в теоремі 1, відновлює внутрішню структуру тривимірного тіла за відомими чотирма томограмами, що лежать на заданих площинах. Визначимо похибку відновлення цим оператором.

Доведення. Перевіримо виконання умов (1) і (2) при  $p = 0, s = 0$ :

$$\begin{aligned} L(x, y, z) \Big|_{x=x_k} &= L_1(x, y, z) \Big|_{x=x_k} + L_2(x, y, z) \Big|_{x=x_k} - L_1 L_2(x, y, z) \Big|_{x=x_k} = \\ &= \sum_{i=1}^2 h_{i,0}(x_k) f(x_i, y, z) + \sum_{j=1}^2 g_{j,0}(y) f(x_k, y_j, z) - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 h_{i,0}(x_k) g_{j,0}(y) f(x_i, y_j, z) = \\ &= f(x_k, y, z) + \sum_{j=1}^2 g_{j,0}(y) f(x_k, y_j, z) - \sum_{j=1}^2 g_{j,0}(y) f(x_k, y_j, z) = f(x_k, y, z); \\ L(x, y, z) \Big|_{y=y_l} &= L_1(x, y, z) \Big|_{y=y_l} + L_2(x, y, z) \Big|_{y=y_l} - L_1 L_2(x, y, z) \Big|_{y=y_l} = \\ &= \sum_{i=1}^2 h_{i,0}(x) f(x_i, y_l, z) + \sum_{j=1}^2 g_{j,0}(y_l) f(x, y_j, z) - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 h_{i,0}(x) g_{j,0}(y_l) f(x_i, y_j, z) = \\ &= \sum_{i=1}^2 h_{i,0}(y) f(x_i, y_l, z) + f(x, y_l, z) - \sum_{j=1}^2 h_{i,0}(x) f(x_i, y_l, z) = f(x, y_l, z). \end{aligned}$$

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. Нехай внутрішня структура тривимірного тіла описується функцією  $f(x, y, z) \in C^{(1,1,0)}(\Omega)$ ,  $\Omega \subset R^3$ . Тоді для похибки  $Rf(x, y, z)$  наближеного відновлення внутрішньої структури  $f(x, y, z)$  тривимірного тіла оператором  $L(x, y, z)$ , побудованим за допомогою заданого набору площин та томограм, що лежать на цих площинах, виконується рівність:

$$\begin{aligned} Rf(x, y, z) &= f(x, y, z) - Lf(x, y, z) = (I - L_1 - L_2 + L_1L_2)f(x, y, z) = \\ &= \sum_{k=1}^2 \sum_{\ell=1}^2 h_k(x)g_\ell(y) \int_{x_k}^x \int_{y_\ell}^y f^{(1,1,0)}(u, v, z) du dv \end{aligned} \quad (3)$$

Доведення. Записуємо

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \sum_{\ell=1}^2 h_k(x)g_\ell(y) \int_{x_k}^x \int_{y_\ell}^y f^{(1,1,0)}(p, q, z) dp dq &= \sum_{k=1}^2 \sum_{\ell=1}^2 h_k(x)g_\ell(y) \int_{x_k}^x (f^{(1,0,0)}(p, y, z) - f^{(1,0,0)}(p, y_\ell, z)) dp = \\ &= \sum_{k=1}^2 \sum_{\ell=1}^2 h_k(x)g_\ell(y) (f(x, y, z) - f(x_k, y, z) - f(x, y_\ell, z) + f(x_k, y_\ell, z)) = \\ &= f(x, y, z) - (L_1 + L_2 - L_1L_2)f(x, y, z) = f(x, y, z) - Lf(x, y, z) = Rf(x, y, z). \end{aligned}$$

Теорему 2 доведено.

*Теорема 3.* Нехай внутрішня структура тривимірного тіла описується функцією  $f(x, y, z) \in C^{(2,2,0)}(\Omega)$ ,  $\Omega \subset R^3$ . Тоді для похибки  $Rf(x, y, z)$  наближеного відновлення внутрішньої структури  $f(x, y, z)$  тривимірного тіла оператором  $L(x, y, z)$ , побудованим за допомогою заданого набору площин та томограм, що лежать на цих площинах, виконується рівність:

$$\begin{aligned} Rf(x, y, z) &= f(x, y, z) - Lf(x, y, z) = (I - L_1 - L_2 + L_1L_2)f(x, y, z) = \\ &= \sum_{k=1}^2 \sum_{\ell=1}^2 h_k(x)g_\ell(y) \int_{x_k}^x \int_{y_\ell}^y f^{(2,2,0)}(u, v, z)(x_k - u)(y_\ell - v) du dv \end{aligned} \quad (4)$$

Доведення виконується інтегруванням частинами за змінними  $p, q$ .

Тепер знайдемо загальний вигляд функцій, що описують внутрішню структуру тривимірного тіла, які точно будуть відновлюватися за допомогою оператора інтерфлетатції, побудованого в теоремі 1, використовуючи чотири томограми, що лежать на заданих площинах  $x = x_k, y = y_\ell, k, \ell = 1, 2$ . І розглянемо два випадки:

1) Функція неперервна та має дві неперервні похідні, тобто  $f(x, y, z) \in C^{(1,1,0)}(\Omega)$ ,  $\Omega \subset R^3$ . Для точного відновлення похибка наближення повинна дорівнювати нулю. Із загального вигляду похибки (3) виходить, що повинна виконуватися рівність:

$$\int_{x_k}^x \int_{y_\ell}^y f^{(1,1,0)}(u, v, z) du dv = 0$$

Для виконання цієї рівності повинно виконуватися  $f^{(1,1,0)}(x, y, z) = 0$ . Розв'яжемо це диференціальне рівняння:

$$f^{(0,1,0)}(x, y, z) = \int f^{(1,1,0)}(x, y, z) dx = \varphi(y, z);$$

$$f^{(0,0,0)}(x, y, z) = \int f^{(0,1,0)}(x, y, z) dy = \int \varphi(y, z) dy + \psi(x, z) = w(y, z) + \psi(x, z).$$

Тобто, загальний вигляд функції, яка точно відновлюється за допомогою оператора інтерфлетатції, визначеного в теоремі 1, має вигляд:

$$f(x, y, z) = w(y, z) + \psi(x, z).$$

2) Функція неперервна та має чотири неперервні похідні, тобто  $f(x, y, z) \in C^{(2,2,0)}(\Omega)$ ,  $\Omega \subset R^3$ . Для точного відновлення похибка наближення повинна дорівнювати нулю. Із загального вигляду похибки (4) виходить, що повинна виконуватися рівність:

$$\int_{x_k}^x \int_{y_\ell}^y f^{(2,2,0)}(u, v, z)(x_k - u)(y_\ell - v) du dv = 0.$$

Для виконання цієї рівності повинно виконуватися  $f^{(2,2,0)}(x, y, z) = 0$ . Розв'яжемо це диференціальне рівняння:

$$f^{(1,2,0)}(x, y, z) = \int f^{(2,2,0)}(x, y, z) dx = \varphi_1(y, z);$$

$$f^{(0,2,0)}(x, y, z) = \int f^{(1,2,0)}(x, y, z) dx = \int \varphi_1(y, z) dx = x\varphi_1(y, z) + \varphi_2(y, z);$$

$$f^{(0,1,0)}(x, y, z) = \int (x\varphi_1(y, z) + \varphi_2(y, z)) dy = x \int \varphi_1(y, z) dy + \int \varphi_2(y, z) dy + \psi_1(x, z);$$

$$f^{(0,0,0)}(x, y, z) = \int \left( x \int \varphi_1(y, z) dy + \int \varphi_2(y, z) dy + \psi_1(x, z) \right) dy =$$

$$= x \int \left[ \int \varphi_1(y, z) dy \right] dy + \int \left[ \int \varphi_2(y, z) dy \right] dy + y\psi_1(x, z) + \psi_2(x, z).$$

Тобто, загальний вигляд функції, яка точно відновлюється за допомогою вище введеного оператора інтерфлетатції, має вигляд:

$$f(x, y, z) = x \int \left[ \int \varphi_1(y, z) dy \right] dy + \int \left[ \int \varphi_2(y, z) dy \right] dy + y\psi_1(x, z) + \psi_2(x, z).$$

**Висновок.** Таким чином, в даній роботі запропонований та досліджений метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою всього чотирьох томограм, паралельних осі і взаємно перпендикулярних між собою. Встановлено клас функцій, які описують внутрішню структуру тіла і які точно можуть бути відновлені за допомогою розробленого методу.

У подальшому автори планують дослідити можливості застосування отриманих результатів на практиці для ідентифікації внутрішньої структури об'єктів за допомогою всього чотирьох томограм.

#### Список використаних джерел

1. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002. – 544с.
2. Литвин О.М., Першина Ю.І. Математична модель відновлення внутрішньої структури тривимірного об'єкта за відомими його томограмами з використанням інтерфлетатції функцій. *Доповіді НАНУ*. Київ, 2005. №1. С. 20-24.
3. Литвин О.М., Першина Ю.І. Математична модель відновлення тривимірних об'єктів за їх томограмами на системі трьох груп перерізанних площин з використанням інтерфлетатції функції. *Доповіді НАНУ*. Київ, 2005. №8. С. 67-71.
4. Литвин О.М., Першина Ю.І. Метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла з використанням томограм та мішаної апроксимації. *Таврічний вісник інформатики та математики*. Симферополь. 2008. №2. С. 18 – 24.
5. O. M. Lytvyn, Y. I. Pershina, O.P. Nechuyviter, O.O. Litvin, S.I. Kulyk Construction methods of 4D mathematical models 3D bodies on a basis interlineation, interflatation, blending approximation and wavelets. *What Where When Multi-dimensional Advances for Industrial Process Monitoring: Poceedings of International Symposium (23-24 June 2009)*. Leeds, UK. 2009. P. 443- 453.
6. Першина Ю.І. 4D математична модель 3D тіла в комп'ютерній томографії. *Питання оптимізації обчислень (ПОО - XXXV): Праці міжнародного симпозіуму (24-29 вересня 2009р.)*. Київ: Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2009. Т.2. С.188 – 193.

#### References

1. Lytvyn O.M. Interlinatsiia funktsii ta deiaki yii zastosuvannia. – Kh.: Osnova, 2002. – 544p.
2. Lytvyn O.M., Pershyna Yu.I. Matematychna model vidnovlennia vnutrishnoi struktury tryvymirnoho obiekta za vidomymy yoho tomogramy z vykorystanniam interfletatsii funktsii. *Dopovidi NANU*. Kyiv, 2005. №1. pp. 20-24.
3. Lytvyn O.M., Pershyna Yu.I. Matematychna model vidnovlennia tryvymirnykh obektiv za yikh tomogramy na systemi trokh hrup pererizanykh ploshchyn z vykorystanniam interfletatsii funktsii. *Dopovidi NANU*. Kyiv, 2005. №8. p. 67-71.
4. Lytvyn O.M., Pershyna Yu.I. Metod vidnovlennia vnutrishnoi struktury tryvymirnoho tila z vykorystanniam tomogram ta mishanoi aproksymatsii. *Tavrishnyi visnyk informatyky ta matematyky*. Symferopol. 2008. №2. p. 18 – 24.
5. O. M. Lytvyn, Y. I. Pershina, O.P. Nechuyviter, O.O. Litvin, S.I. Kulyk Construction methods of 4D mathematical models 3D bodies on a basis interlineation, interflatation, blending approximation and wavelets. *What Where When Multi-dimensional Advances for Industrial Process Monitoring: Poceedings of International Symposium (23-24 June 2009)*. Leeds, UK. 2009. P. 443- 453.
6. Pershyna Yu.I. 4D matematychna model 3D tila v kompiuternii tomografii. *Pytannia optymizatsii obchyslen (POO - XXXV): Pratsi mizhnarodnoho simpoziumu (24-29 veresnia 2009r.)*. Kyiv: Instytut kibernetiky imeni V.M. Hlushkova NAN Ukrainy, 2009. T.2. p.188 – 193.



УДК 514.18

О.А. НІКІТЕНКО,  
Варшавський університет сільського господарства  
Г.В. КОВАЛЬОВА, О.О.КАЛІНІН, Т.О.КАЛІНІНА  
Одеська державна академія будівництва та архітектури

### ВИЗНАЧЕННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ ЛІНІЙ НА ЦИКЛІЧНІЙ ГВИНТОВІЙ ПОВЕРХНІ

*Довгий час геодезична лінія існувала тільки теоретично в диференціальній геометрії як лінія внутрішньої геометрії поверхні. Але на даний час сім'ї геодезичних ліній знаходять практичне застосування у техніці і виробництві. Наприклад, у формуванні поверхонь викладкою зі склотканини або зміцнення балонів з композитних матеріалів, армованих нитками, в розрахунку траєкторії мобільного робота. В різних зачепленнях лінія контакту двох поверхонь є геодезичною, а траєкторії появи та розвитку тріщин в оболонках та робочих поверхнях деталей співпадають з геодезичними. В даній праці отримано рівняння геодезичної лінії для циклічної поверхні гелікоїдного ротора шляхом мінімізації довжини кривої. Для підтвердження отриманих результатів в графічному редакторі AutoCAD було побудовано кілька геодезичних ліній, початок яких є в точці  $P(2, 0, 0)$ .*

*Ключові слова: геодезичні лінії, циклічна гвинтова поверхня, мінімізація функціоналу.*

О.А. НИКИТЕНКО  
Варшавський університет сільського господарства  
Г.В. КОВАЛЕВА, А.А.КАЛИНИН, Т.А. КАЛИНИНА  
Одесская государственная академия строительства и архитектуры

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ НА ЦИКЛИЧЕСКОЙ ВИНТОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

*Долгое время геодезическая линия существовала только теоретически в дифференциальной геометрии как линия внутренней геометрии поверхности. Но в настоящее время семьи геодезических линий находят практическое применение в технике и производстве. Например, в формировании поверхностей выкладкой из стеклоткани или укрепление баллонов из композитных материалов, армированных нитями, в расчете траектории мобильного робота. В разных зацеплениях линия контакта двух поверхностей является геодезической, а траектории появления и развития трещин в оболочках и рабочих поверхностях деталей совпадают с геодезическими. В данной работе получено уравнение геодезической линии для циклической поверхности геликоидного ротора путем минимизации длины кривой. Для подтверждения полученных результатов в графическом редакторе AutoCAD было построено несколько геодезических линий, начало которых в точке  $P(2, 0, 0)$ .*

*Ключевые слова: геодезические линии, циклическая винтовая поверхность, минимизация функционала.*

O.NIKITENKO  
Warsaw University of Life Sciences – SGGW  
G. KOVALOVA, A.KALININ, T.KALININA  
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

### DEFINING OF GEODESIC LINES ON THE CYCLIC HELICOID

*At present, wind turbines with a vertical axis are widely used in engineering. Due to the twist of the blades, the rotation of the helicoid rotor is more uniform, which significantly reduces the dynamic load on the support nodes and, thus, increases their service life. But in the process of wind load there are cracks in the surface of blades, the development of which may eventually lead to their partial destruction or the entire structure, so their detection and elimination are an important part of design and manufacturing. It is known that trajectories of cracks coincide with families of geodesic surface lines, which ultimately leads to the idea that the voltages along the geodesics are larger in comparison with the stresses along the lines of curvature. Geodesic lines first appeared in the writings of J. and I. Bernoulli (1697-98), and the term "geodesic" was first used by P. Lapplas in relation to the "shortest lines" on the earth's surface. For a long time, the geodesic line existed only theoretically in differential geometry as a line of internal surface geometry. But at the present time families of geodetic lines*

*find practical application in engineering and production. For example, in the formation of surfaces for laying out of fiberglass or strengthening the cylinders of composite materials with reinforced threads, in the calculation of the trajectory of mobile robot. On the surfaces of the rotation, the geodesic lines are determined by means of differential equations, but the equation of the geodesic lines of a cyclic screw surface is found in the form of an integral by minimizing the distance between two points. Since all the formulas are rather cumbersome for calculations, we used Simpson's formulas to calculate certain integrals. Several geodesic lines have been constructed which come out from one point  $P(2, 0, 0)$  in the graphic editor AutoCAD to confirm the obtained results. Their coordinates were determined by substituting  $\varphi$  and determined  $\psi$  in the equation of the surface.*

*Key words: geodesic lines, cyclic screw surface, minimization of the functional.*

### Постановка проблеми

На даний час в техніці широко поширені вітрові турбіни з вертикальною віссю. За рахунок закрутки лопатей обертання гелікоїдного ротора є більш рівномірним, що значно знижує динамічні навантаження на опорні вузли і, тим самим, збільшує їх термін служби. Але в процесі вітрового навантаження виникають тріщини на поверхні лопатей, розвиток яких може з часом привести до їх частково руйнування або всієї конструкції, тому їх визначення і усунення є важливою частиною проектування і виготовлення. Відомо, що траєкторії появи та розвитку тріщин співпадають з сім'ями геодезичних ліній поверхні, що остаточно наводить на думку, що напруги вздовж геодезичних є більшими у порівнянні з напругами вздовж лініями кривизни [1, с. 158].

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Геодезичні лінії вперше з'явилися у працях Я. і І. Бернуллі (1697-98), а термін «геодезична» вперше застосував П.Лаплас стосовно до «найкоротших ліній» на земній поверхні. Довгий час геодезична лінія існувала тільки теоретично в диференціальній геометрії як лінія внутрішньої геометрії поверхні. Але на даний час сім'ї геодезичних ліній знаходять практичне застосування у техніці і виробництві. Наприклад, у формуванні поверхонь з викладки із склотканини [2, с. 118]. або зміцнення балонів із композитних матеріалів, армованих нитками [3, с. 100], в розрахунку траєкторії мобільного робота [4, с. 217]. На поверхнях обертання геодезичні лінії визначаються за допомогою диференціальних рівнянь [5, с. 25], а на гвинтовій циклічній шляхом мінімізації кривої [6, с. 142].

### Мета дослідження

Метою дослідження є аналітичний опис та конструювання в графічному редакторі AutoCAD геодезичних ліній на циклічній гвинтовій поверхні, половина якої лежить в основі конструкції вітрового гвинтового ротора. Твірна гвинтової поверхні лежить у площині, що перпендикулярна до осі поверхні.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Відомо, що коли крива, задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t); \end{cases} \quad (1)$$

здійснює гвинтовий рух, то утворюється гвинтова поверхня, параметричні рівняння якої мають вигляд [7, с. 43]:

$$\begin{cases} X = x(t) \cos \psi - y(t) \sin \psi; \\ Y = x(t) \sin \psi + y(t) \cos \psi; \\ Z = z(t) + p \psi. \end{cases} \quad (2)$$

Як відомо, диференціал довжини дуги кривої на поверхні обчислюється за допомогою першої квадратичної форми поверхні [5, с.15]

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

де  $u, v$  – внутрішні координати поверхні, а  $E, F, G$  – коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні. Знайдемо коефіцієнти другої квадратичної форми:

$$\begin{cases} X'_t = x'(t) \cos \psi - y'(t) \sin \psi; \\ Y'_t = x'(t) \sin \psi + y'(t) \cos \psi; \\ Z'_t = z'(t). \end{cases} \quad \begin{cases} X'_\psi = -x(t) \sin \psi - y(t) \cos \psi; \\ Y'_\psi = x(t) \cos \psi - y(t) \sin \psi; \\ Z = p. \end{cases}$$

$$E = (X'_t)^2 + (Y'_t)^2 + (Z'_t)^2 = (x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2,$$

$$F = X'_t X'_\psi + Y'_t Y'_\psi + Z'_t Z'_\psi = -x'(t)y(t) + x(t)y'(t) + pz'(t), \quad (3)$$

$$G = (X'_\psi)^2 + (Y'_\psi)^2 + (Z'_\psi)^2 = x^2(t) + y^2(t) + z^2(t).$$

Таким чином, довжина дуги кривої  $\psi = \psi(t)$  на поверхні (2) обчислюється за формулою

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 + (-x'y + xy' + pz')\psi' + (x^2 + y^2 + z^2)(\psi')^2} dt. \quad (4)$$

Цей інтеграл є функціоналом, який досягає мінімуму на геодезичній кривій. Отже, геодезична крива має задовольняти рівняння Ейлера [8, с. 18]:

$$\frac{\partial F}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \psi'} \right) = 0,$$

де  $F$  – підінтегральна функція. Оскільки  $\frac{\partial F}{\partial \psi} = 0$ , то  $\frac{\partial F}{\partial \psi'} = C$ ,  $C = const$ .

Таким чином

$$\frac{-x'y + xy' + pz' + (x^2 + y^2 + z^2)\psi'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 + (-x'y + xy' + pz')\psi' + (x^2 + y^2 + z^2)(\psi')^2}} = C. \quad (5)$$

Розв'язуючи це рівняння відносно  $\psi'$ , отримаємо

$$\psi' = \frac{-(-x'y + xy' + pz')\sqrt{x^2 + y^2 + p^2 - C^2} \pm C\sqrt{(xx' + yy')^2 + (xz' - py')^2 + (px' - yz')^2}}{(x^2 + y^2 + p^2)\sqrt{x^2 + y^2 + p^2 - C^2}}.$$

Таким чином,

$$\psi(t) = \int_{t_0}^t \frac{-(-x'y + xy' + pz')\sqrt{x^2 + y^2 + p^2 - C^2} \pm C\sqrt{(xx' + yy')^2 + (xz' - py')^2 + (px' - yz')^2}}{(x^2 + y^2 + p^2)\sqrt{x^2 + y^2 + p^2 - C^2}} dt + \psi(t_0) \quad (6)$$

Розглянемо гвинтову поверхню, утворену рухом кола

$$\begin{cases} x = \cos \varphi + 1; \\ y = \sin \varphi; \\ z = 0; \end{cases} \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

з параметром  $p = 1$ . Рівняння поверхні:

$$\begin{cases} X = (\cos \varphi + 1) \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi; \\ Y = (\cos \varphi + 1) \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi; \\ Z = \psi. \end{cases}$$

Скористаємось формулою (6). Для такої поверхні рівняння геодезичної лінії буде мати вигляд:

$$\psi(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{-(1 + \cos \varphi) \sqrt{3 + 2 \cos \varphi - C^2} \pm C \sqrt{\sin^2 \varphi + 1}}{(3 + 2 \cos \varphi) \sqrt{3 + 2 \cos \varphi - C^2}} d\varphi + \psi(\varphi_0). \quad (7)$$

Стала  $C$  знаходиться з рівності (5), якщо задані координати початкової точки  $\varphi_0, \psi(\varphi_0)$  та напрям геодезичної ( $\psi'(\varphi_0)$ ). Для заданої поверхні рівняння (5) набуває вигляду:

$$\frac{2 + 5\psi'(\varphi_0)}{\sqrt{1 + 4\psi'(\varphi_0) + 5(\psi'(\varphi_0))^2}} = C. \quad (8)$$

Розглянемо частинні випадки.

1. Нехай  $\varphi_0 = 0, \psi(\varphi_0) = 0, \psi'(\varphi_0) = -0,4$ . Підставляючи ці значення в (8), знаходимо, що  $C = 0$  (на Рис. 1 геодезична лінія під номером 1). Тоді за формулою (7):

$$\psi(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{-(1 + \cos \varphi)}{3 + 2 \cos \varphi} d\varphi.$$

Цей інтеграл можна безпосередньо проінтегрувати:

$$\psi(\varphi) = -\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right).$$

2. Нехай  $\varphi_0 = 0, \psi(\varphi_0) = 0, \psi'(\varphi_0) = 0$ . Підставляючи ці значення в (8), знаходимо, що  $C = 2$  (на Рис. 1 геодезична лінія під номером 2). Тоді за формулою (7):

$$\psi(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{-(1 + \cos \varphi) \sqrt{2 \cos \varphi - 1} + 2 \sqrt{\sin^2 \varphi + 1}}{(3 + 2 \cos \varphi) \sqrt{2 \cos \varphi - 1}} d\varphi.$$

3. Нехай  $\varphi_0 = 0, \psi(\varphi_0) = 0, \psi'(\varphi_0) = -0,8$ . Підставляючи ці значення в (8), знаходимо, що  $C = -2$  (на Рис. 1 геодезична лінія під номером 3). Тоді за формулою (7):

$$\psi(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{-(1 + \cos \varphi) \sqrt{2 \cos \varphi - 1} - 2 \sqrt{\sin^2 \varphi + 1}}{(3 + 2 \cos \varphi) \sqrt{2 \cos \varphi - 1}} d\varphi.$$

4. Нехай  $\varphi_0 = 0, \psi(\varphi_0) = 0, \psi'(\varphi_0) = -0,3$ . Підставляючи ці значення в (8), знаходимо, що  $C = 1$  (на Рис. 1 геодезична лінія під номером 4). Тоді за формулою (7):

$$\psi(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{-(1 + \cos \varphi) \sqrt{2 + 2 \cos \varphi} + \sqrt{\sin^2 \varphi + 1}}{(3 + 2 \cos \varphi) \sqrt{2 + 2 \cos \varphi}} d\varphi.$$

3. Нехай  $\varphi_0 = 0, \psi(\varphi_0) = 0, \psi'(\varphi_0) = -0,5$ . Підставляючи ці значення в (8), знаходимо, що  $C = -2$  (на Рис. 1 геодезична лінія під номером 5). Тоді за формулою (7):

$$\psi(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{-(1 + \cos \varphi) \sqrt{2 + 2 \cos \varphi} - \sqrt{\sin^2 \varphi + 1}}{(3 + 2 \cos \varphi) \sqrt{2 + 2 \cos \varphi}} d\varphi.$$

Усі отримані формули є досить громіздкими для обчислення. В нашому випадку для обчислення визначених інтегралів ми скористалися формулами Симпсона. Для побудови геодезичних ліній в графічному редакторі AutoCAD необхідно задану змінну  $\varphi$  і визначену відповідно  $\psi$  підставити до рівняння

поверхні (2). На Рис. 2 подано циклічну гвинтову поверхню з отриманими геодезичними лініями, початок яких є в точці  $P(2, 0, 0)$ .

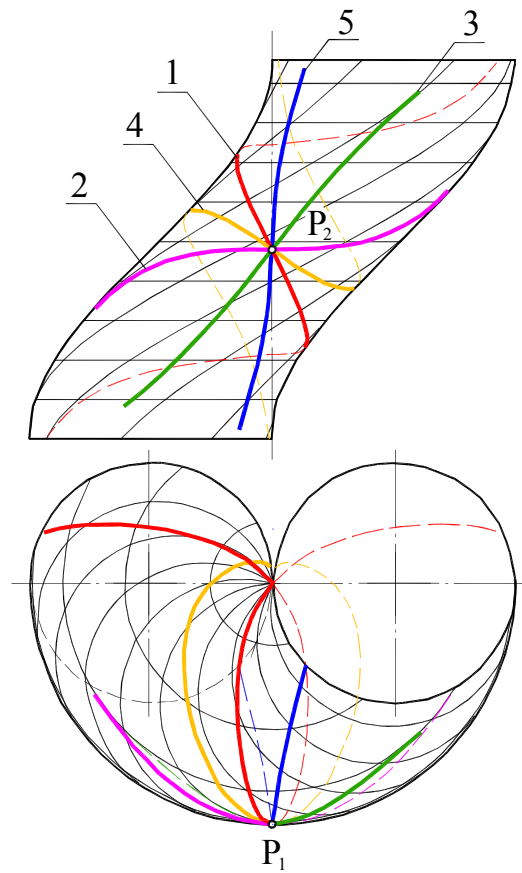


Рис. 1. Комплексне креслення геодезичних ліній на циклічній гвинтовій поверхні

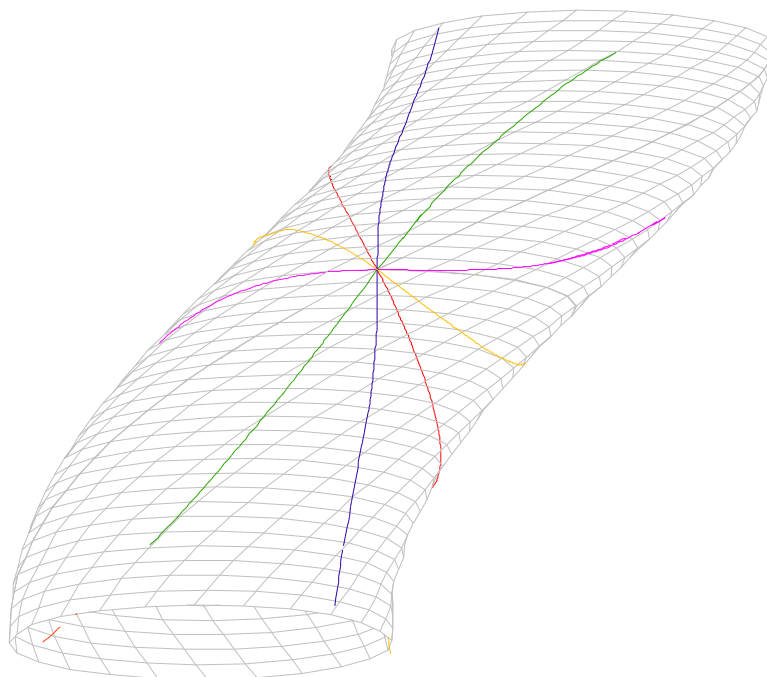


Рис. 2. Геодезичні лінії на циклічній гвинтовій поверхні в графічному редакторі AutoCAD

### Висновки

В роботі шляхом мінімізації відстані між двома точками знайдено рівняння геодезичних ліній циклічної гвинтової поверхні у вигляді інтегралу, а в одному з випадків – в явному вигляді. Для підтвердження отриманих результатів в графічному редакторі AutoCAD було побудовано кілька геодезичних ліній, що виходять з однієї точки.

### Список використаної літератури

1. Спиридонова Н. А. Геодезические линии круговой конической оболочки и их практическое применение. *Альманах современной науки и образования*. Тамбов, 2008. № 12. С. 158 – 161.
  2. Исаева В. Г., Князев Д. Н. Математическая модель композитного баллона, изготовленного непрерывной жгутовой намоткой. *Технические науки в России и за рубежом: материалы IV Междунар. науч. конф.* (г. Москва, январь 2015 г.). Москва 2015. С. 118 – 122.
  3. Кремець Я.С. Геодезичні лінії поверхонь в задачах армування оболонок та інерційного руху матеріальної точки: дис. ... канд. техн. наук 05.05.01 / Національний університет біоресурсів і природокористування України. Київ, 2017. 141 с.
  4. Табакова І.С. Побудова геодезичної лінії гладкої поверхні, що виходить із даної точки у заданому напрямку. *Науковий вісник Мелітопольського державного педагогічного університету ім. Б. Хмельницького*. Мелітополь: МДПУ, 2014. Т. 1. С. 217 – 224.
  5. Пришляк О. Диференціальна геометрія: курс лекцій. К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2004. 68 с.
  6. Ковальова Г.В., Нікітенко О.А., Керницький І.С. Геометричне моделювання геодезичних ліній на циклічній гвинтовій поверхні. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2018. № 3(66). С. 142 – 146.
  7. Люкшин В.С. Теория винтовых поверхностей в проектировании режущих инструментов. М.: Машиностроение, 1968. 371 с.
  8. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления: монография. М.: Мир, 1974. 488 с.
1. Spiridonova N. A. Geodezicheskie linii krugovoy konicheskoy obolochki i ih prakticheskoe primenenie. *Almanah sovremennoy nauki i obrazovaniya*. Tambov, 2008. # 12. S. 158 – 161.
  2. Isaeva V. G., Knyazev D. N. Matematicheskaya model kompozitnogo ballona, izgotovlennoyo nepre-ryivnoy zhgutovoy namotkoy. *Tehnicheskie nauki v Rossii i za rubezhom: materialyi IV Mezhdunar. nauch. konf.* (g. Moskva, yanvar 2015 g.). Moskva 2015. P. 118 – 122.
  3. Kremets Ya.S. Heodezychni linii poverkhon v zadachakh armuvannya obolonok ta inertsiiinoho rukhu materialnoi tochky: dys. ... kand. tekhn. nauk 05.05.01 / Natsionalnyi universytet bioresursiv i pryrodokorystuvannya Ukrainy. Kyiv, 2017. 141 p.
  4. Tabakova I.S. Pobudova heodezychnoi linii hladkoj poverkhni, shcho vykhodyt iz danoi tochky u zadanomu napriamku. *Naukovyi visnyk Melitopolskoho derzhavnoho pedahohichnoho universytetu im. B. Khmelnytskoho*. Melitopol: MDPU, 2014. T. 1. P. 217 – 224.
  5. Pryshliak O. Dyferentsialna heometriia: kurs lektzii. K.: Vydavnycho-polihrafichnyi tsentr Kyivskiy universytet, 2004. 68 s.
  6. Kovalova H.V., Nikitenko O.A., Kernytskyi I.S. Heometrychne modeliuвання heodezychnykh linii na tsyklichnii hvyntovii poverkhni. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu*. 2018. № 3(66). P. 142 – 146.
  7. Lyukshin V.S. Teoriya vintovyih poverhnostey v proektirovanii rezhuschih instrumentov. M.: Mashinostroenie, 1968. 371 p.
  8. Yang L. Lektzii po variatsionnomu ischisleniyu i teorii optimalnogo upravleniya: monograflya. M.: Mir, 1974. 488 p.



УДК 514.18

О.М. СОБОЛЬ, С.Я. КРАВЦІВ  
Національний університет цивільного захисту України

### МЕТОД ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПОКРИТТЯ ЗАДАНИХ ОБЛАСТЕЙ З УРАХУВАННЯМ ОБМЕЖЕНЬ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИДУ

*В даній роботі наведено загальну модель оптимального покриття заданої області з урахуванням обмежень спеціального виду. Зроблено висновок, що дана задача відноситься до класу задач комбінаторної оптимізації, тобто для мінімізації цільової функції необхідно здійснити перебір припустимих варіантів покриття. Розроблено метод та способи геометричного моделювання покриття заданих областей з урахуванням обмежень спеціального виду, основу яких складають метод гілок та меж (побудова та перебір гілок дерева рішень для одержання глобального екстремуму цільової функції), модифікований метод Монте-Карло та метод направленої перебору припустимих місць розміщення початків локальних систем координат об'єктів покриття (знаходження локального екстремуму цільової функції).*

*Ключові слова: покриття, обмеження спеціального виду, модель, метод.*

А.Н. СОБОЛЬ, С.Я. КРАВЦІВ  
Национальный университет гражданской защиты Украины

### МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОКРЫТИЯ ЗАДАНОЙ ОБЛАСТИ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

*В данной работе приведена общая модель оптимального покрытия заданной области с учетом ограничений специального вида. Сделан вывод, что данная задача относится к классу задач комбинаторной оптимизации, то есть для минимизации целевой функции необходимо осуществить перебор допустимых вариантов покрытия. Разработан метод и способы геометрического моделирования покрытия заданных областей с учетом ограничений специального вида, основу которых составляют метод ветвей и границ (построение и перебор ветвей дерева решений для получения глобального экстремума целевой функции), модифицированный метод Монте-Карло и метод направленного перебора допустимых мест размещения начал локальных систем координат объектов покрытия (нахождения локального экстремума целевой функции).*

*Ключевые слова: покрытие, ограничения специального вида, модель, метод.*

O. SOBOL, S. KRAVTSIV  
National university of civil defense of Ukraine

### THE METHOD OF GEOMETRIC MODELING OF THE COVERING OF PROVIDED AREAS WITH A TYPE OF RESTRICTIONS OF SPECIAL TYPE

*The purpose of the work is to develop a method of geometric modeling of the coverage of specified areas, taking into account the restrictions of the special form, which determine the shape and dimensions of the objects of coverage, and also require the membership of the specified areas of the area of the mutual cross-section of the required number of objects of coverage and taking into account limitations from below and above the quantity coverage objects.*

*The paper presents an existing model of optimal coverage of a given area, taking into account the restrictions of a special kind, and its analysis has been carried out. According to the analysis, it is determined that the general model of coverage of the given areas, taking into account the restrictions of the special kind belongs to the class of problems of combinatorial optimization, that is to obtain its solution it is necessary to carry out a review of the acceptable coverage options, and the solution will be the option that provides the minimum target functions. The construction of the method of geometric simulation of coverage of given areas with consideration of the restrictions of the special kind is considered. In order to find the minimum of the target function in the work, it is proposed to construct a decision tree for finding the global minimum, and to find the local minimum, a modified Monte Carlo method or a directed selection of admissible places for the placement of the origin of the local coordinate systems of the coating objects. On the basis of the created method, methods have been developed that take into account the features of the general model of coverage, as well as the limitation of the special type in relation to: the maximum (incomplete) coverage of the sub-regions of a given region; the membership of the specified areas of the area of the mutual intersection of the required number of objects of coverage; taking into account limitations from the bottom and top of the number of objects of coverage. This will allow the development of practical recommendations regarding the coverage of the specified areas by the areas of service of fire and rescue units and security centers, taking into account such special constraints as: taking into account the risk for a person to perish as a result of a fire*

*in a unit time to determine the minimum number of required units and centers; taking into account the ownership of high-risk objects and potentially dangerous objects to the required number of service units and centers in accordance with the number of the call.*

*Keywords: coverings, restrictions of a special kind, model, method.*

### Постановка проблеми

У різних сферах господарювання виникають задачі оптимального покриття, в яких необхідно враховувати обмеження щодо належності елементів заданих областей площі взаємного перетину об'єктів покриття, а також інші обмеження спеціального виду, характерні для конкретної сфери діяльності. Це, наприклад, обмеження, що визначають форму, розміри та кількість (верхня та/або нижня межа) об'єктів покриття. Таким чином, актуальною науково-прикладною задачею є розробка моделі та методу оптимального покриття заданих областей з урахуванням обмежень спеціального виду, що сприятиме вирішенню проблеми, яка пов'язана з розвитком моделей та методів розв'язання класу задач оптимізаційного геометричного проектування.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

У роботі [1] запропоновано метод розв'язання задачі, складовими якого є пошук найменшого нормованого числа пожежних депо та їх потужності, найкращого їх розміщення з точки зору мінімального часу досягнення найвіддаленішої точки району, різної пожежної небезпеки об'єктів, щільності забудови, інвестиційної вартості ділянок під пожежні депо при обмеженні коштів, а також геометричних умов неперетинання. У роботі [2] вперше розроблено метод та способи оптимізаційного покриття заданих областей (однорозв'язний та багаторозв'язний неопуклий багатокутник, ланки ломаних ліній, що належать неопуклому багатокутнику) геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками (опуклі та неопуклі багатокутники, кола). В роботі [3] розроблено загальну модель оптимального покриття заданих областей з урахуванням обмежень спеціального виду та досліджено її особливості, а саме: цільова функція є алгоритмічною, тобто обчислюється в процесі розв'язання задачі; обмеження задачі складаються з нелінійних, дискретних та кусочно-лінійних виразів; визначено кількість обмежень моделі. Дослідження обмежень спеціального виду, які характерні для сфери цивільного захисту, та їх формалізацію наведено в [4-8].

### Формулювання мети дослідження

В даній роботі необхідно розробити метод та способи геометричного моделювання покриття заданих областей з урахуванням обмежень спеціального виду, а також одержати оцінки складності, що характеризують кількість варіантів покриття, які необхідно проаналізувати для одержання екстремуму цільової функції.

### Викладення основного матеріалу дослідження

В роботі [моя Мелітополь] було розроблено загальну модель оптимального покриття заданої області  $S_0(m_0, u_0)$  ( $m_0$  – метричні характеристики,  $u_0$  – параметри розміщення  $S_0(m_0, u_0)$ , ( $u_0 = \{0, 0\}$ ), що являє собою початок глобальної системи координат) з урахуванням обмежень спеціального виду, яка має такий вигляд:

$$\min_W N(m_{c,1}, u_{c,1}, \dots, m_{c,N}, u_{c,N}); \quad (1)$$

де  $W$  :

$$\omega_\Omega(m_{c,i}, m_{c,h}, u_{c,i}, u_{c,h}) \rightarrow 0; \quad (2)$$

$$i = 1, \dots, N-1; h = i+1, \dots, N;$$

$$\omega_\Omega(m_{c,i}, m_{cS_0}, u_{c,i}, u_{cS_0}) \rightarrow 0; \quad (3)$$

$$i = 1, \dots, N; S_0 \cup cS_0 = R^2;$$

$$u_{c,i} \in P_l(x_l, y_l); i = 1, \dots, g; l \in \{1, \dots, N_l\}; \quad (4)$$

$$u_{c,i} \in P_k(x_k, y_k); i = g+1, \dots, N; k \in \{1, \dots, N_k\}; k \neq l;$$

$$\omega_{\Omega} \left( m_{N_k}, m_N, u_0, u_N \right) = S \left( \bigcup_{k=1}^{N_k} v_k(m_k, u_0) \right); \quad (5)$$

$$O_{d,j}(x_{d,j}, y_{d,j}) \in \bigcap_{\mu}^M S_{c,\mu}(m_{c,\mu}, u_{c,\mu}), \quad j=1, \dots, N_d; \quad \mu \in \{1, \dots, N\}; \quad (6)$$

$$m_{c,i} = f(t); \quad i=1, \dots, N; \quad (7)$$

де  $N$  – кількість об'єктів покриття;  $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$ ,  $i=1, \dots, N$  – об'єкти покриття підобластей  $v_k(m_k, u_0)$ ;  $v_k(m_k, u_0)$ ,  $k=1, \dots, N_k$  – підобласті покриття, які являють собою неопуклі багатокутники і належать множині  $V$ ;  $m_{c,i} = \{x_{c,i,1}, y_{c,i,1}, \dots, x_{c,i,n_{c,i}}, y_{c,i,n_{c,i}}\}$ ,  $i=1, \dots, N$  – координати вершин у локальних системах координатах об'єктів покриття  $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$ ,  $i=1, \dots, N$ ;  $u_{c,i} = \{x_{c,i}, y_{c,i}\}$  – параметри розміщення початків локальних систем координат в глобальній системі координат;  $G \subset V$  – підмножина, яка має пріоритет стосовно покриття та розміщення локальних систем координат об'єктів  $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$ ,  $i=1, \dots, N$  та включають в себе підобласті  $g_l(m_l, u_0) \in G$ ,  $l=1, \dots, N_l$ ;  $O_{d,j}(x_{d,j}, y_{d,j})$ ,  $j=1, \dots, N_d$  – точки в глобальній системі координат, які мають належати областям перетину заданої кількості  $M$  об'єктів покриття  $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$ ,  $i=1, \dots, N$ ;  $P_k(x_k, y_k)$  – точки розміщення об'єктів покриття  $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$ ,  $i=1, \dots, N$ , в локальних систем координат, які мають належати підобластям  $v_k(m_k, u_0)$ ,  $k=1, \dots, N_k$ ;  $\omega_{\Omega}(m_{c,i}, m_{c,h}, u_{c,i}, u_{c,h})$  –  $\omega$ -функція, що являє собою площу області перетину об'єктів покриття  $v_k(m_k, u_0)$ ,  $k=1, \dots, N_k$  об'єктами  $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$ ,  $i=1, \dots, N$ ;  $\omega_{\Omega}(m_{c,i}, m_{cS_0}, u_{c,i}, u_{cS_0})$  –  $\omega$ -функція, що являє собою площу області перетину об'єктів покриття  $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$ ,  $i=1, \dots, N$  та  $cS_0(m_0, u_0)$  – доповнення області  $S_0(m_0, u_0)$  до простору  $R^2$ ;  $t$  – параметр, що впливає на метричні характеристики об'єктів покриття  $m_{c,i}$ ,  $i=1, \dots, N$ .

Розглянемо побудову методу геометричного моделювання покриття заданих областей з урахуванням обмежень спеціального виду. Необхідність розробки даного методу обумовлена особливостями загальної моделі оптимального покриття (1)÷(7).

Аналіз загальної моделі покриття заданих областей з урахуванням обмежень спеціального виду свідчить про те, що задача (1)÷(7) відноситься до класу задач комбінаторної оптимізації, тобто для одержання її розв'язку необхідно здійснити перебір припустимих варіантів покриття для знаходження мінімуму цільової функції (1).

Для знаходження глобального екстремуму цільової функції (1) побудуємо дерево рішень, яке має наступні властивості:

1) на кожному рівні дерева рішень мають знаходитись координати точок  $P_{\xi}(x_{\xi}, y_{\xi})$ ,  $\xi=1, \dots, N_{\xi}$ , яким мають належати параметри розміщення локальних (рухомих) систем координат  $X_{c,i}O_{c,i}Y_{c,i}$  об'єктів покриття  $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$ ,  $i=1, \dots, N$ , відносно глобальної системи координат;

2) кількість рівнів дерева рішень дорівнює кількості об'єктів покриття  $N$ , тобто є змінною та визначається в процесі розв'язання задачі покриття;

3) збільшення кількості рівнів дерева рішень припиняється за умови виконання обмежень (2)÷(7);

4) для відтинання безперспективних гілок дерева рішень використовуються відповідні правила;  
5) глобальний екстремум цільової функції (1) визначається після аналізу всіх припустимих варіантів покриття заданої області.

Верхня оцінка кількості гілок дерева рішень (оцінка складності), яку необхідно проаналізувати для знаходження глобального екстремуму цільової функції, дорівнює:

$$O_{1.1} = (N_{\xi})^N; \quad (8)$$

де  $N_{\xi}$  – кількість точок  $P_{\xi}(x_{\xi}, y_{\xi})$  у підобластях  $v_k(m_k, u_0)$ ,  $k = 1, \dots, N_k$ , причому  $N_{\xi} \geq N_k$ .

Таким чином, дерево рішень для розв'язання задачі (1)÷(7) має наступний вигляд:

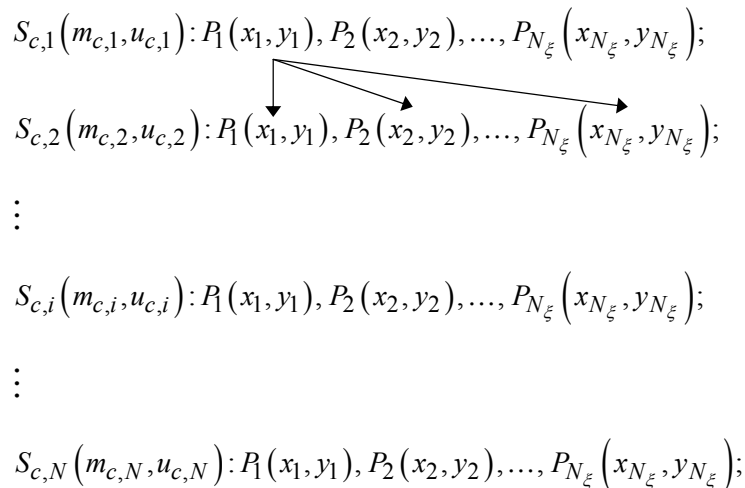


Рис. 1. Дерево рішень для знаходження глобального екстремуму цільової функції (1)

Для відтинання безперспективних гілок дерева рішень (рис. 1) було розроблено наступні правила.

**Правило 1.** Параметри розміщення об'єктів  $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$  та  $S_{c,h}(m_{c,h}, u_{c,h})$ ,  $i \neq h$ ,  $i, h \in \{1, \dots, N\}$ , не можуть одночасно належати одній точці  $P_{\xi}(x_{\xi}, y_{\xi})$ ,  $\xi \in \{1, \dots, N_{\xi}\}$ .

**Правило 2.** Якщо деякий варіант покриття (рис. 2) заданої області  $S_0(m_0, u_0)$  не містить об'єктів  $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$ ,  $i = 1, \dots, N$ , що належать підобластям з пріоритетом  $g_l(m_l, u_0) \in G$ ,  $l = 1, \dots, N_l$ , то такий варіант покриття при визначенні глобального екстремуму цільової функції (1) не розглядається.

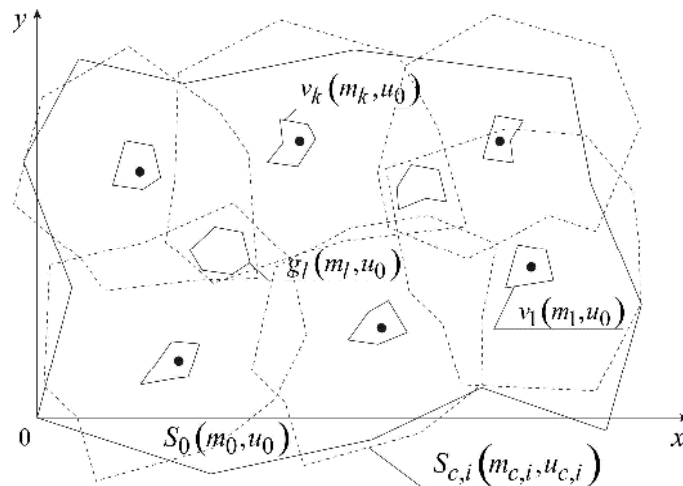


Рис. 2. Геометрична інтерпретація безперспективної гілки дерева рішень

Очевидно, що важливим етапом побудови дерева рішень та розв'язання задачі (1)–(7) є оцінка виконання обмежень (5) та (6), оскільки це дозволяє зупинити формування нових рівнів дерева рішень та визначити кількість об'єктів покриття  $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$ ,  $i = 1, \dots, N$ , на відповідній гілці дерева.

Для того, щоб оцінити належність підобластей  $v_k(m_k, u_0)$ ,  $k = 1, \dots, N_k$ , об'єктам покриття застосовуються наступні способи:

– побудова  $\phi$ -функції [9] для об'єктів  $\bigcup_{i=1}^N S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$  та  $v_k(m_k, u_0)$ ,  $k = 1, \dots, N_k$ , так, як

це наведено на рис. 3. Якщо  $\Phi \left( m_k, m_N, u_0, u_N, \bigcup_{i=1}^N S_{c,i}, \bigcup_{i=1}^N S_{c,i} \right) \geq 0$ ,  $k = 1, \dots, N_k$ , то обмеження (5) виконано.

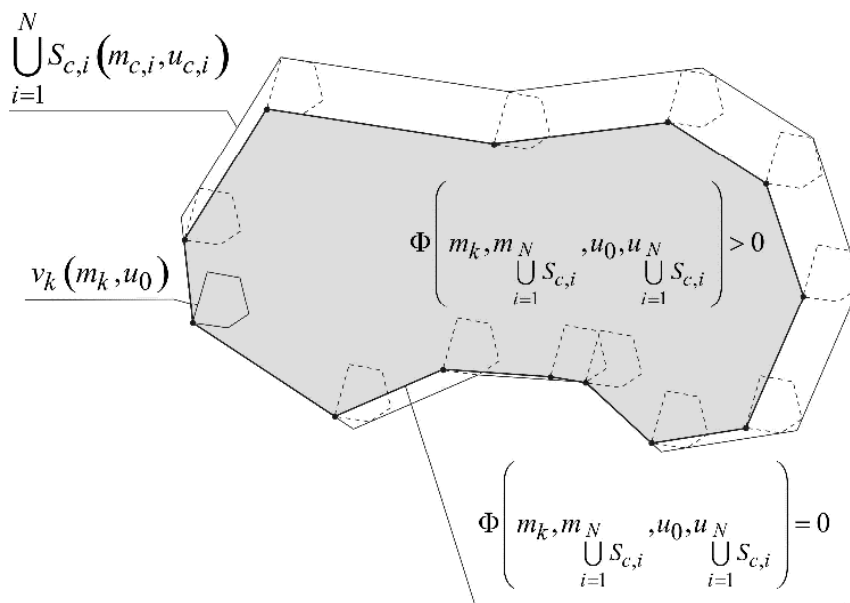


Рис. 3. Геометрична інтерпретація обмеження (5)

– побудова множини точок  $V_{k,\psi}(x_\psi, y_\psi) \in \text{Int } v_k(m_k, u_0)$ ,  $k = 1, \dots, N_k$ ,  $\psi = 1, 2, \dots$ . Для виконання обмеження (5) необхідно, щоб враховувалися наступні умови:

$$V_{k,\psi}(x_\psi, y_\psi) \in \bigcup_{i=1}^N S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i}); \quad \psi = 1, 2, \dots; \quad (9)$$

$$(x_{k,b}, y_{k,b}) \in \bigcup_{i=1}^N S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i}); \quad b = 1, \dots, n_k. \quad (10)$$

Для того, щоб оцінити виконання умов (9) та (10) застосовується спосіб, наведений на рис. 4.

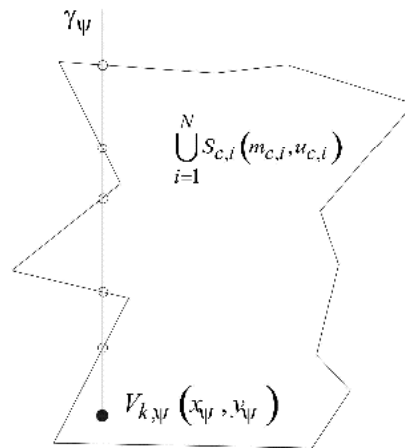


Рис. 4. Належність точки неопуклому багатокутнику

Даний спосіб полягає у тому, що з відповідної точки проводиться промінь (вертикальний або горизонтальний) та обчислюється кількість точок перетину променя та границі неопуклого багатокутника. Якщо кількість точок є непарною, то дана точка належить багатокутнику. Аналогічний спосіб використовується для перевірки обмеження (6).

Недоліком процедури пошуку глобального екстремуму цільової функції (1) за допомогою дерева рішень, наведеного на рис. 1, є те, що необхідно здійснити повний перебір всіх гілок дерева рішень.

Для знаходження локального екстремуму цільової функції розглянемо способи, основою яких є:

- модифікований метод Монте-Карло;
- направлений перебір припустимих місць розміщення початків локальних систем координат

об'єктів покриття  $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Для реалізації способу, який ґрунтується на модифікованому методі Монте-Карло, необхідно задати кількість оптимізаційних серій  $N_{series}$ . Далі необхідно побудувати перший рівень дерева рішень так, як це наведено на рис. 1. На даному рівні випадково обирається точка  $P_{\xi}(x_{\xi}, y_{\xi})$ ,  $\xi \in \{1, \dots, N_{\xi}\}$ , в якій розміщується початок локальної системи координат об'єкта покриття  $S_{c,1}(m_{c,1}, u_{c,1})$ . Здійснюється перевірка виконання обмежень задачі (1)÷(7). Якщо дані обмеження повністю не виконано, то проводиться побудова наступного рівня дерева, в якому вже не враховується точка, що була обраною на попередньому рівні. Таким чином, процес побудови рівнів дерев рішень та випадкового вибору елементів на даних рівнях повторюється до тих пір, доки не будуть виконані всі обмеження задачі.

Якщо для одержаного варіанту покриття виконуються правила 1 та 2, то даний варіант додається до множини  $A = \{A_{\alpha}\}$ ,  $\alpha = 1, \dots$ .

Для кожної серії повторюється процес побудови дерев рішень та одержання варіантів покриття.

Після проведення всіх оптимізаційних серій із множини  $A$  обирається той варіант покриття, для якого значення цільової функції (1) є найменшим.

Загальна структура модифікованого методу Монте-Карло для певної оптимізаційної серії наведена на рис. 5, причому на кожному рівні виділено елемент, який обрано випадково.

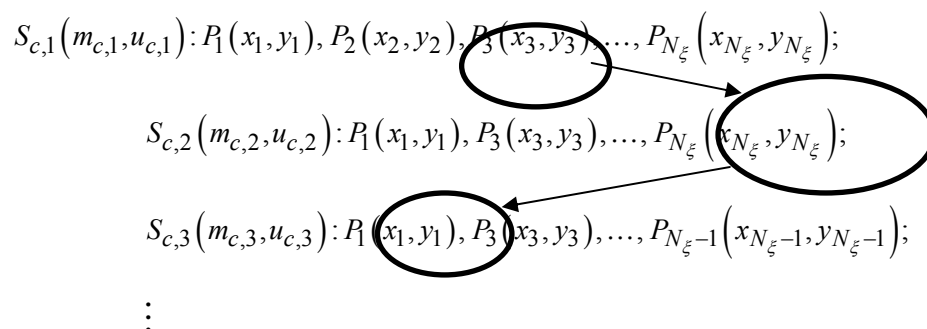


Рис. 5. Схема модифікованого методу Монте-Карло



Оцінка складності даного способу дорівнює:

$$O_{1,2} = N_{series} \cdot N. \quad (11)$$

Недоліком даного способу є те, що можуть існувати випадки, коли задача (1)÷(7) не має розв'язків. Це можливо тоді, коли  $A = \emptyset$ .

Для подолання даного недоліку розглянемо спосіб направленої перебору припустимих місць розміщення початків локальних систем координат об'єктів покриття  $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Для реалізації даного способу, перш за все, здійснюється виконання обмежень (5) та (6).

Існують наступні варіанти забезпечення виконання обмежень (6):

а) початки локальних систем координат об'єктів покриття  $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , обов'язково розміщуються в підобластях  $v_k(m_k, u_0)$ ,  $k \in \{1, \dots, N_k\}$ , яким належать точки  $O_{d,j}(x_{d,j}, y_{d,j})$ ,  $j = 1, \dots, N_d$ .

Виходячи з обмежень (7), що визначають форму та розміри об'єктів покриття, здійснюється визначення припустимих місць розміщення початків локальних систем координат даних об'єктів (рис. 6) для забезпечення виконання обмежень (6).

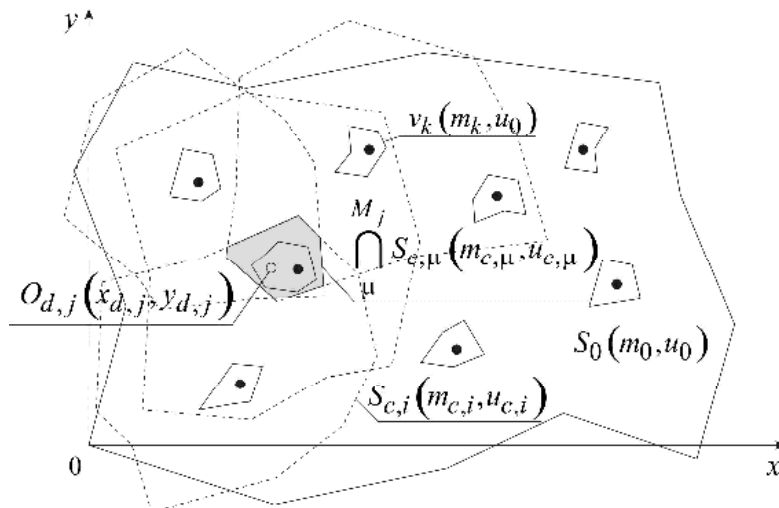


Рис. 6. Виконання умов (6) щодо належності точки  $O_{d,j}(x_{d,j}, y_{d,j})$ ,  $j \in \{1, \dots, N_d\}$ , області перетину  $M_j$  об'єктів покриття

Для вибору місць розміщення початків локальних систем координат об'єктів покриття необхідно використати такі правила:

- початки локальних систем координат, перш за все, мають належати підобластям  $g_l(m_l, u_0) \in G$ ,  $l = 1, \dots, N_l$ ,  $G \subset V$ ;
- здійснюється побудова такого об'єкта покриття, якому належить найбільша кількість підобластей  $v_k(m_k, u_0) \in V$ ,  $k = 1, \dots, N_k$ .

Після виконання обмежень (6) здійснюється реалізація умов (5), при цьому для визначення місць розміщення початків локальних систем координат об'єктів покриття використовуються вищенаведені правила.

б) початки локальних систем координат об'єктів покриття  $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,

розміщуються в областях  $\bigcap_{d=1}^D P_d'$  (рис. 7).

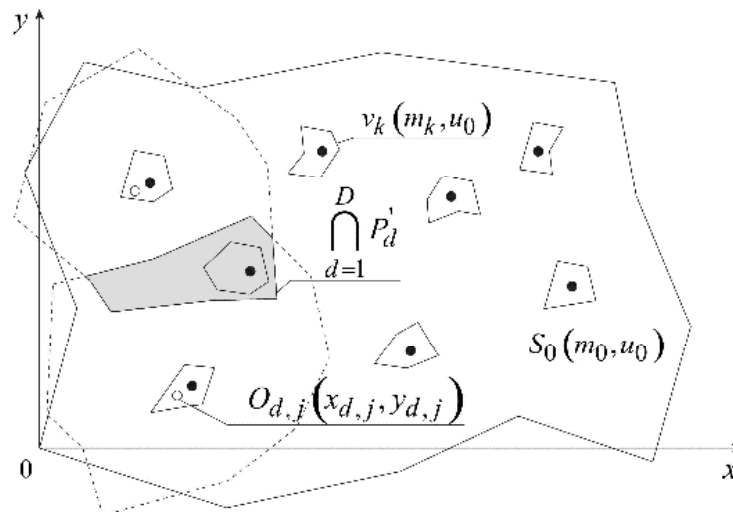


Рис. 7. Побудова області  $\bigcap_{d=1}^D P'_d$

Після розміщення початків локальних систем координат об'єктів покриття в областях  $\bigcap_{d=1}^D P'_d$ , відповідно до вищенаведених правил, здійснюється виконання обмежень (5) та (6) аналогічно попередньому випадку.

Оцінка складності даного способу має наступний вигляд:

$$O_{1.3} = \sum_{j=1}^{N_d} M_j \cdot N_{M_j} + \sum_{i=\sum_{j=1}^{N_d} M_j+1}^N N_{\xi}; \quad (12)$$

де  $N_{M_j}$  – кількість припустимих місць розташування початків локальних систем координат об'єктів покриття для виконання обмежень (6);  $N_d$  – кількість точок  $O_{d,j}(x_{d,j}, y_{d,j})$ ;  $M_j$  – кількість об'єктів покриття, яким має належати точка  $O_{d,j}(x_{d,j}, y_{d,j})$ ;  $N_{\xi}$  – загальна кількість припустимих місць розташування початків локальних систем координат об'єктів покриття.

### Висновки

В даній роботі було розроблено метод та способи геометричного моделювання покриття заданих областей з урахуванням обмежень спеціального виду. Дані метод та способи дозволяють одержати як глобальний, так і локальний екстремум цільової функції, причому їх основу складають метод гілок та меж, модифікований метод Монте-Карло, метод направленої перебору припустимих місць розміщення початків локальних систем координат об'єктів покриття. Одержані оцінки складності, що характеризують кількість варіантів покриття заданої області, які необхідно проаналізувати для одержання екстремуму цільової функції. Подальші дослідження будуть направлені на розробку алгоритмічного та програмного забезпечення методу, проведення комп'ютерного моделювання покриття заданих областей з урахуванням обмежень спеціального виду на прикладах практичних задач у сфері цивільного захисту.

### Список використаної літератури

1. Коссе А.Г. Метод раціонального розміщення пожежних депо при проектуванні і оновленні районів міста: автореф. дис. ... канд. тех. наук : 21.06.02. Харків, 2001. 23 с.
2. Собина В.О. Раціональне покриття заданих областей геометричними об'єктами зі змінними метричними характеристиками: дис. ... канд. тех. наук :05.01.01. Мелітополь, 2012, 22 с.

3. Соболев О.М., Кравців С.Я. Модель покриття заданих областей з урахуванням обмежень спеціального виду : зб. наук. праць «Сучасні проблеми моделювання» :Мелітополь, МДПУ ім. Богдана Хмельницького, 2019, Вип. 14, С 171–178.
4. Кравців С.Я., Соболев О.М., Тютюнник В.В. Оцінювання параметрів впливу на інтегральний пожежний ризик за допомогою факторного аналізу : зб. наук. праць «Пожежна безпека»: Львів, ЛДУБЖД, 2017, Вип. 30 С. 99–104.
5. Kravtsiv S., Sobol O. Development of model of integral fire risk management by correlation-registration analysis : sc. journal : Lviv, NU «LP», 2018, V. 5, № 1 , PP. 81–86. doi : 10.23939/eem2018.08.081.
6. Соболев О.М., Кравців С.Я. Математична модель управління інтегральним пожежним ризиком та її особливості : Вісник ХНТУ : Херсон, ХНТУ, 2017, Вип. 3 (62), Т. 2, С. 317–321.
7. Кравців С.Я. Метод управління інтегральним пожежним ризиком : зб. наук. праць «Пожежна безпека»: Львів, ЛДУБЖД, 2018, Вип. 32 С. 39–44. doi : 10.32447/20786662.32.2018.06.
8. Кравців С.Я. Метод мінімізації інтегрального пожежного ризику за допомогою оптимізації покриття пожежних депо : KPI Science News : Київ, 2018, Вип. 4-2018, С. 30–37. doi : 10.20535/1810-0546.2018.4.141300.
9. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования : наукова думка: Киев, 1986, 268 с.

#### References

1. А.Н. Метод рационального размещения пожарных депо при проектировании и обновлении районов города: автореф. дис. ... канд. техн. наук : 21.06.02. Харьков, 2001. 23 с.
2. Собына В.О. Рациональное покрытие заданных областей геометрическими объектами с переменными метрическими характеристиками: дис. ... канд. техн. наук :05.01.01. Мелитополь, 2012, 22 с.
3. Sobol O.M., Kravtsiv S.Ya. Model pokryttia zadanykh oblastei z urakhuvanniam obmezhen spetsialnogo vydu : zb. nauk. prats» Suchasni problemy modeliuвання» :Melitopol, MDPU im. Bohdana Khmelnytskoho, 2019, Vyp. 14, S 171–178.
4. Kravtsiv S.Ya., Sobol O.M., Tiutiunyk V.V. Otsiniuvannia parametriv vplyvu na intehralnyi pozhezhnyi ryzyk za dopomohoiu faktornoho analizu : zb. nauk. prats «Pozhezhna bezpeka»: Lviv, LDUBZhd, 2017, Vyp. 30 S. 99–104.
5. Kravtsiv S., Sobol O. Development of model of integral fire risk management by correlation-registration analysis : sc. journal : Lviv, NU «LP», 2018, V. 5, № 1 , PP. 81–86. doi : 10.23939/eem2018.08.081.
6. Sobol O.M., Kravtsiv S.Ia. Matematychna model upravlinnia intehralnyi pozhezhnym ryzykom ta yii osoblyvosti : Visnyk KhNTU : Kherson, KhNTU, 2017, Vyp. 3 (62), Т. 2, S. 317–321.
7. Kravtsiv S.Ya. Metod upravlinnia intehralnym pozhezhnym ryzykom : zb. nauk. prats «Pozhezhna bezpeka»: Lviv, LDUBZhd, 2018, Vyp. 32 S. 39–44. doi : 10.32447/20786662.32.2018.06.
8. Kravtsiv S.Ya. Metod minimizatsii intehralnogo pozhezhnogo ryzyku za dopomohoiu optymizatsii pokryttia pozhezhnykh depo : KPI Science News : Kyiv, 2018, Vyp. 4-2018, S. 30–37. doi : 10.20535/1810-0546.2018.4.141300.
9. Stoyan Yu.G., Yakovlev S.V. Matematicheskie modeli i optimizatsionnyie metodyi geometricheskogo proektirovaniya : naukova dumka: Kiev, 1986, 268 s.

УДК 514

Е.В. СТЕГАНЦЕВ, М.А. ГРЕЧНЕВА  
Запорожский национальный университет

### ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ КРИВИЗНОЙ И КРУЧЕНИЕМ СФЕРИЧЕСКОЙ И КОНИЧЕСКОЙ КРИВЫХ

*Статья посвящена таким важным понятиям дифференциальной геометрии как кривизна и кручение кривой. Если кривая лежит на некоторой поверхности, то кривизна и кручение в точках этой кривой связаны некоторым соотношением. В случае сферической кривой это соотношение находится довольно просто и имеет простой вид. В общем случае, задача, связанная с явным получением этого соотношения, является нетривиальной. В статье эта задача решена для случая конической кривой.*

*Поставленная задача решена средствами дифференциальной геометрии. Существенно использованы такие ключевые понятия дифференциальной геометрии как подвижный репер Френе кривой и деривационные формулы подвижного репера кривой. Результаты работы могут быть применены к решению задач дифференциальной геометрии, в частности, к решению вопроса о принадлежности данной кривой данной поверхности.*

*Ключевые слова: векторная функция, натуральные уравнения, кривая, поверхность, сфера, конус, кривизна, кручение, подвижный репер Френе кривой, деривационные формулы Серре-Френе подвижного репера кривой, радиус-вектор, дифференцирование.*

С.В. СТЕГАНЦЕВ, М.О. ГРЕЧНЕВА  
Запорізький національний університет

### ЗАЛЕЖНІСТЬ МІЖ КРИВИНОЮ І СКРУТОМ СФЕРИЧНОЇ І КОНІЧНОЇ КРИВИХ

*Стаття присвячена таким важливим поняттями диференціальної геометрії як кривина і скрут кривої. Якщо крива лежить на деякій поверхні, то кривина і скрут в точках цієї кривої пов'язані деяким співвідношенням. У випадку сферичної кривої це співвідношення знаходиться доволі просто і має простий вигляд. В загальному випадку, задача, яка пов'язана із явним отриманням цього співвідношення, є нетривіальною. В статті ця задача розв'язана для випадка конічної кривої.*

*Поставлена задача розв'язана засобами диференціальної геометрії. Істотно використані такі ключові поняття диференціальної геометрії як рухомий репер Френе кривої і дериваційні формули рухомого репера кривої. Результати роботи можуть бути застосовані при розв'язанні задач з диференціальної геометрії, зокрема, при вирішенні питання про приналежність заданої кривої заданій поверхні.*

*Ключові слова: векторна функція, натуральні рівняння, крива, поверхня, сфера, конус, кривина, скрут, рухомий репер Френе кривої, дериваційні формули Серре-Френе рухомого репера кривої, радіус-вектор, диференціювання.*

E.V. STEGANTSEV, M.A. GRECHNEVA  
Zaporozhye national university

### THE RELATION BETWEEN THE CURVATURE AND THE TORSION OF THE SPHERICAL CURVE AND THE CONIC CURVE

*The article deals with such important concepts of the differential geometry as the curvature, the torsion, the moving Frenet frame of the curve and the derivation formulas of the moving frame of the curve. In the case when the curve belongs to some surface, the relation between the curvature and the torsion at the points of this curve exists. It is easy to find such relation for the spherical curve. The relation has the simple form. In the general case, the problem, connected with the finding of the explicit form of the relation, is not trivial. This problem has been solved in the paper for the case of the conic curve. The obtained expression has the complicated form in the comparison with the corresponding relation for the spherical curve.*

*The posed problem has been solved with the help of the tools of the differential geometry. Initially, the curve has been defined with the help of the vector function of one scalar argument. The important concepts of the differential geometry such as the moving Frenet frame of the curve, the derivation formulas of the moving frame of the curve and the natural equations of the curve have been used. The curvature and the torsion are the coefficients in the Frenet formulas. The curve can be defined identically with the help of the curvature and the torsion. The process of the differentiation and the properties of the Frenet frame have been used for the solving of the posed problem.*

The theorem, which gives the necessary and sufficient condition of the belonging of the given curve to the sphere, has been given with the proof. This condition has the form of the simple equality. The paper contains the example, which shows how to apply this theorem.

The results of the work can be applied for the solving of the different problems of the differential geometry. The example of such problem is the problem, connected with the solving of the question if the given curve belongs to the given surface. Also one can use the results of the article for the finding the relations between the curvature and the torsion at the points of the curve, which belongs to the surface of the other type or for the solving the analogous problems of the differential geometry.

*Keywords:* vector function, natural equations of the curve, curve, surface, sphere, cone, curvature, torsion, the moving Frenet frame of the curve, the derivation formulas of the moving frame of the curve, differentiation.

### Постановка проблемы

Известно, что в случае, когда кривая лежит на поверхности, ее кривизна и кручение связаны некоторым соотношением. В статье приведено утверждение с доказательством, которое дает связь между кривизной и кручением произвольной кривой, лежащей на сферической поверхности. Эта связь задается достаточно простым соотношением. В данной статье средствами дифференциальной геометрии получена связь между кривизной и кручением кривой, лежащей на конусе.

### Анализ последних исследований и публикаций

Понятия кривизны и кручения рассматриваются, например, в [1, 2, 3]. Подвижный репер Френе кривой описан в [7]. В работе [6] приведено понятие деривационных формул Сере-Френе подвижного репера кривой. Задача о нахождении связи между кривизной и кручением кривой, лежащей на сферической поверхности, предложена в книге [4].

### Формулирование цели исследования

Найти зависимость между кривизной и кручением кривой, которая лежит на поверхности сферы, и кривой, которая лежит на поверхности конуса.

### Изложение основного материала исследования

В классической дифференциальной геометрии изучаются регулярные кривые как непрерывные отображения некоторой области числовой прямой в трехмерное евклидово пространство [2,3]. В связи с этим удобным является способ задания кривой при помощи векторной функции одного скалярного аргумента, то есть задание кривой векторно-параметрическим уравнением [1]

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \text{ или } \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

С каждой точкой кривой связывается некоторый ортонормированный подвижный репер. Если этот репер полностью зависит от кривой, то он называется каноническим. Канонический репер кривой называется репером Френе. Началом этого репера является точка кривой, а единичные попарно ортогональные векторы базиса репера направлены соответственно по касательной прямой, главной нормали и бинормали кривой в этой точке. Если кривая параметризована длиной дуги  $S$ , то движения репера  $\{M, \vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3\}$  Френе описываются так называемыми деривационными формулами или формулами Сере-Френе [5]

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{m}_1, \quad \frac{d\vec{m}_1}{ds} = k\vec{m}_2, \quad \frac{d\vec{m}_2}{ds} = -k\vec{m}_1 + \chi\vec{m}_3, \quad \frac{d\vec{m}_3}{ds} = -\chi\vec{m}_2,$$

где  $k$  и  $\chi$  - скалярные функции параметра  $s$ , причем  $k(s) > 0$  при любом  $s$ . Эти функции называются соответственно кривизной и кручением кривой.

Уравнения  $k = k(s), \chi = \chi(s)$  называются натуральными уравнениями кривой. Это название объясняется тем, что кривизна и кручение согласно теореме Бонне определяют кривую однозначно (с точностью до положения в пространстве). Вместе с тем восстановить по натуральным уравнениям параметрические уравнения кривой удастся только в отдельных случаях [7].

Если кривая расположена на поверхности, между ее кривизной и кручением возникает зависимость [6]. Рассмотрим кривые, лежащие на сфере и на конусе.

### Случай сферической кривой.

Для кривой, расположенной на сфере (сферической кривой), такая зависимость имеет достаточно простой вид [4].

**Предложение.** Необходимое и достаточное условие принадлежности кривой сфере имеет вид

$$\frac{\chi}{k} = \left( \frac{k'}{\chi k^2} \right)'$$

**Доказательство.** Сфера, как и любая поверхность трехмерного пространства, может быть задана векторным уравнением  $\bar{R} = \bar{R}(u, v)$ , причем  $\bar{R}(u, v)$  есть векторная функция постоянного модуля, если начало неподвижной системы координат является центром сферы. Таким образом, векторное уравнение сферы имеет вид  $|\bar{R}(u, v)| = const$ . Пусть на сфере задана произвольная кривая, причем будем считать, что она параметризована при помощи длины дуги, то есть натуральным параметром. Внутренние уравнения этой кривой имеют вид

$$\begin{cases} u = u(s), \\ v = v(s), \end{cases}$$

тогда ее внешнее уравнение получим, если подставим  $u$  и  $v$  в векторное уравнение сферы. Таким образом, уравнение

$$|\bar{r}(s)| = |R(u(s), v(s))| = const$$

является векторным уравнением сферической кривой, параметризованной длиной дуги.

Поскольку необходимо найти зависимости между кривизной и кручением этой кривой в произвольной ее точке, а кривизна и кручение являются коэффициентами в формулах Френе кривой, то понятно, что необходимо дифференцировать векторное уравнение кривой. Для этого запишем его в виде

$$(\bar{r}(s))^2 = c, \quad c = const.$$

Применяя правило дифференцирования скалярного произведения векторных функций, получим

$$2(\bar{r}, \bar{r}') = 0.$$

В последнем уравнении и далее параметр  $s$  опускаем для упрощения записи. Поскольку

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{m}_1,$$

то получим

$$(\bar{r}, \bar{m}_1) = 0.$$

Снова дифференцируя последнее тождество по параметру  $s$ , получим равенство

$$(\bar{r}', \bar{m}_1) + (\bar{r}, \bar{m}_1') = 0,$$

которое после применения формул Френе примет вид

$$1 + k(\bar{r}, \bar{m}_2) = 0.$$

Тут учтено, что вектор  $\bar{m}_1$  – единичный и то, что

$$\frac{d\bar{m}_1}{ds} = k\bar{m}_2.$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$(\bar{r}, \bar{m}_2) = -\frac{1}{k}$$

и продифференцируем его по параметру  $s$ . После применения Формул Френе получим следующее равенство

$$(\bar{r}', \bar{m}_2) + (\bar{r}, -k\bar{m}_1 + \chi\bar{m}_3) = \frac{k'}{k^2}$$

или

$$(\bar{m}_1, \bar{m}_2) - k((\bar{r}, \bar{m}_1) + \chi(\bar{r}, \bar{m}_3)) = \frac{k'}{k^2}.$$

Поскольку векторы репера Френе ортогональны и, как раньше было показано,  $(\bar{r}, \bar{m}_1) = 0$ , то последнее равенство равносильно следующему

$$(\bar{r}, \bar{m}_3) = \frac{k'}{\chi k^2}.$$

Наконец, выполнив дифференцирование еще один раз и воспользовавшись свойствами репера Френе, получим



$$(r, -\chi \bar{m}_2) = \left( \frac{k'}{\chi k^2} \right)'$$

Из полученного, учитывая ранее полученное равенство  $(\bar{r}, \bar{m}_2) = -\frac{1}{k}$ , легко записать искомую зависимость между кривизной и кручением сферической кривой в виде

$$\frac{\chi}{k} = \left( \frac{k'}{\chi k^2} \right)'$$

**что и нужно доказать.**

**Например,** по известным кривизне и кручению кривой  $k = \frac{\sqrt{s^2+1}}{5}$ ,  $\chi = \frac{1}{s^2+1}$ , используя найденную зависимость, можно сделать вывод о принадлежности этой кривой сфере. Действительно, после подстановки значений кривизны и кручения, получаем тождество.

**Случай конической кривой.**

Рассмотрим круговой конус с центром в начале координат. Пусть начало координат принадлежит конической кривой. Тогда для радиус-вектора произвольной точки этой кривой имеем

$$\begin{aligned} \bar{r}(s) &= \frac{\bar{m}_1}{1!} s + \frac{k\bar{m}_2}{2!} s^2 + \frac{k'\bar{m}_2 + k(-k\bar{m}_1 + \chi\bar{m}_3)}{3!} s^3 + \dots = \\ &= \left( s - \frac{k^2}{6} s^3 \right) \bar{m}_1 + \left( \frac{k}{2} s^2 + \frac{k'}{6} s^3 \right) \bar{m}_2 + \frac{k\chi}{6} s^3 \bar{m}_3 \end{aligned} \quad (1)$$

Кривая на круговом конусе может быть задана уравнением

$$\frac{(\bar{r}(s), \bar{e})}{|\bar{r}(s)|} = \cos \varphi, \quad (2)$$

где  $\varphi$  - угол между образующей и осью конуса,  $\bar{e}$  - единичный направляющий вектор оси конуса. Обозначив коэффициенты перед векторами в (1) символами  $A, B, C$  соответственно, перепишем уравнение (2) в виде

$$\frac{A(m_1(s), \bar{e}) + B(m_2(s), \bar{e}) + C(m_3(s), \bar{e}))}{\sqrt{f}} = \cos \varphi, \quad (3)$$

где  $f = A^2 + B^2 + C^2$  - функция от параметра  $s$ .

После дифференцирования (3) по параметру  $s$  и применения формул Френе получим

$$\begin{aligned} &A'(m_1(s), \bar{e}) + kA(m_2(s), \bar{e}) + B'(m_2(s), \bar{e}) + B(-km_1(s) + \chi\bar{m}_3, \bar{e}) + \\ &+ C'(m_3(s), \bar{e}) - \chi C(m_2(s), \bar{e})) = (\sqrt{f})' \cos \varphi \end{aligned}$$

или, после приведения подобных слагаемых,

$$(A' - kB)(m_1(s), \bar{e}) + (kA + B' - \chi C)(m_2(s), \bar{e}) + (\chi B + C')(m_3(s), \bar{e}) = (\sqrt{f})' \cos \varphi \quad (4)$$

Снова дифференцируем по параметру  $s$ , применяем формулы Френе и приводим подобные слагаемые

$$\begin{aligned} &\left[ (A' - kB)' - k(kA + B' - \chi C) \right] (m_1(s), \bar{e}) + \\ &+ \left[ k(A' - kB) + (kA + B' - \chi C)' - \chi(\chi B + C') \right] (m_2(s), \bar{e}) + \\ &+ \left[ \chi(kA + B' - \chi C) + (\chi B + C')' \right] (m_3(s), \bar{e}) = (\sqrt{f})'' \cos \varphi \end{aligned} \quad (5)$$

Обозначим коэффициенты перед скалярными произведениями в левой части равенства (4) символами  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ , а в левой части равенства (5) - символами  $\tilde{\tilde{A}}, \tilde{\tilde{B}}, \tilde{\tilde{C}}$  и запишем систему уравнений относительно неизвестных скалярных произведений

$$\begin{cases} A(\bar{m}_1, \bar{e}) + B(\bar{m}_2, \bar{e}) + C(\bar{m}_3, \bar{e}) = \sqrt{f} \cos \varphi, \\ \tilde{A}(\bar{m}_1, \bar{e}) + \tilde{B}(\bar{m}_2, \bar{e}) + \tilde{C}(\bar{m}_3, \bar{e}) = (\sqrt{f})' \cos \varphi, \\ \tilde{\tilde{A}}(\bar{m}_1, \bar{e}) + \tilde{\tilde{B}}(\bar{m}_2, \bar{e}) + \tilde{\tilde{C}}(\bar{m}_3, \bar{e}) = (\sqrt{f})'' \cos \varphi. \end{cases}$$

Решив эту систему по формулам Крамера, и, учитывая, что  $(\bar{m}_1, \bar{e})^2 + (\bar{m}_2, \bar{e})^2 + (\bar{m}_3, \bar{e})^2 = 1$ , получим

$$\begin{vmatrix} \sqrt{f} & B & C \\ (\sqrt{f})' & \tilde{B} & \tilde{C} \\ (\sqrt{f})'' & \tilde{\tilde{B}} & \tilde{\tilde{C}} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A & \sqrt{f} & C \\ \tilde{A} & (\sqrt{f})' & \tilde{C} \\ \tilde{\tilde{A}} & (\sqrt{f})'' & \tilde{\tilde{C}} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A & B & \sqrt{f} \\ \tilde{A} & \tilde{B} & (\sqrt{f})' \\ \tilde{\tilde{A}} & \tilde{\tilde{B}} & (\sqrt{f})'' \end{vmatrix}^2 = \frac{\begin{vmatrix} A & B & C \\ \tilde{A} & \tilde{B} & \tilde{C} \\ \tilde{\tilde{A}} & \tilde{\tilde{B}} & \tilde{\tilde{C}} \end{vmatrix}^2}{\cos^2 \varphi}.$$

Последняя формула и выражает искомую зависимость между кривизной и кручением конической кривой.

### Выводы

В статье решена задача получения связи между кривизной и кручением произвольной кривой, лежащей на конусе средствами дифференциальной геометрии.

### Список использованной литературы

1. Аминов Ю.А. Дифференциальная геометрия и топология кривых. М.: Наука, 1987. 160с.
2. Иванов А.О., Тужилин А.А. Лекции по классической дифференциальной геометрии. Учебные материалы. Кафедра дифференциальной геометрии и приложений МГУ. М., 2004. 233 с.
3. Кованцов Н.И. Дифференциальная геометрия. К., 1973. 375 с.
4. Кованцов Н.И., Зражевская Г.М., Кочаровский В.Г., Михайловский В.И. Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ. Сб. задач. К., 1989. 398с.
5. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. 439с.
6. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974. 276с.
7. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия. Первое знакомство. М.:Изд-во МГУ, 1990. 383с.

### References

1. Aminov Yu.A. Differentsialnaya geometriya i topologiya krivyih. M.: Nauka, 1987. 160s.
2. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Lektsii po klassicheskoy differentsialnoy geometrii. Uchebnyie materialy. Kafedra differentsialnoy geometrii i prilozheniy MGU. M., 2004. 233 s.
3. Kovantsov N.I. Differentsialnaya geometriya. K., 1973. 375 s.
4. Kovantsov N.I., Zrazhevskaya G.M., Kocharovskiy V.G., Mihaylovskiy V.I. Differentsialnaya geometriya, topologiya, tenzornyiy analiz. Sb. zadach. K., 1989. 398s.
5. Mischenko A.S., Fomenko A.T. Kurs differentsialnoy geometrii i topologii. M.: Izd-vo Mosk. un-ta, 1980. 439s.
6. Pogorelov A.V. Differentsialnaya geometriya. M.: Nauka, 1974. 276s.
7. Poznyak E.G., Shikin E.V. Differentsialnaya geometriya. Pervoe znakomstvo. M.:Izd-vo MGU, 1990. 383s.

**ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ**

<b>Nikitenko Oksana</b>	assistant of Department of Civil Engineering, Faculty of Civil and Environmental Engineering, Warsaw University of Life Sciences – SGGW, E-mail: <a href="mailto:onikitenko@ukr.net">onikitenko@ukr.net</a>
<b>Абрамов Геннадій Серафимович</b>	к.ф.-м.н., доцент кафедри судовождения и электронных навигационных систем Херсонской государственной морской академии E-mail: <a href="mailto:gennadabra@gmail.com">gennadabra@gmail.com</a>
<b>Арсенюк Михайло Сергійович</b>	провідний інженер Інституту транспортних систем та технологій НАН України, E-mail: <a href="mailto:ars_mix@ukr.net">ars_mix@ukr.net</a>
<b>Аршава Олена Олександрівна</b>	к.ф.-м.н., доцент, завідувач кафедрою вищої математики Харківського національного університету будівництва та архітектури E-mail: <a href="mailto:elarshava@gmail.com">elarshava@gmail.com</a>
<b>Астіоненко Ігор Олександрович</b>	к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету E-mail: <a href="mailto:astia@ukr.net">astia@ukr.net</a>
<b>Бабасва Олена Вікторівна</b>	Ст. викладач кафедри вищої математики Харківського національного університету будівництва та архітектури E-mail: <a href="mailto:lena-babaeva@yandex.ua">lena-babaeva@yandex.ua</a>
<b>Бабич Богдан Борисович</b>	аспірант Національного технічного університету України «КПІ ім. І. Сікорського» E-mail: <a href="mailto:vybbb@meta.ua">vybbb@meta.ua</a>
<b>Бабка Віталій Миколайович</b>	к.т.н., доцент, доцент кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну Національного університету біоресурсів і природокористування України. Науковий інтерес: рух відрізка за заданими диференціальними характеристиками траєкторій його кінців. E-mail: <a href="mailto:babkavitaliy@ukr.net">babkavitaliy@ukr.net</a>
<b>Бердник Михайло Геннадійович</b>	к.ф.-м.н., доцент кафедри «Програмного забезпечення комп'ютерних систем» ДВНЗ «Національний гірничий університет» E-mail: <a href="mailto:MGB2006@ukr.net">MGB2006@ukr.net</a>
<b>Білова Оксана Вікторівна</b>	к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики НМетАУ E-mail: <a href="mailto:okbelova@rambler.ru">okbelova@rambler.ru</a>
<b>Блажевський Степан Георгійович</b>	к.ф.-м.н., доцент кафедри диференціальних рівнянь, Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича E-mail: <a href="mailto:blgs@ukr.net">blgs@ukr.net</a>
<b>Богацька Анна Сергіївна</b>	студентка кафедри геометричного моделювання та комп'ютерної графіки Харківського національного університету "Харківський політехнічний інститут", E-mail: <a href="mailto:ann.bogatskaya@gmail.com">ann.bogatskaya@gmail.com</a>
<b>Бразалук Юлія Володимирівна</b>	к.ф.-м.н., старший науковий співробітник НДЛ «Моделювання процесів механіки рідини і газу та тепломасообміну» Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара E-mail: <a href="mailto:brazaluk_jv@ukr.net">brazaluk_jv@ukr.net</a>
<b>Браилов Александр Юрьевич</b>	доктор технических наук, старший научный сотрудник, профессор; профессор кафедры начертательной геометрии и инженерной графики Одесской государственной академии строительства и архитектуры
<b>Броварець Олександр Олександрович</b>	к.т.н., доцент, завідувач кафедри інформаційно-технічних та природничих дисциплін, Київський кооперативний інститут бізнесу і права, E-mail: <a href="mailto:brovaretsnau@ukr.net">brovaretsnau@ukr.net</a>

<b>Ванін Володимир Володимирович</b>	д.т.н., професор, декан фізико-математичного факультету КПІ ім. Ігоря Сікорського, E-mail: <a href="mailto:fmf@kpi.ua">fmf@kpi.ua</a>
<b>Васильєв Олексій Миколайович</b>	доктор фізико-математичних наук, професор кафедри теоретичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка; E-mail: <a href="mailto:vasilev@univ.kiev.ua">vasilev@univ.kiev.ua</a>
<b>Васильєва Ілона Василівна</b>	магістр філології, Київський національний університет імені Тараса Шевченка; E-mail: <a href="mailto:ilona@vasilev.kiev.ua">ilona@vasilev.kiev.ua</a>
<b>Вахненко В'ячеслав Олексійович</b>	д.ф.-м.н., головний науковий співробітник НАН України E-mail: <a href="mailto:yakhnenko@ukr.net">yakhnenko@ukr.net</a>
<b>Вірченко Геннадій Анатолійович</b>	д.т.н., професор, професор кафедри нарисної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки КПІ ім. Ігоря Сікорського, E-mail: <a href="mailto:virchga@gmail.com">virchga@gmail.com</a>
<b>Войтик Тетяна Геннадіївна</b>	старший преподаватель кафедри «Математика, фізика, астрономія» Одеського національного морського університета, E-mail: <a href="mailto:beauty5@i.ua">beauty5@i.ua</a>
<b>Воробйов Юрій Сергійович</b>	доктор технічних наук, професор, Інститут проблем машинобудування ім. А. Н. Підгірного НАН України, м. Харків; тел.: (057) 707-64-54; E-mail: <a href="mailto:vorobiev@ipmach.kharkov.ua">vorobiev@ipmach.kharkov.ua</a>
<b>Воронцов Олег Вікторович</b>	к.т.н., доцент, завідувач кафедри нарисної геометрії і графіки Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка, E-mail: <a href="mailto:voronoleg6163@gmail.com">voronoleg6163@gmail.com</a>
<b>Воронцова Дар'я Володимирівна</b>	к.т.н., доцент кафедри геометричного моделювання та комп'ютерної графіки Харківського національного університету "Харківський політехнічний інститут", E-mail: <a href="mailto:dvorontso@gmail.com">dvorontso@gmail.com</a>
<b>Воронцова Ірина Валеріївна</b>	к.пед.н., викладач Полтавського коледжу нафти і газу Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка, E-mail: <a href="mailto:ira061061@gmail.com">ira061061@gmail.com</a>
<b>Вяткин Сергій Іванович</b>	к.т.н, с.н.с інституту автоматики та електрометрії СВ РАН, E-mail: <a href="mailto:sivser@mail.ru">sivser@mail.ru</a>
<b>Говаленков Сергій Сергійович</b>	інженер центру інформаційних технологій Національного університету цивільного захисту України, E-mail: <a href="mailto:govalenkov@ukr.net">govalenkov@ukr.net</a>
<b>Гречнева Марина Александровна</b>	к.ф.-м.н., старший преподаватель кафедри алгебри и геометрии Запорожского национального университета
<b>Грищенко Ірина Юрїївна</b>	к.т.н., доцент, доцент кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну Національного університету біоресурсів і природокористування України. Науковий інтерес: аналітичний опис кривих за заданими умовами. E-mail: <a href="mailto:irgr@yahoo.com">irgr@yahoo.com</a>
<b>Губин Александр Игоревич</b>	к.т.н., доцент кафедри аэрогидромеханики и энергомассопереноса Днепропетровского национального университета имени Олеса Гончара, E-mail: <a href="mailto:gubin_ai@ukr.net">gubin_ai@ukr.net</a>
<b>Гумен Олена Миколаївна</b>	д.т.н., професор кафедри нарисної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки Національного технічного університету України «КПІ ім. І. Сікорського» E-mail: <a href="mailto:gumens@ukr.net">gumens@ukr.net</a>
<b>Данілін Олександр Миколайович</b>	к.т.н., начальник наглядово-профілактичної кафедри Національного університету цивільного захисту України, E-mail: <a href="mailto:danilin7887@gmail.com">danilin7887@gmail.com</a>

<b>Дашкевич Андрій Олександрович</b>	к.т.н., доцент кафедри геометричного моделювання та комп'ютерної графіки Харківського національного університету «Харківський політехнічний інститут», E-mail: <a href="mailto:dashkewich.a@gmail.com">dashkewich.a@gmail.com</a>
<b>Дем'янченко Ольга Пантеліївна</b>	старший викладач кафедри "Природничо-наукових та гуманітарних дисциплін" Азовського морського інституту національного університету "Одеська морська академія", E-mail: <a href="mailto:olgademyanchenko@gmail.com">olgademyanchenko@gmail.com</a>
<b>Дидинская Евгения Олеговна</b>	аспірантка кафедри аэрогидромеханики и энергомассопереноса Днепропетровского национального университета имени Олеса Гончара, E-mail: <a href="mailto:murmurkisa@gmail.com">murmurkisa@gmail.com</a>
<b>Дубинко Владимир Иванович</b>	доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИЦ ХФТИ, E-mail: <a href="mailto:vdubinko@hotmail.com">vdubinko@hotmail.com</a>
<b>Євдокимов Дмитро Васильович</b>	старший научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории моделирования процессов механики жидкости и газа и тепломассообмена Днепропетровского национального университета имени Олеса Гончара. E-mail: <a href="mailto:devd@ukr.net">devd@ukr.net</a>
<b>Іващенко Олена Валеріївна</b>	ст. викл. кафедри прикладної математики та обчислювальної техніки Національної металургійної академії України E-mail: <a href="mailto:sgg1@ukr.net">sgg1@ukr.net</a>
<b>Кагадій Тетяна Станіславівна</b>	д.ф.-м.н., професор кафедри вищої математики, Національний гірничий університет E-mail: <a href="mailto:zolotovaav1@gmail.com">zolotovaav1@gmail.com</a>
<b>Кагадій Тетяна Станіславівна</b>	д.ф.-м.н., професор кафедри вищої математики, Національний гірничий університет E-mail: <a href="mailto:zolotovaav1@gmail.com">zolotovaav1@gmail.com</a>
<b>Калінін Олександр Олександрович</b>	к.т.н., доцент кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки Одеської державної академії будівництва та архітектури E-mail: <a href="mailto:chessking@ukr.net">chessking@ukr.net</a>
<b>Калініна Тетяна Олександрівна</b>	к.т.н., доцент кафедри будівельної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури E-mail: <a href="mailto:kalininat384@gmail.com">kalininat384@gmail.com</a>
<b>Карпик Анна Олександрівна</b>	асистент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 739-39-62; E-mail: <a href="mailto:Karpikann@gmail.com">Karpikann@gmail.com</a>
<b>Каштальян Павел Валентинович</b>	Штурман дальнего плавания, старший помощник капитана, Херсонська державна морська академія; E-mail: <a href="mailto:kashtalyanp@gmail.com">kashtalyanp@gmail.com</a>
<b>Ковальова Галина Володимирівна</b>	к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури; E-mail: <a href="mailto:gkovalova@ukr.net">gkovalova@ukr.net</a>
<b>Комяк Валентина Михайлівна</b>	д.т.н., професор кафедри фізико-математичних дисциплін Національного університету цивільного захисту України (м. Харків) E-mail: <a href="mailto:ykomyak@ukr.net">ykomyak@ukr.net</a>
<b>Комяк Володимир Володимирович</b>	к.т.н., старший викладач кафедри управління в сфері цивільного захисту Національного університету цивільного захисту України, E-mail: <a href="mailto:yvkomyak@ukr.net">yvkomyak@ukr.net</a>
<b>Коротка Єлизавета Андріївна</b>	магістрант кафедри інформаційних систем ДВНЗ «Український державний хіміко-технологічний університет», E-mail: <a href="mailto:crumbeer@gmail.com">crumbeer@gmail.com</a>
<b>Коротка Лариса Іванівна</b>	к.т.н., доцент кафедри інформаційних систем ДВНЗ «Український державний хіміко-технологічний університет», E-mail: <a href="mailto:korliv@hotmail.com">korliv@hotmail.com</a>

<b>Кравців Світлана Ярославівна</b>	викладач-методист відділу науково-методичного забезпечення професійної освіти Науково-методичного центру навчальних закладів сфери цивільного захисту Національного університету цивільного захисту України, E-mail: <a href="mailto:kravtsiv1992@gmail.com">kravtsiv1992@gmail.com</a>
<b>Кресан Тетяна Анатоліївна</b>	к.т.н., завідувач кафедри природничо-математичних дисциплін відокремленого підрозділу НУБіП України "Ніжинський агротехнічний інститут". e-mail: <a href="mailto:tanyakresan@i.ua">tanyakresan@i.ua</a>
<b>Куклін Володимир Михайлович</b>	д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри штучного інтелекту та програмного забезпечення Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, E-mail: <a href="mailto:v.m.kuklin@karazin.ua">v.m.kuklin@karazin.ua</a>
<b>Кязімов Кязім Тахір огли</b>	к.т.н, начальник кафедри спеціалізованих дисциплін пожежної безпеки Академії Міністерства по Надзвичайним Ситуаціям Азербайджанської Республіки, E-mail: <a href="mailto:kazim.kazimov@fhn.gov.az">kazim.kazimov@fhn.gov.az</a>
<b>Лаптев Денис Володимирович</b>	к.ф.-м.н., молодший науковий співробітник ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАНУ, E-mail: <a href="mailto:laptev.denis@mail.ru">laptev.denis@mail.ru</a>
<b>Лебедєва Ольга Олександрівна</b>	старший викладач кафедри нарисної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», E-mail: <a href="mailto:fmf_ikg@ukr.net">fmf_ikg@ukr.net</a>
<b>Ленюк Олег Михайлович</b>	к.ф.-м.н., доцент кафедри диференціальних рівнянь, Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича E-mail: <a href="mailto:O.Lenjuk@chnu.edu.ua">O.Lenjuk@chnu.edu.ua</a>
<b>Литвин Олег Миколайович</b>	д.ф.-м.н., професор, професор кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики Української інженерно-педагогічної академії
<b>Литвиненко Олена Іванівна</b>	к.т.н., доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету E-mail: <a href="mailto:mmkntu@gmail.com">mmkntu@gmail.com</a>
<b>Лісняк Андрій Олександрович</b>	к.ф.-м.н., доцент, завідувач кафедри програмної інженерії Запорізького національного університету, E-mail: <a href="mailto:andrey.lisnyak@gmail.com">andrey.lisnyak@gmail.com</a>
<b>Ляшенко Віктор Павлович</b>	д. т. н, професор, зав.каф. інформатики та вищої математики Кременчуцького національного університету ім.Остроградського, E-mail: <a href="mailto:viklyash2903@gmail.com">viklyash2903@gmail.com</a>
<b>Мазманішвілі Олександр Сергійович</b>	д.ф.-м.н., старший науковий співробітник ННЦ ХФТІ НАНУ E-mail: <a href="mailto:mazmanishvili@gmail.com">mazmanishvili@gmail.com</a>
<b>Мачулянський Віктор Олександрович</b>	аспірант Національного технічного університету України «КПІ ім. І. Сікорського» E-mail: <a href="mailto:vikgwsha@gmail.com">vikgwsha@gmail.com</a>
<b>Мачулянський Олександр Вікторович</b>	к.т.н., доцент Національного технічного університету України «КПІ ім. І. Сікорського» E-mail: <a href="mailto:machulansky@gmail.com">machulansky@gmail.com</a>
<b>Моисеєнко Светлана Викторовна</b>	к.т.н., доцент кафедри вищої математики и математического моделирования Херсонского национального технического университета, E-mail: <a href="mailto:4moiseenko@ukr.net">4moiseenko@ukr.net</a>
<b>Мороз Борис Іванович</b>	д.т.н., проф., проф. кафедри програмного забезпечення комп'ютерних систем Національного технічного університету "Дніпровська політехніка" E-mail: <a href="mailto:moroz.boris.1948@gmail.com">moroz.boris.1948@gmail.com</a>



<b>Назаренко Олег Аскольдович</b>	к.фіз.-мат.н., доцент кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва і архітектури E-mail: <a href="mailto:gelo.fabric@gmail.com">gelo.fabric@gmail.com</a>
<b>Незенко Андрій Йосипович</b>	аспірант кафедри нарисної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки КПІ ім. Ігоря Сікорського, E-mail: <a href="mailto:nezenkoandrej@gmail.com">nezenkoandrej@gmail.com</a>
<b>Нікітіна Ольга Михайлівна</b>	к.ф.-м.н., вчитель математики Чернівецького ліцею №1 математичного та економічного профілів, E-mail: <a href="mailto:O.Lenjuk@chnu.edu.ua">O.Lenjuk@chnu.edu.ua</a>
<b>Панченко Віталій Іванович</b>	інженер отдела информационного обеспечения Одесской государственной академии строительства и архитектуры.
<b>Першина Юлія Ігорівна</b>	д.ф.-м.н., доцент, професор кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики Української інженерно-педагогічної академії
<b>Пилипака Сергій Федорович</b>	д.т.н., професор, завідувач кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну Національного університету біоресурсів і природокористування України E-mail: <a href="mailto:Psf55@ukr.net">Psf55@ukr.net</a>
<b>Побочий Іван Андрійович</b>	д.політ.н., проф. зав. кафедри філософії та політології Національної металургійної академії України E-mail: <a href="mailto:ipobochij@gmail.com">ipobochij@gmail.com</a>
<b>Полєтасв Геннадій Степанович</b>	к.ф.-м.н., доцент по кафедре высшей математики и теоретической механики, доцент кафедры высшей математики Одесской государственной академии строительства и архитектуры E-mail: <a href="mailto:poletayev_gs@ukr.net">poletayev_gs@ukr.net</a>
<b>Поляков Владислав Олександрович</b>	к.т.н., старший науковий співробітник Інституту транспортних систем та технологій Національної академії наук України E-mail: <a href="mailto:pva78125@gmail.com">pva78125@gmail.com</a>
<b>Приходченко Сергій Дмитрович</b>	аспірант, аспірант кафедри програмного забезпечення комп'ютерних систем Національного технічного університету "Дніпровська політехніка" E-mail: <a href="mailto:prykhodchenko.s.d@gmail.com">prykhodchenko.s.d@gmail.com</a>
<b>Редчиц Дмитрий Александрович</b>	к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник отдела новых и нетрадиционных видов транспорта Института транспортных систем и технологий НАН Украины, e-mail: <a href="mailto:redchits_da@ua.fm">redchits_da@ua.fm</a>
<b>Рейда Олександр Миколайович</b>	к.т.н., доцент кафедри програмного забезпечення Вінницького національного технічного університету, E-mail: <a href="mailto:alexreyda@gmail.com">alexreyda@gmail.com</a>
<b>Романов Володимир Олександрович</b>	д.т.н, проф., відділ перетворювачів інформації Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, E-mail: <a href="mailto:brovaretsnau@ukr.net">brovaretsnau@ukr.net</a>
<b>Романюк Олександр Никифорович</b>	д.т.н., професор кафедри програмного забезпечення Вінницького національного технічного університету E-mail: <a href="mailto:rom8591@gmail.com">rom8591@gmail.com</a>
<b>Сидоренко Ганна Юрївна</b>	к.т.н., доцент, доцент кафедри НТУ «ХПІ» E-mail: <a href="mailto:Annsydorenko01@gmail.com">Annsydorenko01@gmail.com</a>
<b>Сікіраш Юлія Євгенівна</b>	асистент кафедри вищої математики та моделювання систем Одеського національного політехнічного університету, E-mail: <a href="mailto:juler@ukr.net">juler@ukr.net</a>
<b>Соболь Олександр Миколайович</b>	д.т.н., с.н.с., професор кафедри управління та організації діяльності у сфері цивільного захисту Національного університету цивільного захисту України, E-mail: <a href="mailto:dr.alexander.sobol@gmail.com">dr.alexander.sobol@gmail.com</a>

<b>Сохацький Анатолій Валентинович</b>	д.т.н., проф., завідувач кафедри транспортних систем та технологій Університету митної справи та фінансів, провідний науковий співробітник Інституту транспортних систем та технологій НАН України, E-mail: <a href="mailto:Sokhatsky_anatoly@ukr.net">Sokhatsky_anatoly@ukr.net</a>
<b>Стеганцев Евгений Викторович</b>	к.ф.-м.н., доцент кафедри алгебри и геометрии Запорожского национального университета
<b>Стехун Анжела Олексіївна</b>	старший викладач кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва і архітектури E-mail: <a href="mailto:angela.stehun@gmail.com">angela.stehun@gmail.com</a>
<b>Сушко Лариса Федорівна</b>	Ст. викл. кафедри фізики та математики Дніпровського державного аграрно-економічного університету E-mail: <a href="mailto:sushko.lf@gmail.com">sushko.lf@gmail.com</a>
<b>Тарасов Андрей Сергеевич</b>	младший научный сотрудник отдела сверхпроводящих левитирующих систем Института транспортных систем и технологий НАН Украины, E-mail: <a href="mailto:tarik2004@gmail.com">tarik2004@gmail.com</a>
<b>Тарасов Сергей Васильевич</b>	к.т.н., заведующий отделом технической механики и энергетических систем Института транспортных систем и технологий НАН Украины, E-mail: <a href="mailto:tsv@westa-inter.com">tsv@westa-inter.com</a>
<b>Тимофієва Надія Костянтинівна</b>	д.т.н., провідний науковий співробітник Міжнародного науково-навчального центру інформаційних технологій та систем НАН та МОН України E-mail: <a href="mailto:Tymnad@gmail.com">Tymnad@gmail.com</a>
<b>Тулупова Лариса Олександрівна</b>	к.ф.-м.н., доцент кафедри прикладної та вищої математики Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка, E-mail: <a href="mailto:lar2dar@gmail.com">lar2dar@gmail.com</a>
<b>Удовик Ірина Михайлівна</b>	к.т.н., доц., зав. кафедри програмного забезпечення комп'ютерних систем Національного технічного університету "Дніпровська політехніка" E-mail: <a href="mailto:udovik.im@gmail.com">udovik.im@gmail.com</a>
<b>Усов Анатолій Васильович</b>	д.т.н., професор, завідувач кафедрою вищої математики і моделювання систем Одеського національного політехнічного університету E-mail: <a href="mailto:Usov-a-v@mbei.opu.ua">Usov-a-v@mbei.opu.ua</a>
<b>Федорина Тетяна Петрівна</b>	к.п.н., завідувач кафедри загально інженерних дисциплін відокремленого підрозділу НУБіП України "Ніжинський агротехнічний інститут". E-mail: <a href="mailto:ged_dep@nati.org.ua">ged_dep@nati.org.ua</a>
<b>Харченко Анатолій Петрович</b>	к.ф.-м.н., професор кафедри вищої математики Харківського національного університету будівництва та архітектури E-mail: <a href="mailto:mathem.kstuca@gmail.com">mathem.kstuca@gmail.com</a>
<b>Хачапуридзе Микола Михайлович</b>	к.т.н., старший науковий співробітник Інституту транспортних систем та технологій Національної академії наук України E-mail: <a href="mailto:itst@westa-inter.com">itst@westa-inter.com</a>
<b>Хомченко Анатолій Никифорович</b>	д. фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри прикладної та вищої математики Чорноморського національного університету імені Петра Могили, E-mail: <a href="mailto:khan@chmnu.edu.ua">khan@chmnu.edu.ua</a>
<b>Царьов Ігор</b>	студент Української інженерно-педагогічної академії
<b>Чернявский Василий Васильевич</b>	д. пед. наук, ректор Херсонской государственной морской академии

<b>Чопоров Сергій Вікторович</b>	к.т.н., доцент, доцент кафедри програмної інженерії Запорізького національного університету, E-mail: <a href="mailto:s.choporovff@znu.edu.ua">s.choporovff@znu.edu.ua</a>
<b>Чопорова Оксана Володимирівна</b>	аспірант кафедри програмної інженерії Запорізького національного університету, E-mail: <a href="mailto:o.choporova@gmail.com">o.choporova@gmail.com</a>
<b>Чурилович Інна Сергіївна</b>	аспірант Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, E-mail: <a href="mailto:brovaretsnau@ukr.net">brovaretsnau@ukr.net</a>
<b>Швачич Геннадій Григорович</b>	д.т.н., проф. зав. кафедри прикладної математики та обчислювальної техніки Національної металургійної академії України E-mail: <a href="mailto:sgg1@ukr.net">sgg1@ukr.net</a>
<b>Швецова Елена Владимировна</b>	старший преподаватель кафедры интеллектуальных информационных технологий Брестского государственного технического университета, E-mail: <a href="mailto:helengood@gmail.com">helengood@gmail.com</a>
<b>Шинкарик Микола Іванович</b>	к.ф.-м.н., доцент кафедри економіко-математичних методів, перший проректор Тернопільського національного економічного університету, E-mail: <a href="mailto:O.Lenjuk@chnu.edu.ua">O.Lenjuk@chnu.edu.ua</a>
<b>Шпорта Анна Григорівна</b>	державний вищий навчальний заклад НТУ «Дніпровська політехніка», асистент кафедри вищої математики, Дніпро, Україна, E-mail: <a href="mailto:shportaanna@ukr.net">shportaanna@ukr.net</a>
<b>Шуть Васильй Николаевич</b>	к.т.н., доцент кафедри интеллектуальных информационных технологий Брестского государственного технического университета, E-mail: <a href="mailto:luckingbrest@gmail.com">luckingbrest@gmail.com</a>
<b>Щербина Ірина Володимирівна</b>	к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики НМетАУ E-mail: <a href="mailto:sherbinaiv@ukr.net">sherbinaiv@ukr.net</a>
<b>Яковенко Олеся Олегівна</b>	студентка Вінницького національного технічного університету, E-mail: <a href="mailto:olesjayakovenko@gmail.com">olesjayakovenko@gmail.com</a>
<b>Яценко Станіслав Антонович</b>	к.ф.-м.н., доцент кафедри кораблеводіння і штурманського озброєння інституту Військово-Морських Сил Національного університету «Одеська морська академія» E-mail: <a href="mailto:poletayev_gs@ukr.net">poletayev_gs@ukr.net</a>

# **ВІСНИК**

## **Херсонського національного технічного університету**

Відповідальний за випуск	Хомченко Анатолій Никифорович, д.ф.-м.н., професор, заслужений діяч науки і техніки України
Технічний редактор	Литвиненко Олена Іванівна к.т.н., доцент
Макетування	Омельчук А.А.

Свідоцтво про державну реєстрацію засобу масової інформації –  
серія КВ № 17371-6141 от 17.12.2010

Підписано до друку 29.08.2019 р. Формат 60x84/8. Папір офсетний.  
Ум. друк. аркушів 35,57. Замовлення № 12. Тираж 120 прим.

Матеріали друкуються в авторській редакції.  
Відповідальність за достовірність даних, зазначених у статтях,  
несуть їх автори.

© Херсонський національний технічний університет 2019

Видавництво та друк: «ОЛДІ-ПЛЮС»  
73034, м. Херсон, вул. Паровозна, 46-а  
E-mail: office@oldiplus.com  
Свід. ДК No 6532 від 13.12.2018 р.